Mecânica – Dinâmica I

Esmerindo Bernardes [1]
L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica
Departamento de Física e Ciência dos Materiais
Instituto de Física de São Carlos
Universidade de São Paulo

16 de Abril de 2015

[1] email: sousa@ifsc.usp.br

Conteúdo

Capítulo 2

Translações

2.1 Os princípios

Que é uma lei (ou princípio)? No que diz respeito às leis da natureza, o dicionário nos diz que uma lei (da natureza) é "aquilo que se impõe ao homem por sua razão, consciência ou por determinadas condições ou circunstâncias". Em outras palavras, uma lei física é uma afirmação fundamental, passível de verificação, formando a base de uma teoria. Portanto, uma teoria é um conjunto de leis.

É importante fazermos um paralelo entre Física e Matemática. Em Matemática, o postulado é o equivalente de uma lei em Física, porém com uma diferença muito importante: um postulado nem sempre está sujeito à verificação. Por estarem sempre sujeitas a verificações, as leis físicas estão sempre em estado de alerta.

A história tem nos mostrado que uma lei física não é imutável. Basta uma única experiência bem sucedida que mostre claramente a violação de uma determinada lei para que ela seja abandonada ou corrigida. Por exemplo, até a década de 60, acreditava-se que um processo físico e a sua imagem (como num espelho) fossem idênticos, isto é, produzissem os mesmos resultados. Esta lei ficou conhecida como a lei da conservação da paridade (sem distinção entre direito e esquerdo; similaridade). Todavia, dois jovens físicos, C. N. Yang e T. D. Lee, fizeram em 1956 uma previsão (ou observação) onde esta lei da conservação da paridade pudesse ser violada em processos de desintegração nuclear (decaimento beta). Esta previsão foi confirmada em 1957 em um belíssimo experimento conduzido por Madame Wu (C. S. Wu). Neste caso, a conservação da paridade foi descartada como uma lei.

Um outro exemplo: a teoria Newtoniana da gravitação é capaz de explicar razoavelmente bem, usando a lei da gravitação Newtoniana, o comportamento mecânico do nosso sistema solar, ou seja, reproduz as leis de Kepler. Todavia, existem alguns efeitos minuciosos que a teoria Newtoniana da gravitação não consegue explicar (reproduzir). Dois deles, o desvio da luz ao passar próxima de um corpo estelar como o nosso sol e a precessão do periélio do planeta Mercúrio (voltaremos a estes dois casos mais tarde), quando calculados com a teoria Newtoniana não concordam plenamente com as observações. A reconciliação entre teoria e experimento só é possível no contexto da relatividade geral de Einstein (1915). Neste caso, a teoria Newtoniana foi corrigida pela relatividade geral. Mesmo as leis de Newton para o movimento translacional que estamos prestes a discutir valém somente para velocidades baixas em comparação com a velocidade da luz. Para velocidades comparáveis à da luz, a mecânica Newtoniana é corrigida pela mecânica relativística (Einstein, 1905), como veremos mais tarde.

Que acontece se alguém viola uma lei? Se você viola uma lei na nossa sociedade atual, você sofre as devidas punições (pelo menos deveria). No entanto, Yang e Lee dividiram um prêmio de um milhão de dólares (prêmio Nobel) ao violarem uma lei em Física. Moral: caso precise quebrar alguma lei, quebre uma lei física! E aproveite o prêmio para praticar um pouco de filantropia. Por outro lado, aprofundamos nossos conhecimentos sobre nossa natureza. Por exemplo, além de corrigir a mecânica Newtoniana, a relatividade especial de Einstein nos revelou a fusão entre espaço e tempo (o tempo não é absoluto como na mecânica Newtoniana) bem como entre energia e massa ($E = mc^2$). A relatividade geral nos revelou que a matéria (e/ou energia) diz ao espaço-tempo como se deformar (curvar e torcer) e, por sua vez, o espaço deformado dita à matéria como ela deve se mover. Em outras palavras, evoluímos, ficamos mais próximos da humanidade.

Estudamos até o momento o movimento de um ponto material. Sabemos construir sua trajetória usando curvas espaciais em um espaço Euclidiano tridimensional. Também sabemos determinar velocidade e aceleração, bem como o espaço percorrido, em qualquer instante de tempo. Portanto, é hora de passarmos ao estudo das leis físicas que determinam e controlam o movimento de corpos macroscópicos (que não sejam muito mais massivos que o Sol) com velocidades muito inferiores à velocidade da luz no vácuo (aproximadamente 300 000 km/s). Estas leis são conhecidas por "leis de Newton" do movimento. As duas restrições mencionadas (corpos macroscópicos de baixa massa e com baixas velocidades) são importantes, pois as leis Newtonianas deixam de ser válidas em três ocasiões: (1) no mundo microscópico de dimensões atômicas (neste caso as leis Newtonianas são corrigidas pelas leis da física quântica), (2) quando as velocidades envolvidas são comparáveis à velocidade da luz no vácuo (neste caso as leis Newtonianas são corrigidas pelas leis da relatividade especial de Einstein) e (3) para corpos extremamente massivos , como estrelas de nêutrons (neste caso as leis Newtonianas são corrigidas pela relatividade geral de Einstein).

A seguir, apresentaremos os dois princípios que governam o movimento. Iremos reservar a palavra lei (sinônimo de princípio) para as três leis Newtonianas, as quais são equivalentes aos dois princípios apresentados abaixo. Deve ser enfatizado que estas leis têm sido submetidas a verificações refinadas por séculos sem qualquer contradição, exceto no mundo microscópico, ou no regime de altas velocidades, ou no caso de corpos extremamente massivos.

Princípio 1
Existem certos referenciais, denominados de inerciais (no sentido de incapacitados), com as seguintes propriedades.

1. Cada corpo isolado move-se em uma linha reta neste referencial inercial.
2. A noção de tempo pode ser quantificada: uma unidade de tempo pode ser definida através do movimento uniforme de um corpo isolado neste referencial inercial.
3. Cada corpo isolado move-se com uma velocidade constante neste referencial inercial.

Note que estas três propriedades definem um referencial inercial. Note também que um corpo isolado não tem aceleração em um referencial inercial. Assim, podemos definir, pelo menos operacionalmente, tempo como sendo um parâmetro t proporcional ao comprimento s da trajetória de um corpo isolado (velocidade constante) em um referencial inercial:

$$\Delta s(t) = \int_0^{\Delta t} v\, dt = v\, \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v}. \tag{2.1}$$

Naturalmente, qualquer outro parâmetro t' definido como tempo, usando um outro corpo isolado, estará relacionado de forma linear com o primeiro parâmetro t, pois os comprimentos de duas trajetórias quaisquer são sempre proporcionais. Note também que podemos medir apenas intervalos de tempo, proporcionais ao comprimento da trajetória, e nunca os valores absolutos do "tempo".

Como vimos anteriormente, o comprimento de uma trajetória é calculado através de uma integral. Assim, usar o comprimento de uma trajetória para medir intervalos de tempo não é prático. Desde há muito tempo, temos usado o movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo, praticamente constante, como um instrumento (relógio) para medir intervalos de tempo. Qualquer processo repetitivo, com uma frequência praticamente constante, pode ser usado como um relógio. Os relógios mais precisos que dispomos no momento são os chamados "relógios atômicos", baseados na impressionante regularidade de certos processos nucleares (portanto, pertencentes ao domínio da física quântica). Em um relógio destes, o erro é de apenas um segundo em um milhão de anos. Um fato importante: embora não sabemos exatamente o que é o tempo, sabemos operar com ele, isto é, sabemos medir intervalos de tempo.

Princípio 2
Considere dois corpos isolados dos demais, mas não-isolados entre si, sendo observados em um referencial

inercial. Isto significa que estes dois corpos poderão interagir entre si. Em geral, não podemos afirmar que o movimento deles será uniforme, pois, podendo interagir, eles poderão alterar suas velocidades, as quais denotaremos por $\vec{v}_i(t)$, $i = 1, 2$. Então as duas propriedades seguintes se verificam.

1. Existem experimentos (colisões) envolvendo estes dois corpos cujos resultados podem ser expressados como

$$\vec{v}_1(t) + \mu_{12}\vec{v}_2(t) = \vec{P}_{12}. \tag{2.2}$$

Caso estes experimentos sejam realizados usando o corpo 1 e um terceiro corpo 3, ou usando o corpo 2 e um terceiro corpo 3, sob condições idênticas, resultados similares são obtidos,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) + \mu_{12}\vec{v}_2(t) &= \vec{P}_{12}, \\ \vec{v}_2(t) + \mu_{23}\vec{v}_3(t) &= \vec{P}_{23}, \\ \vec{v}_3(t) + \mu_{31}\vec{v}_1(t) &= \vec{P}_{31} \end{aligned} \tag{2.3}$$

nos quais, os escalares μ_{ij} e os vetores $\vec{P}_{ij}$ são constantes, isto é, são independentes do tempo. Mais importante, as constantes escalares μ_{ij} são positivas e não dependem do experimento e nem do referencial inercial. Elas dependem apenas dos dois corpos envolvidos. A situação é bem diferente para as constantes vetoriais $\vec{P}_{ij}$: elas dependem do experimento, do referencial inercial e dos dois corpos envolvidos.

2. As constantes (escalares) $\mu_{ij} > 0$, obtidas em experimentos diferentes, estão relacionadas da seguinte forma:

$$\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} = 1. \tag{2.4}$$

Algumas observações são necessárias. Observe que devido ao fato das constantes $\mu_{ij} > 0$ obedecerem à condição (2.4), elas podem ser escritas numa forma racional $\mu_{ij} = m_j/m_i$, com $m_i > 0$ (faça o Exercício 2). Em termos destas novas constantes, os resultados (2.3) podem ser re-escritos como

$$m_i\vec{v}_i(t) + m_j\vec{v}_j(t) = \vec{p}_{ij}, \quad \vec{p}_{ij} = m_i\vec{P}_{ij}. \tag{2.5}$$

A quantidade vetorial

$$m_i\vec{v}_i(t) \equiv \vec{p}_i(t) \tag{2.6}$$

é denominada de **momentum linear** (ou quantidade de movimento) do i-ésimo corpo. Note que (2.6) é uma definição. A constante vetorial $\vec{p}_{ij} = \vec{p}_i(t) + \vec{p}_j(t)$ é o momentum linear total dos dois corpos envolvidos em cada experimento e é uma constante quando estes dois corpos estão isolados. A constante $m_i > 0$ é denominada de **carga inercial** (ou massa inercial, ou simplesmente massa, por razões históricas). Note que apenas a razão μ_{ij} é determinada pelo experimento. Portanto, podemos determinar apenas razões entre massas, $\mu_{ij} = m_j/m_i$. Isto significa que temos de eleger um corpo padrão, cuja massa deve ser assumida como uma unidade de massa, digamos $m_i = 1$ kg. Então a massa $m_j = \mu_{ij}$ é determinada univocamente do experimento. Novamente, mesmo não sabendo o que é massa, somos capazes de operar com ela, escolhendo um padrão e realizando comparações.

Como nestes experimentos o momentum linear total $\vec{p}_{ij} = \vec{p}_i(t) + \vec{p}_j(t)$ é constante, então, derivando os dois lados desta expressão, sabendo que as massas m_i são constantes, temos

$$m_i\vec{a}_i(t) + m_j\vec{a}_j(t) = 0. \tag{2.7}$$

Apesar dos dois corpos estarem isolados, eles interagem entre si no momento da colisão. Esta interação produz mudanças nas velocidades (ou na quantidade de movimento) acarretando na relação (2.7). Naturalmente, as acelarações em (2.7) são diferentes de zero apenas durante o (curto) intervalo de tempo da colisão. Como temos apenas dois corpos, isto significa que cada parcela em (2.7) deve ser idêntica à interação sofrida por um dos corpos no momento da colisão. Esta interação, capaz de mudar o vetor velocidade, denominaremos de **força**. Assim, podemos concluir que uma força $\vec{f}_i(t)$ agindo num objeto de massa m_i (constante) altera seu movimento de acordo com

$$\vec{f}_i(t) = m_i\vec{a}_i(t) = \frac{d}{dt}\vec{p}_i. \tag{2.8}$$

No nosso experimento, esta é a forma com que a força devida ao j-ésimo objeto atua sobre o i-ésimo objeto durante a colisão. Note que, ao contrário da definição (2.6) do momentum linear, a Eq. (2.8) **não** é uma definição de força. A Eq. (2.8) é o resultado de uma observação experimental. Então, o resultado experimental (2.7) pode ser re-escrito na forma

$$\vec{F}_R = \vec{f}_{ij}(t) + \vec{f}_{ji}(t) = 0. \tag{2.9}$$

Note que $\vec{f}_{ij}(t) = m_i\vec{a}_i(t)$ é a força que o corpo j faz no corpo i e $\vec{f}_{ji}(t) = m_j\vec{a}_j(t)$ é a força que o corpo i faz no corpo j, portanto elas atuam em corpos diferentes. Ainda mais, a soma vetorial nula em (2.9) implica em $|\vec{f}_{ij}| = |\vec{f}_{ji}|$ e $\vec{f}_{ij} // -\vec{f}_{ji}$ (vetores antiparalelos). Consequentemente, (2.9) expressa a terceira lei de Newton (ação e reação). Aprendemos também com estes experimentos que é necessário um agente físico (força) para alterar o estado de movimento de um corpo material e que esta força é a taxa de variação do momentum linear (segunda lei de Newton).

Vimos também, através do Princípio 2, que tanto o momentum linear total em (2.5) quanto a força total (ou resultante) em (2.9) são obtidos somando todas as contribuições individuais, soma esta que é uma combinação linear de vetores. Em Física, quantidades que são determinadas através de combinações lineares de outras são ditas satisfazerem o princípio de superposição.

E as famosas três leis de Newton para o movimento? Onde estão? Elas estão contidas nestes dois princípios. A primeira lei de Newton, ou lei da inércia está contida no Princípio 1. Uma partícula isolada em um referencial inercial ou está em repouso ou está em movimento uniforme. Note que não estamos usando o conceito de forças no Princípio 1. Não devemos esquecer que o Princípio 1 também nos dá uma definição operacional de tempo.

A segunda lei de Newton está contida no Princípio 2,

$$\vec{F}_R = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{p} = m\vec{v}, \tag{2.10}$$

onde $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}$ para massas constantes. Em geral, a força resultante $\vec{F}_R$ é conhecida independentemente do momentum linear, ou seja, a segunda lei de Newton não é uma mera definição de força. Ela representa um fato experimental: uma força muda o estado de movimento de uma massa m de acordo com a expressão em (2.10). A terceira lei de Newton também está contida no Princípio 2 [veja a Eq. (2.9)].

Note o papel do momentum linear na definição de força (2.10): se a força é nula, então o momentum linear é constante. Uma quantidade constante no tempo é denominada de quantidade conservada. Então temos nosso primeiro teorema, denominado de teorema de conservação do momentum linear:

Teorema 1
Se a força resultante em um sistema físico é nula em um referencial inercial, então o momentum linear total deste sistema é conservado (não varia no tempo).

A utilidade de uma quantidade conservada reside no fato dela possuir os mesmos valores em tempos diferentes. Por exemplo, a quantidade de movimento total $\vec{p}_{ij}(t)$ em (2.5) é conservada no nosso experimento. Então, se denotarmos por t_1 um tempo antes da colisão e por t_2 um tempo depois da colisão, teremos $\vec{p}_{ij}(t_1) = \vec{p}_{ij}(t_2)$, a qual pode ser usada para determinar alguma quantidade desconhecida contida nela (faça o Exercício 3).

É importante frisar que todas as medidas (experimentos) estão sendo realizadas em um referencial inercial. Caso contrário, a segunda lei de Newton (2.10) não é válida, ou seja, em um referencial não-inercial a segunda lei de Newton precisa ser corrigida (veremos isto ao estudarmos as leis que governam o movimento rotacional). Naturalmente, o momentum linear tem um papel importante na mecânica Newtoniana. Esta importância é devida ao Teorema 1 sobre a conservação do momentum linear. Portanto, podemos dizer que a sua definição em (2.6) está justificada pelo seu conteúdo físico.

Note que o Teorema 1 é uma consequência direta da relação (2.10) entre força e momentum linear. Além disto, a relação (2.10) permite que a segunda lei de Newton possa ser usada para descrever sistemas com massas variáveis, como em um foguete, por exemplo.

Qual é a importância da massa m que aparece na quantidade conservada em (2.5)? Lá, o experimento nos revelou que o momentum linear total do sistema (isolado) formado apenas pelos corpos i e j é constante. Se fizermos $m_j = 0$, então resulta que $\vec{v}_i$ é também uma constante, ou seja, o corpo i está em movimento uniforme. No entanto, se este mesmo corpo i também tivesse uma massa nula, $m_i = 0$, então a sua quantidade de movimento seria nula. Isto nos sugere que é necessário que um corpo tenha massa não-nula para poder ter uma quantidade de movimento não-nula. Desta forma, podemos afirmar que a condição de estar em movimento uniforme em um referencial inercial depende exclusivamente de ter uma massa não-nula. Vale mencionar que até a época de Newton (até o Séc. 16, portanto um pouco mais de 2000 anos depois de Aristóteles) acreditava-se que era necessário uma força para manter um corpo em movimento, mesmo em movimento uniforme. Assim, a massa m em (2.10) passou a ser conhecida também por massa inercial. Em (2.10) podemos ver que aumentando a massa, devemos aumentar também a intensidade da força para manter a intensidade da aceleração constante. Isto significa que temos de esforçar mais para mudar o estado de movimento de um corpo com uma maior massa. Esta resistência em mudar o estado de movimento é quantificada pela massa inercial. Em outras palavras, a massa inercial mede a resistência de um corpo em mudar seu estado de movimento. A massa inercial é uma propriedade intrínsica de qualquer objeto.

Qual é a importância do vetor força, definido em (2.8)? Qual é o seu conteúdo físico? Observamos que na imensa maioria dos casos é a força que é conhecida em primeira mão, independentemente da aceleração. Veremos vários exemplos logo em seguida. Em geral, para massas constantes, esta força dependerá da posição, da velocidade e do próprio tempo,

$$\vec{F}\big(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}; t\big) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{2.11}$$

Assim, esta equação (segunda lei de Newton) envolve o vetor posição $\vec{r}$ e suas duas primeiras derivadas $d\vec{r}/dt$ e $d^2\vec{r}/dt^2$. É por isto que as quantidades cinemáticas (posição, velocidade e aceleração) terminam na aceleração.

E o que nós queremos de um sistema físico do ponto de vista da mecânica? Queremos caracterizar o seu comportamento mecânico. Que significa isto? Isto significa que dado uma força resultante, a posição inicial $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ e a velocidade inicial $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$, queremos determinar a posição $\vec{r}(t)$ em qualquer instante de tempo posterior ao instante inicial t_0. Isto significa que (2.11) é uma equação que determina $\vec{r}(t)$. Como aparece nela também as derivadas de $\vec{r}(t)$, então esta equação é uma equação diferencial para $\vec{r}(t)$. É uma equação diferencial de segunda ordem, pois a derivada de ordem maior é a derivada segunda no tempo. A pergunta que temos de responder é: dado o lado esquerdo de (2.11), isto é, a força externa resultante, e esta informação deve ser obtida de experimentos, quem é $\vec{r}(t)$ satisfazendo as condições iniciais impostas sobre a posição e a velocidade? Note que (2.11) é uma equação diferencial vetorial, ou seja, há de fato três equações diferenciais a serem resolvidas, uma para cada componente nos eixos X, Y e Z (faça o Exercício 4).

Bem, temos uma equação diferencial de segunda ordem a ser resolvida para encontramos as componentes do vetor posição em função do tempo. Esta equação é o conteúdo da segunda lei de Newton. Conhecendo as forças que agem em um determinado sistema, bem como técnicas matemáticas necessárias para resolver uma equação diferencial de segunda ordem, determinamos o vetor posição. Então, devemos perguntar: a equação diferencial (2.11) admite uma solução? se admitir, esta solução é única? Sim, sob certas condições, a equação diferencial (2.11) admite uma solução única. É necessário apenas fornecermos duas informações [note que a ordem da equação diferencial (2.11) também é dois]. Estas duas informações podem ser, por exemplo, os valores da posição $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ e da velocidade $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ em algum instante inicial t_0. Dado estas informações, denominadas de condições iniciais, existirá uma solução única, $\vec{r}(t)$, $t >= t_0$, para a equação diferencial (2.10). Trabalharemos alguns exemplos em breve.

Então estamos numa posição bastante confortável. Dado as condições iniciais, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ e $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$, determinamos $\vec{r}(t)$ e, consequentemente, $\vec{v}(t)$ [a aceleração $\vec{a}(t)$ já está determinada em (2.11)]. Isto significa que podemos prever todo o comportamento do nosso sistema em qualquer instante de tempo $t >= t_0$. Desta forma, podemos afirmar que a física Newtoniana é completamente determinística. Mas existe alguma área da Física que não é determinística? Sim, há pelo menos duas: a mecânica estatística, a qual é muito importante em termodinâmica, e a física quântica, a qual descreve os fenômenos do mundo microscópico.

Embora a mecânica Newtoniana (também denominada de mecânica clássica) seja determinística, ela pode apresentar comportamentos caóticos. Para entendermos este comportamento caótico devemos perguntar o quão estável são as soluções de (2.11). Para examinarmos esta questão, suponha que temos a disposição duas soluções para (2.11): uma solução $\vec{r}_1(t)$ determinada pelas condições iniciais $\vec{r}_1(t_0)$ e $\vec{v}_1(t_0)$, e uma segunda solução $\vec{r}_2(t)$ determinada pelas condições iniciais $\vec{r}_2(t_0) = \vec{r}_1(t_0) + \delta\vec{r}(t_0)$ e $\vec{v}_1(t_0)$. O termo $\delta\vec{r}(t_0)$ na condição inicial $\vec{r}_2(t_0)$ significa que $\vec{r}_2(t_0)$ está muito próxima de $\vec{r}_1(t_0)$. Assim, é razoável supor que as duas soluções $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$ estarão muito próximas, $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t)+$

$\delta\vec{r}(t)$, pelo menos nos instantes próximos a t_0. Mas a medida que o tempo passa, como será o comportamento de $\delta\vec{r}(t)$? Aumentará indefinidamente? Permanecerá pequeno? ou diminuirá até anular-se? Em outras palavras, estas duas trajetórias com condições iniciais muito próximas permanecerão sempre muito próximas? ou a separação entre elas poderá oscilar? ou quem sabe aumentar indefinidamente? Uma solução de uma equação diferencial é denominada de solução estável se a separação $\delta\vec{r}(t)$ aproximar-se de zero ou permanecer constante e de solução instável quando esta separação aumentar indefinidamente com o tempo t. Vamos pensar em termos práticos: em geral é impossível fornecer as condições iniciais com uma precisão absoluta, pois nossos instrumentos de medidas sempre possuem uma precisão limitada. Portanto, o estudo da estabilidade das soluções de equações diferenciais é indispensável e é hoje uma área de pesquisa em desenvolvimento.

Sistemas caóticos, pois é, vamos a eles. Suponha por um momento que exista um sistema tal que dado as condições iniciais a (uma notação simplificada para os valores da posição e da velocidade inicial) ele atinja um estado A (ou seja, depois de certo tempo ele terá uma posição e uma velocidade final). Suponha também que dado outra condição inicial b, ele atinja o estado B. Então se houver uma região onde as condições iniciais a e b estejam misturadas, o sistema pode exibir instabilidades (no sentido definido acima). De fato há sistemas onde as condições estão inextrincavelmente misturadas: em cada sub-região, não importa o quão pequena ela seja, sempre haverá condições iniciais dadas pela superposição de a e b. Estes sistemas são denominados de caóticos. Isto significa que precisaremos conhecer as condições iniciais em um sistema caótico com uma precisão infinita para que o estado final possa ser predito com exatidão, o que é impossível.

2.1.1 Exercícios

Exercício 1
Quais são as inconsistências presentes na forma tradicional de apresentação das leis de Newton? Como estas inconsistências são resolvidas pelos Princípios 1 e 2?

Exercício 2
Escreva as constantes $\mu_{ij} > 0$ numa forma racional $\mu_{ij} = m_j/m_i$, com $m_i > 0$ e mostre que elas satisfazem a relação (2.4). Estas constantes positivas $m_i > 0$ são denominadas de "massas".

Exercício 3
Sabendo que as quantidades $\vec{P}_{ij}$ em (2.3) são conservadas, determine as constantes μ_{ij} em termos das velocidades antes e depois das colisões, as quais são medidas (conhecidas). Sugestão: se uma quantidade (vetorial ou escalar) $A(t)$ é conservada, então $A(t_1) = A(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$.

Exercício 4
Faça um paralelo entre uma equação diferencial e uma equação polinomial. O que você quer determinar em ambos os casos?

2.2 As forças da natureza

Exemplos de forças? sim podemos examinar alguns exemplos. Em muitas situações práticas, principalmente nas engenharias Mecânica e Civil, as forças encontradas são constantes, $\vec{F} = \vec{F}_0$, isto é, independentes da posição, velocidade e do tempo. Geralmente estas forças constantes são forças de contato entre corpos, geralmente de origem eletromagnética. Como a força resultante é constante (independente do tempo, da posição e da velocidade), o vetor aceleração em (2.11) fica determinado e é também uma constante, $\vec{a} = \vec{F}_0/m$. Desta forma, a equação diferencial resultante da segunda lei de Newton [veja a Eq. (2.11)] que temos de resolver é

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m}. \tag{2.12}$$

Naturalmente, com uma integração, podemos determinar o vetor velocidade. Finalmente, integrando o vetor velocidade, podemos obter o vetor posição. Faça tudo isto usando componentes.

A força elástica é também uma força de contato, de origem elétrica, mas não é constante. Ela mede como um corpo reage a deformações (compressões ou distensões). Não havendo deformações permanentes, o corpo reage no sentido de restaurar a deformação sofrida. Vamos quantificar isto. Seja x a deformação sofrida ao longo do eixo X. Por simplicidade vamos considerar que a deformação seja apenas ao longo do eixo X. Então, experimentos nos revela que a força restauradora produzida pelo corpo em resposta a esta deformação (pequena) é

$$\vec{F}(x) = -k\,x\,\hat{\imath}, \tag{2.13}$$

na qual k é uma constante característica do material (independente de sua massa) e é determinada experimentalmente. Esta força é conhecida como lei de Hooke. Assim, usando a segunda lei de Newton (2.11) e a lei de Hooke (2.13), devemos encontrar uma função $x(t)$ cuja derivada segunda seja proporcional a ela mesma,

$$-\,k\,x = m\frac{d^2}{dt^2}x, \tag{2.14}$$

ou

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{k}{m}\,x(t). \tag{2.15}$$

A solução desta equação diferencial será discutida mais adiante.

Vejamos mais alguns exemplos importantes. Sim, podemos ver agora alguns exemplos de forças que não são forças de contato. Por exemplo, as forças elétrica e magnética. Coulomb observou que a força elétrica entre duas cargas elétricas Q e q é

$$\vec{F}_e = C_e\frac{Qq}{r^2}\hat{r} = C_e\frac{Qq}{r^3}\vec{r}, \tag{2.16}$$

na qual $\hat{r}$ é um versor ao longo da reta que une as duas cargas (veja a Figura 2.1). Lembre-se que cargas elétricas podem ser positivas ou negativas.

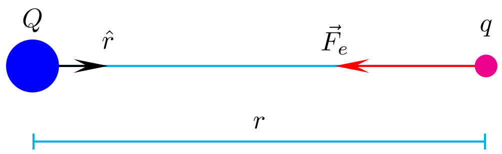

Figura 2.1: Duas cargas elétricas exercem uma força entre elas, como foi observado primeiramente por Coulomb.

Para simplificar, podemos colocar uma das duas cargas na origem, digamos Q. Então a distância r entre elas é $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, sendo $\vec{r} = (x, y, z)$ o vetor posição da outra carga q. Se a carga Q permanecer fixa na origem e se a carga q for suficientemente pequena (infinitesimalmente pequena) para não perturbar Q, então podemos usar a segunda lei para determinar o vetor posição de q em função do tempo. Nestas condições, esta carga q, a única carga em movimento, é denominada de carga de prova (ou teste). Neste caso, temos uma carga de prova q movimentando-se numa região onde ela sente uma força elétrica criada pela carga Q (denominada de fonte).

Para não termos de falar sobre a fonte ao determinarmos o movimento da carga de prova, podemos introduzir um novo vetor,

$$\vec{E} = C_e\frac{Q}{r^2}\hat{r}, \tag{2.17}$$

denominado de campo elétrico, tal que $\vec{F}_e = q\,\vec{E}$. De forma similar, podemos ter a presença de um vetor campo magnético $\vec{B}$, o qual também produz uma força em um corpo com carga elétrica q movimentando-se com velocidade $\vec{v}$,

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v}\times\vec{B}, \tag{2.18}$$

na qual o campo magnético pode depender da posição e do tempo. Esta força é conhecida como força de Lorentz. Portanto, em geral, o movimento de uma carga q será determinado pela segunda lei de Newton (2.11),

$$\vec{F}_R = q\,\vec{E}(\vec{r},t) + q\,\dot{\vec{r}}\times\vec{B}(\vec{r},t) = m\ddot{\vec{r}}. \tag{2.19}$$

Faça o Exercício 18 para perceber como a segunda lei irá fornecer a trajetória desta carga elétrica.

Estas duas forças, elétrica e magnética, estão presentes em quase tudo ao nosso redor, como em tubos de televisores, equipamentos médicos, aceleradores de partículas, câmaras para resfriamento de átomos e moléculas, etc. Também vale ressaltar que estas duas forças atuam a distância, isto é, não precisam de contato. Outra observação importante (ou intrigante?): até o presente, ainda não observamos a presença de cargas magnéticas na nossa natureza.

Outra força que estamos talvez ainda mais habituados é a força gravitacional. Ela é muito parecida com a força elétrica entre duas cargas elétricas. São tão parecidas que podemos usar a mesma Figura 2.1, trocando as cargas elétricas por cargas gravitacionais, as quais serão denotadas por M_g e m_g. Newton observou que a força entre as cargas gravitacionais M_g e m_g é dada por

$$\vec{F}_g = -C_g\frac{M_g m_g}{r^2}\hat{r} = m_g\vec{E}_g. \tag{2.20}$$

Em (2.20), da mesma forma que a carga Q é a fonte do campo elétrico $\vec{E}$ em (2.17), M_g é a fonte do campo gravitacional $\vec{E}_g$. Estas cargas gravitacionais não devem ser confundidas com as cargas inerciais introduzidas no Princípio 2. De fato, as constantes m em (2.5) e em (2.10) são cargas inerciais, pois elas nos permitem relacionar forças que não são de natureza eletromagnética ou gravitacional com aceleração. Para sermos completos, também devemos tomar cuidados para não confundirmos cargas elétricas com cargas inerciais e gravitacionais.

Outra observação importante: a expressão (2.20) é válida somente para uma fonte com o formato esférico de raio R, com a distância $r > R$ medida desde o centro da fonte até a carga gravitacional de prova m_g. Por exemplo, podemos considerar a Terra como esférica com uma boa aproximação. Neste caso, fazendo $r = R$, com R sendo o raio médio da Terra, o campo gravitacional $\vec{E}_g(R)$ terá o seu módulo constante na superfície da Terra (onde nos estamos neste momento). Vamos agora levar esta situação para a segunda lei de Newton (2.11),

$$m_g\vec{E}_g(R) = m_I\vec{a}, \tag{2.21}$$

na qual fizemos $m = m_I$ para ressaltar o caráter inercial da massa m, como definido no Princípio 2. Agora vem a parte mais interessante. Tanto o valor do campo gravitacional na superfície da Terra, $\vec{E}_g(R)$, quanto a aceleração de uma carga gravitacional m_g com uma massa inercial m_I, colocada próxima à superfície da Terra, digamos em cima do nosso edifício central conhecido como E1, podem ser medidas independentemente. Surpreendentemente, resulta que $\vec{a} = \vec{E}_g(R)$. Isto significa duas coisas: **(1) que a carga gravitacional é igual, dentro da precisão experimental, à carga inercial, $m_g = m_I = m$ e (2) todos os corpos caem com a mesma aceleração na superfície da Terra**. Esta igualdade entre massa gravitacional e massa inercial foi conjecturada por Galileu, verificada por Newton e muitos outros desde então. A precisão deste experimento chega hoje a uma parte em 10^{16}.

Esta igualdade entre massa inercial (capaz de produzir uma quantidade de movimento) e massa gravitacional (capaz de produzir e sentir uma força gravitacional) implica que todos os corpos são atraídos pela Terra com a mesma aceleração, independentemente de suas massas (gravitacionais ou inerciais). Assim, no vácuo, uma bolinha de tênis e o porta-aviões Minas Gerais gastam o mesmo tempo para percorrerem a mesma distância em direção ao centro da Terra (queda livre). Este fato também está entre os mais marcantes acerca da nossa natureza. Vale mencionar também que não há uma igualdade entre massa inercial (ou gravitacional) e carga elétrica. Também não há cargas magnéticas na nossa natureza, ou pelo menos nunca foram vistas.

Note também que a igualdade $m_g = m_I = m$ implica que o campo gravitacional $\vec{E}_g$ tenha dimensões de aceleração. Na superfície da Terra, o seu módulo é $E_g(R) = g = 9.81$ m/s^2. Mais uma observação igualmente intrigante: no caso da força gravitacional, por mais estranho que possa parecer, é a aceleração E_g que é conhecida em primeira mão.

Falando em forças, quais são as forças conhecidas na nossa natureza? A **força gravitacional** com certeza é a mais popular. Na física Newtoniana, ela é responsável pela atração entre duas massas. Ela atua a distância e de forma instantânea. No entanto, ela, segundo a Relatividade Geral, não é exatamente uma força: ela é o efeito de estarmos em movimento em um espaço-tempo curvo. Falaremos mais sobre isto mais adiante. Temos também a **força eletromagnética**. Ela também atua a distância mas, diferentemente da força gravitacional Newtoniana, ela não age instantaneamente, pois o efeito de uma carga sobre uma outra, colocadas no vácuo, propaga-se na velocidade da luz. A força eletromagnética é responsável tanto por fenômenos macroscópicos quanto microscópicos. Ela é a única força que sobrevive nestes dois mundos.

Estas duas primeiras forças são de longo alcance, ou seja, a dependência com o inverso do quadrado da distância possibilita que elas sejam sentidas mesmo quando os corpos estão separados por uma distância considerável. Vejamos algumas distâncias interessantes (em ordens de grandeza). A distância média entre a Terra e o Sol é de aproximadamente 10^{11} m, uma distância denominada de "unidade astronômica". O diâmetro do Sol é 1.3×10^9 m. A distância Terra-Lua é 3.8×10^8 m. O diâmetro da Lua é $1/4$ do diâmetro da Terra que é 1.28×10^7 m. Portanto, a razão entre os diâmetros do Sol e da Terra é cerca de 111. A razão entre a distância Terra-Sol e o diâmetro do Sol é da ordem de 100. Façamos estas mesmas análises para o átomo de hidrogênio. A distância elétron-próton no átomo de hidrogênio é aproximadamente 10^{-15} m. O diâmetro do próton é da ordem de 10^{-10} m. Portanto, temos agora 10^5 para a razão entre a distância elétron-próton pelo diâmetro do próton. Note que temos muito mais (proporcionalmente) espaço vazio no interior do átomo de hidrogênio do que no espaço entre o Sol e a Terra.

Além das forças gravitacional e eletromagnética, temos mais duas outras e somente duas: a **força forte** e a **força fraca**. A força forte mantém os prótons e nêutrons unidos no interior do núcleo atômico. Ela atua a distância e é de curto alcance, restringindo-se ao interior do núcleo (cerca de 10^{-15} m). A força fraca atua entre partículas elementares confinadas em regiões muito pequenas, como aquelas que existem no interior de prótons e nêutrons (numa região menor que 10^{-15} m). Ela também é de curto alcance. Ela é responsável por alguns processos radiotivos como o decaimento beta (um núcleo do átomo de lítio).

É muito interessante fazermos uma comparação entre as intensidades destas quatro forças fundamentais. Qual delas você acha que tem a maior intensidade relativa? Vamos estabelecer intensidade igual a 1 para a força nuclear forte. Então a força nuclear fraca terá uma intensidade relativa de 10^{-5}. A força eletromagnética terá uma intensidade relativa de 10^{-2}. A força gravitacional, surpreendentemente, terá uma intensidade relativa de 10^{-39}. Faça o Exerçício 6.

2.2.1 Exercícios

Exercício 5
Use $R = 6.37 \times 10^6$ m e $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg como o raio médio e a massa da Terra para calcular o valor do campo gravitacional [definido em (2.20)] na superfície da Terra. Faça a mesma coisa para o Sol ($R = 6.96 \times 10^8$ m e $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg), para a Lua ($R = 1.74 \times 10^6$ m e $M = 7.35 \times 10^{22}$ kg) e para uma estrela de nêutrons ($R = 1.50 \times 10^4$ m e $M = 2.80 \times 10^{30}$ kg). Compare os valores. Qual destes corpos devemos evitar de passar por perto?

Exercício 6
Calcule as forças elétrica (2.16) e gravitacional (2.20) entre um próton (1.67×10^{-27} kg) e um elétron (9.11×10^{-31} kg) no átomo de hidrogênio ($r = 5 \times 10^{-11}$ m). Use $C_e = 8.99 \times 10^9$ N·m^2/C^2 e $C_g = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2. Compare os valores.

2.3 Trajetórias

Antes de mais nada, é importante ficar claro que para haver interação é necessário haver dois ou mais corpos e que esta interação é representada matematicamente pelo vetor "força". A relação entre força e movimento é caracterizada pela segunda lei de Newton. A seguir vamos considerar algumas aplicações importantes da segunda lei de Newton (2.11) para a obtenção de algumas trajetórias importantes. Nestas aplicações queremos enfatizar a importância de uma equação diferencial para compreendermos a dinâmica proveniente da interação entre dois ou mais corpos. Não apresentaremos técnicas sofisticadas para a resolução de equações diferenciais por falta de espaço. Entretanto, procuraremos desenvolver nossa habilidade em adivinhar a solução de uma determinada equação diferencial, uma das melhores técnicas. Além disto, procuraremos usar rotinas em computação algébrica para resolver nossas equações diferenciais. Encare isto, por enquanto, como a utilização de uma calculadora para efetuar operações aritméticas e outros cálculos envolvendo funções transcendentais como funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Procuraremos desenvolver nossas aplicações em condições ideais (no vácuo) e também, sempre que possível, na presença de forças dissipativas como atrito e resistência de um fluido (gases e líquidos). Ao introduzirmos estas forças dissipativas estaremos trabalhando com um dos procedimentos mais frutíferos em ciência: a idéia da elaboração de modelos. Certamente uma descrição detalhada destas forças dissipativas seria muito difícil ou mesmo impossível. Imagine como deve ser o mecanismo de ação de uma força de atrito, a qual resulta de interações eletromagnéticas entre duas superfícies em contato. Felizmente fomos capazes, enquanto seres inteligentes, de superar tais dificuldades aparentes. Criamos a idéia do modelo. Um modelo não procura reproduzir todos os detalhes de um determinado fenômeno, ao contrário, ele procura incorporar apenas as características mais relevantes. Em compensação, haverá constantes arbitrárias nestes modelos que deverão ser determinadas através de experimentos cuidadosamente preparados. Por exemplo, na lei de Hooke para a deformação elástica, há a constante elástica (ou constante de mola) que precisa ser conhecida para cada material antes que ela (a lei de Hooke) possa ser usada.

Também é fundamental que você se envolva profundamente, a fim de procurar entender todos os aspectos discutidos nestas aplicações, fazendo e refazendo os trabalhos manuais e computacionais, sempre com um olhar inquisidor. Melhor que apresentar um conjunto de exercícios para treiná-lo a fazer uma boa prova, espero que possamos apresentar um conjunto de aplicações que ilustrem bem o comportamento crítico e analítico de um bom profissional. Estas aplicações serão também fundamentais para estabelecermos as leis de conservação, nosso próximo assunto.

2.3.1 Forças constantes

Como já mencionamos, forças constantes, isto é, independentes da posição e do tempo, são importantes. As forças em uma determinada estrutura mecânica são constantes. A força gravitacional na superfície da Terra é praticamente constante. Vamos considerar um corpo de massa m constante sujeito a uma força $\vec{F}_0$ também constante na ausência de efeitos dissipativos. De acordo com a segunda lei (2.11), sendo a força uma constante, então a aceleração também será uma constante. Portanto, a equação diferencial que temos de resolver para encontrarmos a equação horária $\vec{r}(t)$ deste corpo é

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \vec{a}_0, \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{F}_0}{m}. \tag{2.22}$$

Note que estamos usando uma notação vetorial. Como há três direções independentes, portanto temos de resolver em geral três equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) &= a_{x0}, \quad a_{x0} = \frac{F_{x0}}{m}, \\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) &= a_{y0}, \quad a_{y0} = \frac{F_{y0}}{m}, \\ \frac{d^2}{dt^2}z(t) &= a_{z0}, \quad a_{z0} = \frac{F_{z0}}{m}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Como o lado direito destas equações diferenciais são constantes, nós temos condições de compreender a técnica de solução deste tipo de equação diferencial. Que tipo de equação diferencial temos aqui?

Primeiro um pouco de nomenclatura: as equações horárias $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções de t, ou seja, elas são as *variáveis dependentes*. O parâmetro t, nosso tempo, é a *variável independente*. Então o tipo de equação diferencial que estamos tratando aqui pode ser escrita na forma onde o lado direito contenha apenas constantes, como em (2.23), e/ou a variável independente explicitamente. Este tipo de equação diferencial deve ser resolvido por integrações (também denominadas de quadraturas neste caso específico). Observe com atenção o modelo a seguir. Para facilitar nossa visão, vamos re-escrever as derivadas de segunda ordem em x, y e z aparecendo em (2.23) como derivadas de primeira ordem nas respectivas componentes do vetor velocidade. Então o plano é determinar primeiro as componentes do vetor velocidade:

$$\frac{d}{dt}v_x(t) = a_{x0} \quad \Leftrightarrow \quad dv_x = a_{x0}\,dt. \tag{2.24}$$

As quantidades infinitesimais dv_x e dt são denominadas de diferenciais (substantivo feminino). Em (2.24), dizemos que as diferenciais das variáveis dependente (v_x) e independente (t) estão separadas, completamente separadas. Neste caso, podemos integrar independentemente os dois lados da última expressão em (2.24),

$$\begin{aligned} \int dv_x = \int a_{x0}\,dt \quad &\Rightarrow \\ v_x + C_1 = a_{x0}(t + C_2) \quad &\Leftrightarrow \\ v_x(t) = a_{x0}\,t + C. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Note que usamos integrais indefinidas. Note também a presença das duas constantes de integração C_1 e C_2. Naturalmente, como a_{x0} também é uma constante, fizemos $C = a_{x0}C_2 - C_1$. Em suma, determinamos a função $v_x(t)$. Resta descobrirmos quem é a constante arbitrária C. Certamente, sem uma informação adicional, não temos como descobrir quem é esta constante. Devemos conhecer o valor de $v_x(t)$ em algum instante particular, por exemplo no início do movimento. Suponha que o movimento comece em $t = t_0$ e que neste instante inicial sabemos que $v_x(t_0) = v_{0x}$ seja conhecida. Isto é uma condição inicial. Então, substituindo esta condição inicial na última expressão em (2.25), teremos

$$v_x(t) = v_{0x} + a_{x0}\,(t - t_0). \tag{2.26}$$

Como a velocidade é a derivada da posição, podemos repetir o procedimento anterior e determinar $x(t)$ integrando (2.26),

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = a_{x0}\,t + v_{0x} - a_{x0}\,t_0 \quad \Rightarrow$$
$$dx = a_{x0}\,tdt + (v_{0x} - a_{x0}\,t_0)dt. \quad (2.27)$$

Integrando os dois lados desta última expressão, temos

$$\int dx = a_{x0} \int tdt + (v_{0x} - a_{x0}\,t_0) \int dt \quad \Rightarrow$$
$$x(t) = \frac{1}{2} a_{x0}\,t^2 + (v_{0x} - a_{x0}\,t_0)\,t + C. \quad (2.28)$$

Note que já fizemos o truque de juntar todas as constantes de integração em uma só. Novamente, temos que usar uma condição inicial para determinar a constante arbitrária C. Vamos supor que a posição no eixo X seja conhecida no instante inicial t_0, $x_0 = x(t_0)$. Então, após um pouco de álgebra (faça todos os detalhes), temos (faça o Exercício 7)

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_{x0}(t - t_0)^2. \quad (2.29)$$

Naturalmente, há resultados similares nos demais eixos (refaça-os):

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_{y0}(t - t_0)^2, \quad (2.30)$$
$$z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_{z0}(t - t_0)^2. \quad (2.31)$$

Podemos até re-escrever estas funções do tempo de volta numa notação vetorial,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0\,(t - t_0)^2 \quad (2.32)$$

com $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ e $\vec{a}_0$ constantes. Conclusão: quando a força é constante, o movimento é parabólico, isto é, a sua equação horária é uma função quadrática (parábola) do tempo. Note que a dependência temporal em (2.32) é a mesma para as três componentes.

Um exemplo importante é o movimento de um objeto de massa m próximo à superfície da Terra, onde a força gravitacional é praticamente constante, $\vec{F}_0 = -mg\,\hat{k}$, $g = 9.81$ m/s^2. Vamos ainda supor a ausência de qualquer efeito dissipativo. Note que escolhemos um referencial fixo na Terra com o eixo Z passando pelos centros de massa da Terra e do corpo. Neste caso, o nosso vetor aceleração em (2.22) é $\vec{a}_0 = -g\,\hat{k}$. Podemos realizar dois experimentos interessantes: (1) queda livre e (2) lançamento oblíquo. Na queda livre, soltamos o objeto de uma determinada altura $h = z_0$ ($x_0 = y_0 = 0$) com velocidade inicial nula. Levando estas informações na solução vetorial (2.32), teremos

$$\vec{r}(t) = \left(h - \frac{1}{2} g\,t^2\right)\hat{k} \quad \Rightarrow$$
$$z(t) = h - \frac{1}{2} g\,t^2, \quad x(t) = y(t) = 0. \quad (2.33)$$

Note que o movimento é vertical. Note também que o corpo chega ao solo ($z = 0$) após um certo intervalo de tempo com uma velocidade diferente de zero (faça o Exercício 8). Também podemos ver que o módulo do vetor velocidade é sempre crescente no tempo (faça o Exercício 8).

No lançamento oblíquo, o corpo é lançado com uma velocidade inicial diferente de zero. Para simplificar um pouco, vamos supor $t_0 = 0$ no instante do lançamento e que $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (origem). Então, de (2.32) temos

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2\,\hat{k}, \quad (2.34)$$

ou, em termos de componentes,

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}\,t, \\ y(t) &= v_{0y}\,t, \\ z(t) &= v_{0z}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Isto significa que o movimento é acelerado apenas ao longo do eixo Z. Vale observar que a altura máxima atingida (acima do plano XY) pode ser determinada calculando o ponto de máximo da função $z(t)$. Do ponto de vista de Cálculo, o máximo da função $z(t)$ é determinado pela condição $\dot{z}(t_M) = v_z(t_M) = 0$, com o ponto especificando a derivada no tempo, ou seja, a reta tangente a $z(t)$ em t_M deve ser horizontal. Acontece que do ponto de vista da Mecânica, $\dot{z}$ é justamente a componente ao longo do eixo Z do vetor velocidade,

$$v_z(t) = \frac{d}{dt} z(t) = v_{0z} - g\,t, \quad (2.36)$$

a qual deve ser nula no ponto mais alto,

$$v_z(t_M) = 0 \Rightarrow t_M = \frac{v_{0z}}{g}, \; z_M = \frac{1}{2}\frac{v_{0z}^2}{g}. \qquad (2.37)$$

Esta concordância entre estes dois pontos de vista é mais uma demostração de que a base matemática da mecânica está muito bem estabelecida (faça o Exercício 9).

2.3.2 Exercícios

Exercício 7
Determine explicitamente as expressões (2.29)–(2.31). Determine também as três componentes dos vetores velocidade e aceleração a partir das expressões (2.29)–(2.31).

Exercício 8
Determine o tempo de queda e a velocidade final da queda livre descrita em (2.33).

Exercício 9
Determine as quantidades t_M e z_M em (2.37). Determine também o tempo de retorno ao plano XY e o alcance máximo deste lançamento.

2.3.3 Forças dependentes da posição

Lei de Hooke

Na ausência de qualquer força dissipativa, ou seja, considerando uma situação ideal, o movimento de um sistema constituido por uma mola com uma de suas extremidades presa e a outra contendo uma massa constante m é descrito pela segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, onde o ponto sobre o momentum linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ significa a primeira derivada no tempo e estamos usando "negrito" para representar quantidades vetoriais. Se a mola é ideal, isto é, tem massa desprezível e obedece a lei de Hooke, então a força resultante que entra na segunda lei de Newton é conhecida (de experimentos independentes da aceleração $\dot{\mathbf{v}}$). Isto torna a segunda lei de Newton numa equação diferencial para a função (equação horária) que descreve a variação da posição da massa no tempo. Veja o significado disto.

Suponha que o nosso sistema massa-mola esteja livre de forças externas e de contato com uma superfície de apoio, como representado na Figura 2.2. Suponha também que $\mathbf{i}$ seja um versor apontando da esquerda para a direita na direção da deformação da mola. Para uma mola ideal de constante de mola k, deformada por um comprimento x (medido em relação à origem $\mathcal{O}$ do sistema de coordenadas da Figura 2.2), a lei de Hooke nos diz que a força agindo sobre a massa é $\mathbf{F} = -kx\,\mathbf{i}$. Verifique que o sentido desta força elástica estará sempre correto para valores positivos ou negativos de x. A força elástica sempre tentará desfazer a deformação produzida na mola. Por isto, ela é conhecida como uma força restauradora. Numa situação ideal, permitiremos apenas a ação da força elástica sobre a massa m. Do geito que construímos nosso sistema de coordenadas, a deformação da mola também mede a posição do centro de massa do nosso objeto preso à mola. Assim, seu vetor posição será $\mathbf{r} = x\,\hat{\imath}$. Suponha que esta posição aconteça num tempo qualquer t. Então a posição da massa é uma função do tempo. Consequentemente, o momentum linear da massa m (constante) é $\mathbf{p} = m\dot{x}\,\mathbf{i}$ e a segunda lei de Newton pode ser escrita explicitamente em nosso sistema de coordenadas,

$$\mathbf{F} = -kx\,\mathbf{i} = \dot{\mathbf{p}} = m\ddot{x}\,\mathbf{i}. \qquad (2.38)$$

Como uma igualdade entre vetores só é possível se cada componente obedecer a mesma igualdade, então

$$-kx = m\ddot{x}, \qquad (2.39)$$

é uma equação que envolve a função $x(t)$ e a sua derivada segunda $\ddot{x}(t)$. Por isto ela é denominada de equação diferencial. Note também que a ordem da derivada mais alta é dois. Por isto, a equação

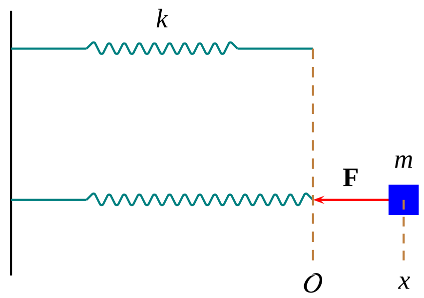

Figura 2.2: Sistema massa-mola ideal. $\mathcal{O}$ representa a origem do sistema de coordenadas (mola sem deformação) e x representa a posição da massa m e também a deformação da mola. k é a constante que caracteriza o poder de deformação da mola.

diferencial (2.39) é classificada como de segunda ordem. Além disto, note que a função $x(t)$ e suas derivadas entram na Eq. (2.39) de forma linear. Por isto, a equação diferencial (2.39) é classificada como linear. Por fim, note que a função $x(t)$ a ser determinada depende somente de uma única variável, o tempo t. Por isto, a equação diferencial (2.39) é classificada como ordinária (no bom sentido). Assim, a Eq. (2.39) é uma equação diferencial ordinária (EDO), de segunda ordem e linear. Sabendo disto, nossa tarefa a seguir é determinar a função $x(t)$ que satisfaz a equação diferencial (2.39), dado algumas informações adicionais (condições iniciais).

Teorema: uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e linear admite uma solução única se duas condições iniciais (informações adicionais), por exemplo, $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, forem conhecidas. Por comodidade, é melhor dividirmos a EDO (2.39) pela massa m,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{2.40}$$

Podemos notar imediatamente nesta equação que a constante nova ω_0 tem dimensão de inverso do tempo (frequência). Assim, ela será denominada de frequência natural deste sistema massa-mola. Melhor regra para se resolver uma EDO: adivinhar a solução! Certamente nossos conhecimentos sobre derivadas ajudará muito. A EDO (2.40) está nos perguntando: quem é a função (ou funções) que ao ser derivada duas vezes volta nela mesma?, a menos de uma constante multiplicativa real e negativa. Basta lembrar das funções trigonométricas elementares, também conhecidas por funções harmônicas, e da exponencial. Vamos experimentar a função cosseno,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \tag{2.41}$$

onde as duas constantes arbitrárias, A e ϕ, são conhecidas por amplitude e constante de fase. Verifique que a solução (2.41) satisfaz plenamente a EDO (2.40) para quaisquer valores de A e ϕ. Outro teorema sobre EDOs: cada solução deve conter um número de constantes arbitrárias igual à ordem da EDO. Verifique também que estas constantes arbitrárias A e ϕ são determinadas em termos das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ na forma (faça o Exercício 10)

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2, \quad \tan\phi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \tag{2.42}$$

Assim, dado as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, a equação horária (2.41) fica unicamente determinada.

Qual é a interpretação mecânica da equação horária (2.41)? Primeiro, podemos ver de (2.41) que a posição x do nosso objeto pertence ao intervalo fechado $[A, -A]$. A constante A é denominada de amplitude. Segundo, a função cosseno é periódica. Assim, o movimento representado pela equação horária (2.41) é periódica de perído $\tau = 2\pi/\omega_0$.[1] Isto significa que $\omega_0 = 2\pi f$, onde $f = 1/\tau$ é freqüência (expressa em Hertz, inverso do segundo). Assim, devemos chamar ω_0 de freqüência angular (expressa em radianos por segundo).[2] Um movimento que é periódico e limitado num certo intervalo é denominado de oscilatório. Desta forma, a equação horária (2.41) representa o movimento de um oscilador ideal. Como a frequência (angular) deste oscilador oscilador é ω_0, definida na Eq. (2.40), o movimento é denominado de harmônico (descrito por funções harmônicas). A constante ϕ é denominada de constante de fase. A fase é o argumento de uma função hamônica, $\theta(t) = \omega_0 t + \phi$ neste caso.

A EDO (2.40) aparece em muitos contextos e, por isso, tem uma importância muito grande. Esta EDO, conhecida por equação diferencial do oscilador harmônico, deve ser memorizada, juntamente com sua solução (2.41).

A Figura 2.3 mostra a equação horária (2.41) com $A = 1$, $\phi = 0$ e $\omega_0 = 2\pi$ (unidades arbitrárias) juntamente com a componente $\dot{x}(t)$ do vetor velocidade correspondente. Você deve interpretar esta figura em termos da força elástica, acompanhando o gráfico da equação horária e da velocidade e imaginando como é a ação da força elástica em cada instante.

Pêndulo simples

Vamos considerar agora um pêndulo ideal. Um pêndulo ideal é formado por uma haste rígida, in-

[1] Sendo $x(t)$ periódica de período τ, então $x(t+\tau) = A\cos(\theta + \omega_0\tau) = x(t) = A\cos(\theta)$, onde $\theta = \omega_0 t + \phi$. Como a função cosseno tem período 2π, então $\omega_0\tau = 2\pi$.

[2] Há dois tipos de frequência em um movimento periódico: uma frequência que é o inverso do período, $f = 1/\mathcal{P}$, medida em Hertz (Hz), e a frequência angular, $\omega = 2\pi f$, medida em rad/s. O movimento periódico de um determinado sistema é harmônico quando a sua frequência angular for igual a frequência angular natural deste sistema.

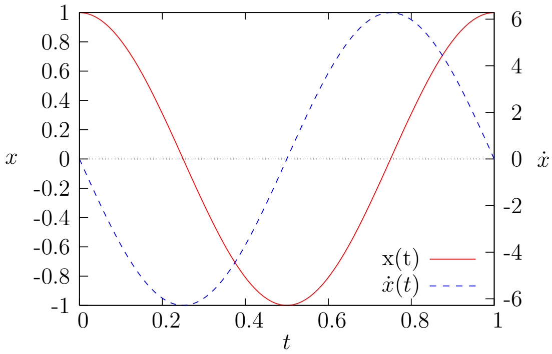

Figura 2.3: Equação horária $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e espaço de fase para o oscilador harmônico com $A = 1$, $\phi = 0$ e $\omega_0 = 2\pi$ (unidades arbitrárias).

flexível, de massa nula e de comprimento l, com uma das extremidades fixa em algum lugar (o qual usaremos como origem para o nosso sistema de coordenadas) e com uma massa m presa na outra extremidade, conforme indicado na Figura 2.4. Neste sistema temos apenas as forças da gravidade

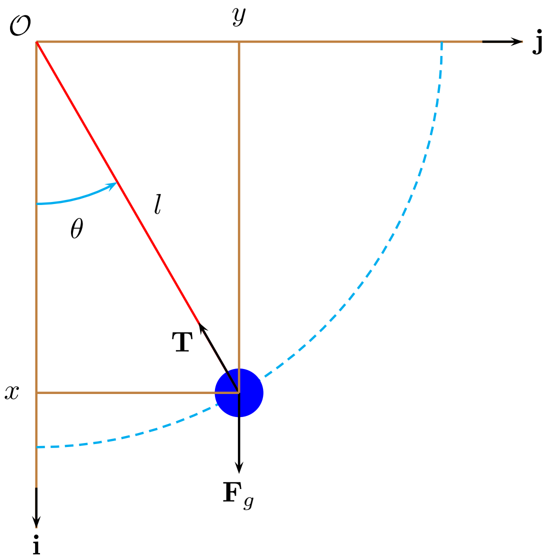

Figura 2.4: Pêndulo simples (ideal) de comprimento l e massa m sob a ação da força da gravidade $\mathbf{F}_g = mg\,\mathbf{i}$ e da tensão $\mathbf{T}$.

$\mathbf{F}_g = mg\,\mathbf{i}$ agindo na massa m (constante) e a tensão $\mathbf{T}$ na haste. Deslocando a massa de sua posição de equilíbrio (na vertical) por um ângulo θ, imediatamente a força gravitacional faz com que o sistema retorne à sua posição de equilíbrio. Nosso objetivo é descrever o movimento desta massa m, ou seja, encontrar como o ângulo θ (ou fase) varia com o tempo. Note que, embora o movimento ocorra no plano (dois graus de liberdade), temos um movimento com apenas um grau de liberdade, pois a condição de inflexibilidade da haste impõe que $x^2(t) + y^2(t) = l^2$, com $x(t)$ e $y(t)$ dependentes do tempo e l independente do tempo. Naturalmente, a equação horária para o ângulo $\theta = \theta(t)$ deve ser encontrada resolvendo a equação diferencial proveniente da segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{T} = \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}. \tag{2.43}$$

A segunda lei (2.43) deve ser re-escrita usando o sistema de coordenadas mostrado na Figura 2.4,

$$\begin{aligned} F_x &= mg - T\cos\theta \\ &= m\ddot{x} = -ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad (2.44)\\ F_y &= -T\sin\theta \\ &= m\ddot{y} = ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta. \qquad (2.45) \end{aligned}$$

Estas duas equações diferenciais são equivalentes a uma equação diferencial para $\theta(t)$,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{2.46}$$

e uma equação para o módulo da tensão na haste,

$$T = \frac{mg}{\omega_0^2}\left(\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta}\cot\theta\right), \tag{2.47}$$

a qual mostra que a tensão ha haste é uma força dependente da posição angular (θ).

Uma observação importante: note que a constante ω_0, a frequência angular natural do pêndulo, em (2.46) não depende da massa do m do pêndulo. Assim, pêndulos construídos com uma bolinha de tênis e um elefante terão a mesma equação horária.

A equação diferencial (2.46), aparentemente simples, oferece muitas dificuldades para ser resolvida analiticamente. Esta é uma situação onde é muito mais conveniente usarmos métodos numéricos diretamente. No entanto, podemos observar que, devido à série de Taylor para a função seno em torno de $\theta = 0$, $\sin\theta \simeq \theta$, a equação diferencial (2.46) torna-se na equação diferencial de um oscilador harmônico para pequenos valores de θ (sempre em radianos),

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad \theta \ll 1, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2.48}$$

Esta EDO tem a mesma forma da EDO (2.40) do oscilador harmônico, trocando x por θ. Portanto, podemos aproveitar aqui a solução (2.41), trocando x por θ. Assim, dentro da aproximação de ângulos pequenos, podemos escrever

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0\, t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2.49}$$

Isto significa que o movimento do pêndulo será harmônico para baixas amplitudes (ângulos) e que a constante ω_0 será a sua frequência natural, a qual é independente da massa m. Tendo um bom cronômetro e muita paciência podemos medir a frequência natural e então calcular o valor do módulo da aceleração da gravidade no local do pêndulo.

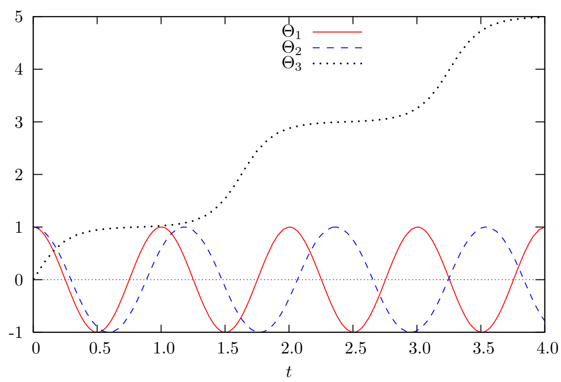

Figura 2.5: Três equações horárias para o mesmo pêndulo simples com $\omega_0 = 2\pi$ rad/s, diferindo apenas pela escolha das condições iniciais dadas em (2.50)–(2.52).

A Figura 2.5 mostra três equações horárias (unidades MKS) para o mesmo pêndulo de frequência angular natural $\omega_0 = 2\pi$ rad/s. Estas três funções do tempo foram obtidas resolvendo a equação diferencial (2.46) numericamente. Estas equações horárias diferem apenas pelas condições iniciais. Como podemos ver na Figura 2.5, as duas primeiras destas equações horárias representam um movimento oscilatório (amplitude limitada). A terceira equação representa um movimento de rotação. Estes três movimento são periódicos. Na Figura 2.5, cada curva foi devidamente normalizada,

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{20}{\pi}\theta_1(t), \quad \omega_0 = 2\pi, \\ \theta_1(0) &= \frac{\pi}{20}, \quad \dot{\theta}_1(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \frac{2}{\pi}\theta_2(t), \quad \omega_0 = 2\pi, \\ \theta_2(0) &= \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}_2(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.51}$$

e

$$\begin{aligned} \Theta_3 &= \frac{1}{\pi}\theta_3(t), \quad \omega_0 = 2\pi, \\ \theta_3(0) &= 0, \quad \dot{\theta}_2(0) = 12.57 \simeq 4\pi. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Podemos ver na Figura 2.5 que apenas a primeira equação horária possui um período aproximadamente igual a 1 s. Portanto, a frequência angular correspondente é aproximadamente igual a 2π rad/s. Ela também possui uma amplitude inicial pequena $\pi/20$ rad. Estes dois fatos siginificam que apenas a primeira equação horária representa um movimento harmônico, ou seja, ela também deve satisfazer a equação diferencial (2.48) dentro de uma boa aproximação.

2.3.4 Exercícios

Exercício 10
Obtenha explicitamente as constantes A e ϕ dadas em (2.42) usando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Depois faça $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$ (objeto solto do repouso) e $\omega = 2\pi$. Use o sistema MKS de unidades.

Exercício 11
Determine explicitamente as equações (2.44)–(2.47).

2.3.5 Forças dependentes da velocidade

Que tal um toque de realismo? Você já deve ter sentido o quão difícil é caminhar dentro de uma piscina cheia de água, embora a água esteja tranquilamente em repouso. Também podemos notar neste experimento que é mais difícil correr que caminhar na água. Na prática, isto significa duas coisas: (1) a água nos aplica uma força contrária ao nosso movimento, portanto uma força dissipativa (cujo significado preciso será entendido mais tarde, após uma discussão sobre o conceito de energia), e (2) esta força dissipativa deve ser proporcional à nossa velocidade. Agora vem a essência do modelo: não importa o quão complicada seja nossa interação com a água, o efeito pode ser modelado por uma força dissipativa proporcional à velocidade,

$$\mathbf{F}_d = -b\mathbf{v} = -b\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t), \tag{2.53}$$

onde o parâmetro b é uma característica do meio e deve ser determinado experimentalmente (como a constante de mola da lei de Hooke). Note que estamos supondo uma dependência linear na velocidade. Reconsiderando os exemplos discutidos anteriomente na Seção 2.3.1, temos agora duas forças agindo no nosso corpo de testes, a força constante $\mathbf{F}_0$ e a força dissipativa $\mathbf{F}_d$ definida em (2.53),

$$\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_d = m\mathbf{a}. \tag{2.54}$$

neste caso, como a força dissipativa depende da velocidade, a aceleração não é mais uma constante. Isto significa que teremos de resolver agora equações diferenciais ligeiramente mais complicadas. Este modelo descreve muito bem corpos pequenos como partículas de poeira no ar ou de corpos não muito extensos a baixas velocidades como uma bolinha de gude caindo em um fluido qualquer (gás ou líquido). Façamos alguns exemplos.

Partícula em suspensão

Primeiro vamos considerar uma situação mais simples: queda "livre" de um pequeno corpo sob a ação da gravidade (próxima da superfície da Terra) e na presença da atmosfera. Como a força gravitacional é constante, podemos escolher sua direção como um dos eixos do nosso sistema de coordenadas, digamos ao longo do eixo Z. Portanto, o movimento é unidimensional, ao longo do eixo Z. Podemos escolher o versor $\mathbf{k}$ indicando o sentido positivo como o sentido do centro da Terra para fora. A origem está no solo. Inicialmente o corpo é solto do repouso de uma altura H acima do solo. Após um certo instante t, o corpo encontra-se numa posição $\mathbf{r}(t) = z(t)\mathbf{k}$. Neste sistema de coordenadas, a força gravitacional é $\mathbf{F}_0 = -mg\,\mathbf{k}$. A equação diferencial (2.54), com a força dissipativa da atmosfera modelada como em (2.53), pode ser re-escrita como (faça o Exercício 12)

$$\begin{aligned} &-mg - b\dot{z} = m\ddot{z} \quad \Rightarrow \\ &\qquad \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + g = 0, \quad \tau = \frac{m}{b}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Neste caso, não podemos usar a técnica de separação de variáveis, pois aparece uma derivada primeira e uma derivada segunda (diferentes ordens de derivação). No entanto, podemos tentar determinar primeiro a velocidade $v_z(t) = \dot{z}$ ao longo do eixo Z. Em termos da velocidade, a EDO (2.55) pode ser reescrita na forma

$$\dot{v}_z + \frac{1}{\tau}v_z + g = 0, \quad v_z = \dot{z}. \tag{2.56}$$

Esta equação pode ser resolvida através de uma mudança da variável dependente v_z para $u = \tau^{-1}v_z + g$. A mudança de variável é mais uma técnica importante na resolução de equações diferenciais. Assim,

$$u = \frac{1}{\tau}v_z + g \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_z = \tau\dot{u}. \tag{2.57}$$

Levando estes resultados de volta em (2.56), teremos

$$\tau\dot{u} + u = 0. \tag{2.58}$$

Agora esta equação diferencial pode ser resolvida pela técnica de separação de variáveis,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{1}{\tau}\,dt. \tag{2.59}$$

Intengrando os dois lados desta equação, obtemos

$$\ln u = -\frac{t}{\tau} + C'. \tag{2.60}$$

Invertendo o logaritmo na última expressão em (2.60), determinamos a função intermediária $u(t)$,

$$u(t) = Ce^{-t/\tau}, \tag{2.61}$$

onde fizemos $C = e^{C'}$. Finalmente, usando a mudança de variável dada em (2.57), determinamos $v_z(t)$,

$$v_z(t) = \tau u - \tau g = C\tau e^{-t/\tau} - \tau g. \tag{2.62}$$

A constante de integração C é determinada, como sempre, pelas condições iniciais. Na queda livre, a velocidade inicial é nula, $v_z(0) = 0$. Esta condição inicial nos fornece $C = g$ (faça o Exercício 12). Assim,

$$v_z(t) = -g\tau\big(1 - e^{-t/\tau}\big), \quad \tau = \frac{m}{b}. \tag{2.63}$$

Note que $v_z(t) < 0$ sempre, indicando que o vetor velocidade aponta para o centro da Terra, como esperado. Além disto, veja que interessante: τ é uma quantidade positiva. Então, após um intervalo de tempo maior que τ a velocidade em (2.63) é praticamente igual $-g\tau$, ou seja, independente do tempo, pois a exponential decresce rapidamente a zero nesta condição ($t > \tau$). O módulo deste valor constante para a velocidade é conhecido como "velocidade terminal",

$$V_T = g\tau = \frac{gm}{b}. \tag{2.64}$$

Faça um gráfico da velocidade (2.63). Note também que se a velocidade terminal (2.64) for substituída na segunda lei (2.55) (faça $\dot{z} = V_T$), a aceleração torna-se nula. Isto significa que a velocidade terminal é atingida quando a força dissipativa, a qual está aumentando sua intensidade proporcionalmente à velocidade, iguala à força gravitacional. Atingida a velocidade terminal, não tem mais aceleração. De fato, a aceleração calculada da velocidade (2.63) é

$$a_z(t) = -ge^{-t/\tau}, \tag{2.65}$$

a qual vai a zero rapidamente. Experimente em casa usando uma pequena bolinha em queda livre em um líquido qualquer. Talvez seja necessário usar óleo para observar o efeito da velocidade terminal. E a equação horária deste movimento? Podemos usar a velocidade (2.63) para determinarmos $z(t)$,

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = -g\tau\big(1 - e^{-t/\tau}\big) \quad \Rightarrow$$
$$dz = -g\tau\big(1 - e^{-t/\tau}\big)\, dt. \tag{2.66}$$

Integrando independentemente os dois lados desta última expressão, obteremos (faça o Exercício 13)

$$z(t) = -g\tau\big(C + t + \tau e^{-t/\tau}\big). \tag{2.67}$$

Vamos supor que o corpo seja solto de uma altura h em $t = 0$, $z(0) = h$. Então, usando esta condição inicial em (2.67) determinamos $C = -\tau - h/(g\tau)$ (faça o Exercício 13),

$$z(t) = h - g\tau\, t + g\tau^2\big(1 - e^{-t/\tau}\big). \tag{2.68}$$

Note que para um tempo $t > \tau$, ou seja, após o corpo ter alcançado sua velocidade terminal, esta equação horária é praticamente linear no tempo, como deve ser, pois não há mais aceleração. Estas observações que fizemos são verificadas na prática e confirmam a validade do modelo que foi feito. De novo, devemos frisar a importância do modelo para ultrapassarmos a enorme barreira apresentada pela tentativa de entendermos em detalhes microscópicos a interação entre um corpo em movimento e o fluido no qual ele está imerso.

Paraquedas

Nosso primeiro modelo descreve bem corpos pequenos com velocidades baixas. E corpos extensos como um pára-quedas em queda livre? Neste caso, também um movimento unidimensional, o modelo que funciona melhor tem uma força dissipativa com uma dependência quadrática com a velocidade de queda v_z,

$$\mathbf{F}_\delta = \frac{1}{2}\rho\delta A\, v_z^2\, \mathbf{k}, \tag{2.69}$$

na qual ρ é a densidade do ar (ou de um fluido qualquer), δ é uma grandeza adimensional, denominada de coeficiente de arrasto, relacionada com a forma geométrica e A é a área da seção reta do corpo em queda livre. O coeficiente de arrasto para corpos arrendondados é aproximadamente 0.5. Note em (2.69) que a força é dissipativa, isto é, contrária ao sentido do vetor velocidade, o qual está no sentido oposto ao do versor $\hat{k}$. Neste caso, devemos resolver uma equação diferencial ainda um pouquinho mais complicada. Adicionando a força da gravidade $\mathbf{F}_0 = -mg\mathbf{k}$, temos a EDO (verifique)

$$\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_\delta = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow$$
$$\ddot{z} - \eta\, \dot{z}^2 + g = 0, \qquad \eta = \frac{\rho\delta A}{2m}. \tag{2.70}$$

Note que η tem dimensão de inverso de comprimento. Temos de resolver esta EDO juntamente com as condições iniciais

$$z(0) = H, \quad \dot{z}(0) = 0, \tag{2.71}$$

onde H é a altura inicial (em relação ao nível do mar, por exemplo) e $\dot{z}(0) = 0$ representa a velocidade inicial (salto a partir do repouso). Neste caso, também não podemos usar diretamente o método da separação de variáveis porque temos derivadas de ordens diferentes. Também não ajuda muito tentar resolver primeiro a equação diferencial para a velocidade,

$$\dot{v}_z = -g + \eta\, v_z^2, \quad v_z = \dot{z}, \tag{2.72}$$

pois não podemos imaginar uma mudança experta na variável dependente que nos possibilite usar o método da separação de variáveis. No entanto, podemos usar a equação diferencial (2.72) para determinarmos a velocidade terminal ($\dot{v}_z = 0$),

$$V_T = \sqrt{\frac{g}{\eta}}. \tag{2.73}$$

A solução da equação diferencial em (2.70), juntamente com as condições iniciais (2.71), é (faça o Exercício 14)

$$z(t) = \frac{1}{\eta}\left[H\eta + \ln(2) + \frac{t}{\tau} - \ln(1 + e^{2t/\tau})\right], \tag{2.74}$$

com $\tau = 1/\sqrt{g\eta}$ e $\eta = \rho\delta A/2m$. Verifique que τ tem dimensão de tempo. A derivada primeira desta função nos dá a velocidade instantânea de descida do paraquedas (faça o Exercício 15),

$$v_z(t) = \dot{z}(t) = -\sqrt{\frac{g}{\eta}}\,\frac{e^{2t/\tau} - 1}{e^{2t/\tau} + 1}, \tag{2.75}$$

a qual é estritamente negativa (como esperado). Podemos ver que reobteremos a velocidade terminal (2.73) no limite $t \to \infty$ (faça o Exercício 16). Por completeza, podemos verificar que a aceleração correspondente, a qual pode ser obtida da EDO (2.70), uma vez que temos a derivada primeira em (2.75), e obtida tanbém diretamente da derivada da velocidade (2.75), é (faça o Exercício 15)

$$a_z(t) = \dot{v}_z(t) = -4g\frac{e^{2t/\tau}}{(e^{2t/\tau} + 1)^2}. \tag{2.76}$$

De fato, esta aceleração vai a zero no limite $t \to \infty$ (velocidade terminal). Note que $a_z(0) = -g$, como esperado.

Vale a pena fazermos duas observações: (1) em ambos os casos de queda livre na presença da atmosfera, o empuxo não foi levado em consideração. Como será visto em nossos estudos com fluidos, o empuxo faz com que o "peso aparente" torne-se um pouco menor. (2) Até aqui, supusemos uma densidade constante $\rho = \rho_0$. No entanto, a densidade atmosférica varia com a altura z. Em um modelo simplificado podemos escrever

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/H}, \tag{2.77}$$

com $\rho_0 = 1.25$ kg/m^3 no nível do mar e $H = 8 \times 10^3$ m. Levando esta dependência da densidade com a altura $z(t)$, a equação diferencial (2.70) torna-se em

$$\ddot{z} - \eta\,\dot{z}^2 e^{-z/H} + g = 0, \quad \eta = \frac{\rho_0\delta A}{2m}. \tag{2.78}$$

Neste caso, não temos uma solução analítica conhecida como (2.74). Nossa única opção é fazer uso de técnicas numéricas para resolver a equação diferencial (2.78). Note também que a velocidade terminal ($\ddot{z} = 0$) não é mais uma constante, mas passa a depender da altura z (faça o Exercício 17),

$$V_T = \sqrt{\frac{g}{\eta}}\, e^{z/2H} \simeq \sqrt{\frac{g}{\eta}}\left(1 + \frac{z}{2H}\right), \tag{2.79}$$

na qual estamos supondo $z \ll H$.

Força de Lorentz

Vejamos mais um exemplo importante no qual a força também depende da velocidade. Considere um corpo de massa m e carga Q no vácuo. Suponha também que no instante inicial $t_0 = 0$ ele esteja na posição inicial $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e com velocidade inicial $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$, em relação a um sistema de coordenadas ortonormal (fixo). Suponha também que um determinado campo magnético, $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$, com B_0 constante, esteja presente. Então, este corpo sentirá o efeito da força de Lorentz,

$$\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = Q\big(v_y B_0, -v_x B_0, 0\big). \tag{2.80}$$

Da definição de forçaSegunda Lei de Newton, $\mathbf{F}_B = m\ddot{\mathbf{r}}$, teremos as seguintes equações diferenciais (faça o Exercício 18),

$$m\ddot{x} = +QB_0\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = +\omega\dot{y}, \tag{2.81}$$
$$m\ddot{y} = -QB_0\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x}, \tag{2.82}$$
$$m\ddot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = 0, \tag{2.83}$$

onde fizemos

$$\omega = \frac{QB_0}{m}. \tag{2.84}$$

Note que temos uma novidade: as equações diferenciais (2.81) e (2.82) estão acopladas, isto é, as derivadas das variáveis dependentes $x(t)$ e $y(t)$ aparecem misturadas nestas duas equações. No entanto, esta mistura é linear nestas derivadas. Esta linearidade faz com que possamos resolver este sistemas de duas equações diferenciais de uma forma muito simples. Derive a equação diferencial (2.81) em relação ao tempo e use a equação diferencial (2.82) para eliminar $\ddot{y}$. Depois introduza a velocidade $v_x = \dot{x}$,

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x, \quad v_x = \dot{x}. \tag{2.85}$$

Esta EDO tem a mesma forma da EDO (2.40) do oscilador harmônico, trocando x por v_x. Portanto, podemos aproveitar aqui a solução (2.41), trocando x por v_x. Entretanto (por puro parzer), vamos usar uma solução para a EDO (2.85) contendo a função seno na forma

$$v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi), \tag{2.86}$$

com A (amplitude) e ϕ (fase) constantes, as quais devem ser determinadas com o auxílio das condições iniciais. Verifique que (2.86) é de fato uma solução de (2.85).

Tendo determinado $v_x(t)$, podemos usar (2.81) para determinar $v_y(t)$,

$$v_y(t) = \frac{1}{\omega}\dot{v}_x = -\omega A \cos(\omega t + \phi). \tag{2.87}$$

O próximo passo é integrar as velocidades (2.86) e (2.87) para obtermos as respectivas equações horárias:

$$x(t) = \quad A\cos(\omega t + \phi) + C_1, \tag{2.88}$$
$$y(t) = -A\sin(\omega t + \phi) + C_2, \tag{2.89}$$
$$z(t) = C_3 + C_4 t, \tag{2.90}$$

onde aproveitamos também para resolver a equação diferencial (2.83). Todas as seis constantes aparecendo em (2.88)–(2.90) devem ser determinadas a partir de seis condições iniciais,

$$\mathbf{r}(0) = \big(x_0, y_0, z_0\big), \ \mathbf{v}(0) = \big(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}\big). \tag{2.91}$$

Usando estas informações, teremos (faça o Exercício 19)

$$\tan\phi = \frac{v_{x0}}{v_{y0}}, \quad A = \sqrt{\frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{\omega^2}} \tag{2.92}$$

e

$$C_1 = x_0 - A\cos\phi, \quad C_2 = y_0 + A\sin\phi,$$
$$C_3 = z_0, \quad C_4 = v_{z0}. \tag{2.93}$$

Qual é a trajetória determinada pelas equações horárias (2.88)–(2.90)? Podemos notar que no plano XY, a trajetória é uma circunferência de raio A, centrada em (C_1, C_2), pois

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = A^2. \tag{2.94}$$

Portanto, temos duas possibilidades: (1) se a velocidade inicial no eixo Z for nula, $v_{z0} = 0$, então a trajetória será uma circunferência no plano XY (faça o Exercício 10); (2) se a velocidade inicial no eixo Z não for nula, então a trajetória será uma hélice de base circular e passo uniforme ao longo do eixo Z. Note o seguinte: no caso da trajetória ser circular, teremos

$$A = \frac{v}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{m} = \frac{v}{AB_0}, \tag{2.95}$$

com $v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$. Também fizemos uso da definição da frequência ω dada em (2.81). Note que a última expressão em (2.95) nos permite calcular a razão entre a carga e a massa de um elétron, por exemplo, em função do raio A da trajetória, o qual é determinado pela velocidade inicial e pelo valor do campo magnético.

2.3.6 Exercícios

Exercício 12
Determine as dimensões da constante τ em (2.55). Determine a constante de integração C em (2.62) usando a condição inicial $v_z(0) = 0$.

Exercício 13
Determine a constante de integração C em (2.67) usando a condição inicial $z(0) = h$. Verifique explicitamente que a função $z(t)$ em (2.68) satisfaz a equação diferencial em (2.55).

Exercício 14
Verifique explicitamente que a função $z(t)$ em (2.74) satisfaz a equação diferencial em (2.70). Determine as dimensões da constante η e da constante τ em (2.74).

Exercício 15
Derive a solução $z(t)$ em (2.74) para obter a velocidade (2.75) e a aceleração (2.76).

Exercício 16
Determine a velocidade terminal efetuando diretamente o limite

$$V_T = \lim_{t \to \infty} v_z(t), \tag{2.96}$$

com $v_z(t)$ dada em (2.75). Aplique este mesmo limite para a aceleração (2.76).

Exercício 17
Determine a velocidade terminal em (2.78).

Exercício 18
Determine de (2.80) as equações diferenciais (2.81)–(2.83) (decorrentes da segunda lei de Newton) que controlam o movimento de um corpo com uma carga elétrica q e uma massa m na presença de um campo magnético constante. Use (2.84) e determine sua dimensão.

Exercício 19
Determine explicitamente as constantes de integração em (2.88)–(2.90).