ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos - PSI - EPUSP

PSI3031 - LABORATÓRIO DE ELETRICIDADE

ANÁLISE DE FOURIER DE SINAIS PERIÓDICOS

Edição 2017

L.Q. Orsini, Denise Consonni
Vitor Nascimento
Leopoldo Yoshioka, Elisabete Galeazo

Objetivos:

Realização da análise de Fourier de sinais periódicos, pela *transformada discreta de Fourier* (TDF) e interpretação dos resultados.

1 - Embasamento teórico:

A decomposição de um sinal real em uma soma (finita ou infinita) de componentes senoidais tem grande importância tecnológica, pelo que será examinada em duas experiências de laboratório, sendo a primeira dedicada a sinais periódicos e a segunda a sinais não periódicos. Começaremos pelos sinais periódicos.

Série de Fourier na forma de senos e co-senos

Um sinal periódico real $s(t)$ de período T_0 pode ser decomposto em *série de Fourier*. Como visto em Cálculo, $s(t)$ pode ser escrito na forma

(1) $$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t),$$

em que $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi f_0$ é a *frequência angular do componente fundamental* do sinal e os coeficientes de Fourier a_k e b_k são dados por

(2) $$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)\cos(k\omega_0 t)dt, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

e

(3) $$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt, \quad k = 1, 2, ...$$

Série de Fourier na forma complexa

Em Engenharia Elétrica é mais conveniente trabalhar com a série de Fourier em sua *forma complexa*. Neste caso, a série de Fourier é dada por

(4) $$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k [\cos(k\omega_0 t) + j\mathrm{sen}(k\omega_0 t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

em que os c_k são os *coeficientes complexos de Fourier*. Os coeficientes podem ser calculados pela expressão

(5) $$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Os coeficientes c_k podem ser facilmente relacionados com a série de Fourier em termos de senos e co-senos se lembrarmos que $e^{jx} = \cos(x) + j\,\mathrm{sen}(x)$. Expandindo a expressão acima, obtém-se

(6) $$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)[\cos(k\omega_0 t) - j\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)]dt\,.$$

Logo,

(7) $$c_k = \frac{a_k}{2} - j\frac{b_k}{2},$$

em que a_k e b_k são os coeficientes da série de Fourier na forma de senos e co-senos. Portanto, em geral vale

(8) $$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

e

(9) $$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Note que os coeficientes c_k são definidos para k positivo e negativo. Para sinais reais, os coeficientes c_k e c_{-k} são complexos conjugados, ou seja,

(10) $$c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Na forma polar os complexos conjugados são representados por

(11) $$c_k = |c_k| e^{j\Phi_k}, \quad \text{para } k \geq 1$$

e

(12) $$c_{-k} = |c_k| e^{-j\Phi_k}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Combinando os termos da série complexa (4) para k positivo e negativo, obtém-se

(13) $$c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = 2\,\mathrm{Re}\{c_k e^{jk\omega_0 t}\} = 2\,|\,c_k\,|\cos(k\omega_0 t + \Phi_k)\,.$$

<u>Série de Fourier na forma trigonométrica polar:</u>

Em Engenharia Elétrica, muitas vezes, também é conveniente apresentar a série de Fourier na sua *forma trigonométrica polar*:

(14) $$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \Phi_k)\ .$$

Nesta forma, $A_0 = c_0$ é o *componente contínuo* do sinal. Os demais componentes da série (14) fornecem o *fundamental* (k=1) e os *harmônicos* (k=2, 3, ...).

Se todos os harmônicos do sinal forem nulos a partir de um $k = M + 1$, diz-se que o sinal é de *espectro limitado*.

Cada um dos termos da série (14) pode ser representado por um *fasor*:

(15) $$\hat{A}_k = A_k e^{j\Phi_k}$$

Verifica-se que a relação entre os coeficientes de Fourier (11), (12) e os fasores é

(16) $$A_0 = c_0 = \frac{a_0}{2},$$

(17) $$A_k = 2\,|\,c_k\,| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

e

(18) $$\Phi_k = \arg c_k\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Nota: A demonstração dos resultados acima resumidos pode ser encontrada em [1], Cap.9.

2 - A análise espectral:

O objetivo da análise espectral de um sinal é a determinação dos coeficientes de Fourier de seu desenvolvimento em série ou, equivalentemente, dos fasores indicados em (15). Há duas classes de métodos experimentais de análise espectral: os *métodos analógicos* e os *métodos digitais*. Os métodos analógicos usam instrumentos chamados *analisadores espectrais*. Estes instrumentos são caros e de difícil manuseio. Hoje em dia preferem-se os métodos digitais, em geral mais econômicos e mais precisos. Nesta experiência a análise espectral será feita por um método digital, utilizando-se um osciloscópio para a aquisição e amostragem do sinal, e um computador para o processamento do sinal amostrado.

A base do método digital a ser utilizado é a seguinte:

1. Usando um osciloscópio digital selecionam-se N amostras do sinal.

2. Por meio de um barramento GPIB esta sequência de amostras é enviada a um computador.

3. O computador aproxima a integral a partir das amostras obtidas $s(n\,T_a)$, em que T_a é o *intervalo entre amostras* ou *período de amostragem* (veja a Figura 1):

(19) $$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)e^{jk\omega_0 t}dt \approx \frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_a)e^{jk\omega_0 nT_a}T_a = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_a)e^{j2\pi\, n\, k/N}\,,$$

em que usamos o fato de que $T_0 / T_a = N$ e $\omega_0\, T_a = 2\pi\, T_a / T_0 = 2\pi / N$. Esta última expressão (sem a divisão por N) é chamada *transformada discreta de Fourier* (*TDF*) da sequência de amostras. Ela tem grande importância no estudo de sinais de tempo discreto, mas aqui será vista apenas como uma aproximação da integral para o cálculo da série de Fourier. Repare que o coeficiente c_k corresponde à frequência $k / (N\,T_a)$ (veja a seção 3.1.II para mais detalhes).

A TDF tem várias propriedades importantes, algumas das quais serão vistas nesta experiência: (a) existe um algoritmo muito rápido para calcular a TDF, conhecido por transformada rápida de Fourier, ou *fast Fourier transform* (FFT); (b) sob determinadas condições, que veremos logo a seguir, a TDF fornece os valores *exatos* dos coeficientes da série de Fourier.

4. A partir da TDF o computador fornece os coeficientes de Fourier (2) ou os fasores (4), dentro de um certo grau de precisão.

Passemos a discutir a interpretação dos resultados do método digital.

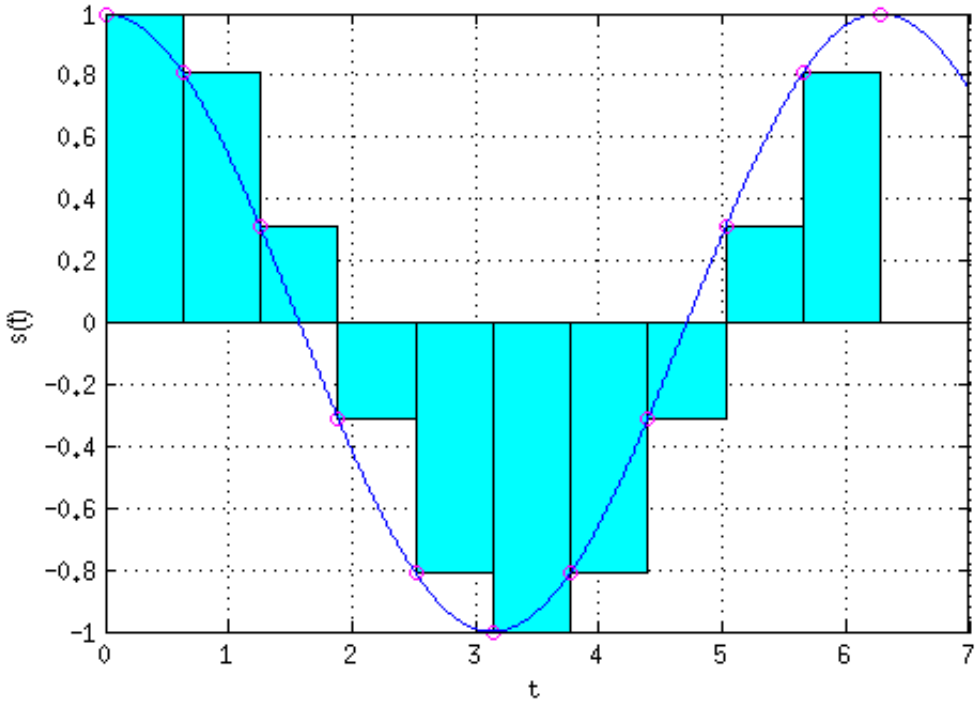


Figura 1: TDF como integral aproximada. Aqui temos um co-seno com período 2π, correspondente a 10 amostras $s(n\,T_a)$, com n variando entre 0 e 9 (note que o ponto para $n = N = 10$ não é usado, caso contrário seria calculada a integral de 0 a $2{,}2\pi$, não de 0 a 2π.

3 - A interpretação dos resultados:

3.1 - Os fatos básicos:

Nesta experiência serão tomadas N amostras, igualmente espaçadas, de um sinal periódico $s(t)$ de valor real. Obtemos assim a sequência

(20) $$\{ s_0 , s_1, \ldots s_n , \ . \ . \ . \ s_{N-1} \}$$

em que

(21) $$s_n = s(n\, T_a)$$

e T_a é o período de amostragem, ou seja, o intervalo entre amostras consecutivas. O inverso do período de amostragem, $f_a = 1/T_a$, é a *frequência de amostragem.* Define-se então a *duração da janela de amostragem* por

(22) $$T_d = N\,T_a = N / f_a \quad .$$

Na figura 2 damos um exemplo de amostragens de um sinal periódico. Repare que, mesmo que o sinal original seja periódico, o sinal amostrado pode ou não ser periódico, como ilustrado nessa figura. O primeiro sinal amostrado é periódico, ao passo que o segundo é não-periódico. O ponto importante é notar que, se $T_0 \,/\, T_a$ for um número racional, então a sequência amostrada s_k será periódica, mas se $T_0 \,/\, T_a$ for um número irracional, s_n não se repete nunca (e portanto não é periódica).

Sobre a sequência (20), limitada a N termos, aplica-se a transformada discreta de Fourier (lembre-se que a TDF não inclui divisão por N), resultando uma *sequência transformada*, duplamente infinita, cujo termo genérico, em geral complexo, é calculado por

(23) $$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \, e^{-jk(2\pi/N)n} \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

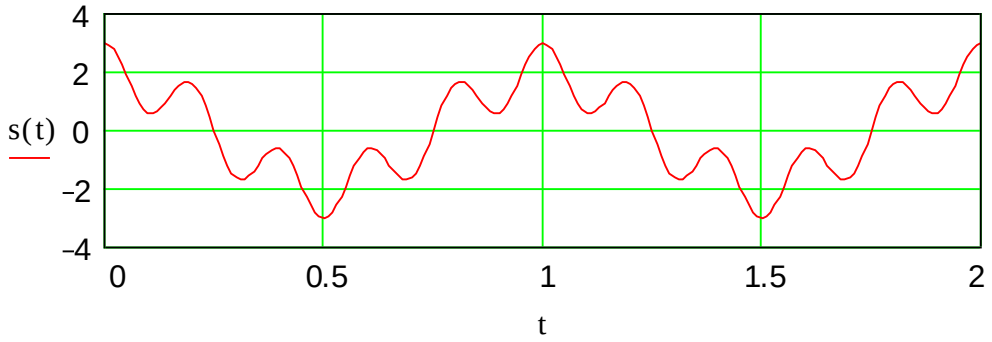
Esta nova sequência $S(k)$ é periódica por construção, com período igual a N passos, já que $e^{-j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{-jk(2\pi/N)n} \cdot e^{-jk2\pi\, n} = e^{-jk(2\pi/N)n}$.

Exemplo de sinal amostrado , LQO, 19/03/98

Sinal contínuo

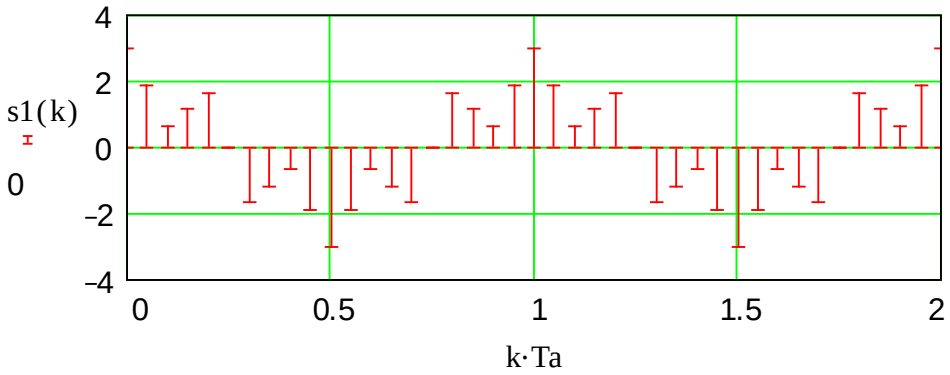
$t := 0, 0.01 .. 2$

$s(t) := 2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot t) + \cos(10\cdot\pi\cdot t)$



Sinal amostrado periódico: $k := 0 .. 100$ $Ta := 0.05$ $fa := \frac{1}{Ta}$

$s1(k) := 2\cdot\cos(2\cdot k\cdot\pi\cdot Ta) + \cos(10\cdot\pi\cdot k\cdot Ta)$ $fa = 20$



Sinal amostrado não-periódico: $Ta := \frac{\pi}{60}$ $fa := \frac{1}{Ta}$ $fa = 19.099$

$N := 40$ $Td := N\cdot Ta$ $Td = 2.094$

$s2(k) := 2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot Ta) + \cos(10\cdot\pi\cdot k\cdot Ta)$

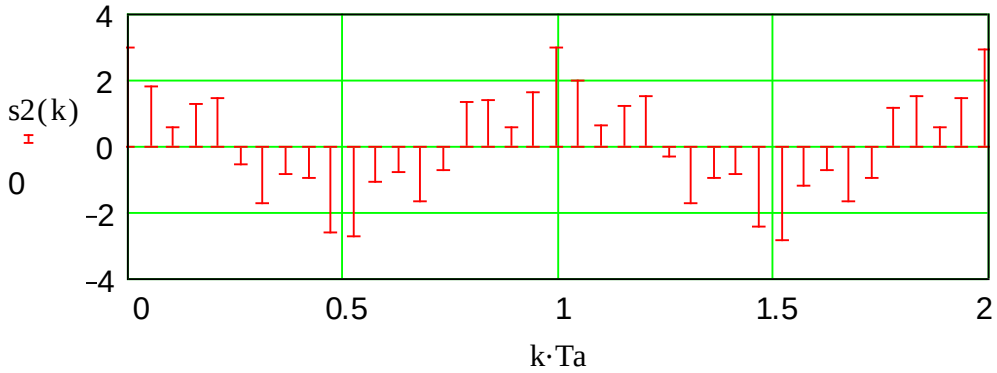


Figura 2 - Exemplo de amostragens numa janela.

Como se mostra em [1], Cap. 10, os coeficientes da série de Fourier de um *sinal periódico* podem ser obtidos amostrando o sinal e calculando a transformada discreta de Fourier da sequência de amostras. Em geral haverá erros inerentes ao método, mas é possível obter um resultado *exato* se as seguintes condições forem satisfeitas:

I) - *Condição de Nyquist:* - O sinal periódico, com frequência fundamental f_0, tiver seu espectro limitado superiormente, com frequência limite $f_R = M f_0$ inferior à metade da frequência de amostragem, isto é,

(24) $$M f_0 < f_a / 2.$$

Isso equivale a se tomar uma frequência de amostragem maior que o dobro da frequência limite, ou seja, $f_a > 2 M f_0$

II) - A duração da janela de amostragem, T_d, for *exatamente igual* a um número inteiro n_p de períodos T_0 do sinal. Sendo N o número de amostras usado para o cálculo da TDF e T_a o período da amostragem, a duração da janela de amostragem será dada por

(25) $$T_d = N T_a = N / f_a \quad \rightarrow \quad f_a = N / T_d \ .$$

Por outro lado, se a janela tiver um número inteiro n_p de períodos do sinal, valem também

(26) $$T_d = n_p T_0 = n_p / f_0 \ .$$

Portanto, comparando (25) e (26) vemos que a frequência de amostragem deve satisfazer a

(27) $$f_a = (N / n_p) f_0 \ .$$

Se (24), (25) e (27) forem satisfeitas, as relações entre os elementos $S(k)$ da sequência da TDF e os coeficientes c_k da série de Fourier (ou os fasores correspondentes) serão dadas por

(28) $$c_{k/n_p} = S(k) / N \quad , \qquad | k | < N / 2$$

ou

(29) $$\hat{A}_{k/n_p} = 2S(k) / N \quad , \qquad 0 < k < N / 2 \ ,$$

em que $S(k)$ corresponde à frequência $k f_d = (k / n_p)\cdot f_0 = (k / N)\cdot f_a$. Além disso, $\hat{A}_0 = S(0) / N = c_0$. Esses resultados estão demonstrados em [1], Cap. 10.

Para a determinação do espectro de um sinal periódico pela transformada discreta de Fourier, os seguintes fatos devem ser considerados:

a) As raias do espectro da TDF ocorrem em frequências múltiplas do inverso da duração da janela, $1/T_d$. Define-se então a *frequência fundamental da TDF* ou *resolução espectral* por

(30) $$f_d = 1 / T_d = f_a / N \ .$$

Se for feita a escolha $T_d = T_0$, isto é, com a janela de amostragem igual a um período do sinal, então a frequência da fundamental da TDF é igual à da fundamental do sinal. No entanto, se $T_d = n_p \cdot T_0$, então a fundamental f_0 do sinal será representada pela raia $k = n_p$ da TDF, em que n_p é o número inteiro de períodos.

b) Sendo $S(k)$ o k-ésimo componente da TDF, vale a relação

(31) $$S(N-k) = S^*(k) \ ,$$

em que o asterisco indica o complexo conjugado.

Por causa desta relação o programa só calcula os componentes de $S(k)$ até a ordem de INT(N/2). As frequências dos vários componentes são computadas por $k\,f_d$, com k inteiro e f_d calculado por (30).

c) Como as raias espectrais da TDF estão separadas por f_d, esta frequência fornece a *definição* ou *resolução* do espectro.

3.2 - Os principais erros na TDF:

Na prática da análise de Fourier de sinais periódicos pela TDF aparecem vários tipos de erros, decorrentes essencialmente de:

- erros instrumentais na medida das amostras;
- impossibilidade de atender exatamente às condições (I) e (II) acima apontadas;
- erros numéricos ou computacionais.

Quando se usam osciloscópios digitais, a conversão analógico-digital (A/D) introduz um erro instrumental importante, decorrente dos *ruídos* introduzidos na conversão. Para avaliar estes ruídos e reduzir seu efeito, os osciloscópios digitais permitem dois tipos de visualização dos sinais:

- *Normal*, em que é feita só uma amostragem do sinal;
- *Média* ("*average*"), em que cada amostra corresponde à média de um número escolhido de amostras tomadas sincronicamente, sobre o mesmo ponto da tela do osciloscópio, mas em períodos sucessivos do sinal.

Vamos apresentar em seguida uma discussão sucinta dos principais erros não instrumentais: os erros de vazamento e os erros de recobrimento.

3.2.1 - Erros de vazamento:

Tomando-se para cálculo da TDF uma duração de janela T_d diferente de um número inteiro de períodos do sinal periódico, conforme indicado na figura 3(a), aparece uma descontinuidade no sinal representado pela inversa da TDF, ocasionando o *erro de vazamento* ("*leakage error*"). De fato, neste caso a inversa da TDF fornecerá amostras do sinal periódico indicado na figura 3(b). Esta descontinuidade dá origem a componentes espúrios de frequência alta. A forma de evitar este erro é, naturalmente, fazer com que $T_d = n_p T_0$, com n_p inteiro.

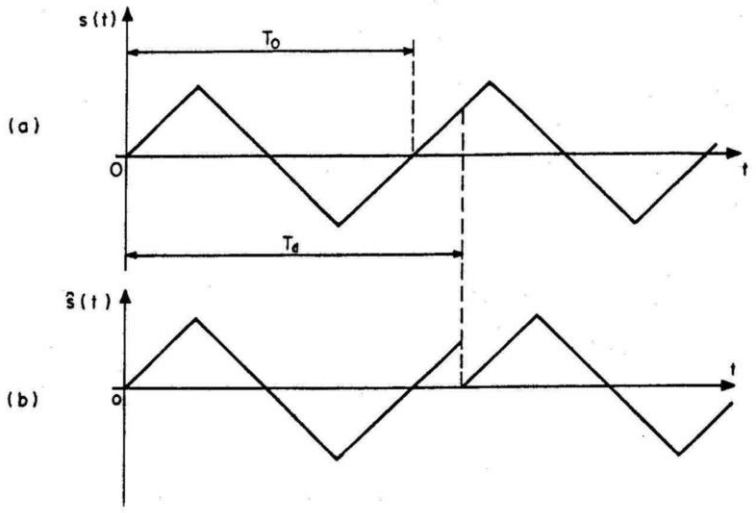


Figura 3 - A origem dos erros de vazamento.

Pela natureza discreta da amostragem e por limitações instrumentais nem sempre será possível satisfazer exatamente a esta condição. Trabalhando com cuidado, será possível satisfazê-la com um erro inferior a um período T_a de amostragem. É o que se procurará obter nesta experiência.

Um dos efeitos do erro de vazamento na análise espectral é conhecido como *efeito cerca* ("*picket fence effect*"), que pode ser ilustrado da seguinte maneira: suponhamos que uma onda periódica, com frequência fundamental de exatamente 500Hz e, portanto, com harmônicos em $k\times$ 500Hz (k inteiro) é amostrada numa janela com T_d = 23,5ms. É claro que aparecerá aqui um erro de vazamento, pois a amostragem não foi feita num número inteiro de períodos. O componente fundamental da TDF estará na frequência f_d = 42,5532Hz. O componente de 500Hz não pode, no entanto, aparecer nesse espectro, por não ser múltiplo inteiro de f_d ; em vez dele, aparecerão dois componentes, respectivamente em $42{,}5532\times 11 = 468{,}0851$Hz e $42{,}5532\times 12 = 510{,}6383$Hz, que, de fato, "cercam" o componente de 500Hz, que não aparece nesta análise (ver figura 4).

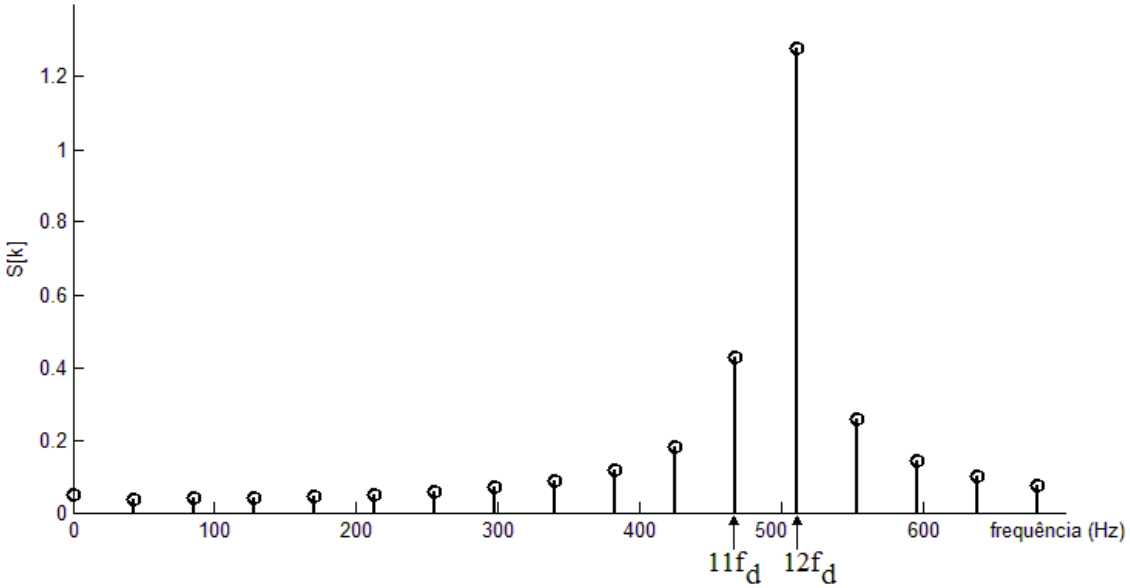


Figura 4 – Efeito cerca resultante da TDF aplicada a 11,75 períodos de uma onda triangular de frequência 500Hz. A frequência fundamental do sinal não é representada por uma raia em $11{,}75 f_d$ = 500,00Hz, mas é "cercada" pelos componentes nas frequências múltiplas da resolução espectral $11 f_d$ = 468,0851Hz e $12 f_d$ = 510,6383Hz.

3.2.2 - Erros de rebatimento (ou recobrimento):

Se o sinal a ser analisado contiver componentes espectrais com frequência maior que a metade da frequência de amostragem, ocorre o *erro de rebatimento ou de recobrimento* ("*aliasing*"). Como indicado na figura 5, estas frequências altas serão sub-amostradas, dando origem a um falso componente de frequência baixa.

Sendo f_a a frequência de amostragem, a frequência

(32) $$f_R = f_a / 2$$

é chamada *frequência de rebatimento.*

Um componente do sinal com frequência $f > f_R$ gerará, no espectro da TDF, componentes espúrios nas frequências

(33) $$f_e = 2\, m\, f_R - f = m\, f_a - f \;, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

para ($f_e < f_R$).

A correção dos erros de rebatimento não pode ser feita depois da amostragem. Praticamente, basta notar que estes erros serão desprezíveis se os componentes espectrais fornecidos pela TDF se anularem (ou ficarem desprezíveis) a partir de alguma frequência menor que f_R. Para eliminar um possível erro de recobrimento faz-se o sinal passar por um *filtro antirecobrimento* ("*anti-aliasing*") <u>antes da amostragem</u>. Este filtro deve ter uma frequência de corte menor que f_R . Assim, por exemplo, na gravação de discos compactos digitais de áudio, o sinal passa por um filtro passa-baixas com frequência de corte igual a 20kHz, antes de ser amostrado.

Além desses erros inerentes à TDF, aparecem ainda erros de cálculo numérico. Num programa adequado estes erros serão desprezíveis em face dos anteriores.

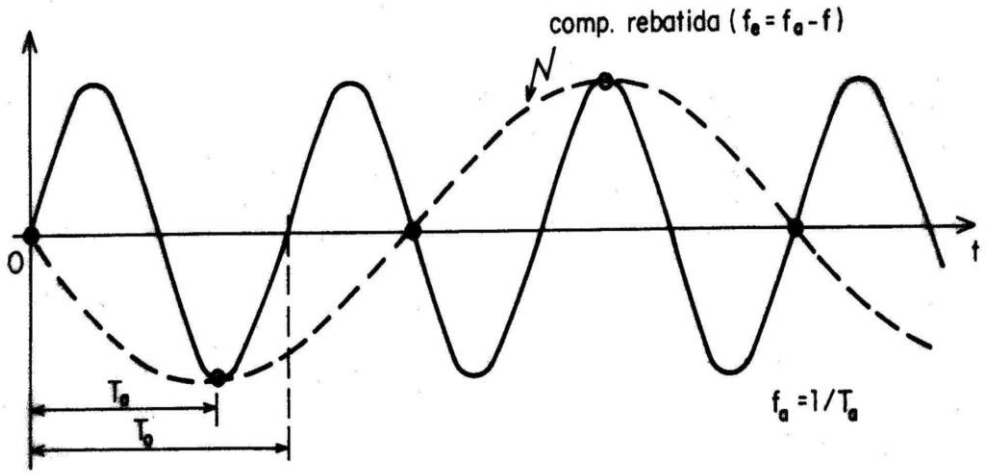


Figura 5 - Erro de rebatimento.

4 - Exemplo de espectros de Fourier de sinais periódicos:

Nesta seção daremos alguns exemplos de sinais periódicos de dois tipos: a) com espectro limitado; b) com espectro ilimitado.

4.1 - Sinais periódicos com espectro limitado:

Consideremos o sinal co-senoidal

(34) $$s(t) = A\cos(2\pi\ f_0\ t + 2\pi/3)$$

Os coeficientes complexos de Fourier não nulos deste sinal reduzem-se a

(35) $$c_1 = \frac{A}{2} e^{j2\pi/3}$$

e

(36) $$c_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j2\pi/3}$$

correspondentes, respectivamente, às frequências $+f_0$ e $-f_0$.

4.2 - Sinais periódicos com espectro ilimitado:

Como exemplo de sinal periódico com espectro ilimitado consideraremos a onda quadrada sem componente contínuo e com a origem dos tempos exatamente no meio do patamar superior (ver figura 6.a).

Como se sabe, os coeficientes de Fourier do desenvolvimento em série desta onda são

(37) $c_k = 0,$ para k=0

e

(38) $c_k = A\dfrac{\text{sen}(k\pi/2)}{k\pi/2},$ para $k \neq 0$.

Observe que, para k par, a expressão (38) resulta em $c_k = 0$. Segundo (38), os coeficientes para k ímpar são dados por $c_k = \dfrac{2A}{k\pi}\cdot(-1)^{(k-1)/2}$.

Se a onda for atrasada de τ, como indicado na figura 6.b, o k-ésimo harmônico do espectro será multiplicado por

(39) $$e^{-j\,k\,\frac{2\pi\,\tau}{T_0}} = e^{-j\,k\,\theta_A}$$

em que θ_A é o ângulo correspondente ao atraso τ.

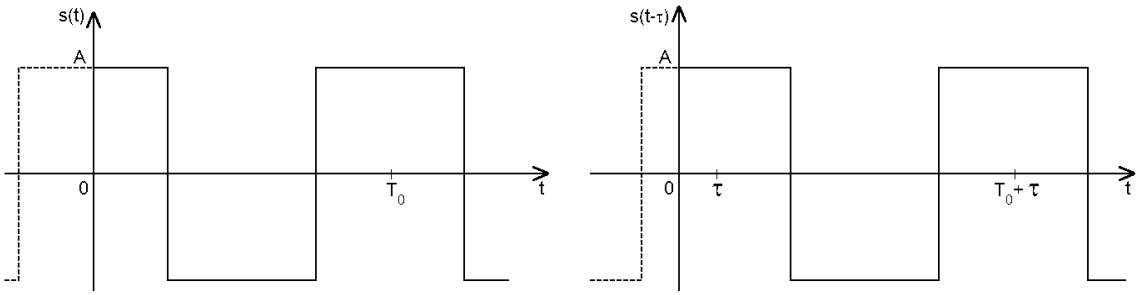


Figura 6 - a) onda quadrada; b) onda quadrada deslocada.

Suponhamos agora que a onda quadrada seja amostrada exatamente com N amostras em um único período, de modo que a frequência de amostragem fica

(40) $f_a = N / T_0$

Seja $\{ S(k) \}$, $k = 0, 1, ..., N\text{-}1$ um período da sequência da TDF destas amostras. Se a condição de limitação do espectro original fosse satisfeita, teríamos

(41) $S(k) = N\,c_k$,

para os $0 \leq k < N/2$. Obviamente esta condição não pode ser satisfeita para a onda quadrada, cujo espectro é, teoricamente, infinito. Esta impossibilidade acarretará um erro de recobrimento na determinação do espectro. O componente c_k de frequência $f_k > f_R$ (= $f_a/2$) sofre rebatimento e se apresenta na frequência rebatida $f_r = |m \times f_a - f_k|$. O multiplicador m é um número natural escolhido de forma que $0 \leq f_r \leq +f_R$.

Ao se calcular a TDF da onda quadrada de fase nula, obtém-se

(42) $$\frac{S(k)}{N} = 2\frac{A}{N}\frac{\text{sen}(k\pi/2)}{\text{sen}(k\pi/N)}, \text{ para } k \neq 0.$$

O erro de rebatimento pode ser tolerado quando $c_k \approx S(k)/N$, em que c_k é dado pela expressão (38)

Para diminuir o erro de rebatimento, ao menos até um certo harmônico, podemos fazer o seguinte:

- aumentar o número de amostras por período; ou
- antes de amostrar, passar o sinal de tempo contínuo por um *filtro passa-baixas* (*filtro anti-recobrimento*) adequado, que elimina (ou, pelo menos, reduz muito) os harmônicos mais elevados do sinal .

Os dois recursos serão utilizados na parte experimental deste trabalho.

Bibliografia:

[1] - ORSINI, L. Q., CONSONNI, D., *Curso de Circuitos Elétricos,* vol. 2, S. Paulo, ed. Blucher, 2004.

[2] - AUBANEL, E. E. e OLDHAM, K. B., Fourier Smoothing without the Fast Fourier Transform, BYTE, Fev. 1985, pgs. 207-218.

[3] - BRIGHAM, E. O., *The Fast Fourier Transform:,* Upper Side River, N. J., 1974.

[4] - LabVIEW Graphical Programming, versão 5, National Instruments Corp., Austin TX, 1998.