

# Mecânica – Dinâmica II

Esmerindo Bernardes <sup>1</sup>

L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA  
Departamento de Física e Ciência dos Materiais  
Instituto de Física de São Carlos  
Universidade de São Paulo

1 de Junho de 2015

<sup>1</sup>email: [sousa@ifsc.usp.br](mailto:sousa@ifsc.usp.br)

---

# Conteúdo

|          |                                      |           |
|----------|--------------------------------------|-----------|
| <b>3</b> | <b>Energia e leis de conservação</b> | <b>1</b>  |
| 3.1      | Trabalho . . . . .                   | 1         |
| 3.1.1    | Exercícios . . . . .                 | 3         |
| 3.2      | Energia cinética . . . . .           | 3         |
| 3.2.1    | Exercícios . . . . .                 | 4         |
| 3.3      | Energia potencial . . . . .          | 4         |
| 3.3.1    | Exercícios . . . . .                 | 8         |
| 3.4      | Energia mecânica . . . . .           | 9         |
| 3.4.1    | Exercícios . . . . .                 | 12        |
| 3.5      | Períodos . . . . .                   | 12        |
| 3.5.1    | Exercícios . . . . .                 | 16        |
| 3.6      | Comentários gerais . . . . .         | 16        |
| <b>A</b> | <b>Coordenadas polares</b>           | <b>19</b> |



# Capítulo 3

## Energia e leis de conservação

### 3.1 Trabalho

Nós temos uma experiência cotidiana em lidar com forças. Temos uma idéia clara que é mais fácil fazer um pingüim de geladeira, feito de gesso e mal acabado, deslizar sobre uma mesa do que deslizar um monitor de computador. Também sabemos que é mais cansativo transportar o monitor escada acima, onde este cansaço é (no mínimo) proporcional à distância percorrida. A questão que devemos responder é: como quantificar esta nossa noção cotidiana acerca do nosso esforço quando debatemos com uma determinada força? Em outras palavras, como podemos combinar força e deslocamento, dois vetores, para produzirmos um número, um escalar, que possa ser usado para quantificar nosso esforço? Apelando para a simplicidade, podemos tentar um produto escalar  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  entre a força  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  e o deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  para quantificar nosso esforço num pequenino trecho de uma trajetória. Somando todas estas contribuições infinitesimais ao longo de uma determinada trajetória entre as posições  $A$  e  $B$ ,

$$\Delta W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.1)$$

obtemos o número  $\Delta W$ , denominado de **trabalho**. Note o surgimento do conceito de integral: o produto escalar  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  contém o vetor força em algum ponto da trajetória, o qual possui um valor finito, e o vetor deslocamento, o qual é sempre tangente à trajetória e de intensidade infinitesimalmente pequena. Em princípio este produto escalar tende a zero. No entanto, para cobrirmos um trecho finito da trajetória, precisamos somar infinitos produtos escalares como este  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Isto é

a essência do conceito de integral. Dizemos que o número  $W_{AB}$  em (3.1) representa o trabalho associado à força  $\mathbf{F}$  durante o movimento iniciado em  $A$  e terminado em  $B$ , ao longo de uma determinada trajetória descrita parametricamente pelo vetor posição  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Esta trajetória pode ter sido produzida pela força resultante  $\mathbf{F}$ , através da segunda lei de Newton, ou simplesmente ter sido escolhida (neste caso um objeto está sendo transportado na presença de uma força).

Algumas observações importantes sobre como calcular o trabalho usando a integral (3.1): (i) os limites de integração  $A$  e  $B$  representam as posições inicial  $A = \mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$  em  $t = t_0$  e final  $B = \mathbf{r}(t_1) = (x_1, y_1, z_1)$  em  $t = t_1$ , sobre a trajetória  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ; (ii) a força pode ser uma função da posição em geral, como a força elástica, por exemplo; (iii) não podemos esquecer que o produto escalar em (3.1) pode ser efetuado de duas formas, através de coordenadas,

$$\begin{aligned} \Delta W_{AB} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy + \int_A^B F_z dz, \end{aligned} \quad (3.2)$$

bem como através de normas (comprimentos),

$$\Delta W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \cos \theta F dr, \quad (3.3)$$

com  $F = \|\mathbf{F}\|$ ,  $dr = \|d\mathbf{r}\|$  e  $\theta$  sendo o ângulo entre o vetor força e o vetor deslocamento. Não podemos esquecer que tanto o módulo  $F$  da força quanto o ângulo  $\theta$  podem depender da posição. Cada situação exigirá a escolha de uma destas duas maneiras de calcular o trabalho que tornará o cálculo o mais simples possível.

Podemos notar que quanto maior a intensidade da força, maior o trabalho. Em uma dimensão, digamos ao longo do eixo  $X$ , qual é a interpretação geométrica do trabalho (3.1)? É a mesma interpretação geométrica de uma integral, ou seja, é a área abaixo da curva  $F_x(x)$ . Muito bem! Isto é importante, pois há muitas situações reais onde a força é unidimensional e conhecemos somente seu gráfico em função da posição. Mesmo não tendo uma expressão analítica para  $F(x)$ , a qual é absolutamente necessária para efetuarmos a integral (3.1), podemos calcular, aproximadamente, o valor da área abaixo da curva  $F_x(x)$  usando técnicas geométricas. No entanto, lidaremos aqui apenas com situações onde temos as devidas expressões analíticas para as componentes do vetor força. Vejamos alguns exemplos.

### Força elástica

Considere um sistema composto por um único corpo de massa  $m$ , o qual está em movimento uniforme com uma velocidade  $\vec{v} = v\mathbf{i}$ . Suponha que uma força elástica externa  $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$  (lei de Hooke) comece a agir neste corpo no instante  $t = 0$  ( $x = 0$ ). Note que estamos usando um sistema de coordenadas ortonormal no qual a massa  $m$  está sendo localizada por  $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ . Conseqüentemente, o vetor deslocamento infinitesimal (a diferencial do vetor posição) é  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$ . Nossa tarefa é calcular o trabalho feito por esta força elástica (uma força externa) ao longo da trajetória retilínea iniciando em  $x = 0$  [ponto  $A = (0, 0, 0)$ ] e terminando em  $x = l$  [ponto  $B = (l, 0, 0)$ ], sendo  $l$  a distância máxima percorrida pela massa  $m$  até parar (amplitude). Usando (3.2), o trabalho correspondente é  $\Delta W = -kl^2/2$  (Faça o item i do Exercício 1). Note que este trabalho é proporcional à constante de mola  $k$  e à amplitude  $l$ , mas é independente da massa  $m$ . Quanto maior a constante de mola (mola mais dura), maior o trabalho. Quanto maior a amplitude, maior o trabalho. No entanto, o trabalho é o mesmo para qualquer massa, fato este que está em desacordo com a nossa experiência diária.

### Força peso

Considere novamente um sistema formado por uma única massa  $m$  mantida em repouso a uma altura  $h$  próxima à superfície da Terra. Portanto, de acordo

com a gravitação Newtoniana, esta massa  $m$  está sujeita a uma força constante,  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$  (o vetor  $\mathbf{k}$  aponta do centro da Terra para a superfície). Note que estamos usando um sistema de coordenadas ortonormal no qual a massa  $m$  está localizada por  $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$ . Conseqüentemente, o vetor deslocamento infinitesimal (a diferencial do vetor posição) é  $d\mathbf{r} = dz\mathbf{k}$ . O trabalho efetuado por esta força externa, calculado pela definição (3.2), para levar a massa  $m$  de volta à superfície é  $\Delta W = +mgh$  (Faça o item i do Exercício 2). Desta vez, o trabalho depende não somente da distância percorrida, mas também da massa  $m$ .

Note que, devido ao produto escalar presente na definição de trabalho (3.1), o qual é nulo para vetores perpendiculares, mantendo a força gravitacional na vertical, podemos imaginar uma trajetória horizontal na qual a força gravitacional não realiza trabalho. Embora isto também esteja em desacordo com nossa experiência cotidiana, temos aqui um resultado importante acerca da força gravitacional: o trabalho realizado por ela independe da trajetória escolhida. O trabalho realizado pela força gravitacional depende apenas da distância vertical correspondente ao deslocamento da massa  $m$ .

### Potência

Quais são as dimensões de trabalho? De acordo com a definição (3.1), trabalho tem as mesmas dimensões de força vezes distância, ou seja,  $[W] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$ . Estas unidades receberam o nome de Joule ( $\text{J} = \text{Nm}$ ). Note também que o Joule tem as mesmas dimensões do produto massa por velocidade ao quadrado. Aviso importante: veremos na próxima seção que o Joule é a unidade de “energia” no sistema MKS. Entretanto, trabalho não é energia, ou seja, não é correto afirmar que um corpo tem trabalho. Trabalho é um processo de troca de energia (como veremos adiante). Assim, é correto dizer que um corpo realiza trabalho ao se movimentar na presença de uma força.

Pense na seguinte situação: duas máquinas  $M_1$  e  $M_2$  são usadas para elevar (adiabaticamente) uma massa  $m$  a uma altura  $h$  acima da superfície da Terra. Como vimos anteriormente, ambas realizam a mesma quantidade de trabalho:  $mgh$ . No entanto, observa-se que a máquina  $M_2$  leva menos tempo para executar esta tarefa. Isto significa que esta máquina  $M_2$  consegue trocar mais “energia”

por unidade de tempo através do mecanismo “trabalho”. Sendo trabalho um mecanismo de troca de energia, então é conveniente definirmos uma taxa de variação temporal do trabalho realizado. Em um certo intervalo de tempo  $dt$ , um corpo é deslocado por  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  sob a ação de uma força  $\mathbf{F}$ . O trabalho infinitesimal correspondente é  $dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt$ . Assim, podemos definir a taxa de variação temporal

$$\mathbb{P} = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.4)$$

Esta taxa temporal da variação de energia é denominada de **potência**. A unidade de potência em MKS é o Watt ( $W=J/s$ ). Você já reparou que a sua conta de luz registra o seu consumo em kWh (kilowatt-hora)?  $1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$ . Portanto, você paga pela energia fornecida e não pela potência consumida.

### 3.1.1 Exercícios

#### Exercício 1

(i) Mostre que o trabalho (3.1) realizado pela força elástica  $\mathbf{F} = -kx \mathbf{i}$  durante o deslocamento de uma massa  $m$ , localizada por  $\mathbf{r} = x \mathbf{i}$ , desde  $x_1 = 0$  (velocidade  $\mathbf{v}_1 = v_0 \mathbf{i}$ ) até  $x_2 = l$  (amplitude; velocidade nula  $\mathbf{v}_2 = 0$ ) é  $\Delta W = -kl^2/2$ . Calcule também o trabalho realizado pela força elástica no sentido inverso (volta). Agora calcule o trabalho total realizado na trajetória fechada (ida e volta). (ii) Mostre também que o trabalho realizado na ida é igual à variação de energia cinética  $T_2 - T_1$  [veja (3.5) e (3.6)]. Use o Teorema 2 para determinar a velocidade final (em  $x_1 = 0$ ) na volta. Esta velocidade final é igual à inicial? Justifique.

#### Exercício 2

(i) Mostre que o trabalho (3.1) realizado pela força gravitacional (na superfície da Terra)  $\mathbf{F} = -mg \mathbf{j}$  durante o deslocamento de uma massa  $m$ , localizada por  $\mathbf{r} = y \mathbf{j}$ , desde  $y_1 = 0$  (velocidade inicial  $\mathbf{v}_1 = v_0 \mathbf{j}$ ) até  $y_2 = h$  (velocidade nula  $\mathbf{v}_2 = 0$ ) é  $\Delta W = -mgh$ . Calcule também o trabalho realizado pela força gravitacional no sentido inverso (volta). Agora calcule o trabalho total realizado na trajetória fechada (ida e volta). (ii) Mostre também que o trabalho realizado na ida é igual à variação de energia cinética  $T_2 - T_1$  [veja (3.5) e (3.6)].

## 3.2 Energia cinética

De acordo com os dois exemplos apresentados na seção anterior, a integral (trabalho) definida em (3.1) quantifica razoavelmente nosso esforço em lidar com forças, embora produza alguns fatos em desacordo com nossa experiência cotidiana, como o trabalho nulo numa trajetória perpendicular à força peso. No entanto, veremos que a definição (3.1) é muito mais importante que uma simples quantificação do nosso esforço usual ou do custo de produzir um determinado movimento. Primeiramente, supondo que a trajetória é foi criada pela própria força em questão, podemos usar a segunda lei de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  para re-escrever a integral (3.1), a qual é uma integral na posição, numa integral na velocidade  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  (Faça o Exercício 3),

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{v_A}^{v_B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Isto significa que podemos calcular trabalho através do módulo do vetor velocidade (velocidade escalar), calculado apenas nos extremos da trajetória percorrida. Este é um resultado muito importante devido à sua praticidade de evitar a resolução de integrais. Tão importante que iremos denominar a quantidade

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \|\mathbf{v}\|, \quad (3.6)$$

de **energia cinética**. Note que esta energia cinética é uma quantidade inerente ao corpo de massa  $m$  com um vetor velocidade  $\mathbf{v}$ . Note também que as dimensões de energia cinética são as mesmas de trabalho,  $[T] = ML^2T^{-2}$ . Assim, podemos enunciar o resultado (3.5) na forma de um teorema:

#### Teorema 2 (Energia cinética)

Quando o trabalho realizado em um sistema produz modificações na velocidade, então

$$\Delta W = \Delta T. \quad (3.7)$$

Vejamos algumas aplicações deste teorema. Vamos considerar novamente o sistema formado por uma massa  $m$  na presença de uma força elástica  $\mathbf{F} = -kx \mathbf{i}$  produzida por uma mola ideal. A massa

$m$  tem velocidade  $\mathbf{v}_A = v_0 \mathbf{i}$  em  $x = 0$  (ponto  $A$  da trajetória). Ao atingir a posição  $x = l$  (ponto  $B$ ; distensão máxima; velocidade nula), a massa  $m$  deve retornar. Retorno significa inverter o sentido do vetor velocidade e isto significa que a velocidade precisa ser nula em  $x = l$ ,  $\mathbf{v}_1 = 0$ . O trabalho realizado pela força elástica nesta trajetória (ida de  $x = 0$  para  $x = l$ ) é  $\Delta W = -kl^2/2$ , como calculado anteriormente. Portanto, usando o Teorema 2, a velocidade inicial (em  $x = 0$ ) deve ser  $v_0 = \omega_0 A$ ,  $\omega_0^2 = k/m$  (Faça os itens ii dos Exercícios 1–2).

Este sistema massa-mola ainda pode nos ensinar muito mais. O trabalho realizado pela força elástica é negativo no trajeto de ida (de  $x = 0$  até  $x = l$ ). Então estamos confirmando que uma força externa realiza trabalho sobre a massa  $m$  e produz uma alteração na energia cinética dela, isto é, altera a sua velocidade. Neste exemplo que estamos considerando, a energia cinética diminuiu, passou de  $mv_0^2/2$  para 0, com  $v_0 = \omega_0 A$ . Portanto, a massa  $m$  perdeu energia cinética. Isto justifica interpretarmos o trabalho como sendo um processo de transferência de energia. Mas a massa  $m$  perde energia para quem? Além da massa, temos apenas a mola ideal de constante  $k$  neste sistema. Então é razoável imaginar a existência um mecanismo de troca de energia entre a massa  $m$  e a mola ideal  $k$ . Como esta energia é armazenada na mola? Embora a mola apresente movimentos internos (compressão e distensão), ela não se move como um todo. Então esta energia armazenada na mola não pode ser na forma cinética. Esta nova modalidade de energia (energia potencial), a qual depende da disposição espacial da mola, será discutida na próxima seção.

Algumas observações importantes. Inicialmente dissemos que o trabalho serve razoavelmente bem para quantificar nossos esforços em nossas experiências cotidianas. Na verdade, estamos vendo através destes exemplos simples que a definição (3.1) nos revela algumas surpresas que estão em desacordo ao nosso senso comum. Por exemplo, ao transportarmos um objeto perpendicularmente à força gravitacional nas proximidades da superfície da Terra, certamente ficamos exaustos. Então temos a sensação de termos realizado “trabalho”. No entanto o trabalho (3.1) é nulo nesta condição. Também sentimos que estamos realizando trabalho ao mantermos um objeto em equilíbrio a uma certa altura, como um halterofilista mantendo pesos em equilíbrio. No entanto, pelo Teorema 2, não

havendo modificações na energia cinética, não há trabalho. Também é surpreendente que o trabalho realizado em um sistema possa ser calculado usando-se somente o módulo do vetor velocidade (velocidade escalar). Isto significa que o trabalho é nulo em um movimento circular uniforme, pois o módulo do vetor velocidade é constante. Evidentemente, todas as forças externas agindo numa massa  $m$  em movimento circular são perpendiculares ao deslocamento (tangente à trajetória circular). Desta forma, a definição (3.1) de trabalho em mecânica é bem diferente da nossa noção cotidiana de trabalho, embora ela nos tenha servido como inspiração.

Algo que realmente não podemos fazer confusão: trabalho não é uma modalidade de energia. Trabalho é um mecanismo de troca de energia. Nesta troca de energia pelo mecanismo de trabalho (3.1), há variação de energia cinética (Teorema 2). Veremos mais adiante que calor também é um mecanismo de troca de energia envolvendo variação da energia interna (proporcional à temperatura, a qual está ligada à energia cinética média). Naturalmente, os mecanismos de troca de energia (trabalho, calor, etc.) possuem as mesmas unidades de energia e isto nos leva a interpretar (erroneamente) estes mecanismos como energia. Até mesmo na etimologia (grega e latina) da palavra energia, força em ação ou trabalho interno, já aparece a noção de trabalho. A única quantidade que temos até o momento que pode ser denominada de energia, é a energia cinética (3.6). Então o Joule ( $J=N\ m$ ) é uma unidade de energia no sistema MKS. As dimensões de energia, usando (3.6), são  $[T] = ML^2T^{-2}$ . É importante mantermos em mente estas dimensões de energia. Curiosidade: a energia cinética da Terra é cerca de  $3 \times 10^{33}$  J. A energia cinética de um atleta corredor é aproximadamente  $4 \times 10^3$  J.

### 3.2.1 Exercícios

#### Exercício 3

Faça explicitamente todas as passagens omitidas em (3.5). Use a segunda lei de Newton e uma integração por partes.

## 3.3 Energia potencial

Além da energia cinética, há um outro tipo de energia relacionada com a definição (3.1) de tra-



balho. Como sempre, vamos utilizar novamente a força elástica e a força gravitacional para aprendermos. Nosso sistema será formado por uma única massa  $m$ . Neste sistema atuará uma força externa (elástica ou gravitacional). Nós calculamos anteriormente (refaça o Exercício 1) o trabalho realizado pela força elástica sobre a massa  $m$  no trajeto de ida (de  $x_1 = 0$  até  $x_2 = l$ ). Vamos denotar este trabalho por  $\Delta W_{12} = -kl^2/2$ . Note que a energia cinética da massa  $m$  diminuiu. O trabalho realizado no caminho inverso, de  $x_2 = A$  para  $x_1 = 0$  é  $\Delta W_{21} = +kl^2/2$ . Note que neste caso, a energia cinética da massa  $m$  aumentou. Portanto, o trabalho total realizado pela força elástica é nulo,  $\Delta W = \Delta W_{12} + \Delta W_{21} = 0$ . Em outras palavras, o trabalho realizado pela força elástica na massa  $m$  ao longo de uma trajetória fechada (ida e volta) é nulo. Este mesmo resultado também é válido para a força gravitacional (refaça o Exercício 2).

Se há forças que produzem um trabalho nulo em trajetórias fechadas, isto significa que o trabalho realizado por estas forças dependem apenas dos pontos extremos das trajetórias. Este é o resultado mais importante a respeito de trabalho. Note que isto está de pleno acordo com o Teorema 2 da energia cinética: o trabalho depende somente da velocidade escalar calculada nas posições inicial e final da trajetória. Denominaremos as forças com esta propriedade, ou seja, trabalho nulo numa trajetória fechada, de **forças conservativas**. As forças fundamentais da natureza são conservativas. A força elástica obedecendo a lei de Hooke também é conservativa, como acabamos de ver. Naturalmente, quando há qualquer tipo de atrito e/ou viscosidade, teremos forças não-conservativas ou dissipativas. Em geral, forças que dependem da velocidade não são conservativas.

Quando calculamos a variação de energia cinética no sistema massa-mola (oscilador harmônico), vimos que a energia cinética diminuiu na ida e aumentou na volta. Concluimos que a mola deve ter absorvido esta energia perdida pela massa durante a ida e liberado a mesma quantidade durante a volta. Também concluimos que a mola não pôde ter armazenado esta energia na forma de energia cinética, pois houve apenas uma deformação da mesma, o que modificou a intensidade da força elástica. No momento em que a massa  $m$  está momentaneamente em repouso, a força elástica (restauradora) é máxima. Assim que a mola inicia sua

volta ao seu comprimento natural, a massa  $m$  entra em movimento e atinge sua velocidade máxima quando o alongamento da mola é nulo. Nesta situação, a mola cede para a massa  $m$  toda a energia que havia armazenado anteriormente. O trabalho é uma forma de quantificar esta troca de energias entre a massa  $m$  e a mola, numa interação mediada pela força elástica. Podemos concluir então que esta nova modalidade de energia está associada com a força elástica (produzida pela mola). Uma análise similar, nos leva a concluir também a existência de uma nova modalidade de energia associada com a força gravitacional. Em ambos os casos, esta nova modalidade de energia tem a capacidade (potencial) de se transformar em energia cinética via o mecanismo trabalho. Por isso iremos denominá-la de **energia potencial** e denotá-la por  $V$ .

Ainda considerando o mesmo sistema massa-mola que temos usado até aqui, o trabalho realizado pela força elástica na ida é negativo ( $\Delta W_{12} = -kl^2/2$ ). Vamos interpretar este sinal negativo como uma perda de energia cinética pela massa  $m$ . Conseqüentemente, a mola aumentou sua energia potencial,  $\Delta V_{12} = kl^2/2 = -\Delta W_{12}$ . Pelo teorema da energia cinética e trabalho, temos  $\Delta W_{12} = \Delta T_{12}$ . Portanto  $\Delta V_{12} = -\Delta T_{12}$ , ou, equivalentemente,  $\Delta(T + V)_{12} = 0$ . Na volta, podemos concluir que  $\Delta(T + V)_{21} = 0$ . Assim, temos dois resultados importantes: (i) a quantidade  $T + V$  é constante para forças conservativas (assunto da próxima seção), (ii) podemos aproveitar trabalho para calcular variações de energia potencial,

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.8)$$

a qual é uma função exclusivamente da posição final  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , pois a força é conservativa, ou seja, a integral (3.8) não depende da trajetória (caminho). A integral (3.8) depende somente do ponto inicial  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ , o qual manteremos fixo, e do ponto final  $\mathbf{r}(t)$  (arbitrário). Isto torna a energia potencial numa função da posição. Contraste isto com a definição de energia cinética, a qual depende somente da velocidade. Note também que a função potencial em (3.8) está definida a menos de uma constante arbitrária (devido ao limite inferior ocorrer em uma posição  $\mathbf{r}(t_0)$  previamente escolhida). Deve ser mantido em mente que a função energia potencial está definida apenas para forças conservativas.

Observe que a expressão no lado direito de (3.8) é de fato uma função da posição, independente da massa  $m$  e dependente da constante de mola  $k$ . Por isto, costuma-se dizer que a energia potencial está armazenada na mola (ideal, invisível). Mas é importante termos em mente que é necessário termos a massa  $m$  para observarmos qualquer movimento proveniente desta energia potencial, ou seja, para haver um aproveitamento da energia potencial, é necessário haver uma interação (força). Vejamos alguns exemplos.

### Força elástica

Adivinhe quem será o primeiro sistema a ser usado? É impressionante a quantidade de conceitos fundamentais que podemos aprender com o oscilador harmônico. Considere um oscilador harmônico como descrito na Figura 2.2 do Capítulo 2. A força elástica (lei de Hooke) pode ser escrita na forma  $\mathbf{F}_e = -kx\mathbf{i}$  e o vetor posição na forma  $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ . Então, usando a definição (3.8), a energia potencial armazenada pela força elástica ao deformarmos a mola por  $x$  é (verifique)

$$\begin{aligned} V(x) &= -\int_0^x (-kx\mathbf{i}) \cdot (dx\mathbf{i}) \\ &= k \int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Devemos notar que esta expressão para a energia potencial elástica é uma função quadrática da posição  $x$  e que esta função está definida a menos de uma constante arbitrária (proveniente do limite inferior da integral que, neste caso, é zero).

Outra observação importante sobre a energia potencial elástica dada em (3.9) é que sua derivada espacial recupera a componente  $F_x$  da força elástica (a menos de um sinal):

$$F_x = -\frac{d}{dx}V(x) = -kx. \quad (3.10)$$

Este resultado nos lembra o teorema fundamental do cálculo, pois a força aparece no integrando da definição (3.8) da energia potencial e (3.10) está nos dizendo que “força é derivada da energia potencial”. Para recuperar o vetor força elástica completamente, podemos inventar um operador novo (faça o Exercício 4),

$$\mathbf{F}_e = -\nabla V = -kx\mathbf{i}, \quad \nabla \equiv \mathbf{i}\frac{d}{dx}, \quad (3.11)$$

onde estamos considerando que a energia potencial dependa apenas de uma das três coordenadas espaciais. Vejamos se esta situação pode ser repetida para a força peso.

### Força peso

Considere uma massa  $m$  sujeita à força peso  $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{k}$  sendo levada do solo ( $z = 0$ ) até a uma altura  $z$  ao longo de uma trajetória retilínea perpendicular ao solo (plano XY), aqui na superfície da Terra. O vetor posição desta massa pode ser escrito na forma  $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$ . Assim, usando a definição (3.8), a energia potencial armazenada pela força peso para elevarmos esta massa do solo até a altura  $z$  é (verifique)

$$\begin{aligned} V(z) &= -\int_0^z (-mg\mathbf{k}) \cdot (dz\mathbf{k}) \\ &= mg \int_0^z dz = mgz. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que usamos o solo (plano XY;  $z = 0$ ) como referência para medir a energia potencial. Note também que podemos usar a mesma receita introduzida em (3.11) para re-obter a força peso (faça o Exercício 5):

$$\mathbf{F}_g = -\nabla V = -mgz, \quad \nabla \equiv \mathbf{k}\frac{d}{dz}. \quad (3.13)$$

### Gradiente

Os dois exemplos acima mostram que podemos recuperar uma força conservativa a partir da energia potencial que elas produzem. Para isto, precisamos criar um novo operador vetorial cujas componentes, como sugerido em (3.11) e (3.13), são formadas pelas derivadas da energia potencial em relação a cada uma das três coordenadas espaciais,

$$\nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.14)$$

onde “entortamos” um pouquinho o símbolo de derivada. Isto é para nos lembrar que cada derivada deve ser efetuada em relação a uma das três coordenadas espaciais, mantendo as demais fixas (fazendo o papel de parâmetros). Estes novos símbolos para as derivadas são denominadas de derivadas parciais (por razões óbvias). O símbolo  $\nabla$  é denominado de

nabla. O operador  $\nabla$  definido em (3.14) é denominado de **gradiente**. Usando este operador gradiente, os exemplos acima indicam que forças conservativas podem ser obtidas de suas energias potenciais,

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \quad (3.15)$$

Este resultado é uma consequência direta da definição (3.8) para energia potencial. Para uma função de várias variáveis, como a energia potencial  $V = V(x, y, z)$ , a diferencial desta função pode ser re-escrita em termos do operador gradiente,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \nabla \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.16)$$

onde  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  é o vetor deslocamento infinitesimal (a diferencial do vetor posição). Assim, o integrando em (3.8) pode ser re-escrito na forma  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV$ . Agora usando o teorema fundamental do cálculo, podemos ver claramente que a integral em (3.8) resulta na energia potencial  $V$ . Em outras palavras, podemos muito bem usar (3.15) como uma definição de energia potencial de uma força conservativa (e somente para forças conservativas).

Lembre-se que a força contém toda a informação sobre o comportamento dinâmico de um sistema. Ela é uma quantidade vetorial e, portanto, contém três informações. Agora, usando (3.15), podemos calcular a força derivando a energia potencial, a qual é uma quantidade escalar (uma única informação). Ganhamos em dobro: primeiro economizamos dois terços na quantidade de informações a serem armazenadas para descrevermos o comportamento de qualquer sistema. Segundo, descobrimos uma ferramenta matemática espetacular (o operador gradiente  $\nabla$ ), pois ela tem a incrível capacidade de transformar uma função escalar em uma função vetorial. Gradiente e outros operadores vetoriais formados a partir dele, como o divergente, formado a partir de um produto escalar, e o rotacional, formado a partir de um produto vetorial, serão estudados em detalhes nos cursos de cálculo de funções de várias variáveis.

### Pêndulo

Considere agora o pêndulo simples mostrado na Figura 2.4 do Capítulo 2. Este é também um sistema com dois corpos: uma massa  $m$  e a Terra. No

entanto, a massa  $m$  está obrigada a movimentar-se somente ao longo de uma trajetória circular de raio  $l$ , o comprimento do pêndulo. Portanto, este é um exemplo contendo um vínculo,  $x^2 + y^2 = l^2$  (usando o mesmo sistema de coordenadas indicado na Figura 2.4 do Capítulo 2). Vamos calcular a energia potencial deste sistema usando a definição (3.8). A primeira providência é escrevermos os vetores força (resultante,  $\mathbf{F}$ ) e o deslocamento (infinitesimal,  $d\mathbf{r}$ ) em algum sistema de coordenadas. Usando o mesmo sistema de coordenadas indicado na Figura 2.4 do Capítulo 2, a força resultante agindo na massa  $m$  é

$$\mathbf{F} = (mg - T \cos \theta) \mathbf{i} - T \sin \theta \mathbf{j}, \quad (3.17)$$

na qual  $T$  é o módulo da tensão no fio. A massa  $m$  está localizada na posição  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . Escrevendo as componentes  $x$  e  $y$  em função da posição angular  $\theta$ , a diferencial  $d\mathbf{r}$  pode ser calculado facilmente (faça o Exercício 6),

$$d\mathbf{r} = -l \sin \theta d\theta \mathbf{i} + l \cos \theta d\theta \mathbf{j}, \quad (3.18)$$

onde  $l$  é o comprimento do pêndulo,  $l^2 = x^2 + y^2$ , mantido constante durante todo o movimento. Então, levando as expressões (3.17) e (3.18) na definição (3.8), após simplificar o produto escalar, temos uma integral em  $\theta$  para ser efetuada (faça o Exercício 7):

$$\begin{aligned} V &= - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = mlg \int_0^\theta \sin \theta d\theta \\ &= mlg(1 - \cos \theta) = I\omega_0^2(1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde aproveitamos para introduzir dois parâmetros novos,

$$I = ml^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.20)$$

Note que estamos usando  $\theta = 0$  (pêndulo na vertical) como referência onde a energia potencial é nula (valor mínimo). O valor máximo da energia potencial é atingido em  $\theta = \pi$ .

O parâmetro  $I = ml^2$  é denominado de **momento de inércia** do pêndulo. Ele mede a dificuldade de alterarmos o movimento de rotação da massa  $m$  em torno do eixo (fixo) onde está presa a outra extremidade do pêndulo. Note a semelhança do momento de inércia com a massa. O parâmetro  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação para a situação em que a amplitude de oscilação é pequena.

Observe que o produto  $I\omega_0^2$  tem dimensões de energia. De fato, veremos, durante nossos estudos sobre o movimento de rotação em torno de um eixo fixo, que a energia cinética de rotação será  $I\omega_0^2/2$ . Note a semelhança desta energia cinética rotacional com a energia cinética (3.6) (translacional). As características gerais do potencial (3.19) estão mostradas na Figura 3.3. Ele é periódico de período  $2\pi$ , tem um mínimo em  $\theta = 0$  e um máximo em  $\theta = \pm\pi/2$ . Note que este potencial depende também da massa  $m$ , de  $g$  e do comprimento  $l$ . Isto mostra que a energia potencial pertence ao sistema, ou seja, ela não está localizada somente em um dos dois corpos, a massa  $m$  ou a Terra.

Você notou que o módulo  $\mathbb{T}$  da força tensão na haste do pêndulo não aparece na expressão (3.19) da energia potencial? Então quando usarmos o operador gradiente (3.14) em (3.19), como indicado em (3.15), não iremos recuperar completamente a força resultante (3.17). O que está acontecendo? O operador gradiente não sabe mecânica e nem enxerga um sistema físico como nós enxergamos. O operador gradiente simplesmente sabe recuperar a parte de uma força resultante que realiza trabalho conservativo. Como indicado na Figura 2.4 (Capítulo 2), o movimento da massa  $m$  é circular (não é uniforme). Nesta trajetória circular, a tensão é sempre perpendicular ao vetor deslocamento, o qual é sempre tangente à trajetória. Portanto, o trabalho realizado pela tensão é nulo. Vale a mesma observação para a componente da força peso ao longo da haste (componente radial). Então, somente a componente da força peso que é tangente à trajetória (componente tangencial) é que realiza trabalho. Esta componente tangencial pode ser escrita na forma  $\mathbf{F}_\theta = -mg \sin \theta \boldsymbol{\theta}$ , onde  $\boldsymbol{\theta}$  é um versor na direção tangencial. Vamos denotar por  $ds$  o deslocamento infinitesimal ao longo trajetória circular. Assim, este deslocamento infinitesimal  $ds$  também é um vetor na direção do versor  $\boldsymbol{\theta}$  (tangente à trajetória),  $ds = l d\theta \boldsymbol{\theta}$  (faça o Exercício 8). Desta forma, estamos aprendendo que o sistema cartesiano retangular nem sempre é o melhor sistema de coordenadas. Para o pêndulo da Figura 2.4, coordenadas polares é a melhor escolha (veja o Apêndice A). Este é o sistema de coordenadas que melhor se adapta à simetria circular da trajetória da massa  $m$  do pêndulo. Entendido isto, podemos usar o gradiente em coordenadas polares, como dado em (A.5), com  $r = l$  e  $\phi = \pi/2$ , ou seja,

com  $dr = 0$  e  $d\phi = 0$ , para re-obtermos a componente tangencial da força peso segundo a prescrição (3.15). Note então que a prescrição (3.15) recupera somente a parte da força resultante que realmente realiza trabalho. Nada é mais que perfeito.

Como já observamos, o pêndulo simples é um excelente sistema para aprendermos mecânica. Vimos em 2.48 (Capítulo 2) que a equação diferencial de um pêndulo simples se reduz à equação diferencial de um oscilador harmônico quando o deslocamento angular é pequeno,  $\theta \ll 1$  rad. Então, para pequenas amplitudes, o potencial (3.19) deve ser idêntico ao potencial harmônico (3.9). Para  $\theta \ll 1$  rad, a função cosseno pode ser aproximada para  $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$  (os dois primeiros termos da série de Taylor). Assim, o potencial (3.19) torna-se em

$$V = I\omega_0^2(1 - \cos \theta) \simeq \frac{1}{2}I\omega_0^2\theta^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2(l\theta)^2. \quad (3.21)$$

Note que  $l\theta$  é o comprimento do arco compreendido pelo deslocamento angular  $\theta$  e faz o papel da deformação  $x$  em (3.9). Ainda mais surpreendente: a última expressão em (3.21), quando comparada com o potencial harmônico (3.9), fornece uma “constante de mola” igual a  $m\omega_0^2$ , massa vezes a freqüência (angular) natural ao quadrado, a mesma definição para o sistema massa-mola ( $\omega_0^2 = k/m$ ).

### 3.3.1 Exercícios

#### Exercício 4

Aplique o operador gradiente (3.14) em (3.9), como indicado em (3.15), e mostre que esta operação realmente recupera o vetor força elástica  $\mathbf{F}_e = -kx \mathbf{i}$ .

#### Exercício 5

Aplique o operador gradiente (3.14) em (3.12), como indicado em (3.15), e mostre que esta operação realmente recupera o vetor força gravitacional  $\mathbf{F}_g = -mg \mathbf{k}$ .

#### Exercício 6

A massa  $m$  na Figura 2.4 no Capítulo 2 está localizada na posição  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ . Mostre que a diferencial deste vetor posição é  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ .

Agora vamos efetuar uma mudança de coordenadas. Das coordenadas cartesianas ( $x$  e  $y$ ) para coordenadas polares ( $l$  e  $\theta$ ). Como indicado na Figura 2.4,  $x = l \cos \theta$ ,  $y = l \sin \theta$ , com  $l$  constante. Mostre que a diferencial do vetor posição torna-se

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= -l \sin \theta d\theta \mathbf{i} + l \cos \theta d\theta \mathbf{j} \\ &= -y d\theta \mathbf{i} + x d\theta \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Calcule o vetor velocidade  $d\mathbf{r}/dt$ , dividindo a diferencial da posição (3.22) pela diferencial do tempo  $dt$ . Mostre que este vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ . Mostre que o módulo deste vetor velocidade é

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = l\dot{\theta}. \quad (3.23)$$

**Exercício 7**

Determine explicitamente a energia potencial dada em (3.19) para o pêndulo simples.

**Exercício 8**

Considere a trajetória circular do pêndulo mostrado na Figura 2.4 no Capítulo 2. Esta trajetória pode ser descrita usando o sistema polar (ou esférico) de coordenadas apresentado no Apêndice A fazendo  $r = l$  e  $\phi = \pi/2$ . Como  $r$  e  $\phi$  são constantes, então suas diferenciais são nulas. Assim o operador gradiente em coordenadas polares (A.5), adaptado à trajetória circular de raio  $l$  no plano  $XY$ , pode ser re-escrito como

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{\theta}}{l} \frac{d}{d\theta}. \quad (3.24)$$

Da geometria plana sabemos que o arco compreendido pelo ângulo  $d\theta$  numa circunferência de raio  $l$  é  $l d\theta$ . Então, no sistema polar de coordenadas, o vetor deslocamento infinitesimal ao longo de uma circunferência de raio  $l$  é  $d\mathbf{s} = l d\theta \boldsymbol{\theta}$ , um vetor na direção do versor  $\boldsymbol{\theta}$  (tangente à trajetória) de módulo  $l d\theta$ . Dividindo o deslocamento angular infinitesimal  $d\mathbf{s}$  pela diferencial do tempo, mostre que o vetor velocidade tangencial é

$$\mathbf{v} = l\dot{\theta} \boldsymbol{\theta}. \quad (3.25)$$

Seguindo este modelo, a componente tangencial da força peso (a única parte da força resultante que realmente realiza trabalho, pois a outra parte está na direção radial, perpendicular ao deslocamento,

pode ser escrita como  $\mathbf{F}_\theta = -mg \sin \theta \boldsymbol{\theta}$ . Então use a definição (3.8) para mostrar que a energia potencial calculada por

$$V = - \int_0^\theta \mathbf{F}_\theta \cdot d\mathbf{s} \quad (3.26)$$

é igual à energia potencial encontrada em (3.19). Feito isto, use a prescrição (3.15), com o gradiente na forma (A.5), para recuperar  $\mathbf{F}_\theta = -mg \sin \theta \boldsymbol{\theta}$ .

### 3.4 Energia mecânica

Considere um sistema contendo apenas forças conservativas. Então, usando a definição (3.8) de energia potencial, podemos substituir o trabalho pela energia potencial correspondente ( $\Delta W = -\Delta V$ ) no Teorema 2 para obtermos

$$\begin{aligned} \Delta T &= \Delta W = -\Delta V \\ \Rightarrow \Delta T + \Delta V &= \Delta(T + V) = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Este resultado é simplesmente surpreendente pois, em geral, tanto a energia cinética  $T$  quanto a energia potencial  $V$  variam ao longo de uma determinada trajetória, ou seja, são funções do tempo. A última expressão em (3.27) está nos dizendo que a soma  $T + V$  é uma constante. Além disso, como os extremos de qualquer trajetória podem ser escolhidos arbitrariamente, então a soma  $T + V$  deve ser independente do tempo, ou seja, é uma quantidade conservada. Encontrar uma quantidade conservada é como encontrar uma agulha em um palheiro. Esta quantidade conservada merece um nome próprio: energia mecânica,

$$E = T + V. \quad (3.28)$$

Portanto, a energia mecânica de um sistema contendo forças conservativas é uma quantidade conservada. Isto justifica o adjetivo “conservativo” para as forças conservativas. Um sistema contendo somente forças conservativas será denominado também de sistema conservativo. Bem, encontramos então outra lei de conservação:

**Teorema 3 (Energia mecânica)**

A energia mecânica em um sistema conservativo é uma quantidade conservada,

$$\Delta E = 0, \quad E = T + V. \quad (3.29)$$



Até o momento conhecemos duas leis de conservação: a lei da conservação do momentum linear, apresentada no Teorema 1 do Capítulo 2 e a lei da conservação da energia mecânica, apresentada neste Teorema 3.

Não podemos esquecer que a definição (3.8) de energia potencial somente está estabelecida para sistemas conservativos, ou seja, quando o trabalho numa trajetória fechado qualquer é nulo. Para sistemas não-conservativos, não é mais verdade que o trabalho dependerá apenas das posições inicial e final numa trajetória, impossibilitando assim a definição de uma função (potencial) da posição. Além disto, não podemos garantir que toda energia trocada com um sistema não-conservativo será armazenada somente nas formas de energia cinética e potencial, pois pode haver perdas por qualquer processo dissipativo, como atrito, por exemplo.

### Força elástica

Vamos tomar novamente um oscilador harmônico constituído por uma massa  $m$  e uma força elástica de constante  $k$  como exemplo. Em um determinado instante de tempo  $t$  qualquer, a energia mecânica (3.28) deste sistema, juntando os resultados da Seção 3.2, definição (3.6) para a energia cinética, e da Seção 3.3, expressão (3.9) obtida para a energia potencial, a energia mecânica deste sistema é

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (3.30)$$

na qual fizemos a escolha  $V(0) = 0$ . Este sistema é um excelente caso de estudo porque nós temos a equação horária  $x(t)$  determinada como uma função explícita do tempo,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.31)$$

Podemos ver claramente que a energia cinética  $T$  e a energia potencial  $V$  estão variando no tempo. No entanto, quando substituimos (3.31) em (3.30) (faça o Exercício 9), obtemos uma energia mecânica constante (independente do tempo),

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \quad (3.32)$$

### Força peso

Considere agora uma massa  $m$  em queda livre de uma altura  $h$  acima da superfície da Terra. Des-

preze qualquer tipo de dissipação. Em um determinado instante de tempo  $t$  qualquer, a energia mecânica (3.28) deste sistema, juntando os resultados da Seção 3.2, definição (3.6) para a energia cinética, e da Seção 3.3, expressão (3.12) obtida para a energia potencial, a energia mecânica deste sistema é

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz \quad (3.33)$$

na qual fizemos a escolha  $V(0) = 0$  (solo). Este sistema também é um excelente caso de estudo, pois também temos a equação horária  $z(t)$  determinada como uma função explícita do tempo,

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3.34)$$

Novamente, podemos ver claramente que a energia cinética  $T$  e a energia potencial  $V$  estão variando no tempo. No entanto, quando substituimos (3.34) em (3.33) (faça o Exercício 10), obtemos uma energia mecânica constante (independente do tempo),

$$E = mgh. \quad (3.35)$$

### Pêndulo

O pêndulo da Figura 2.4 no Capítulo 2 é também um ótimo exemplo de um sistema conservativo. O módulo do vetor velocidade da massa  $m$  pode ser calculado seguindo o procedimento descrito no Exercício (6). A energia potencial deste pêndulo foi calculada anteriormente, expressão (3.19). Então, a energia mecânica deste pêndulo pode ser escrita na forma

$$E = T + V = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + I\omega_0^2(1 - \cos \theta), \quad (3.36)$$

com

$$I = ml^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.37)$$

Embora não tenhamos uma função simples para expressar a equação horária  $\theta(t)$  explicitamente em função do tempo, como nos casos anteriores, para verificarmos que a energia mecânica (3.36) é de fato independente do tempo, isto pode ser verificado facilmente calculando a equação horária  $\theta(t)$  numericamente (faça o Exercício 11). Naturalmente, na situação de pequenas amplitudes, voltamos a ter um controle analítico da situação (verifique).

### Uso das leis de conservação

Uma quantidade conservada é muito útil. Vejamos alguns exemplos. Considere dois corpos de massas iguais,  $m_1 = m_2 = m$ , movendo-se na mesma direção, mas em sentidos opostos, com velocidades  $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ . Após um certo intervalo de tempo, estes dois corpos irão colidir entre si. O que sabemos? Sabemos que num certo instante  $t_1$ , antes da colisão, o momentum linear total era nulo,  $\vec{p}(t_1) = \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) = m_1\mathbf{v}_1(t_1) - m_2\mathbf{v}_1(t_1) = 0$ . Supondo que estes dois corpos estejam isolados, então, devido à lei de conservação do momentum linear (Teorema 1 do Capítulo 2), o momentum linear total após a colisão deve permanecer com o mesmo valor que tinha antes da colisão. Assim, num certo instante  $t_2$  depois da colisão devemos ter  $\vec{p}(t_2) = 0$ . Portanto há duas possibilidades para o movimento posterior à colisão: (1) os dois corpos permanecem unidos em repouso (choque perfeitamente inelástico), ou (2) os dois corpos invertem completamente o sentido de suas velocidades, as quais continuam tendo módulos iguais (choque perfeitamente elástico).

Numa situação “simétrica” à anterior, imagine um corpo em repouso. Para ser mais preciso, suponha que este corpo seja a partícula sub-atômica káon (símbolo  $K^0$ ), a qual é eletricamente neutra (veja [Aventuras das Partículas](#)). Exponetaneamente, o káon transforma-se (decai) em duas outras partículas,  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ , denominadas de píons (de cargas opostas e massa iguais). Antes do decaimento, o momentum linear é nulo (káon em repouso). Após o decaimento, o momentum linear deve ser o mesmo de antes, pois o processo de decaimento não envolve forças externas. Portanto, os píons devem sair após o decaimento com velocidades opostas. Isto é o que observamos no laboratório.

Nos dois exemplos anteriores, todos os resultados que obtivemos decorreram somente da lei de conservação para o vetor momentum linear, independentemente do que ocorre exatamente no momento de uma colisão ou de um decaimento (ou de uma explosão). Se lembramos que os processos físicos envolvidos no momento da colisão são terrivelmente complexos, a lei de conservação do momentum linear é “A Ferramenta”. Na verdade são três leis de conservação: uma para cada eixo independente. Entretanto, nem sempre há conservação do momen-

tum linear nos três eixos simultaneamente. Pode haver uma força externa agindo somente em um eixo, ou somente em dois eixos. O resultado importante a ser gravado é: se uma componente da força resultante é nula, então o momentum linear naquela direção é conservado:

$$F_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_i(t_1) = p_i(t_2) \\ \text{ou} \quad mv_i(t_1) = mv_i(t_2). \quad (3.38)$$

Esta é uma forma explícita do Teorema 1 do Capítulo 2, isto é, escrita em termos de componentes.

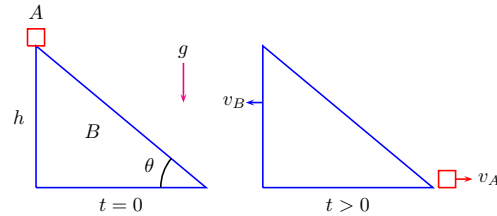


Figura 3.1: O corpo A escorrega sem atrito sobre o corpo B, o qual desliza horizontalmente sem atrito. Ambos estão sob a ação da gravidade.

Como exemplo contendo apenas uma conservação parcial do vetor momentum linear, considere o sistema mostrado na Figura 3.1. Os dois corpos estão sob a ação da força gravitacional e não há atrito entre as superfícies. Então a força gravitacional agindo na vertical é a única força externa. Portanto, segundo o teorema da conservação do momentum linear na sua forma explícita (3.38), haverá conservação da componente horizontal do momentum linear,

$$m_A v_A + m_B v_B = 0, \quad (3.39)$$

na qual  $v_A$  e  $v_B$  são as componentes dos vetores velocidades dos dois corpos na direção horizontal e imediatamente após perderem o contato entre si. A Eq. (3.39) contém duas incógnitas,  $v_A$  e  $v_B$ . Como este sistema está sob a ação da força peso, a qual é conservativa, podemos usar a conservação da energia mecânica (despreze todo tipo de atrito e viscosidade) para encontrar outra relação que nos permita determinar completamente as velocidades procuradas. De fato, no instante inicial, repouso, este sistema possui apenas energia potencial, a energia potencial do corpo A. Tomando o solo como

referência, esta energia potencial pode ser escrita como  $m_Agh$ . Depois, quando os corpos se separam, o corpo A retorna ao solo. Neste momento eles possuem apenas energia cinética, e pela conservação da energia mecânica, devemos ter

$$m_Agh = \frac{1}{2}m_Av_A^2 + \frac{1}{2}m_Bv_B^2. \quad (3.40)$$

As Eqs. (3.39)–(3.40) formam um conjunto de duas equações contendo duas incógnitas, o qual pode ser resolvido para fornecer os valores de  $v_A$  e  $v_B$  no instante da separação. Note que usamos apenas as leis de conservação para determinar estas velocidades, ou seja, não tivemos que determinar primeiro as equações horárias de cada corpo. Note também que o uso das leis de conservação nos permitiu determinar os valores de velocidades (sem conhecer as equações horárias) apenas em um único instante de tempo.

### 3.4.1 Exercícios

#### Exercício 9

Use a equação horária (3.31) de um oscilador harmônico para escrever a dependência temporal das energias cinética, potencial e mecânica. Mostre que a energia mecânica (3.30) é uma constante, (3.32). Faça um gráfico mostrando estas três energias para os seus valores preferidos de  $m$  e  $k$  (em MKS).

#### Exercício 10

Use a equação horária (3.34) de uma massa  $m$  em queda livre para escrever a dependência temporal das energias cinética, potencial e mecânica. Mostre que a energia mecânica (3.33) é uma constante, (3.35). Faça um gráfico mostrando estas três energias para os seus valores preferidos de  $m$  e  $h$  (em MKS).

#### Exercício 11

Resolva a equação diferencial 2.46 numericamente para encontrar a equação horária  $\theta(t)$  da massa  $m$  no pêndulo mostrado na Figura 2.4 no Capítulo 2. Mostre que a energia mecânica (3.36) é uma constante. Faça um gráfico mostrando as três energias, cinética, potencial e mecânica, para os seus valores preferidos de  $m$  e  $l$  (unidades em MKS).

## 3.5 Períodos

O oscilador harmônico e o pêndulo simples são dois exemplos bem conhecidos de sistemas que exibem movimentos periódicos. A periodicidade destes movimentos são devidas à forma da energia potencial destes sistemas. Nem todo potencial produz movimentos periódicos. A força gravitacional nas proximidades da Terra, por exemplo, não produz um movimento periódico. Veremos que o potencial de Kepler é responsável pelo movimento periódico da Terra em torno do Sol. Aliás, toda esta seção foi construída para nos ajudar a compreender o movimento planetário produzido pelo potencial de Kepler.

Naturalmente, quando temos a equação horária de um movimento periódico, podemos determinar o seu período por inspeção direta da forma analítica destas equações horárias ou através da inspeção do gráfico delas. Entretanto, nem sempre é fácil determinar equações horárias resolvendo diretamente as equações provenientes da segunda lei de Newton, um sistema de equações diferenciais de segunda ordem no tempo, em geral acopladas. Felizmente, pelo menos para sistemas conservativos, não precisamos resolver as equações diferenciais oriundas da segunda lei de Newton para obtermos equações horárias e em seguida obtermos períodos. Para sistemas conservativos, podemos usar o fato de que a energia mecânica é uma quantidade conservada para determinarmos períodos. Para isto, é crucial vermos que a expressão da energia mecânica constante é uma equação diferencial de primeira ordem para a posição. Ora, porque não utilizamos isto ao invés da segunda lei? Primeiro, porque a segunda lei se aplica sempre, enquanto que a conservação da energia mecânica é válida somente em sistemas conservativos. Segundo, embora esta equação diferencial resultante da conservação da energia mecânica seja de primeira ordem, ela é quadrática na primeira derivada da posição, portanto não-linear. Equações diferenciais não-lineares são mais “complicadas”.

Vejamos como este procedimento pode ser colocado em prática. Vamos considerar inicialmente um potencial  $V$  qualquer. Em geral, este procedimento é muito utilizado quando o potencial depende apenas de uma variável, digamos  $V = V(x)$ . Então, para sistemas conservativos, a ener-



gia mecânica (3.28) pode ser re-escrita como

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x). \quad (3.41)$$

Como  $E$  é uma constante, então esta equação é uma equação diferencial para  $x(t)$ ,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)}. \quad (3.42)$$

Esta equação pode ser resolvida pela técnica de separação de variáveis,

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (3.43)$$

Como o tempo aparece apenas no primeiro membro, podemos integrar independentemente os dois membros desta equação após especificarmos quem é  $V(x)$ . Vejamos alguns exemplos.

### Potencial harmônico

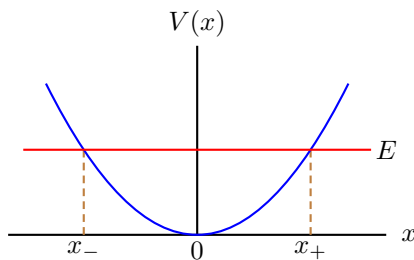


Figura 3.2: Pontos de retorno  $x_{\pm} = \pm\sqrt{2E/k}$  para o potencial harmônico  $V(x) = kx^2/2$ , onde  $E$  é a energia mecânica.

Vamos usar o oscilador harmônico para aprendermos a usar este procedimento. O potencial harmônico é  $V(x) = kx^2/2$  (Figura 3.2). Então, substituindo este potencial na equação diferencial (3.43), obtemos (faça o Exercício 12)

$$dt = \frac{1}{\omega_0} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad (3.44)$$

onde introduzimos os parâmetros

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A^2 = \frac{2E}{m\omega_0^2} = \frac{2E}{k}. \quad (3.45)$$

Integrando os dois lados de (3.44), obtemos (faça o Exercício 12)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (3.46)$$

na qual  $\phi$  é uma constante arbitrária. Como esta equação horária é solução da EDO (3.44), a qual é de primeira ordem,  $\phi$  é a única constante arbitrária que precisa ser determinada a partir de uma condição inicial, digamos a posição inicial. O parâmetro  $A$ , identificado anteriormente com a amplitude, está completamente determinado em (3.45), supondo que a energia mecânica seja conhecida. Assim, re-obtivemos a equação horária (3.46) sem a necessidade de resolvermos a segunda lei de Newton. Isto justifica mais uma vez a importância dos teoremas de conservação.

Mas e o período? Observe o gráfico da energia potencial mostrado na Figura 3.2. Neste gráfico, também é mostrado a energia mecânica (3.41), a qual é conservada na ausência de dissipações. Em especial, podemos ver que há dois pontos,  $x_{\pm}$ , onde a energia mecânica é igual à energia potencial. Nestes pontos, a energia cinética é nula,

$$E = V(x_{\pm}) = \frac{1}{2}kx_{\pm}^2 \Rightarrow x_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (3.47)$$

Os pontos  $x_{\pm}$  satisfazendo  $E = V(x_{\pm})$  são denominados de **pontos de retorno**. Nestas posições, o vetor velocidade é nulo. No caso do sistema massa-mola, os pontos de retorno são as amplitudes máximas,  $x_{\pm} = \pm A$ , como podemos ver em (3.45).

Vejamos algumas observações importantes sobre pontos de retorno. (1) O vetor velocidade inverte seu sentido nos pontos de retorno. Para inverter o sentido, é necessário primeiro se anular. Assim, o vetor velocidade se anula nos pontos de retorno. (2) Havendo dois pontos de retorno, como mostrado na Figura 3.2, o movimento fica confinado na região delimitada pelos pontos de retorno.

Para o oscilador harmônico, devido à forma parabólica do potencial,  $V(x) = kx^2/2$ , quanto maior a energia mecânica, maior a região de confinamento. Devemos ressaltar que o valor da energia mecânica  $E$  pode ser escolhido livremente. Desta forma, para uma determinada energia mecânica  $E$ , a massa  $m$  no sistema massa-mola (oscilador harmônico) fica oscilando entre  $x_- = -A$  e  $x_+ = A$

(pontos de retorno) com uma frequência angular igual a  $\omega_0$ . Portanto, o período de uma oscilação é exatamente o tempo da massa  $m$  sair de  $x_-$ , ir até  $x_+$  e retornar a  $x_-$ . Como o potencial é simétrico,  $V(-x) = V(x)$ , então o tempo de sair de  $x_-$  e ir até  $x_+$  é metade do período. A equação diferencial (3.44) pode ser usada para calcularmos este período  $\mathcal{P}$  (faça o Exercício (13)),

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\omega_0} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad (3.48)$$

com os pontos de retorno

$$x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} = \pm A \quad (3.49)$$

Esta integral pode ser resolvida efetuando a substituição  $x = A \cos \theta$  (faça o Exercício 12). O resultado é o que esperávamos:  $\mathcal{P} = 2\pi/\omega_0$ , ou seja, o sistema oscila com um período correspondente à sua frequência angular natural  $\omega_0$ . Aprendemos então que a conservação da energia mecânica pode ser usada tanto para encontrarmos a posição em função do tempo, quanto para calcularmos períodos.

O ponto  $x = 0$  na Figura 3.2 é especial. Neste ponto, a força elástica, a derivada primeira do potencial, com o sinal trocado,  $F = -kx$ , é nula. Então,  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio (força nula). Também podemos ver que um deslocamento, tanto para a direita quanto para a esquerda, resulta numa força restauradora que tenta trazer a massa de volta para a posição de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio com uma força restauradora agindo nas vizinhanças deste ponto é denominado de **ponto de equilíbrio estável**. Do ponto de vista matemático, um ponto de equilíbrio estável é sempre um ponto de mínimo da função energia potencial.

### Pêndulo

Considere o pêndulo da Figura 2.4 no Capítulo 2. A energia mecânica deste sistema está calculada em (3.36),

$$E = T + V, \quad T = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2, \quad V = \varepsilon(1 - \cos \theta), \quad (3.50)$$

com

$$\varepsilon = I\omega_0^2, \quad I = ml^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.51)$$

Note que a quantidade  $\varepsilon = I\omega_0^2$  tem dimensões de energia (faça o Exercício (13)). Veremos mais adiante, quando estivermos estudando o movimento de rotação em torno de um eixo fixo, que  $I\omega_0^2/2$  é a energia cinética devido a rotação de um corpo com momento de inércia  $I$  e velocidade angular  $\omega_0$ . Note a semelhança com a expressão da energia cinética  $mv^2/2$ . Por isto, iremos usar  $\varepsilon$  como uma “unidade” de energia. Note também que a massa  $m$  do pêndulo mostrado na Figura 2.4 (Capítulo 2) executa um movimento de rotação em torno do eixo fixo que passa pela outra extremidade da haste do pêndulo.

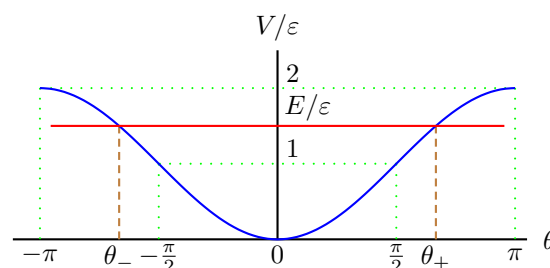


Figura 3.3: Pontos de retorno  $\theta_{\pm} = \pm \cos^{-1}(-\epsilon)$  para o potencial (3.50) de um pêndulo simples.

A Figura 3.3 mostra os pontos de retorno,

$$\theta_{\pm} = \pm \cos^{-1}(-\epsilon), \quad \epsilon = \frac{E}{\varepsilon} - 1, \quad (3.52)$$

para o potencial  $V(\theta) = \varepsilon(1 - \cos \theta)$  do pêndulo simples; confira a energia mecânica em (3.50) e tome cuidado para não confundir as letras gregas  $\epsilon$  e  $\varepsilon$ . Como este potencial é periódico, apenas um período, contendo a posição de equilíbrio estável  $\theta = 0$ , é mostrado na Figura 3.3. Note que este potencial também é uma função par,  $V(-\theta) = V(\theta)$ . Isto nos permite calcular o período como o dobro do tempo entre  $\theta_-$  e  $\theta_+$ . Isolando a primeira derivada em (3.50), assumindo uma energia mecânica constante (sistema conservativo, sem dissipação), temos

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2}} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{d\theta}{\sqrt{\epsilon + \cos \theta}}. \quad (3.53)$$

Esta integral deve ser resolvida numericamente (faça o Exercício 14), pois a solução desta integral envolve funções elípticas.

Note que a integral (3.53) é uma função da constante adimensional  $\epsilon = E/\varepsilon - 1$ , a qual pode variar

no intervalo real desde  $\epsilon = -1$  ( $E = 0$ , equilíbrio estável, fundo do potencial) até  $\epsilon = 1$  ( $E = 2\varepsilon$ , equilíbrio instável, topo do potencial; veja a discussão do próximo parágrafo). Esta integral é nula para  $\epsilon = -1$  (período nulo) e é infinita para  $\epsilon = 1$  (período infinito). Portanto, em princípio, podemos dar à massa  $m$  uma energia inicial ( $\theta = 0$ ) exatamente igual a  $E = 2\varepsilon$ , a energia necessária para que a massa  $m$  consiga chegar até a posição de equilíbrio instável ( $\theta = \pi$ ). No entanto, a parte divertida disto é que ela leva um tempo infinito para chegar até lá! É muito interessante ver isto nas simulações feitas em computação algébrica.

Para uma energia mecânica maior que a energia potencial máxima,  $E > 2\varepsilon$ , o movimento do pêndulo deixa de ser oscilatório e passa a ser uma rotação em torno de um eixo fixo. O período desta rotação também pode ser calculado a partir da conservação da energia mecânica (3.50) como sendo o tempo de uma volta completa (faça o Exercício 14),

$$\mathcal{P} = \frac{\sqrt{2}}{2\omega_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\epsilon + \cos\theta}}, \quad (3.54)$$

com

$$\epsilon = \frac{E}{\varepsilon} - 1, \quad E > 2\varepsilon. \quad (3.55)$$

Mencionamos logo acima o termo “equilíbrio instável”. Vejamos o significado disto. Podemos ver que o potencial mostrado na Figura 3.3 possui mais de um ponto de equilíbrio (força nula). Em  $\theta = 0$ , ponto de mínimo do potencial, temos um ponto de equilíbrio estável. Em  $\theta = \pm\pi$ , pontos de máximos, temos um tipo de equilíbrio diferente do estável. Segundo a discussão feita no final da Seção 3.3 (reveja também o Exercício 8), a componente tangencial da força peso (a única que realiza trabalho) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{F}_\theta = -\frac{\boldsymbol{\theta}}{l} \frac{dV}{d\theta} = -\frac{\varepsilon}{l} \sin\theta \boldsymbol{\theta} = -mg \sin\theta \boldsymbol{\theta}. \quad (3.56)$$

Considere agora a vizinhança de  $\theta = \pi$ . O versor  $\boldsymbol{\theta}$  aponta sempre no sentido horário, como indicado pelo deslocamento do ângulo  $\theta$  na Figura 3.3. Suponha que a massa  $m$  esteja em repouso em  $\theta = \pi$ . Produza um deslocamento no sentido horário. Portanto este deslocamento terá o mesmo sentido do versor  $\boldsymbol{\theta}$ . No entanto o ângulo  $\theta$  será ligeiramente maior que  $\pi$ . Isto resulta numa força tangencial, segundo a expressão (3.56), no mesmo sentido do deslocamento dado, afastando cada vez mais a massa

$m$  da posição de equilíbrio  $\theta = \pi$ . Produza agora um deslocamento no sentido anti-horário. Este deslocamento estará no sentido oposto ao versor  $\boldsymbol{\theta}$ . No entanto o ângulo  $\theta$  será ligeiramente menor que  $\pi$ . Isto resulta numa força tangencial, segundo a expressão (3.56), no mesmo sentido do deslocamento, afastando cada vez mais a massa  $m$  da posição de equilíbrio  $\theta = \pi$ . Assim, a força agindo nas vizinhanças deste novo ponto de equilíbrio,  $\theta = \pi$ , não é restauradora. Muito pelo contrário, esta força sempre afasta a massa  $m$  do ponto  $\theta = \pi$ . Estas observações também valem para  $\theta = -\pi$ . Um ponto de equilíbrio que não tem uma força restauradora em suas vizinhanças é denominado de **ponto de equilíbrio instável**.

Um ponto de equilíbrio instável é sempre um ponto de máximo da função potencial. Há também um terceiro tipo de equilíbrio, denominada de neutro (ou indiferente). A força é nula nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio neutro. A diferença com o ponto de equilíbrio estável está no tamanho do deslocamento em torno do ponto de equilíbrio para mudar o estado do corpo. No equilíbrio estável, um deslocamento infinitesimal é suficiente para recolocar o corpo em movimento. No equilíbrio neutro, é necessário um deslocamento finito para recolocar o corpo em movimento. Também vale ressaltar que a função potencial deve exibir pelo menos um ponto de equilíbrio estável para haver um movimento periódico.

Vamos aproveitar o pêndulo simples também para ilustrar o conceito de potência. Sem dissipação, o pêndulo troca energia pelo trabalho realizado pela componente tangencial (3.56) da força gravitacional,  $\mathbf{F}_\theta = -mg \sin\theta \boldsymbol{\theta}$ . O vetor velocidade tangencial pode ser escrito na forma  $\mathbf{v} = l\dot{\theta} \boldsymbol{\theta}$  (Exercício 8). Então a potência instantânea associada à força  $\mathbf{F}_\theta$ , segundo a definição (3.4), é

$$\mathbb{P}_\theta = \mathbf{F}_\theta \cdot \mathbf{v} = -mgl\dot{\theta} \sin\theta = -I\omega_0^2 \dot{\theta} \sin\theta. \quad (3.57)$$

Esta é a mesma expressão que é obtida quando derivamos o trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}_\theta$  desde  $\theta = 0$  até  $\theta$  qualquer, pois este trabalho é menos a energia potencial (3.19),  $W = -I\omega_0^2(1 - \cos\theta)$ . A potência (3.57) mede a taxa temporal da transferência de energia potencial para a massa  $m$ , a qual é transformada em energia cinética na mesma taxa (com o sinal invertido). De fato, conforme vimos em (3.36), a energia cinética em um pêndulo

simples pode ser escrita na forma  $T = I\dot{\theta}^2/2$ , cuja taxa de variação é  $\dot{T} = I\dot{\theta}\ddot{\theta}$ . Lembrando que a posição angular  $\theta$  satisfaz a EDO  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ , então a taxa de variação da energia cinética pode ser reescrita na forma  $\dot{T} = -I\omega_0^2 \dot{\theta} \sin \theta$ , a qual é a mesma taxa de variação da energia potencial encontrada em (3.57) com o sinal oposto. Portanto, neste caso sem dissipação, o sistema possui uma energia mecânica constante. Isto significa que este sistema está isolado, ou seja, não troca energia com o meio externo. Isto não ocorre na presença de uma força dissipativa como a força viscosa.

Quando o sistema tem dissipação, a situação energética muda um pouco. Primeiro temos que modelar uma dissipação para o nosso pêndulo. Por conveniência, vamos usar uma força dissipativa proporcional à velocidade tangencial,

$$\mathbf{F}_d = -b\mathbf{v} = -bl\dot{\theta}\boldsymbol{\theta} \quad (3.58)$$

Note que a constante  $b$  tem dimensões de massa por tempo por comprimento. Com esta força dissipativa, a equação diferencial 2.48 (Cap. 2) é alterada para

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta + \omega_1 \dot{\theta} = 0, \quad (3.59)$$

com

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_1 = \frac{b}{ml} = \frac{bl}{I}, \quad I = ml^2. \quad (3.60)$$

Usando a definição dada em (3.4), podemos calcular a potência associada à força dissipativa,

$$\mathbb{P}_d = \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} = -bl^2 \dot{\theta}^2 = -I\omega_1 l \dot{\theta}^2. \quad (3.61)$$

Esta é a taxa temporal com que o pêndulo perde energia para a sua vizinhança. Neste caso, a energia mecânica não é mais uma constante,

$$\frac{dE}{dt} = \mathbb{P}_d. \quad (3.62)$$

É muito interessante ver isto nas simulações feitas em computação algébrica.

### 3.5.1 Exercícios

#### Exercício 12

(I) Resolva a equação diferencial (3.44) integrando indefinidamente e independentemente os dois lados. Calcule a integral na posição efetuando a substituição  $x = A \cos \theta$ . Não esqueça de colocar uma

constante de integração. Re-arranje tudo para obter (3.46). (II) Efetue a integral definida (3.48) fazendo  $x = A \cos \theta$  e mostre que o resultado é  $\mathcal{P} = 2\pi/\omega_0$ .

#### Exercício 13

Mostre que as dimensões da quantidade  $\varepsilon = I\omega_0^2$ , definida em (3.50), tem as mesmas dimensões de energia. Use a energia mecânica dada em (3.50) para escrever as integrais (3.53) e (3.54) que calculam o período para  $E \leq 2\varepsilon$  e  $E > 2\varepsilon$ , respectivamente.

#### Exercício 14

Use a integral (3.53) para determinar o período do pêndulo usado para a construção das duas primeiras equações horárias mostradas na Figura 2.5 do Capítulo 2. Depois use a integral (3.54) para determinar o período do pêndulo usado para a construção da terceira equação horária mostrada na mesma Figura 2.5 do Capítulo 2. Use uma massa de 1 kg e demais valores contidos na discussão da Figura 2.5 do Capítulo 2. Note que você precisa calcular a energia mecânica em cada caso. Despreze qualquer tipo de dissipação. Uma integral numérica no Maple deve ser feita usando o seguinte modelo:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{evalf}(\text{Int}(f(x), x = a..b)). \quad (3.63)$$

É imprescindível o uso da primeira letra maiúscula na função “Int”.

## 3.6 Comentários gerais

Em mecânica clássica (Newtoniana), a energia mecânica é um número real, o qual pode variar continuamente em um certo intervalo. No caso do oscilador,  $E \in [0, \infty)$  (veja a Figura 3.2). Entretanto, este quadro muda drasticamente no mundo microscópico. Por exemplo, o potencial harmônico,  $V(x) = kx^2/2$ , é uma primeira aproximação para modelar uma ligação química em uma molécula diatômica: dois núcleos presos por uma mola obedecendo a lei de Hooke. De fato, este modelo consegue explicar o comportamento mecânico de uma molécula diatômica quando seus núcleos estão em movimento em torno de suas posições de equilíbrio com amplitudes muito pequenas. Neste caso, estes movimentos serão oscilações harmônicas. Até aqui,

nada de surpresas. A surpresa aparece quando olhamos para as possíveis energias mecânicas de uma molécula diatômica: seus possíveis valores formam um conjunto discreto, enumerável, ou seja, não são mais contínuas. Os possíveis valores da energia mecânica no mundo microscópico não estão livres para serem escolhidas como no caso clássico. Esta discretização da energia é denominada de **quantização da energia**. As leis Newtonianas deixam de ser válidas no mundo microscópico. Elas são corrigidas pelas leis da Mecânica Quântica. No entanto, todas as leis de conservação que aprendemos no mundo clássico continuam válidas no mundo quântico. Isto reforça ainda mais a importância das leis de conservação.

Veja só onde viemos parar: começamos praticamente do nada, procurando quantificar nossa noção intuitiva sobre esforços. Definimos o trabalho (3.1), apelando para a simplicidade. O trabalho mostrou-se mais ou menos satisfatório quando comparamos seus resultados com a nossa experiência cotidiana. No entanto, aquela definição de trabalho nos revelou ser melhor que a encomenda, pois conseguimos interpretá-la como um mecanismo de troca de energia, Teorema 2, nos possibilitando descobrir energia cinética, (3.6). Além disto, trabalho também nos revelou a energia potencial (3.8), para sistemas conservativos. Em seguida, fizemos duas descobertas magníficas: primeiro descobrimos que a força pode ser obtida da energia potencial. Portanto, energia potencial passa a ter um papel fundamental: ela é responsável pelo comportamento dinâmico de um sistema conservativo. Depois, descobrimos a lei de conservação da energia mecânica, a qual juntamente com a lei de conservação do momentum linear nos possibilita encontrar a solução de muitos problemas importantes em mecânica. Além disto, as leis de conservação são as únicas informações que aprendemos no mundo clássico (sistemas macroscópicos) que continuam válidas no mundo quântico (sistemas microscópicos). Leis de conservação são robustas.

Solte a imaginação e formule muitas questões. Por exemplo, se a soma  $E = T + V$  é uma quantidade conservada em um sistema conservativo, e somente esta soma foi encontrada até o momento como uma quantidade conservada, o que podemos dizer da diferença  $T - V$ ? É fazendo perguntas que descobrimos o novo. A quantidade  $T - V$  tem uma importância fundamental. Se é importante, merece

um nome: **função Lagrangiana**,  $\mathcal{L} = T - V$ .

A função Lagrangiana para o sistema massa-mola (força elástica) é

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (3.64)$$

Agora considere (por um momento)  $x$  e  $\dot{x}$  como variáveis independentes. Desta forma, a função Lagrangiana (3.64) torna-se em uma função de duas variáveis,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x})$ . Assim, podemos calcular as seguintes derivadas (parciais):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx. \quad (3.66)$$

Note que a derivada temporal de (3.65) é  $m\ddot{x}$  e que (3.66) é exatamente a força elástica. Portanto, a segunda lei de Newton pode ser re-escrita na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}. \quad (3.67)$$

Esta forma de escrever a segunda lei de Newton é conhecida por **equações de Euler-Lagrange**.

Considere agora o caso da força gravitacional no sistema massa-Terra. A Lagrangiana deste sistema é

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz. \quad (3.68)$$

Novamente, podemos ver que a segunda lei de Newton pode ser obtida a partir das equações de Euler-Lagrange (3.67), pois

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -mg. \quad (3.70)$$

Até aqui, as equações de Euler-Lagrange (3.67) podem parecer apenas uma outra maneira de escrevermos a segunda lei de Newton. No entanto, esta formulação em termos da Lagrangiana  $\mathcal{L} = T - V$  é muito mais que uma forma alternativa. Similarmente, a energia mecânica no mundo quântico também tem uma importância que vai além de sua definição. Em mecânica Quântica reescrevemos a energia mecânica com o momentum linear no lugar da velocidade ( $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ ) que aparece na energia cinética e trocamos o nome  $E$  por  $H$ ,

$$H = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}p^2 + V. \quad (3.71)$$

A energia mecânica escrita nesta forma (em termos do momentum linear) é conhecida por **Hamiltoniana**. Neste caso clássico, a função Hamiltoniana também pode ser usada para reproduzir a segunda lei de Newton. Para simplificar, vamos considerar uma situação unidimensional,  $V = V(x)$  e  $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i}$ . Assim, podemos ver que

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad (3.72)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dV}{dx} = F_x, \quad (3.73)$$

recuperam a definição de momentum linear ( $p_x = m\dot{x}$ ) e a segunda lei de Newton ( $F_x = \dot{p}_x$ ) para um sistema conservativo ( $F_x = -dV/dx$ ; força é menos o gradiente da energia potencial). As equações (3.72)–(3.73) são conhecidas por equações de Hamilton. A importância das formulações Lagrangianas e Hamiltonianas reside no fato delas serem usadas integralmente em Mecânica Quântica, substituindo as leis de Newton.

# Apêndice A

## Coordenadas polares

Seja  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  um vetor posição qualquer descrito em um sistema coordenadas Cartesianas ortonormais. As componentes Cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem ser escritas em coordenadas esféricas  $r$ ,  $\phi$  e  $\theta$ ,

$$\begin{aligned}x &= r \sin \phi \cos \theta, \\y &= r \sin \phi \sin \theta, \\z &= r \cos \phi,\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde  $0 \leq \phi \leq \pi$  é o ângulo formado pelo vetor posição  $\mathbf{r}$  e o eixo  $Z$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  é o ângulo formado pela projeção do vetor posição  $\mathbf{r}$  no plano  $XY$  e o eixo  $X$ . Note que uma casca esférica de raio  $R$  é descrita em coordenadas esféricas fazendo  $r = R$  constante e variando os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ .

Os elementos infinitesimais de área e volume também são muito utilizados. O elemento de área sobre uma esfera de raio  $r$  pode ser calculado como a área de um retângulo infinitesimal,

$$dA = r \sin \phi \, d\theta \, r \, d\phi = r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta.\tag{A.2}$$

O elemento de volume corresponde ao volume infinitesimal de base  $dA$  e altura  $dr$ ,

$$dV = dA \, dr = r^2 \, dr \, \sin \phi \, d\phi \, d\theta.\tag{A.3}$$

O operador gradiente em coordenadas esféricas é escrito na seguinte forma:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},\tag{A.4}$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta},\tag{A.5}$$

onde os versores  $(\hat{\mathbf{r}}, \phi, \theta)$  também formam uma trinca de versores ortonormais obedecendo a regra da mão direita,  $\hat{\mathbf{r}} = \phi \wedge \theta$  e permutações circulares. O versor  $\hat{\mathbf{r}}$  está na direção e no mesmo sentido

do vetor posição  $\mathbf{r}$ . Por isto, costuma-se denominar este versor de radial. O versor  $\phi$  é tangente ao grande círculo (de raio  $r = \|\mathbf{r}\|$ ) passando pela ponta do vetor  $\mathbf{r}$ . O versor  $\theta$  é tangente ao círculo de raio  $r \sin \phi$ , também passando pela ponta do vetor  $\mathbf{r}$ .

Note que as transformações (A.1) para  $\phi$  constante e igual  $\pi/2$  são as coordenadas polares no plano  $XY$

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta.\end{aligned}\tag{A.6}$$

O operador gradiente (A.5) neste caso é dado por

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.\tag{A.7}$$

A derivada parcial em relação a  $\phi$  não aparece porque esta coordenada está fixa. Assim, a sua derivada parcial a vê como uma constante.