

Apêndices

Esmerindo Bernardes^{1,*}

¹L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA
Instituto de Física de São Carlos
Universidade de São Paulo
13560-970 São Carlos, SP, Brazil
(Dated: 2 de Março de 2015)

CONTENTS

I. Análise Dimensional	1
II. Sistemas de Coordenadas	2
II.1. Coordenadas polares	2
II.2. Coordenadas esféricas	3
II.3. Coordenadas cilíndricas	4
III. Série de Taylor	4

I. ANÁLISE DIMENSIONAL

Unidades de medida são importantes e indispensáveis em Mecânica. De forma geral, procuraremos expressar todas as nossas quantidades mecânicas em unidades derivadas de quatro grandezas fundamentais: comprimento (L), tempo (T), massa (M) e carga elétrica (Q). Em processos de medidas, estas grandezas são conhecidas também por dimensões. Em geral, falaremos da “análise dimensional” de uma determinada quantidade mecânica. Vários sistemas de medidas foram criados para expressar a intensidade de cada uma destas quatro dimensões fundamentais. Usaremos com mais frequência o sistema internacional MKS, onde comprimento é medido em metros (m), tempo em segundos (s), massa em kilogramas (kg) e carga elétrica em Coulombs (C).

Existe um procedimento padrão para analisarmos as dimensões de uma determinada quantidade de interesse: uma equação com o lado esquerdo expressando a quantidade B a ser analisada, via a notação $[B]$, e um lado direito contendo apenas as operações de multiplicação e potenciação envolvendo as dimensões L, T, M e Q. Vejamos alguns exemplos.

O vetor posição \vec{r} tem dimensão de comprimento (L). Então escrevemos matematicamente esta informação como

$$[\vec{r}] = L. \quad (1)$$

O vetor velocidade tem dimensões de comprimento por tempo, então

$$[\vec{v}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{L}{T} = LT^{-1}. \quad (2)$$

O vetor aceleração tem dimensões de comprimento por tempo ao quadrado, então

$$[\vec{a}] = \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}. \quad (3)$$

As dimensões do momentum linear são

$$[\vec{p}] = [m\vec{v}] = \frac{ML}{T} = MLT^{-1}. \quad (4)$$

Seguindo estes exemplos, a análise dimensional do vetor força na segunda lei de Newton (massa constante) nos fornece

$$[\vec{F}] = [m\vec{a}] = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}(\text{Newton}). \quad (5)$$

Newton é a unidade de força no sistema MKS.

Dois forças importantes em mecânica são: a lei de Hooke,

$$\vec{F}_d = -k\vec{r}, \quad (6)$$

a qual descreve o comportamento de um corpo elástico (de constante característica k) com uma deformação do tamanho do comprimento do vetor posição \vec{r} , e lei de Newton para a gravitação,

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad (7)$$

a qual descreve a interação entre dois corpos de massas M e m , separadas pela distância r . Usando análise dimensional, encontramos as dimensões da constante de mola k ,

$$[k] = MT^{-2}, \quad (8)$$

e da constante universal da gravitação G ,

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}. \quad (9)$$

O valor desta constante no sistema MKS é $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{kg s}^2$.

Quais são as dimensões da constante C_e aparecendo na expressão para a força elétrica (lei de Coulomb)

$$\vec{F}_e = C_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (10)$$

entre duas cargas elétricas Q e q separadas pela distância r ? Seguindo o modelo anterior, temos

$$[C_e] = NL^2Q^{-2} = ML^3T^{-2}Q^{-2}. \quad (11)$$

* sousa@ifsc.usp.br

Por completeza, devemos mencionar que cargas magnéticas nunca foram observadas. No entanto quando dois fios conduzindo correntes elétricas I_1 e I_2 estão a uma distância ρ , podemos medir uma força por unidade de comprimento entre eles,

$$\vec{f}_m = 2C_m \frac{I_1 I_2}{\rho} \hat{\rho}. \quad (12)$$

Esta força é conhecida como lei de Biot-Savat. Usando a definição de corrente, carga por tempo, temos

$$[I] = \left[\frac{dQ}{dt} \right] = QT^{-1}. \quad (13)$$

Assim, as dimensões da constante C_m são

$$[C_m] = NT^2Q^{-2} = MLQ^{-2}. \quad (14)$$

Podemos notar também então que a razão C_e/C_m tem a mesma dimensão de velocidade ao quadrado. De fato, Maxwell mostrou que no vácuo, a velocidade da luz (onda eletromagnética) é

$$c = \sqrt{\frac{C_e}{C_m}}. \quad (15)$$

Os valores destas constantes (no vácuo) são: $C_e = 8.987551788 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ e $C_m = 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2$. Portanto, medindo as constantes C_e e C_m podemos calcular a velocidade da luz. Este resultado está entre os mais surpreendentes acerca da nossa natureza. As surpresas não param aqui, há ainda um fato ainda mais marcante sobre o comportamento da luz: ela é um limite superior para a velocidade de qualquer quantidade em movimento. No presente tempo, conseguimos dar uma velocidade próxima à da luz (98%) apenas para partículas subatômicas como o elétron.

A força de Lorentz,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (16)$$

produzida por uma carga q em movimento com uma velocidade \vec{v} em um campo magnético \vec{B} , é responsável por trajetórias helicoidais. As dimensões do campo magnético \vec{B} são

$$[\vec{B}] = \left[\frac{\|\vec{F}\|}{q\|\vec{v}\|} \right] = MQ^{-1}T^{-1}(\text{Tesla}). \quad (17)$$

II. SISTEMAS DE COORDENADAS

II.1. Coordenadas polares

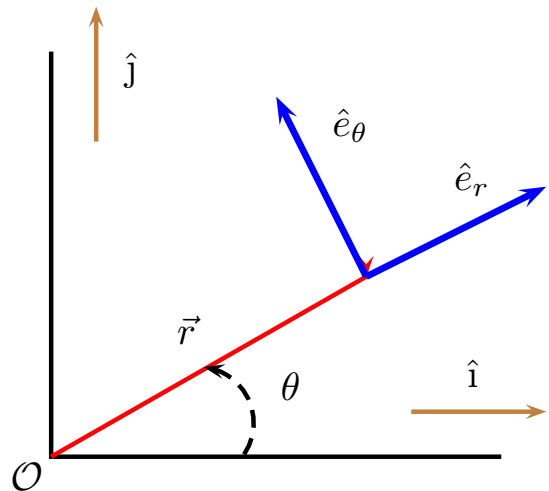


Figura 1. Sistema de coordenadas polares (r, θ) com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Os versores (\hat{i}, \hat{j}) são mutuamente ortogonais, assim como os versores $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$.

A Figura 2 mostra os versores cartesianos (\hat{i}, \hat{j}) no plano e os versores polares $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$. Para $\theta = 0$ estes dois conjuntos de versores são idênticos. Da geometria plana da Figura 2 temos

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \end{aligned} \quad (18)$$

Note que estas equações representam uma rotação de coordenadas pelo ângulo θ no sentido anti-horário.

A derivada temporal dos versores $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ é

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_r &= \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \hat{e}_r. \end{aligned} \quad (19)$$

Usando estas derivadas, podemos calcular rapidamente as coordenadas polares dos vetores seguintes:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad (20)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad (21)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta. \quad (22)$$

Podemos perceber imediatamente que no movimento circular ($\dot{r} = 0$) com velocidade angular ($\omega = \dot{\theta}$) constante ($\ddot{\theta} = 0$), o vetor aceleração tem apenas a componente radial $a_r = -\omega^2 r$ (aceleração centrípeta).

Relembrando o movimento de um pêndulo ideal de comprimento r (fixo) e massa m , o vetor força (resultante), $\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta$, tem as suas duas componentes polares não-nulas: $F_r = mg \cos \theta - T$ e $F_\theta = -mg \sin \theta$. Desta forma, aplicando a segunda lei para a direção tangente (\hat{e}_θ), temos $\ddot{\theta} + (g/r) \sin \theta = 0$, como esperado (e rápido).

Da Geometria Plana, podemos escrever as coordenadas cartesianas do vetor posição $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ em termos das coordenadas polares,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (23)$$

O elemento de área é

$$dA = dx dy = r\theta dr. \quad (24)$$

O operador gradiente (34) neste caso é dado por

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (25)$$

II.2. Coordenadas esféricas

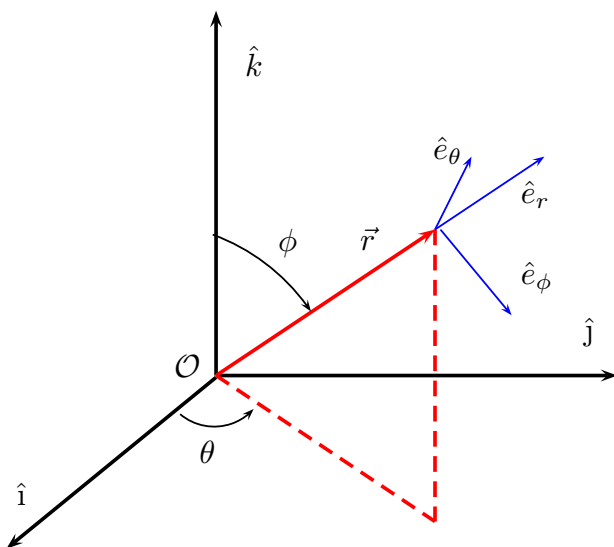


Figura 2. Sistema de coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) com $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Os versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ são mutuamente ortogonais, assim como os versores $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta)$.

Seja \vec{r} o vetor posição mostrado na Figura 1. Em um sistema de coordenadas Cartesianas ortonormais, o vetor posição é descrito como $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Usando geometria elementar, as componentes Cartesianas x , y e z podem ser escritas em coordenadas esféricas r , ϕ e θ ,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta, \\ y &= r \sin \phi \sin \theta, \\ z &= r \cos \phi, \end{aligned} \quad (26)$$

onde $0 \leq \phi \leq \pi$ é o ângulo formado pelo vetor posição \mathbf{r} e o eixo Z , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é o ângulo formado pela projeção do vetor posição \mathbf{r} no plano XY e o eixo X . Note que uma casca esférica de raio R é descrita em coordenadas esféricas fazendo $r = R$ constante e variando os ângulos ϕ e θ .

O mesmo vetor posição também pode ser escrito em termos dos versores $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta)$, simplesmente como $\vec{r} = r\hat{e}_r$. Os

versores $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta)$ podem ser escritos em termos dos versores cartesianos $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$,

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \sin \phi \cos \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \phi \hat{k}, \\ \hat{e}_\phi &= \cos \phi \cos \theta \hat{i} + \cos \phi \sin \theta \hat{j} - \sin \phi \hat{k}, \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \end{aligned} \quad (27)$$

Naturalmente, quando $\vec{r}(t)$ descreve a posição de um objeto em sua trajetória (parametrizada pelo tempo t), os versores $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta)$ também serão dependentes do tempo,

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\hat{e}}_r, \quad (28)$$

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi + r\dot{\theta}\sin\phi\hat{e}_\theta, \quad (29)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \text{faça você!} \quad (30)$$

Os elementos infinitesimais de área e volume também são muito utilizados. O elemento de área sobre uma esfera de raio r pode ser calculado como a área de um retângulo infinitesimal,

$$dA = r \sin \phi d\theta r d\phi = r^2 \sin \phi d\phi d\theta. \quad (31)$$

O elemento de volume corresponde ao volume infinitesimal de base dA e altura dr ,

$$dV = dA dr = r^2 dr \sin \phi d\phi d\theta. \quad (32)$$

O operador gradiente em coordenadas esféricas é escrito na seguinte forma:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (33)$$

$$= \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\hat{e}_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (34)$$

onde os versores $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta)$ também formam uma trinca de versores ortonormais obedecendo a regra da mão direita, $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\phi = \hat{e}_\theta$ e permutações circulares. O versor $\hat{e}_r = \hat{r}$ está na direção e no mesmo sentido do vetor posição \vec{r} . Por isto, costuma-se denominar este versor de radial. O versor \hat{e}_ϕ é tangente ao grande círculo (de raio $r = \|\vec{r}\|$) passando pela ponta do vetor \vec{r} . O versor \hat{e}_θ é tangente ao círculo de raio $r \sin \phi$, também passando pela ponta do vetor \vec{r} . Note que as transformações (26) para ϕ constante e igual $\pi/2$ são as coordenadas polares no plano XY mostradas na Sec. II.1.

II.3. Coordenadas cilíndricas

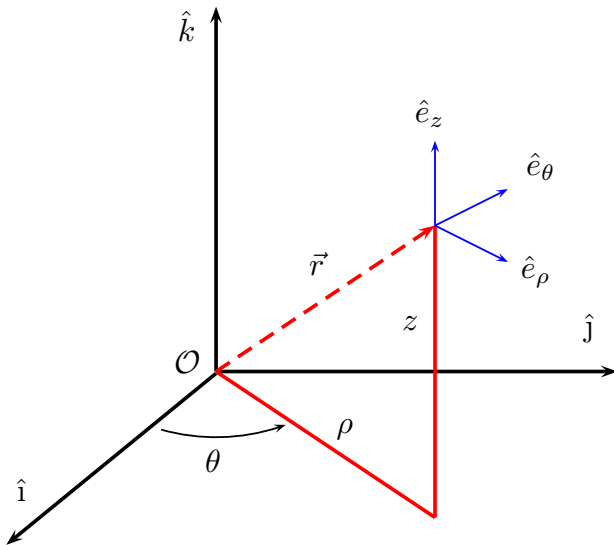


Figura 3. Sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Os versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ são mutuamente ortogonais, assim como os versores $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{k})$.

A Figura 3 mostra relação entre os versores cartesianos $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ e os versores cilíndricos $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{k})$, onde \hat{e}_ρ e \hat{e}_θ possuem as mesmas relações (18) para o sistema polar (trocando r por ρ) e, conseqüentemente, as mesmas derivadas (19). Assim, teremos

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{k}, \quad (35)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{k}, \quad (36)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{k}. \quad (37)$$

O elemento de área (na lateral de um cilindro reto de raio r) e o elemento de volume são

$$dA = \rho d\theta dz, \quad (38)$$

$$dV = dA d\rho = \rho d\theta dz d\rho, \quad (39)$$

respectivamente. O vetor gradiente é

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} = \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{e}_\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (40)$$

III. SÉRIE DE TAYLOR

Como calculamos senos, cossenos, exponenciais, funções transcendentais em geral? Mesmo quando estamos usando uma calculadora, qual é o procedimento utilizado? Ou então, suponha que conhecemos o valor de uma função $f(x)$ e de suas derivadas em um determinado ponto x_0 ,

$$f_0^{(k)} = f^{(k)}(x_0) = \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x=x_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

com $f_0^{(0)} = f_0 = f(x_0)$. Suponha também que seja muito difícil calcular o valor desta mesma função em um outro ponto \bar{x} , vizinho a x_0 , $\bar{x} = x_0 + \Delta x$, mesmo que $\Delta x = \bar{x} - x_0$ seja muito pequeno. Bem, nesta situação seria muito conveniente se pudéssemos calcular $f(\bar{x})$, mesmo que de forma aproximada, em termos de uma série de potências em Δx e com coeficientes dependentes apenas dos valores conhecidos de f e suas derivadas no ponto x_0 , ou seja, conhecendo apenas $f^{(k)}(x_0)$. Quando a função $f(x)$ é analítica (contínua e com todas as derivadas contínuas em x_0), esta série existe,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (\bar{x} - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(\bar{x} - x_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0)(\bar{x} - x_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

e é denominada de série de Taylor. Este é um dos resultados mais úteis em Matemática. É através de séries de Taylor que as funções transcendentais são calculadas.

Em geral, na prática, temos de parar (ou truncar) a soma presente na série de Taylor (42) após um número finito N de termos. O valor de N é determinado pela precisão que desejamos obter, que dependerá do quão pequeno é a diferença $\Delta x = \bar{x} - x_0$.

Como exemplo, vamos calcular a série de Taylor para as funções trigonométricas $\sin \theta$ e $\cos \theta$ em torno de $\theta_0 = 0$. Primeiro, precisamos calcular as derivadas destas duas funções. Não é difícil perceber que estas derivadas podem ser escritas na forma geral (verifique)

$$\frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \sin \theta = (-1)^k \cos \theta, \quad \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \sin \theta = (-1)^k \sin \theta, \quad (43)$$

e

$$\frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \cos \theta = -(-1)^k \sin \theta; \quad \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \cos \theta = (-1)^k \cos \theta. \quad (44)$$

De acordo com a prescrição (42), precisamos calcular os valores destas derivadas em $\theta = \theta_0 = 0$,

$$\left. \frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \sin \theta \right|_{\theta=0} = (-1)^k, \quad \left. \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \sin \theta \right|_{\theta=0} = 0, \quad (45)$$

e

$$\left. \frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \cos \theta \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \cos \theta \right|_{\theta=0} = (-1)^k. \quad (46)$$

Assim, a série de Taylor para a função seno (cosseno) terá somente potências ímpares (pares) em θ (verifique),

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \dots, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 - \dots \quad (47)$$

Faça você algumas comparações numéricas usando pequenos valores para θ (em radianos).

Como outro exemplo importante, vamos calcular a série de Taylor para a função exponencial e^{ax} em torno de $x = 0$, onde a é uma constante. As derivadas podem ser facilmente escritas na forma

$$\frac{d^k}{d\theta^k} e^{ax} = a^k e^{ax}, \quad \left. \frac{d^k}{d\theta^k} e^{ax} \right|_{x=0} = a^k. \quad (48)$$

Desta forma, a série de Taylor correspondente, segundo a prescrição (42), será

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}x^k. \quad (49)$$

Em particular, vamos tomar $a = i$, onde i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$), e fazer $x = \theta$ (medido em radianos). Devido às propriedades da unidade imaginária, a série de Taylor (49) pode ser reorganizada na forma

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots\right), \quad (50)$$

onde percebemos a presença das séries de Taylor em (47) para as funções trigonométricas. Portanto,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (51)$$

e, conseqüentemente, substituindo θ por $n\theta$,

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (52)$$

Estas relações serão muito úteis quando estivermos estudando oscilações e o efeito de ressonância. Note que a última igualdade em (52) é a famosa fórmula de Moivre (muito usada em trigonometria).

Exercício 1

Determine a expressão para um termo genérico da série de Taylor em torno de x e escreva explicitamente os quatro primeiros termos não-nulos para cada uma das seguintes funções:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, \\ g(x) &= \cos(x), \\ h(x) &= \sin(x). \end{aligned} \quad (53)$$

Exercício 2

Mostre que qualquer número complexo $z = x + iy$, de módulo $r = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z^* = x - iy$ (conjugado), pode ser representado por

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (54)$$

com

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (55)$$

Use o Exercício 1 para mostrar que

$$e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta). \quad (56)$$

Exercício 3

(1) Escreva uma rotina computacional (use computação algébrica) para calcular a série de Taylor (42) de uma função arbitrária. (2) Teste sua rotina com as principais funções trigonométricas (seno, cosseno, etc.) e com a função exponencial. (4) Nestes testes, mostre no mesmo gráfico a função originalmente pré-definida dentro do ambiente computacional que estiver usando e pelo menos quatro séries de Taylor para cada função correspondentes a diferentes números N de termos usado na soma (42). (5) Faça uma animação mostrando como é o comportamento da série de Taylor em função da quantidade de termos N na série para cada caso. Lembre-se: o trabalho dignifica e faz bem ao caráter.