Capítulo 17

relatividade: impacto e princípios

A teoria da relatividade restrita foi proposta por Albert Einstein em 1905, no mesmo ano em que ele publicou o seu famoso trabalho sobre o efeito fotoelétrico. As idéias de Einstein tiveram enorme impacto na ciência do século 20, bem como importantes implicações filosóficas, epistemológicas e culturais. A visão de mundo subjacente à teoria da relatividade é bastante diferente daquela proveniente da mecânica clássica e, por isso, levou bastante tempo para ser aceita. Mesmo em 1922, ano em que Einstein foi agraciado com o prêmio Nobel, não havia consenso na comunidade científica acerca da validade da relatividade, tendo o prêmio sido concedido pelo seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico.

• o impacto na ciência

A relatividade mudou tanto **o modo de trabalhar** em ciência como a percepção de como esse trabalho ocorre. No fim do século 19 e no início do 20, a ciência era vista hegemônicamente como uma atividade onde o conhecimento seria produzido por meio de generalizações muito cautelosas, feitas a partir de observações também muito cuidadosas. Esquematicamente, segundo a concepção dominante na época, o conhecimento científico deveria ter início em observações cuidadosas do comportamento da natureza, que mostrariam a existência de regularidades. A perccepção dessas regularidades levaria à formulação de leis que, após serem testadas e generalizadas, passariam a fazer parte de corpos maiores, as teorias. Deste modo, o conhecimento científico cresceria de modo cumulativo, lenta e gradualmente, por indução de verdades mais gerais a partir de outras menos gerais [1]. Este modo de conceber a ciência é conhecido como *indutivismo*.

O modo como a relatividade foi gerada é completamente antagônico a essa visão do processo científico, defendida pelos indutivistas. Ao ser proposta, a relatividade possuía muito pouco ou nenhum suporte empírico, tendo sido produzida a partir de concepções gerais a respeito do universo. Por isso, a proposta desta teoria, por Einstein, modificou muito a visão que tanto cientistas como filósofos tinham a respeito do funcionamento da ciência. O filósofo Karl Popper, no livro "A lógica da descoberta científica", publicado em

1935, foi um dos primeiros a incorporar a postura científica de Einstein no contexto da filosofia da ciência. A visão do processo de criação do conhecimento científico apresentada por Popper, nesta e em outras obras, representou uma ruptura importante com a dos indutivistas. Posteriormente, outros filósofos aprofundaram a compreensão desta ruptura, culminando com a proposta apresentada em 1962 por Thomas Kuhn, no seu livro "A estrutura das revoluções científicas". Um dos resultados desse processo de revisão das idéias acerca da ciência, motivado pela relatividade é que, atualmente, a questão da existência de um método científico único é vista como algo sem sentido. Uma apresentação compacta de discussões filosóficas acerca deste tema pode ser encontrada no livro "O que é esta coisa chamada ciência", de A.F. Chalmers.

• o impacto na física

O impacto da relatividade foi muito forte no interior da física. Seus efeitos não estão restritos apenas ao interior de uma teoria, pois ela mudou também o modo de conceber **o universo físico** como um todo. Na primeira aula do curso de Física 3, mencionamos o fato de que o universo contém muitas coisas e entidades, uma parte das quais constitui o chamado universo físico. Como vimos, o universo físico pode ser pensado, em linhas gerais, como contendo três grandes classes de entidades, simbolicamente denominadas *palco*, *dinâmica* e *atores*.

Na versão clássica do universo físico, o palco engloba o tempo e o espaço, a energia e as quantidades de movimento linear e angular. Na física clássica, o tempo e o espaço são concebidos como grandezas independentes. Entretanto, a energia é ligada ao tempo, já que a sua conservação pode ser atribuída à uniformidade com que ele flui. O mesmo tipo de relação existe, também, entre espaço e as quantidades de movimento linear e angular. Os atores, por outro lado, representam os entes materiais, tais como massas, cargas e outras coisas, juntamente com os seus campos, responsáveis pelas interações da matéria. Finalmente, a dinâmica corresponde às leis que relacionam interações e movimentos. O universo físico clássico pode ser representado pelo esquema abaixo.

	o universo clássico	
palco	$\mathbf{L}$ e $\mathbf{p}$ $\updownarrow$ $\mathbf{r}$	E $\updownarrow$ t
dinâmica	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e as outras leis da dinâmica propostas por Newton	
atores	$m \leftrightarrow \mathbf{g}$, $q \leftrightarrow \mathbf{E} - \mathbf{B}$ e outros...	

A relatividade subverteu profundamente este quadro, de várias maneiras. Na física clássica, espaço e tempo são concebidos como grandezas absolutas, ou seja, que não dependem do observador. Na relatividade, aparece uma relação entre espaço e tempo, sendo possível que observadores diferentes interpretem de modos diferentes o que é tempo e o que é espaço, na relação entre dois eventos quaisquer. Assim, espaço e tempo passam a ser facetas diferentes do *espaço-tempo*. Do mesmo modo, na relatividade, a energia e as quantidades de movimento linear e angular também passam a ser relacionadas entre si. Essas mudanças nas características do palco forçaram a revisão das demais partes do quadro e, em particular, as leis da dinâmica de Newton tiveram de ser modificadas. A versão da relatividade de 1905, conhecida como **relatividade restrita**, contém ainda um outro elemento bastante novo, expresso pela equação $E = mc^2$, que relaciona a energia, um elemento do palco, com a massa, um ator. A proposta de universo físico contida na teoria de 1905 pode ser representada pelo quadro abaixo.

	relatividade (1905)
palco	$\mathbf{L}$ e $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathrm{E} \leftrightarrow \mathrm{m\,c}^2$ $\updownarrow \qquad \updownarrow$ $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathrm{t}$
dinâmica	"leis de Newton" modificadas
atores	$m \leftrightarrow \mathbf{g}$ $q \leftrightarrow \mathbf{E} - \mathbf{B}$ e outros...

O papel ambíguo da relação $E = mc^2$ na relatividade restrita indica que o quadro alternativo à física clássica produzido por esta teoria não é totalmente coerente. Isso motivou a formulação da teoria da relatividade geral, apresentada por Einstein em 1915. Nessa nova versão, Einstein resolve a ambiguidade existente na relatividade restrita, colocando a massa no palco. Agora, ela passa a ser vista como algo capaz de influenciar o próprio comportamento do espaço-tempo. O campo gravitacional, que antes era atribuído a uma aura que existiria em torno das massas, passa a ser devido ao que, em termos técnicos, é chamado de curvatura do espaço-tempo. Esta nova concepção do universo pode ser representada do seguinte modo.

	relatividade geral (1915)
palco	$\mathbf{L}$ e $\mathbf{p}$ $\leftrightarrow$ E $\leftrightarrow$ m $\leftrightarrow$ $\mathbf{g}$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\mathbf{r}$ $\leftrightarrow$ t
dinâmica	equação de Einstein
atores	$q \leftrightarrow \mathbf{E} - \mathbf{B}$ e outros...

• o absoluto

O caráter revolucionário da relatividade fez com que ela ficasse bastante conhecida fora do âmbito restrito da ciência e que Einstein se tornasse uma espécie de herói popular. Isso motivou o aparecimento de várias visões estapafúrdias acerca do conteúdo da relatividade. Talvez a mais errada de todas elas seja a que afirma que a relatividade mostra que "tudo é relativo"[2]. Ao contrário, o objetivo da teoria é determinar o que é relativo na física, de modo a podermos compreender melhor o que não o é. Os aspectos absolutos do universo físico constituem, de fato, o alvo maior da relatividade.

O jogo entre o relativo e o absoluto está presente em várias partes da física e da matemática. Ele é particularmente importante na geometria. Para fixar as idéias, consideremos um cubo. Com certeza, todos nós sabemos o que é um cubo. Entretanto, como sabemos isto? Onde, dentro de nós, este conhecimento se esconde? Que formas ele pode ter?

Existem várias maneiras de sabermos o que é um cubo. Esse conhecimento pode começar, por exemplo, com o contato sensorial com um cubo material, como ocorre quando uma criança brinca com um dado. Ao fazer isto, ela experimenta o cubo com o tato, com os olhos, com a boca... Manipulando o dado e outros cubos materiais passamos, de algum modo, a conceber um cubo abstrato em nossa mente. Normalmente, nossas experiências com cubos materiais ocorrem em ambientes culturais nos quais o conceito de cubo já está bem estabelecido. Existe até uma palavra para designar esta entidade: CUBO! Este tipo de exercício, envolvendo experimentação e informação cultural acaba fazendo com que, depois de certo tempo, passemos a *saber* o que é um cubo. A idéia de cubo que passamos a ter vai se distanciando dos cubos materiais particulares que conhecemos. Essa idéia, se por um lado se afasta das experiências particulares, por outro, é capaz de apreender todos os cubos de uma só vez. Na nossa mente passa a existir um *cubo-conceito*, passível de ser examinado e conhecido sem intermediações. O conhecimento do cubo pela mente corresponde a um tipo de saber profundo e silencioso. É um tipo de conhecimento que pode ser classificado com gnóstico, onde ocorre uma relação direta entre a mente e o conceito de cubo.

A existência do cubo-conceito na nossa mente leva a uma outra classe de problemas, associada às suas representações. Elas podem ser feitas de vários modos diferentes. Podemos representá-lo oralmente, falando a palavra *cubo*. Alternativamente, podemos recorrer a um código um pouco mais visual, e escrever a palavra *cubo*. É interessante notar que, em português, um cubo não precisa ser descrito e pode ser denotado por uma única palavra, o que indica uma proximidade com o sentido absoluto do cubo.

Alternativamente, podemos representar um cubo por meio de desenhos, como os mostrados abaixo:

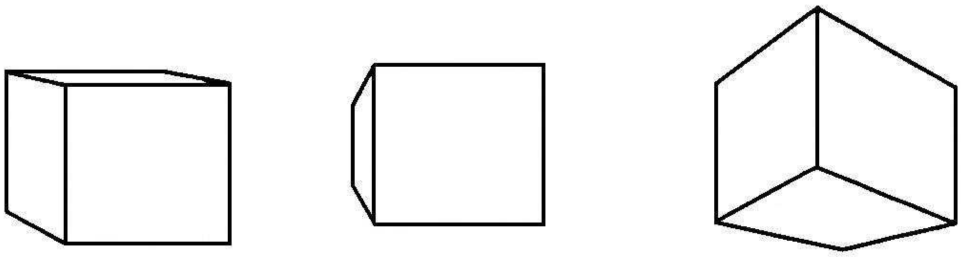

Figura 17.1: Representação de cubos em diversos pontos de vista.

Neste caso, a relação da representação com o caráter absoluto do cubo torna-se ambígua. Por um lado, os cubos representados voltam a ficar um pouco parecidos com os cubos reais. Por outro, ao desenhar o cubo, não conseguimos mais representá-lo em sua inteireza, e somos obrigados a nos contentar com apenas algumas das suas facetas. Em cada desenho, apenas uma, dentre as suas infinitas caras. São possíveis apenas representações parciais, e a unidade do objeto somente pode ser recuperada postulando-se a equivalência destas várias representações parciais. Esse caráter parcial das representações baseadas em desenhos ocorre porque eles incorporam, necessariamente, a perspectiva do observador, que é sempre particular. De fato, cada desenho não representa o cubo em sua totalidade, mas uma das possíveis maneiras de alguém se relacionar com ele.

No contexto da geometria um cubo pode, também, ser representado de várias maneiras diferentes. Por exemplo, na geometria dos sólidos, que estuda as propriedades e características das figuras no espaço euclidiano em três dimensões, o cubo é pensado como sendo um sólido com seis faces quadradas iguais. Neste caso,temos uma conceituação absoluta, independente de observadores e referenciais. De modo alternativo, na geometria analítica, o cubo pode ser descrito por meio de expressões quantitativas. Por exemplo, o cubo de lado L mostrado na figura 17.2, pode ser representado como sendo o corpo sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = L$, $y = L$ e $z = L$.

Este tipo de representação tem duas características muito interessantes. A primeira delas é que, para representar o cubo, é preciso especificar o comprimento de sua aresta. Por isso, o cubo representado já é um pouco particular. Além disso, no caso da representação analítica, é necessário o uso de um referencial, que incorpora, obrigatoriamente, um "ponto de vista" *externo* ao objeto representado. Podemos perceber isso notando que o mesmo

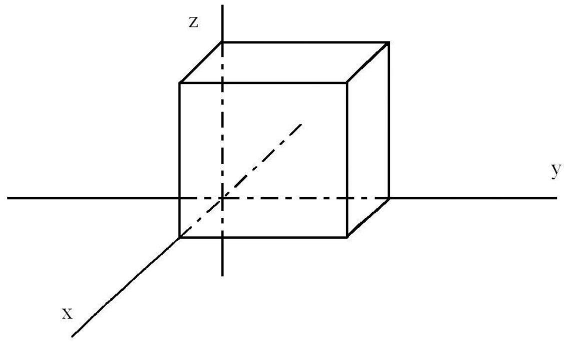

Figura 17.2:

cubo também pode ser representado como sendo o sólido delimitado pelos planos $x = a$, $y = b$, $z = c$, $x = L+a$, $y = L+b$ e $z = L+c$, onde a, b e c são variáveis que podem assumir quaisquer valores. Essas novas descrições correspondem a deslocamentos da origem do sistema de coordenadas. Assim, a forma da descrição analítica do cubo também depende fortemente do sistema de eixos adotado. Mudando o referencial, a descrição do cubo muda, ainda que o cubo não mude. Neste caso, pode-se perceber de modo claro, a relação dialética entre o caráter absoluto do objeto e a relatividade da sua representação.

Imaginemos, agora, que tenhamos nascido em um mundo onde existissem objetos sólidos, mas no qual não pudéssemos ter acesso direto a eles, a não ser por meio de suas descrições analíticas. Neste mundo, cada um descreveria o cubo através de uma perspectiva particular, usando convenções diferentes, equações diferentes... Seria muito difícil recuperar o conceito de cubo no meio de todo este caos aparente. Seria necessário alguém muito inteligente para perceber a existência de um cubo, ou seja, de que existe algo em comum entre as várias descrições particulares, com características estáveis e bem definidas. Como buscar a estabilidade no meio do caos? Em primeiro lugar, é preciso acreditar que tal estabilidade exista. Em seguida, alguém dotado de espírito matemático poderia pensar em inventar uma teoria que unificasse todas as observações e descrições particulares, de modo que, conhecida uma delas, todas as demais pudessem ser obtidas. Usando tal teoria, ele seria capaz de separar, por meio de mudanças matemáticas de referencial, as características relativas das absolutas existentes em uma dada descrição. Um nome bom para uma teoria como essa seria “teoria de relatividade”.

O caso da teoria da relatividade de Einstein é muito parecido com o do cubo na geometria analítica, já que o seu propósito é encontrar, por trás das aparências dos fenômenos, as leis absolutas que os determinam. O que muda, é o fato de ela unificar, não só as observações de pessoas que estão paradas em posições diferentes, olhando um único objeto mas, também, as observações de pessoas em movimento relativo.

• teorias

A **relatividade restrita** é uma teoria e, como tal, ela é portadora de uma visão de mundo. Na primeira aula deste curso, mencionamos alguns dos significados da palavra teoria, encontrados no dicionário do Aurélio:

"**teoria**. *[Do gr. theoria, 'ação de contemplar, examinar'; 'estudo'; 'deputação solene que as cidades gregas mandavam às festas dos deuses'; 'festa solene, pompa, procissão', pelo lat. theoria.] S.f. 1. Conhecimento especulativo, meramente racional. 2. Conjunto de princípios fundamentais duma arte ou duma ciência. (...) 8. Na Grécia antiga, embaixada sagrada que um Estado enviava para o representar nos grandes jogos esportivos, consultar um oráculo, levar oferendas, etc. (...)."*

Na física, uma teoria é, normalmente, uma estrutura onde conceitos e leis empíricas são articulados por meio de relações matemáticas. O fato de elas serem fortemente apoiadas no formalismo matemático lhes confere certa racionalidade e uma certa impessoalidade. Entretanto, isto não significa que elas sejam totalmente objetivas, isentas de aspectos subjetivos. As teorias dão margem a interpretações, elas apontam para aspectos escondidos da realidade. A teoria faz o papel do dedo no provérbio chinês: "o dedo serve para apontar a lua; o sábio olha para a lua, o ignorante para o dedo".

• o dedo e a lua

A preocupação em separar o absoluto do aparente aproxima Einstein da tradição mística dos judeus, a cabala. Por exemplo, apresentamos a seguir um trecho de uma obra clássica, o "Zohar", escrito pelo cabalista espanhol Moisés de Leon, entre 1280 e 1286, onde ele descreve alegoricamente a relação com o absoluto que está por trás das aparências [3]. No caso, este autor refere-se à Torá, o livro que encerra a lei mosaica.

"Na verdade, a Torá deixa escapar uma palavra, e emerge um pouco de seu invólucro e depois torna a esconder-se. Mas procede assim somente com os que a conhecem e lhe obedecem. Pois a Torá se parece com uma bela e formosa donzela, escondida numa câmara reclusa de seu palácio, e que tem um namorado secreto, desconhecido de todos. Por amor à donzela, ele vive passando à porta da casa dela, olhando para cá e para lá, à procura dela. Ela sabe que o bem-amado ronda o portão da sua casa. O que é que ela faz? Abre a porta da sua câmara reclusa, um pouquinho só, e por um momento revela o rosto ao bem-amado, porém logo o esconde de novo. Estivesse alguém com o amado, nada veria e nada perceberia. Só ele a vê e ele é atraído por ela com o coração e a alma e todo o seu ser, e ele sabe que por amor a ele, ela se lhe mostrou por um instante, ardendo de paixão por ele. Assim acontece com a palavra da Torá, que se revela somente aos que a amam. A Torá sabe que o místico (... o sábio de coração) ronda o portão de sua casa. O que é que ela faz? Do interior de seu palácio oculto desvela o semblante, acena-lhe e retorna logo ao palácio onde se esconde. Os que lá se encontram nada vêem e nada sabem, somente ele, e ele é atraido para ela com todo o coração e toda a alma e todo o seu ser. Assim a Torá se desvela e se esconde, e emerge em amor pelo seu amado e desperta o amor nele. Venha e veja: este é o caminho da Torá. De início, quando deseja revelar-se a um homem, faz-lhe um rápido sinal. Se ele entende, muito que bem; se não, manda-o vir e chama-o de simplório. Ao mensageiro que ela envia, a Torá diz: diga ao simplório que

venha até aqui para que eu possa conversar com ele. [...] Quando ele vem para junto dela, ela começa falar-lhe por detrás de uma cortina, palavras à altura da sua compreensão, até que, lentamente, ele começa a entender [...]. Depois ela fala, através de um véu, palavras alegóricas [...]. Só então, depois que ele se familiariza com ela, esta se lhe revela, face a face, e fala-lhe de todos os seus segredos escondidos e seus caminhos obscuros que desde o começo estiverem em seu coração. Um tal homem, então, é chamado de perfeito, um "mestre", ou seja, "um noivo da Torá", no sentido mais estrito, o dono da casa, a quem ela desvenda todos os segredos, nada escondendo. Ela lhe diz: Está vendo agora, quantos segredos havia naquele sinal que lhe fiz no primeiro dia, e qual seu verdadeiro sentido? E ele entende, então, que àquelas palavras nada se lhes pode acrescentar e delas nada se pode tirar. E pela primeira vez, então, compreende o verdadeiro significado das palavras da Torá, tal como elas aí se encontram, aquelas palavras às quais nenhuma sílaba ou letra pode ser acrescentada e das quais nenhuma pode ser tirada. E, por isso, os homens deveriam tomar o cuidado de perseguir a Torá (isto é, estudá-la com grande exatidão), a fim de se tornarem o seu bem amado, do modo como foi relatado".

Substituindo neste texto a palavra Torá, que corresponde ao livro da lei mosaica, por natureza, talvez tenhamos uma boa alegoria da postura de Einstein frente à relatividade.

• os princípios da teoria da relatividade restrita

A teoria da relatividade restrita é baseada em dois postulados[4], propostos por Einstein em 1905:

1. As leis físicas têm a mesma forma em todos os sistemas de inerciais.

2. Em qualquer sistema inercial, a velocidade da luz c é a mesma, tanto se a luz for emitida por um corpo em repouso como por um corpo em movimento uniforme.

As palavras que descrevem os postulados são bem menos importantes do que os seus significados silenciosos. Como se pode notar, o primeiro postulado representa a fé em uma equivalência profunda entre todos os referenciais inerciais, na não existência de referenciais privilegiados. Já o segundo é mais específico, conferindo ao *módulo* da velocidade da luz o status de grandeza absoluta, independente do referencial inercial. Por isso, ele parece chocante quando olhado a partir da intuição desenvolvida no estudo da mecânica clássica. E este tipo de choque costuma gerar a questão: de onde Einstein tirou esta idéia? Numa palestra dada em Kyoto, em 1922, ele dá um indício:

"Levando em consideração o experimento de Fizeau, tentei lidar com os problemas da suposição de que as equações de Lorentz a respeito do elétron deveriam valer tanto no caso de o nosso sistema de coordenadas ser definido nos corpos em movimento como o é no vácuo. De qualquer modo, naquela época eu me sentia certo da verdade das equações de Maxwell-Lorentz da eletrodinâmica. Além disso, as relações da dita invariância da velocidade da luz nos mostraram que estas equações deveriam valer também nos sistemas em movimento. Esta invariância da velocidade da luz estava, entretanto, em conflito com a regra da adição de velocidades que conhecíamos bem na mecânica."[5].

A teoria da relatividade surgiu quando Einstein resolveu este problema, abandonando a noção de tempo absoluto.

• covariância

Ainda que o primeiro princípio decorra de uma intuição profunda acerca do universo material, ele tem implicações matemáticas bastante claras e precisas. Em particular, ele regula o tipo de objetos matemáticos que podem ser empregados para expressar as leis físicas. O significado dessar palavras, que podem parecer um pouco assustadoras, é bastante simples e corresponde a uma idéia já incorporada há bastante tempo na prática de trabalho de qualquer estudante de física.

Sabemos que é errado escrever uma lei física usando uma equação do tipo

$$\vec{A} = b\,, \tag{17.1}$$

onde $\vec{A}$ é um vetor e b, um escalar. Entretanto, porque isso é errado? Qual seria o problema de escrevermos a equação que representa a aceleração da gravidade nas proximidades da Terra como

$$\vec{g} = 10\,m/s^2\,? \tag{17.2}$$

A grandeza $\vec{g}$ é um vetor e, como tal, um objeto matemático que possui, simultaneamente, três características distintas: módulo, direção e sentido. No caso de $\vec{g}$, em particular a direção é a da vertical no ponto e o sentido pode ser caracterizado como sendo "para baixo", "apontando para a Terra", ou algo equivalente. Por isso, a eq.(17.2) não tem sentido, já que o seu lado esquerdo envolve três informações e o lado direito, apenas uma.

Já a equação

$$\vec{P} = m\,\vec{g}\,, \tag{17.3}$$

que permite calcular o peso de um corpo de massa m nas proximidades da Terra, tem sentido matemático, pois ela informa que:

- o módulo do peso é igual ao módulo da aceleração da gravidade multiplicado por m;

- a direção do peso é igual à direção da aceleração da gravidade;

- o sentido do peso é igual ao sentido da aceleração da gravidade.

Assim, de fato, a expressão (17.3) corresponde a um feixe de três equações. Essa característica fica mais evidente se a reescrevermos em termos de componentes cartesianas. Para tanto, é necessário adotar um sistema de eixos, o que incorpora, necessariamente, escolhas arbitrárias. Por exemplo, num dado problema, pode ser interessante adotar um sistema de eixos apoiado na encosta de uma montanha, como o indicado na figura 17.3.

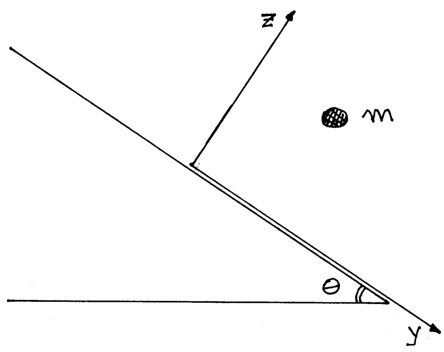

Figura 17.3:

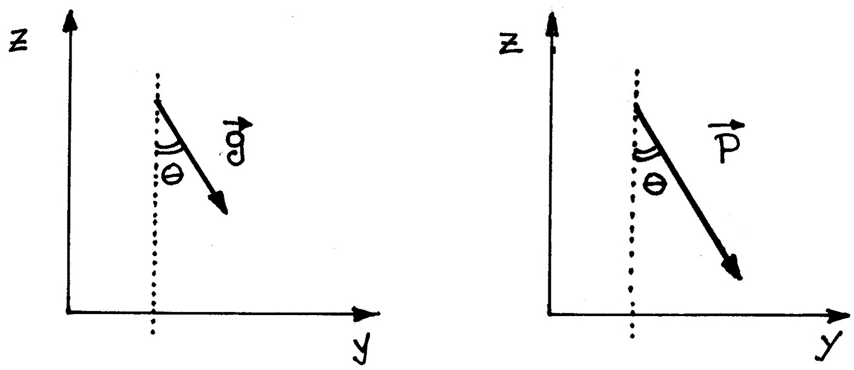

Figura 17.4:

Nesse caso, o feixe de equações determinado pela expressão (17.3) é dado explicitamente por

$$P_x = m\,g_x\,, \tag{17.4}$$
$$P_y = m\,g_y\,, \tag{17.5}$$
$$P_z = m\,g_z\,. \tag{17.6}$$

As componentes de $\vec{g}$ podem ser obtidas a partir do lado esquerdo da figura 17.4 e valem

$$g_x = 0, \qquad g_y = g\,\mathrm{sen}\;\theta, \qquad g_z = g\cos\theta\,. \tag{17.7}$$

A presença do ângulo θ nesses resultados indicam claramente que eles dependem da escolha dos eixos de referência e, portanto, das convenções adotadas. Para calcular $\vec{P}$, substituímos (17.7) nas eqs. (17.4-17.6), e obtemos

$$P_x = 0, \qquad P_y = mg\,\mathrm{sen}\;\theta, \qquad P_z = mg\cos\theta. \tag{17.8}$$

Os valores dessas componentes também dependem de θ e, consequentemente, de convenções.

Se esta discussão fosse apresentada a um ser extraterrestre, que não tivesse vivenciado a noção de peso, ela poderia sugerir que o nosso modo de descrever o mundo material é sempre contaminado por idéias dependentes de convenções. Para convencer este ser que esse não é o caso, poderíamos convidá-lo a inspecionar o lado direito da figura 17.4, construído a partir dos resultados (17.8). Ele mostra que $\vec{P}$ é paralelo a $\vec{g}$. Se escolhemos outro valor para θ, refizermos os desenhos, as representações de $\vec{g}$ e de $\vec{P}$ mudam, mas o paralelismo entre eles, não. É esse paralelismo, independente de convenções, que a física trata como uma relação constitutiva da natureza.

Este exemplo ilustra uma versão simples da noção de *covariância*. A eq. (17.3), escrita na forma

$$(P_x, P_y, P_z) = (mg_x, mg_y, mg_z) \tag{17.9}$$

é dita *covariante* porque se, por um lado, os valores das componentes dos dois lados dependem de convenções, por outro, a igualdade se mantém se essas convenções forem alteradas. Neste exemplo, isso acontece porque rotações alteram os dois lados da equação do mesmo modo. Ou seja, eles *co*-variam, onde o prefixo *co*- indica algo que se faz junto, como em colaboração ou comemoração.

No caso da relatividade, a idéia incorporada no primeiro princípio, de que as leis físicas devem ter a mesma forma em qualquer referencial inercial corresponde a dizer que as equações que as descrevem devem ser covariantes por mudanças de referencial. Na aula 23 deste curso será discutida explicitamente a covariância das equações de Maxwell.

• referências

[1] no Aurélio: "**Indução**. [Do lat. <u>inductione</u>] S.f. 1. Ato ou efeito de induzir. 2. Lóg. Operação mental que consiste em se estabelecer uma verdade universal ou uma proposição geral com base no conhecimento de certo número de dados singulares ou de proposições de menor generalidade. [...] ".

[2] Na página 1-16 do jornal "Folha de São Paulo" de 18 de abril de 1995 encontra-se um artigo, assinado por Cássio Leite Vieira, onde pode-se ler: *"Há 40 anos, morria em Princeton (EUA) o físico alemão Albert Einstein (1879-1955), idealizador da teoria da relatividade. Hoje, Einstein é sinônimo de "Tudo é relativo", forma fácil de sintetizar uma compreensão rasa de dois de seus trabalhos: a teoria da relatividade restrita, de 1905, e a da relatividade geral, de 1915."*

[3] G.G. Scholem, A cabala e o seu simbolismo, ed. Perspectiva, 1978.

[4] Esta versão dos postulados é a apresentada por A. Pais em "Subtle is the Lord...", Oxford University Press, 1982, p.141; a tradução brasileira tem o título "Sutil é o Senhor..." ed. Nova Fronteira.

[5] Citado em A. Pais, op.cit., p.141.

Capítulo 18

dilatação do tempo

• referenciais, personagens e notação

A física trata da observação e da descrição de fenômenos que ocorrem no mundo natural e, de modo geral, esse tipo de conhecimento depende do referencial no qual o observador se encontra. O objetivo da teoria da relatividade restrita é relacionar os resultados das observações e descrições de *um mesmo* conjunto de fenômenos, quando eles são feitos a partir de referenciais diferentes, que se movem com velocidades constantes, uns em relação aos outros. Um dos seus postulados básicos diz respeito à completa equivalência das leis físicas em todos os referenciais deste tipo. A incorporação integral desse tipo de equivalência entre referenciais em movimento relativo envolve tanto aspectos racionais como intuitivos. Quando viajamos em um ônibus que trafega com velocidade constante por um trecho retilíneo da estrada, é mais fácil admitirmos racionalmente que a estrada e a paisagem se movem com velocidade constante em relação a nós, do que sentirmos isso. Por esta razão evitamos, neste texto, representar os vários referenciais por S, S', S'', etc, uma vez que este tipo de notação parece sugerir algum tipo de assimetria entre eles. Como alternativa, introduzimos dois personagens, João e Maria, que participam das várias situações, e os observáveis correspondentes são rotulados com as suas iniciais. Assim, por exemplo, Δt_J e Δt_M podem representar intervalos de tempo observados por João e Maria, respectivamente. É *muito* importante notar que, em física, referenciais são instrumentos de pensamento e, como tal, entidades abstratas, não materiais. No nosso caso, eles serão sempre sistemas de eixos triortogonais x, y, z, matemáticos, acompanhados de um relógio, também matemático, que indica o tempo t. Por isso, não devemos confundir referenciais com coisas ou pessoas.

Por exemplo, na situação idealizada indicada na figura 18.1, na qual um carro se desloca com velocidade $\vec{v}$, constante, ao longo de uma estrada retilínea, pode ser conveniente descrever fenômenos físicos tanto no referencial S_E, fixo em uma pedra do pavimento da estrada, como em um referencial S_C, no qual o carro está parado. Entretanto, se o carro bater em algo e parar, a coincidência entre ele e o referencial S_C deixa de existir. O

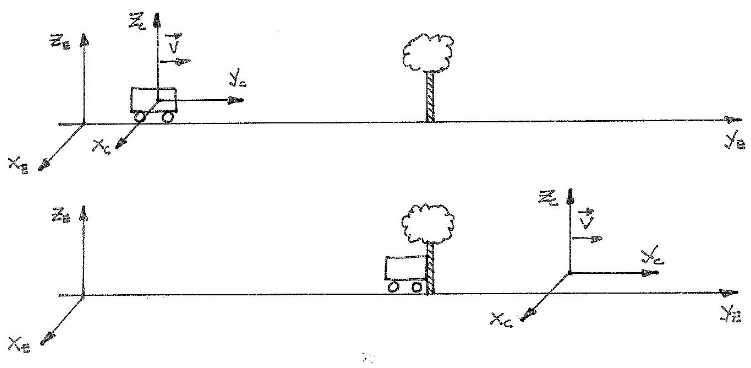

Figura 18.1:

carro passa a estar parado no referencial S_E, enquanto que S_C continua o seu movimento matemático com velocidade constante $\vec{v}$. Assim, quando falamos em referencias de João e Maria, queremos dizer os referenciais que coincidem com esses personagens enquanto os seus estados de movimento não são alterados. João e Maria **não são** referenciais, mas **estão** em referenciais.

Apenas com a finalidade de facilitar os desenhos, adotamos a velocidade relativa entre os referenciais como sendo paralela ao eixo y, e temos as situações mostradas na figura 18.2.

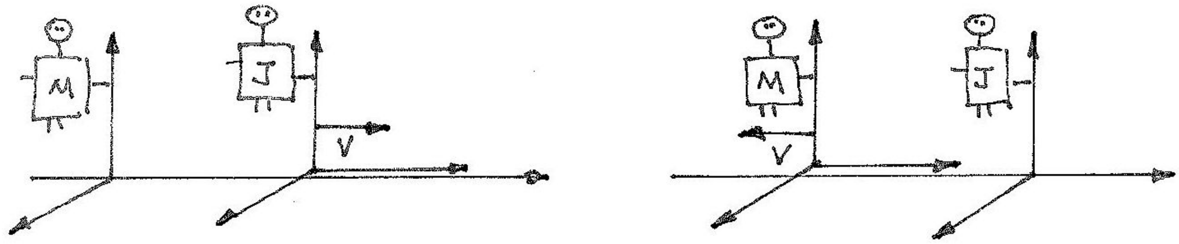

Figura 18.2: Lado esquerdo: João move-se com velociadde $v\,\vec{j}$ em relação a Maria; lado direito: Maria move-se com velocidade $-v\,\vec{j}$ em relação a João.

• trens ou foguetes?

Na época em que a relatividade foi proposta, o meio de transporte mais rápido era o trem e os exemplos pedagógicos costumavam envolver observadores fixos no solo e em trens em movimento. A partir da década de 1960, apareceram os foguetes tripulados e muitos exemplos passaram a ser formulados em termos de observadores em foguetes. Na prática, tanto trens como foguetes têm velocidades em relação à Terra que são muito pequenas em comparação à da luz e, portanto, em ambos os casos os exemplos são artificiais. Neste texto, ficamos com os trens. Por nostalgia, talvez...

• sobre os efeitos da relatividade

A relatividade restrita foi proposta em 1905 e, inicialmente, eram poucos os experimentos que davam suporte à teoria. Entretanto, nos anos 1930, com o desenvolvimento da física nuclear, ela passou a ser essencial para a compreensão dos fenômenos, principalmente no que diz respeito às transformações de massa em energia. A partir daí, a teoria foi testada em muitas outras situações, em experimentos muito precisos, que podem ser tomadas como evidências da teoria. Na física de partículas, por exemplo, *todos* os problemas são tratados por meio da relatividade, tanto para descrever como os corpos se deslocam de um ponto a outro do espaço com velocidades altas como para quantificar as energias envolvidas nas várias transformações que ocorrem. Já efeitos associados à relatividade geral dependem da existência de massas grandes e, por isso, são mais perceptíveis em cosmologia.

A relatividade teve, também, grande penetração junto a pessoas que não trabalham com ciência e, mesmo, que não se interessam por ela. Neste processo de ampliação, os conceitos foram perdendo nitidez e a precisão, como no caso da famosa equação $E = mc^2$, que todos conhecem, mas pouca gente sabe o que significa. Numa situação intermediária, ficam as noções de **dilatação do tempo** e **contração do espaço**, que correspondem a fenômenos físicos importantes, passíveis de serem observados experimentalmente. Entretanto, eles também foram explorados de forma solta e imprecisa em livros e filmes de ficção, o que geraou percepções incorretas dos seus significados. Por isso, antes de iniciarmos a discussão da relatividade restrita neste curso, deixamos uma advertência: é incorreto pensar que, nesta teoria, o tempo **sempre** se dilata e o espaço **sempre** se contrai. Essas afirmações gerais são imprecisas e destituídas de significado e, apenas em algumas situações bastente específicas, resultados podem ser enquadrados nessas situações. Para compreender isso é preciso um pouco de maturidade sobre a relatividade e é preciso espera algmas aulas...

• os relógios e o tempo, as réguas e o espaço

A relatividade restrita foi apresentada por Einstein, em 1905, em um trabalho intitulado *"Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento"*. Numa das suas seções, são discutidos os comportamentos de réguas[1] e de relógios em movimento, sem qualquer menção a contração do espaço e dilatação do tempo. Tal escolha não foi feita por acaso. Réguas e relógios são objetos concretos, enquanto que espaço e tempo são conceitos abstratos. De um lado, coisas e, do outro, idéias.

Será que relógios são máquinas que marcam a passagem do tempo? Ou, alternativamente, será que a noção de tempo corresponde a algo inventado a partir do funcionamento dos relógios? Algo associado a um coletivo de relógios? No seu tratamento da relatividade, Einstein prefere adotar o segundo modo de pensar, e parte do concreto, dos relógios, dos instrumentos de medida. Afinal de contas, há sempre o risco de o conceito de tempo ser

[1]Por uma questão de simplicidade, nós usamos a palavra *régua* em lugar de *corpo rígido*, empregada no texto original.

uma invenção humana e não, parte do universo material... O mesmo se aplica à relação entre réguas e espaço.

Esse tipo de questão pode parecer algo distante à prática da física. Entretanto, este não é o caso. Se, nas várias situações físicas, pensamos mais nas medidas e nos instrumentos empregados nelas, a compreensão da teoria da relatividade fica mais fácil.

• relógios

Relógios são instrumentos que permitem a medição de intervalos de tempo. Na relatividade, o funcionamento de um relógio depende do referencial a partir do qual ele é observado. Suponha que Maria esteja fixa no referencial de uma estação de trem e João esteja fixo no interior de um trem, que passa com velocidade constante pela estação. Se Maria possui um relógio em seu pulso, o funcionamento desse relógio é percebido de modos diferentes por ela mesma e por João. Essa idéia contraria frontalmente a concepção newtoniana do tempo, segundo a qual os relógios funcionam sempre do mesmo modo, para qualquer observador.

Existem relógios de muitos tipos. Em tempos remotos, tem-se notícia de relógios baseados no fluxo de azeite, água ou areia, como nas ampulhetas. Diz a história, por exemplo, que Galileu teria utilizado a medida do próprio pulso para determinar o período de oscilação de um pêndulo. Durante vários séculos, aconteceu a hegemonia dos relógios mecânicos, geralmente dotados de rodas dentadas, movidas por pêndulos ou molas, e de mostradores com ponteiros. Atualmente existem relógios digitais eletrônicos e, até, atômicos. Entretanto, apesar das diferenças entre todos estes tipos de relógio, eles possuem uma característica comum, que os unifica: eles medem intervalos de tempo, com base em fenômenos periódicos.

O elemento básico da construção de um relógio é um movimento ou acontecimento, que se repete a intervalos de tempo idênticos e bem definidos, um fato cíclico, com período determinado. Basta, então, definir uma unidade de tempo, dividindo este período em quantas partes se desejar, e avaliar a duração de outros fenômenos com base nesta unidade de tempo.

• o relógio de luz

Para começar a estudar o comportamento dos intervalos de tempo na relatividade, é conveniente usamos um outro relógio, diferente de todos os outros, mas ainda baseado na noção de periodicidade. Esse relógio é apenas uma construção terórica, e não existe na prática. Entretanto, ele é muito útil, pois captura a essência do problema. Ele é constituído por dois espelhos paralelos, separados pela distância L, e um contador. Um pulso de luz está confinado entre os dois espelhos, sendo refletido continuamente de um para outro, como mostra a figura 18.3. Este é o nosso fato cíclico. Quando a luz bate no espelho inferior, "ouve-se" um TIC; quando ela volta e bate no superior, "ouve-se" um TAC e o contador é acionado, avançando uma unidade, como na figura.

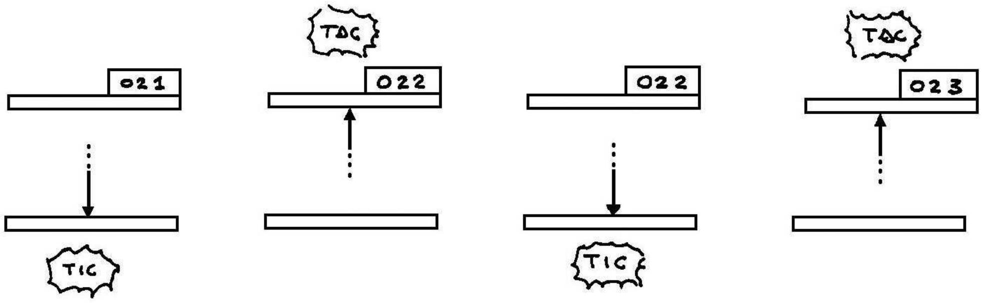

Figura 18.3: O relógio de luz, em instantes sucessivos; observe o contador.

Escolhemos este relógio apenas porque ele simplifica o trabalho a ser feito em seguida. Entretanto, é preciso deixar claro que o relógio de luz é um relógio como um outro qualquer, e todas as conclusões baseadas no seu funcionamento valem também para os demais. O **tempo** é o que importa, não o instrumento usado para medi-lo.

• intervalos de tempo clássico e relativístico

Nesta seção, comparamos as previsões para o funcionamento de relógios de luz, feitas na mecânica newtoniana e na relatividade. Os intervalos de tempo no contexto dessas duas teorias são representado, respectivamente, por ΔT e Δt.

Consideramos, inicialmente, a situação na qual João possui um relógio de luz, pintado de branco, em repouso em relação a ele, cujos espelhos são separados pela distância L. No seu referencial, qual o intervalo de tempo que decorre entre dois TACs sucessivos deste relógio?

No contexto da **mecânica newtoniana**, este intervalo, denotado por ΔT_J, é obtido através de um cálculo cinemático simples: sendo $D_J^b = 2L$ a distância pecorrida pela luz no referencial de João, durante uma oscilação, temos

$$\Delta T_J^b = \frac{D_J^b}{c} = \frac{2L}{c} \,, \tag{18.1}$$

onde c é a velocidade da luz e os índices b e J correspondem a: relógio branco, observado por João.

No contexto da **mecânica relativística**, o cálculo é totalmente análogo. Antes de efetuá-lo, entretanto, convém notar que, na relatividade, costuma-se qualificar com o adjetivo *próprio* as grandezas que representam o comportamento de um sistema descrito por um observador no qual ele está em repouso e, também, representá-las por letras gregas. Por isso, escrevemos o intervalo de **tempo próprio** entre dois TACs, no referencial de João, como

$$\Delta t_J^b = \Delta \tau_J^b = \frac{d_J^b}{c} = \frac{2L}{c} \,. \tag{18.2}$$

Estes dois cálculos mostram que $\Delta T_J^b = \Delta\tau_J^b$, ou seja, que no referencial de João os intervalos de tempo são os mesmos, tanto na mecânica clássica como na relativística. Este resultado não é surpreendente, já que as novidades associadas à relatividade ocorrem quando efetuamos mudanças de referencial, enquanto que estes cálculos tratam do comportamento de um relógio em repouso relativamente ao observador João.

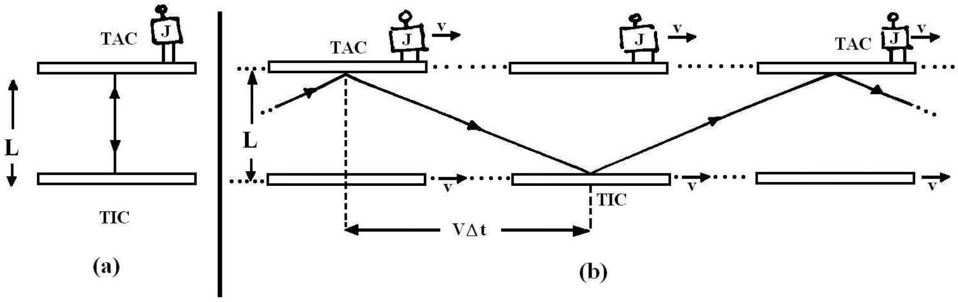

Figura 18.4: Relógio branco, visto por João (a) e por Maria (b).

Maria, parada numa estação de trem, possui relógios idênticos ao de João, pintados de preto. Cálculos totalmente análogos aos anteriores permitem-nos concluir que, nos contextos newtoniano e relativísticos, temos

$$\Delta T_M^p = \frac{2L}{c} \tag{18.3}$$

$$\Delta\tau_M^p = \frac{2L}{c}\,, \tag{18.4}$$

onde os índices p e M correspondem a: relógio preto, observado por Maria.

Suponhamos, agora, que João, carregando o seu relógio branco, esteja num trem que se move para a direita com velocidade v, em relação a Maria. A partir do seu referencial, Maria pode observar e realizar medições acerca do funcionamento do relógio branco e comparar os resultados com os mostrados pelo seu próprio relógio. Em particular, ela pode observar o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs sucessivos do relógio branco, por meio de máquinas fotográficas, filmadoras, ou outros instrumentos.

No referencial de Maria, onde João corre com velocidade v, o caminho que a luz percorre no interior do relógio branco, torna-se maior, como mostra a figura 18.4b. No **contexto clássico**, a distância D_M^b, percorrida pela luz entre dois TACs sucessivos do relógio branco, é dada por

$$D_M^b = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\,\Delta T_M^b}{2}\right)^2} \tag{18.5}$$

onde ΔT_M^b é o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs. Esse intervalo de tempo vale

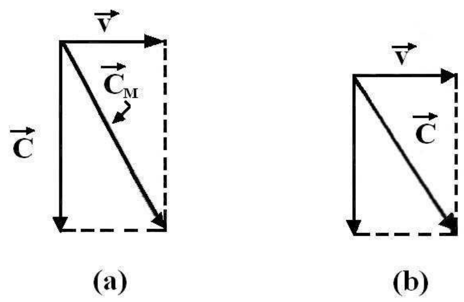

Figura 18.5: O arrastamento da luz na mecânica clássica (a) e na relatividade (b).

$$\Delta T_M = \frac{D_M^b}{C_M} \ , \tag{18.6}$$

onde C_M é o módulo da velocidade do raio de luz em relação a Maria. Na mecânica clássica, este valor é obtido a partir da soma vetorial de $\vec{c}$ e $\vec{v}$, mostrada na figura 18.5a, e corresponde a

$$C_M = \sqrt{c^2 + v^2} \ . \tag{18.7}$$

Temos, portanto,

$$\Delta T_M = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(v\ \Delta T_M^b/2\right)^2}}{\sqrt{c^2+v^2}} \ . \tag{18.8}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e isolando ΔT_M^b, obtemos

$$\Delta T_M^b = \frac{2L}{c} \ . \tag{18.9}$$

Comparando este resultado com a eq.(18.1), concluímos que

$$\Delta T_M^b = \Delta T_J^b \ . \tag{18.10}$$

Deste modo, "provamos" que, *na mecânica clássica*, Maria e João percebem o mesmo intervalo de tempo entre dois TACs sucessivos do relógio branco. Isso significa que o tempo passa "com a mesma velocidade", tanto para João, parado em relação ao relógio branco, como para Maria, para quem o relógio branco se move com velocidade v. No contexto da mecânica clássica este resultado não poderia ser diferente já que o tempo, sendo absoluto, passa do mesmo modo para qualquer observador. Até aqui, nada de muito novo.

Entretanto, as coisas mudam quando se passa para a **teoria da relatividade**. A distância percorrida pela luz entre dois TACs é calculada como no caso clássico, e dada por

$$d_M^b = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\ \Delta t_M^b}{2}\right)^2} \ . \tag{18.11}$$

A diferença é que, agora, de acordo com o segundo princípio, o módulo da velocidade do raio de luz deve ser igual a c para qualquer observador. Assim, o intervalo de tempo passa a ser dado por

$$\Delta t^b_M = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(v\ \Delta t^b_M/2\right)^2}}{c}\ , \tag{18.12}$$

que corresponde a

$$\Delta t^b_M = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ . \tag{18.13}$$

Comparando com a eq.(18.2), podemos escrever

$$\Delta t^b_M = \frac{\Delta\tau^b_J}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ . \tag{18.14}$$

Este resultado indica que, na relatividade, os intervalos de tempo marcados pelos relógios não são mais absolutos. Maria observa que o seu próprio relógio e o de João funcionam de modos diferentes, apesar de eles serem idênticos quando colocados lado a lado, num mesmo referencial. Essa diferença de funcionamento se deve ao movimento relativo entre os dois relógios. Assim, no contexto da relatividade, a "velocidade" com que o relógio funciona depende do referencial, não sendo mais a mesma para todos os observadores.

• interpretação dos resultados

O resultado contido na eq.(18.10) mostra que, no contexto da mecânica newtoniana, os intervalos de tempo marcados pelo mesmo relógio branco, percebidos por Maria e por João, são iguais. Isso decorre diretamente da regra clássica de adição de velocidade, mostrada na figura 18.5a.

Já a eq.(18.14) representa a versão relativística do mesmo problema. Não é demais enfatizar que os intervalos Δt^b_M e $\Delta\tau^b_J$ referem-se ao funcionamento de um *único relógio*, o branco, quando observados por Maria e por João. Eles diferem entre si pelo fator $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Na relatividade a velocidade relativa v entre dois referenciais deve ser sempre menor que c e, conseqüentemente,

$$0 \leq \frac{v^2}{c^2} < 1 \Longrightarrow \gamma \geq 1\ . \tag{18.15}$$

Assim γ, que representa um fator de escala, é sempre maior ou igual a 1 e, por isso, Δt^b_M será sempre maior ou igual a $\Delta\tau^b_J$. Em outras palavras, João, para quem o relógio branco está parado, mede um intervalo de tempo $\Delta\tau^b_J$ entre dois TACs sucessivos; qualquer outro observador, em relação ao qual esse relógio esteja em movimento com velocidade v, medirá um intervalo dado por $\gamma\ \Delta\tau^b_J$ entre os mesmos dois TACs sucessivos do relógio branco, que será sempre **maior** do que $\Delta\tau_J$. Por isso, quem carrega o relógio observa sempre o **menor** intervalo de tempo possível entre dois TACs sucessivos deste relógio.

Por exemplo, se a velocidade relativa entre João e Maria for $v = \sqrt{3}c/2$, teremos $\gamma = 2$ e, portanto, $\Delta t^b_M = 2\Delta\tau^b_J$. Maria "ouviria":

TIC	TAC	TIC	TAC	TIC	TAC	TIC	..., nos relógios pretos e
TIC		TAC		TIC		TAC	..., no relógio branco.

Isso indica que o *período* do relógio branco, quando observado por Maria, é duas vezes maior que o *período* dos relógios pretos que ela possui. Todos os ritmos da vida de João são coerentes com os períodos do seu relógio: as batidas do seu coração, a jornada de trabalho, a quantidade de sono, a duração de uma música... Por isso, quando Maria observa o relógio branco andar duas vezes mais devagar que o seu, ela também observa o mesmo acontecer com todos os ritmos de João. Em outras palavras, Maria observa **tudo** acontecer mais devagar no referencial de João do que no seu próprio referencial. É isso que queremos dizer quando falamos que o *tempo* de João manifesta-se *dilatado* no referencial de Maria. Este tipo de comportamento dos relógios pode, à primeira vista, parecer estranho, já que viola a nossa intuição quotidiana, educada na tradição newtoniana, na qual a passagem do tempo parece independer do observador. Convém lembrar, entretanto, que essa intuição é baseada na nossa vivência em um mundo onde as velocidades relativas são pequenas, quando comparadas à da luz. Por exemplo, a velocidade de um jato comercial é cerca de 1.000 km/h, o que corresponde a pouco menos de 300 m/s. Usando esse dado na equação (18.13), juntamente com $c \cong 3 \times 10^8$ m/s, obtemos $\gamma = 1{,}000\,000\,000\,000\,5$.

Um aspecto muito importante do fenômeno discutido aqui, que envolve a dilatação dos rítmos dos relógios, é que ele é **real!** É algo que acontece mesmo, e não corresponde a uma ilusão ou uma falha dos sentidos. Ele pode ser comprovado por meio de experimentos, como veremos adiante.

• relatividade e bagunça

Quando iniciamos o estudo da relatividade, é comum que tenhamos muitas dúvidas, em geral acompanhadas por uma sensação de insegurança. A relatividade parece virar tudo de pernas para o ar. Se isto estiver acontecendo om você, não se preocupe, é normal. Para melhorar um pouco este tipo de sensação desagradável, convém lembrar que a relatividade é uma teoria que trata do comportamento do mundo físico quando ocorrem mudanças de referencial. Por isso, tudo o que você conhece e aprendeu sobre a natureza, na escola e nas suas experiências diárias, continua valendo quando você permanece num único referencial. A dilatação do tempo e todos os demais efeitos discutidos em seguir, acontecem quando pessoas em referenciais diferentes comparam as suas observações.

No caso particular do exemplo discutido anteriormente, é impossível que João sinta o seu *próprio* tempo passar mais devagar, só porque Maria passa correndo em frente a ele!

João não se sente em movimento. Para ele, quem se move é Maria. Pense em você mesmo: é possível que o seu relógio comece a andar mais devagar só porque um avião passou no céu, sobre a sua cabeça? Evidentemente, isto não faz qualquer sentido.

• a simetria da dilatação

No exemplo apresentado anteriormente, mostramos que os intervalos de tempo do relógio branco, carregado por João, aparecem dilatados para Maria. Será que isso significa que os intervalos de tempo do relógio de Maria vão aparecer *contraídos* para João? A resposta é **não!** Para compreender isto, discutimos a situação inversa, ou seja, como João vê um relógio preto, estacionário em relação a Maria. Dizer que João se move para a direita em relação a Maria é equivalente a dizer que Maria as move com velocidade $-v$, para a esquerda, em relação a João, como indica a figura 18.6.

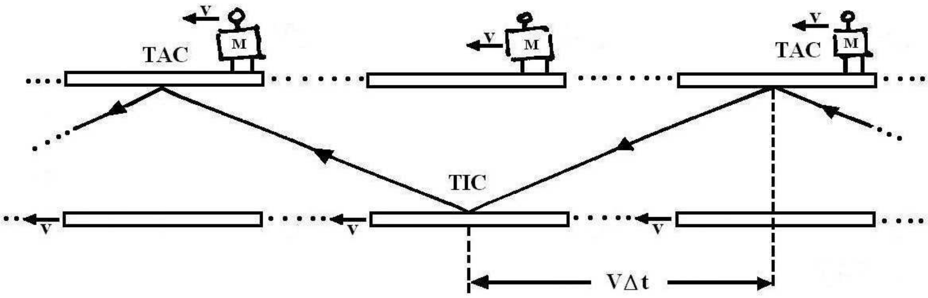

Figura 18.6: O relógio preto de Maria, visto por João.

Neste caso, a distância d_J^p, que a luz no interior do relógio preto estacionário em relação a de Maria tem de percorrer, no referencial de João, vale

$$d_J^p = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\,\Delta t_J^p}{2}\right)^2} \tag{18.16}$$

e o intervalo de tempo $\Delta t_J^p = d_J^p/c$ é dado por

$$\Delta t_J^p = \frac{2L}{c\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{\Delta\tau_M^p}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \gamma\;\Delta\tau_M^p\,, \tag{18.17}$$

e $\Delta t_J^p \geq \Delta\tau_M^p$. Ou seja, resultado é o mesmo que o dado na eq.(18.14), com $M \longleftrightarrow J$ e $b \longleftrightarrow p$.

Juntando esta conclusão com a expressa pela eq.(18.14), podemos afirmar que Maria percebe os intervalos de tempo do relógio branco dilatados e João percebe os intervalos de tempo do relógio preto dilatados. Como é que isso é possível? Para entender melhor a solução deste *aparente* paradoxo, é preciso esperar um pouco, até que você adquira mais experiência em problemas de relatividade. No momento, tudo o que podemos fazer é notar que deve haver algum tipo de simetria entre as observações feitas por João e Maria. Afinal de contas, o primeiro princípio da relatividade precisa ser satisfeito!

Por outro lado, deve também haver algum tipo de assimetria entre as observaçõe de João e Maria nos dois exemplos apresentados. Uma sugestão sobre a origem desta assimetia pode ser encontrada na notação que empregamos. Nas eqs.(18.14) e (18.17), $\Delta\tau$ e Δt representam coisas diferentes. Qual o significado de cada um desses intevralos? Esta é uma questão difícil e sutil, mas é importante que você deixe isto bem claro antes de prosseguir.

• exercícios

1. Você está estudando numa sala de aulas. A sala é um refencial ou está num referencial? O que é um refencial? Onde ele está "preso"?

2. Supondo que dois observadores, em referenciais inerciais diferentes, com velocidade relativa muito alta (mas menor do que c), possam se comunicar por meio de telefone, fax, ondas de rádio, e-mail, televisão, cartas enviadas pelo correio, etc, tente imaginar um experimento que permita comprovar a dilatação do tempo prevista pela relatividade.

3. Qual deve ser a velocidade de João relativamente a Maria, para que ela observe que relógio de João ande 10 vezes mais devagar do que o seu próprio? E 100 vezes? E 1.000 vezes?

4. João possui um relógio de luz em que esta se move verticalmente, como na figura 18.4a. Ele se desloca para a direita em relação a Maria, com uma velocidade $v = 3c/5$, carregando o seu relógio. Qual o valor da componente vertical da velocidade da luz em relação a Maria, nos contextos da mecânica clássica e da relatividade? Sugestão: estude a figura 18.5.

• respostas

3. 0.99 c; 0.9999 c; 0.999999 c

4. 4c/5.

Capítulo 19

contração do espaço e quebra da simultaneidade

• contração do espaço

Na aula anterior, ao aplicarmos o segundo princípio da relatividade ao caso do relógio de espelhos paralelos, chegamos à conclusão de que o funcionamento desse relógio é observado de modos diferentes por pessoas em referenciais com movimentos relativos. A contração do espaço é, de certo modo, um resultado complementar à dilatação dos intervalos de tempo. Isso acontece porque qualquer velocidade, inclusive a da luz, é sempre a razão entre uma distância e um intervalo de tempo. Como, na relatividade, a velocidade da luz é constante, se as características do tempo dependem do referencial, o mesmo deve acontecer com as do espaço.

• a simetria das velocidades relativas

Para perceber a complementaridade da dilatação dos intervalos de tempo e da contração das distâncias consideremos, por exemplo, o deslocamento de João relativamente a Maria com velocidade v. Para medir esta velocidade, João combina com Maria que ela deve fixar, no seu referencial, uma régua de comprimento λ_M, paralela à velocidade relativa. Ambos se comprometem a medir os intervalos de tempo entre as passagens de João pelas duas extremidades da régua e, a partir desses dados, calcular a velocidade do outro.

No referencial de Maria, λ_M é o **comprimento próprio** da régua, já que aí ela está em repouso. Na relatividade, uma distância entre dois pontos é chamada de *própria* quando estes dois pontos e o observador estão todos em repouso em um único referencial. Por isso, o *comprimento próprio* de uma régua é o seu comprimento medido por um observador em repouso em relação a ela. Em geral, representamos distâncias e comprimentos próprios por letras gregas.

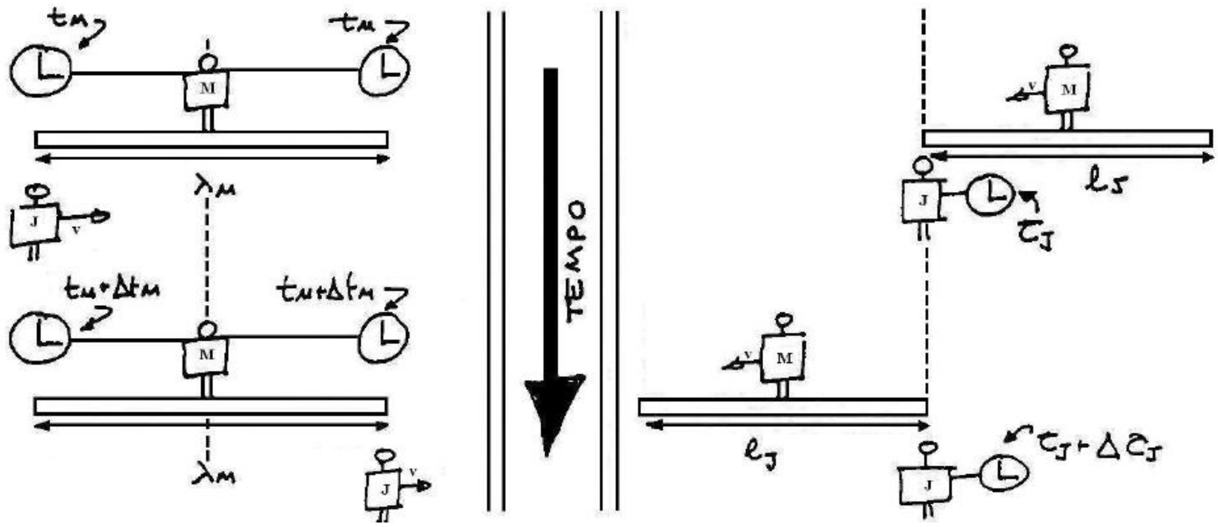

Figura 19.1: As medições da velocidade nos referenciais de Maria (esquerda) e de João (direita).

Na figura 19.1, mostramos, do lado esquerdo, a medição da velocidade de João, feita no referencial de Maria. Esta velocidade é dada por

$$v_M = \frac{\lambda_M}{\Delta t_M} \ , \tag{19.1}$$

onde λ_M é o comprimento da régua de Maria e Δt_M é o intervalo de tempo decorrido entre as passagens de João pelos seus dois extremos, medido por Maria.

No referencial de João, temos a situação descrita do lado direito da figura 19.1, e a medida da velocidade é dada por

$$v_J = \frac{\ell_J}{\Delta \tau_J} \ , \tag{19.2}$$

onde ℓ_J é o comprimento da régua visto por ele e $\Delta\tau_J$ é o intervalo de tempo decorrido entre as passagens dos dois extremos da régua por ele. Como João utiliza um único relógio, em repouso em relação a ele, esse é um intervalo de tempo próprio.

A simetria entre os dois referenciais, implícita no primeiro princípio da relatividade, nos diz que o módulo da velocidade de João em relação a Maria deve ser igual ao da velocidade de Maria em relação a João. Ou seja, $v_J = v_M$, o que nos permite escrever

$$\frac{\lambda_M}{\Delta t_M} = \frac{\ell_J}{\Delta \tau_J} \ . \tag{19.3}$$

A relação entre Δt_M and $\Delta\tau_J$ foi obtida na aula 18 e é dada pela eq. (18.14):

$$\Delta t_M = \frac{\Delta \tau_J}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ . \tag{19.4}$$

Assim, concluímos que

$$\ell_J = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; \lambda_M \; . \tag{19.5}$$

Como o fator em frente a λ_M é menor que 1, o comprimento da régua, que está em repouso em relação a Maria, é visto por João como contraído, já que $\ell_J \leq \lambda_M$. Na relatividade, tanto os intervalos de tempo como os de espaço deixam de ser absolutos.

A complementaridade entre dilatação do tempo e contração do espaço manifesta-se, neste exemplo, pelo fato de Maria observar o relógio de João funcionar mais lentamente que o seu, enquanto que João observa que a régua de Maria fica contraída. Do ponto de vista matemático isso está expresso na eq.(19.3), que envolve uma grandeza própria para cada observador: λ_M no lado esquerdo e $\Delta\tau_J$ no lado direito. Para compreender porque isso ocorre, analise com cuidado a figura 19.1.

• a contração do espaço e o segundo princípio

Para estudar a relação entre a constância da velocidade da luz e a contração das distâncias, tomamos o mesmo tipo de relógio da aula anterior, com o mesmo mecanismo de contagem. Agora, supomos que João, ao passar por Maria, carregue dois relógios brancos idênticos, um deles com espelhos horizontais e o outro, com espelhos verticais, indicados pelos rótulos *bh* e *bv*, respectivamente. No referencial de João, os dois relógios estão em repouso, como mostra a figura 19.2 e, por serem idênticos, os seus TICs e TACs coincidem. Ou sejam, eles medem intervalos de tempo próprio, que são idênticos entre si

$$\Delta\tau_J^{bh} = \Delta\tau_J^{bv} = \frac{2L}{c} \; . \tag{19.6}$$

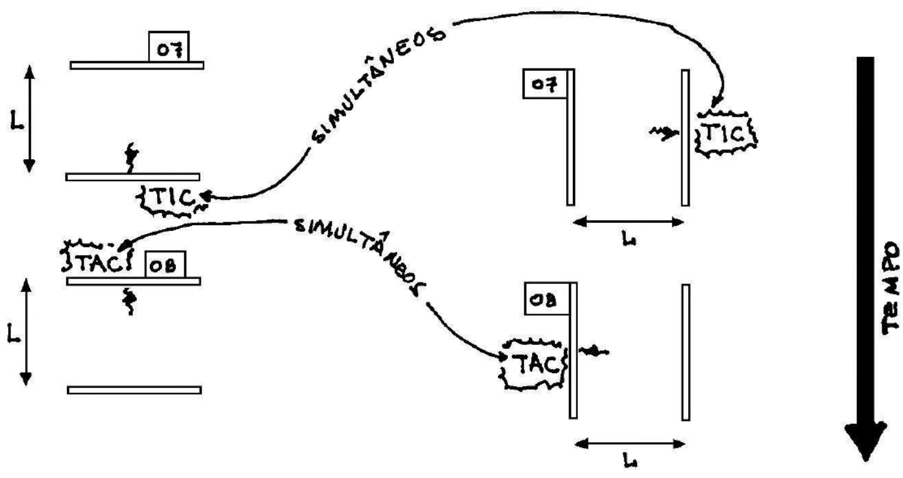

Figura 19.2: Os dois relógios de João, em dois instantes diferentes.

O caso do relógio de espelhos horizontais foi estudado na aula anterior, onde vimos que o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs sucessivos no relógio de João, medido por

Maria, é dado por

$$\Delta t_M^{bh} = \frac{2L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta \tau_J^{bh}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{19.7}$$

Caso Maria tivesse observado o relógio de espelhos verticais ou mesmo uma ampulheta no referencial de João, ela teria obtido exatamente o mesmo resultado. O que importa é a relação entre os períodos nos dois referenciais e não, os instrumentos usados para medi-los.

Depois dessas considerações, repetimos os cálculos do exemplo da aula anterior para o relógio de espelhos verticais, primeiro no contexto da mecânica clássica e, depois, no da relatividade. Entretanto, o que buscamos agora não é mais a relação entre os intervalos de tempo $\Delta\tau_J^{bv}$ e Δt_M^{bv} nos dois referenciais, que supomos conhecida, mas sim, a relação entre as distâncias entre os espelhos nos dois referenciais.

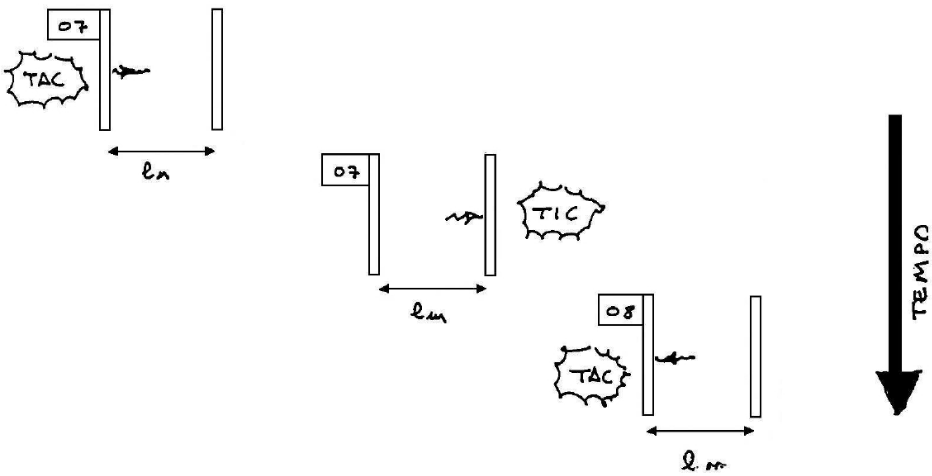

Figura 19.3: O relógio de João visto por Maria, em três instantes diferentes.

Consideramos, agora, o caso em que João, carregando o relógio branco de espelhos verticais, passa por Maria com velocidade v, para a direita, mostrado na figura 19.3. Qual é, para ela, o intervalo de tempo entre dois TACs sucessivos desse relógio?

Inicialmente, respondemos esta questão no contexto da <u>mecânica clássica</u>. Para tanto, dividimos o intervalo ΔT_M, entre dois TACs sucessivos, em duas partes: o intervalo entre o primeiro TAC e o TIC, que chamamos de ΔT_{M1}, e entre o TIC e o segundo TAC, representado por ΔT_{M2}. Chamando de L_M a distância entre os dois espelhos verticais no referencial de Maria, notamos que, no intervalo de tempo ΔT_{M1}, a luz tem de percorrer uma distância maior do que L_M já que, enquanto ela anda, o espelho da direita também o faz, "fugindo" do pulso luminoso. Na mecânica clássica, a velocidade deste pulso de luz em relação a Maria é dada por $C_{M1} = c + v$, o que nos permite escrever

$$\Delta T_{M1}^{bv} = \frac{L_M^{bv} + v\,\Delta T_{M1}^{bv}}{c + v} \,, \tag{19.8}$$

de onde obtemos

$$\Delta T^{bv}_{M1} = \frac{L^{bv}_M}{c}\ . \tag{19.9}$$

Durante o intervalo de tempo ΔT_{M2}, entre o TIC e o segundo TAC, o pulso de luz vai de encontro ao espelho da esquerda e, em relação a Maria, a sua velocidade seria $C_{M2} = c - v$. Portanto, no contexto da mecânica cássica, temos

$$\Delta T^{bv}_{M2} = \frac{L^{bv}_M - v\,\Delta T^{bv}_{M2}}{c - v}\ , \tag{19.10}$$

o que corresponde a

$$\Delta T^{bv}_{M2} = \frac{L^{bv}_M}{c} \tag{19.11}$$

O intervalo entre dois TACs sucessivos é, então,

$$\Delta T^{bv}_{M} = \Delta T^{bv}_{M1} + \Delta T^{bv}_{M2} = \frac{2L^{bv}_M}{c}\ . \tag{19.12}$$

Para interpretar este resultado, lembramos que, na seção anterior, "mostramos" que os intervalos de tempo na mecânica clássica são absolutos, o que nos permite escrever $\Delta T^{bv}_M = \Delta\tau^{bv}_J$. Comparando as eqs. (19.6) e (19.12), concluimos que $L^{bv}_M = L$. Ou seja, usando a idéia que o tempo "clássico" é absoluto, concluimos que as distâncias entre os espelhos também o são!

Repetimos, a seguir, este cálculo no contexto da relatividade, onde também consideramos dois intervalos de tempo, Δt^{bv}_{M1} e Δt^{bv}_{M2}. O intervalo relativístico Δt_{M1}, entre o primeiro TAC e o TIC é calculado do mesmo modo que o intervalo clássico. Entretanto, agora, o módulo da velocidade da luz em relação a Maria também é c, e não mais $C_{M1} = c + v$. Assim, o análogo relativístico da eq. (19.8) é:

$$\Delta t^{bv}_{M1} = \frac{\ell^{bv}_M + v\ \Delta t^{bv}_{M1}}{c}\ , \tag{19.13}$$

e, portanto,

$$\Delta t^{bv}_{M1} = \frac{\ell^{bv}_M}{c - v}\ . \tag{19.14}$$

Já o intervalo Δt_{M2}, entre o TIC e o segundo TAC, é dado por

$$\Delta t^{bv}_{M2} = \frac{\ell^{bv}_M + v\ \Delta t^{bv}_{M2}}{c}\ , \tag{19.15}$$

que corresponde a

$$\Delta t^{bv}_{M2} = \frac{\ell^{bv}_M}{c + v} \tag{19.16}$$

No contexto da relatividade, portanto, o intervalo entre dois TACs sucessivos é dado por

$$\Delta t_M^{bv} = \Delta t_{M1}^{bv} + \Delta t_{M2}^{bv} = \frac{2\ell_M^{bv}}{c\,(1 - v^2/c^2)} \,. \tag{19.17}$$

Para interpretar esse resultado, é preciso invocar a idéia de que a relação entre os intervalos de tempo observados por João e Maria não podem depender da orientação dos relógios envolvidos. No presente caso, isso equivale a dizer que os intervalos de tempo observados nos dois relógios brancos, bh e bv, devem ser idênticos também no referencial de Maria. A relação entre as observações do relógio de placas horizontais foi obtida na aula anterior, eq. (18.13), e dada por

$$\Delta t_M^{bh} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{19.18}$$

Impondo que $\Delta t_M^{bv} = \Delta t_M^{bh}$, concluímos que

$$\ell_M^{bv} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; L \,. \tag{19.19}$$

O fato de a raiz ser menor que 1 para $v \neq 0$ significa que a distância entre os dois espelhos, vista por Maria, é menor do que a distância própria $\lambda_J^{bv} = L$, vista por João: $\ell_M^{bv} \leq \lambda_J^{bv}$. Este resultado indica que a distância entre os espelhos se contraiu para o observador que vê o relógio em movimento.

Na obtenção destes resultados supusemos, tacitamente, que a contração do espaço somente ocorre na direção paralela à velocidade relativa; nas direções transversais, nada acontece. Este aspecto da relatividade será mais bem discutido nas aulas seguintes.

• a realidade da dilatação do tempo e da contração do espaço

Ao estudar relatividade, podemos ser tentados a pensar que os efeitos de dilatação do tempo e contração do espaço correspondem a impressões falsas, ou a enganos dos sentidos. Isso, entretanto, não é verdade, já que esses efeitos ocorrem realmente e podem, em muitos casos, ser comprovados experimentalmente. Em 1911, Einstein afirmou:[1] *"A questão se a contração de Lorentz existe ou não, é confusa. Ela "realmente" não existe, na medida que não existe para um observador que se move [com a barra]; ela "realmente" existe, entretanto, no sentido em que pode, em princípio, ser demonstrada por um observador em repouso".*

Ou seja, um observador em repouso em relação a uma régua não pode perceber a sua contração, mas alguém que observa a régua em movimento, pode. Por exemplo, para documentar a contração do espaço, poderíamos pensar em fotografias. Tirar uma foto de um objeto que se move com velocidade muito alta não é trivial, pois ocorrem distorções devidas ao tempo de propagação da luz até a câmara. Apesar disto, neste curso vamos supor que estas distorções possam ser minimizadas por meio de um sistema eletrônico de

[1]Citado em A. Pais, op.cit., p144.

reconstrução de imagens, ou por meio de câmaras, nas quais o registro das imagens é feito por meio de feixes contendo um número muito grande de fibras ópticas, colocadas muito próximas do objeto a ser registrado.

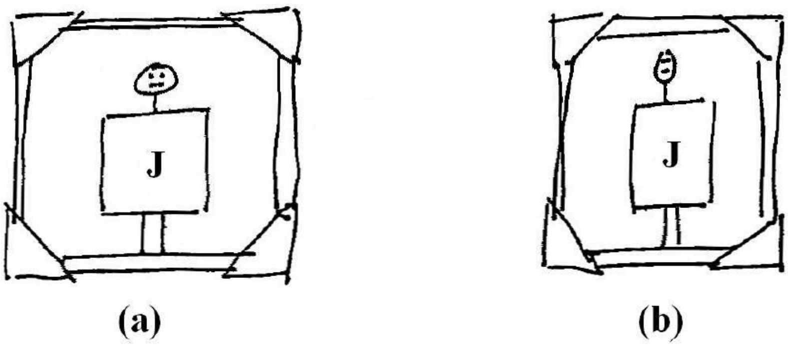

Figura 19.4: As duas fotos de João: a) tirada por ele mesmo; b) tirada por Maria.

Se colocássemos, lado a lado, um auto retrato de João e a foto tirada dele por Maria, com uma câmara em que as distorções houvessem sido corrigidas, e se a velocidade relativa fosse $v = 3c/5$, teríamos a situação mostrada na figura 19.4. Fotos são coisas concretas e palpáveis que poderiam, em princípio, registrar a contração do espaço, indicando que ela é real. Se, por outro lado, fosse João quem tirasse a foto de Maria, ela apareceria contraída na direção do movimento, como na figura 19.5. O efeito da contração do espaço também é simétrico.

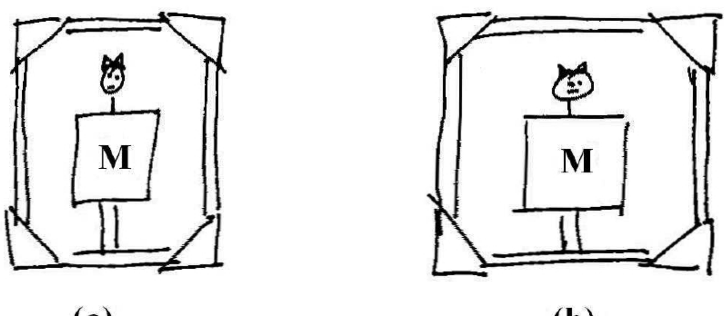

Figura 19.5: As duas fotos de Maria: a) tirada por João; b) tirada por ela mesma.

Este tipo de situação ilustra bem os efeitos da relatividade, mas não é viável na prática, pois não existem condições tecnológicas para que pessoas se movam com velocidades relativas iguais a $v = 3c/5$. Em geral, é muito difícil dotar corpos macroscópicos de velocidades relativas muito altas, pois as energias necessárias ao processo de aceleração são muito grandes. Já no caso de partículas microscópicas, por outro lado, isso é relativamente fácil.

• simultaneidade

Nesta aula e na anterior, vimos que os intervalos de tempo e de espaço na relatividade não são absolutos e que, tanto a dilatação do tempo como a contração do espaço, são efeitos reais, posto que mensuráveis. Como discutiremos a seguir, no contexto desta teoria, a noção clássica de simultaneidade entre eventos é também alterada, passando a depender do observador.

Para mostrar como isso ocorre, comparamos os comportamentos de dois relógios brancos, em repouso no referencial de João, com espelhos verticais e horizontais. João, que segura os dois, "ouve" ambos fazerem o TIC e o TAC simultaneamente, já que eles estão em repouso no seu referencial e, por isso, marcam o tempo da mesma maneira, como sugere a figura 19.6.

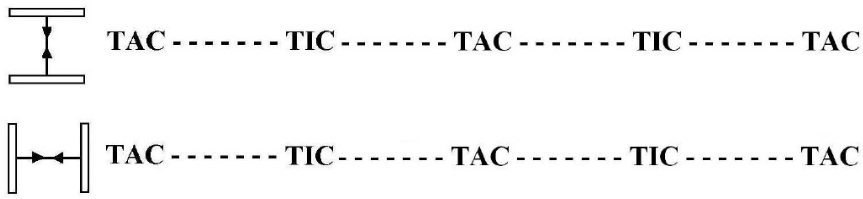

Figura 19.6: Os relógios de João no referencial dele mesmo.

O problema, agora, consiste em saber como Maria "ouve" os TICs e TACs dos dois relógios brancos. No caso do relógio de espelhos *horizontais*, os cálculos feitos anteriormente permitem-nos concluir que o intervalo Δt^{bh}_{M1} entre o TIC e o TAC é igual ao intervalo Δt^{bh}_{M2} entre o TAC e o TIC, sendo ambos dados por

$$\Delta t^{bh}_{M1} = \Delta t^{bh}_{M2} = \frac{L}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \ . \qquad (19.20)$$

No relógio de espelhos *verticais*, por outro lado, isso não acontece. Segundo as eqs. (19.14),(19.16) e (19.19), temos

$$\Delta t^{bv}_{M1} = \frac{\ell^{bv}_M}{c-v} = \frac{L}{c}\,\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{c-v} \ , \qquad (19.21)$$

$$\Delta t^{bv}_{M2} = \frac{\ell^{bv}_M}{c+v} = \frac{L}{c}\,\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{c+v} \ . \qquad (19.22)$$

Deste modo os três intervalos de tempo, $\Delta t^{bh}_{M1} = \Delta t^{bh}_{M2}$, Δt^{bv}_{M1} e Δt^{bv}_{M2} são todos diferentes entre si. Para Maria, os TACs dos dois relógios de João são simultâneos, mas isso não acontece com os TICs, como ilustra a figura 19.7.

Se o intervalo entre um TIC-TAC dos relógios brancos no referencial de João fosse de 1 segundo, e a velocidade relativa fosse $3/5c$, teríamos os resultados mostrados na tabela abaixo.

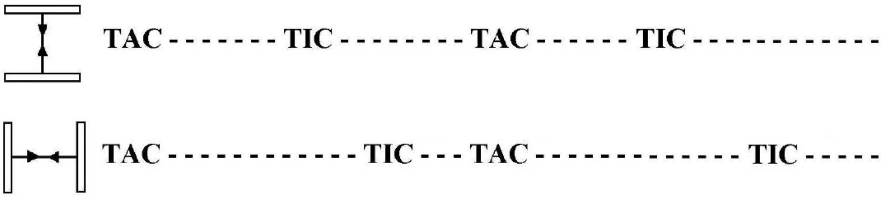

Figura 19.7: Os relógios de João no referencial de Maria.

	referencial	TAC-TIC	TIC-TAC	TAC-TAC
relógio de espelhos horizontais	JOÃO	1,00s	1,00s	2,00s
	MARIA	1,25s	1,25s	2,50s
relógio de espelhos verticais	JOÃO	1,00s	1,00s	2,00s
	MARIA	2,00s	0,50s	2,50s

• mais simultaneidade

A relatividade, ao mudar os conceitos de espaço e tempo, muda também o de simultaneidade. No dicionário, encontramos que dois eventos são ditos simultâneos quando ocorrem ao mesmo tempo. Na relatividade, esta definição de simultaneidade não é suficientemente clara, e é preciso ampliá-la. Neste novo contexto, é preciso perguntar também: em qual referencial?

Suponhamos que, no referencial de Maria, ocorram dois eventos quaisquer, A e B, em posições diferentes, P_A e P_B. Por exemplo, o evento A pode ser o piscar de um olho e o evento B, a batida de um martelo contra um prego. Suponhamos, ainda, que Maria esteja num ponto P_M, equidistante dos pontos P_A e P_B, e que ela possa ver os dois eventos. Na relatividade, os eventos A e B são considerados simultâneos se Maria os vê ao mesmo tempo. De modo mais geral, na relatividade, dizemos que dois eventos são simultâneos *em um referencial* quando as luzes por eles emitidas chegam juntas a um ponto equidistante deles. No caso do exemplo, Maria está equidistante do olho que pisca e do prego que recebe a martelada. Sabendo disso, ela pode concluir que se ela vê as informações luminosas provenientes desses dois eventos ao mesmo tempo, então eles de fato ocorrem ao mesmo tempo. Neste caso, os eventos A e B são simultâneos no referencial de Maria. Para completar esta discussão, convém lembrar que os eventos A e B são simultâneos *entre si*, mas ambos *antereiores* à percepção de Maria.

Onde falhou a definição de simultaneidade do dicionário não-relativístico? Na relatividade a definição de simultaneidade envolve tanto o tempo como o espaço, enquanto que a do dicionário envolve apenas o tempo e incorpora, tacitamente, a noção clássica de tempo absoluto.

• a noção de simultaneidade é relativa

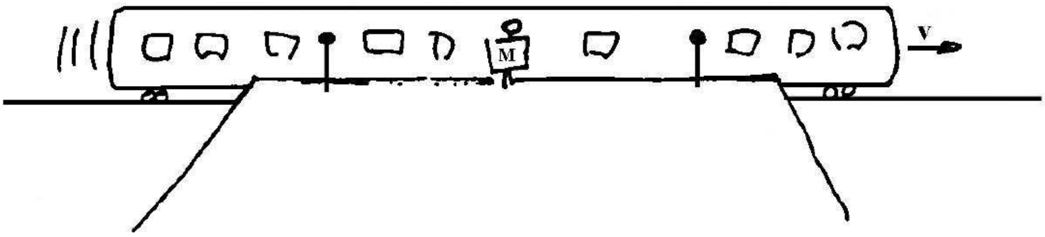

Figura 19.8: Maria e os dois flashes, no referencial da estação.

Na relatividade, dois eventos simultâneos num referencial podem não o ser num outro referencial. Esta nova noção de simultaneidade parece bastante estranha, à primeira vista, pois é diferente da nossa experiência diária. Para ganhar um pouco de familiaridade com ela, consideremos a situação mostrada na figura 19.8. Maria está parada numa estação de trem, à noite, com todas as luzes desligadas. Na plataforma existem, de cada um dos seus lados, dois flashes, ambos à distância L dela. A esses flashes estão ligados fios de mesmo comprimento, conectados a um interruptor único, de modo que eles podem ser acionados por Maria ao mesmo tempo. Este arranjo permite que sejam iluminadas pessoas que viajam num trem, que passa pela plataforma com velocidade v. Nesta discussão, vamos supor que os flashes estejam tão próximos das pessoas do trem, de modo que elas sejam iluminadas no mesmo instante em que são acionados. Essa hipótese não influencia em nada as conclusões principais a serem obtidas, mas simplifica muito a discussão.

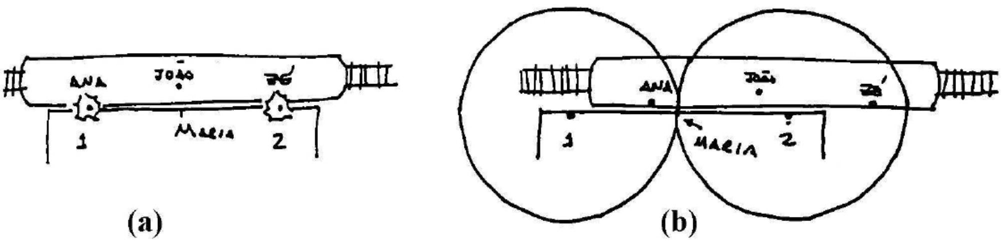

Figura 19.9: Eventos no referencial de Maria.

Quado Maria aciona o interruptor, os dois flashes iluminam duas pessoas no trem. Ana é iluminada pelo flash da esquerda e Zé, pelo da direita, como mostra a figura 19.9a. Quando os flashes são acionados, cada um deles emite uma frente de onda, que se propaga esfericamente, com velocidade c. Assim, no referencial da estação, após o intervalo de tempo $\Delta t_M = L/c$, temos a situação mostrada na figura 19.9b e Maria vê, simultaneamente, Ana e Zé. Para ela, as iluminações de Ana e Zé são simultâneas por construção, pois ela recebe, ao mesmo tempo, os pulsos provenientes dos dois flashes, que ela sabe estarem equidistantes dela.

No contexto da relatividade, Ana e Zé não podem ter sido iluminados simultaneamente no referencial de João, que viaja no trem e, está equidistante de Ana e Zé. Como o trem se move à medida que as ondas luminosas se propagam, as duas frentes de onda levam tempos diferentes para chegar até ele. Assim, por exemplo, na situação ilustrada na figura 19.9b, a frente de onda que iluminou Zé já passou por João, mas isso ainda não aconteceu com a frente de onda que iluminou Ana. Por isso, João já viu Zé, mas ainda não viu Ana.

Na **relatividade**, as velocidades das luzes emitidas pelos dois flashes são as mesmas, iguais a c, tanto no referencial de Maria como no de João. Por isso, a diferença de tempo entre as chegadas das imagens de Zé e Ana até João constitui, para ele, uma clara indicação que as duas pessoas foram iluminadas em instantes diferentes. Como João recebe primeiro a luz proveniente de Zé, no referencial do trem, este foi, de fato, iluminado antes do que Ana.

• exercícios

1. O fator $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ regula a dilatação do tempo e a contração do espaço. Para ter uma idéia das ordens de grandeza envolvidas, complete a tabela abaixo, usando $c \approx 3 \times 10^8$ m/s:

....v....	....v/c....	.....γ.....
1m/s		
1km/h		
100 km/h		
	0,01	
	0,1	
	0,5	
		2
		5
		10
		100

2. Os funcionários de uma estação medem os comprimentos da plataforma e de um trem que passa com velocidade v, para a direita e obtêm, em ambos os casos, o valor L.
a) Desenhe a "visão do trem" e a "visão da plataforma" do problema.
b) Determine os valores dos comprimentos do trem e da plataforma medidos pelos passageiros do trem.

3. Ana possui um relógio de espelhos verticais e ela se move para a esquerda, em relação a Pedro. Desenhe, em escala, o TIC-TAC do relógio de Ana quando "ouvido" por ela mesma e por Pedro, no caso $v = \sqrt{3}\,c/2$. O que mudaria se Ana invertesse o sentido da sua velocidade relativamente a Pedro?

4. Um trem se move com velocidade v, para a direita, relativamente à plataforma de uma estação. Um sinal luminoso, emitido no centro do trem, ilumina simultaneamente as suas duas extremidades. O que observam os funcionários da estação?

• respostas

2. b) $L/\sqrt{1-v^2/c^2}$ e $L\,\sqrt{1-v^2/c^2}$

4. A extremidade traseira do trem é iluminada antes da extremidade dianteira.

Capítulo 20

transformações de Lorentz

• eventos

A apresentação da relatividade feita até aqui explorou a constância da velocidade da luz e teve o intuito de desenvolver uma intuição sobre o assunto, motivando a construção de significados novos para velhas palavras, tais como **tempo** e **espaço**. Nesta aula e nas seguintes, passamos a estudar uma abordagem mais poderosa para atacar problemas de cinemática relativística, baseada nas **transformações de Lorentz**.

As transformações de Lorentz relacionam **eventos** em referenciais diferentes. Por isso, é conveniente discutirmos um pouco o significado da palavra evento. Este conceito tem importância fundamental na relatividade e corresponde a algo que *realmente* acontece, num ponto do espaço e do tempo. A realidade de um evento está associada ao fato de que, em princípio, ele pode ser observado e registrado. Por isso, dois observadores, em referenciais diferentes não podem discordar quando à *ocorrência* desse evento. Por exemplo, você encosta a caneta no papel e coloca um pingo num i. Daí em diante, o pingo está lá e nenhuma mudança de referencial pode fazer com que ele desapareça. A *colocação* do pingo *é* um evento, pois é algo que ocorre no espaço e no tempo. Note que o próprio pingo *não é* um evento!

Na linguagem cotidiana, podemos usar a palavra *evento* para descrever um show de música, um jogo de futebol, um encontro entre cientistas ou o choque de um carro contra uma árvore. Na física, por outro lado, um evento é um acontecimento que ocorre em *um único* ponto do espaço e em *um único* instante bem definido. Por isso, na física, qualquer um dos exemplos citados corresponde a um **conjunto** de eventos, pois envolve vários acontecimentos, que ocorrem em muitos pontos do espaço e em muitos instantes diferentes.

Na relatividade, um evento é algo *real*, passível de comprovação experimental e, por isso, dois observadores em referenciais diferentes não podem discordar da sua ocorrência.

Eles podem, entretanto, discordar quanto à *descrição* feita desta ocorrência. O evento independe do referencial, mas a descrição depende. É por isso que precisamos ter muito cuidado para não confundir um evento com a sua descrição.

Na teoria da relatividade, a descrição de um evento requer sempre quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal. Este aspecto do problema foi enfatizado por Minkowski, em um trabalho[1] publicado em 1908, onde ele afirma: *"Os objetos da nossa percepção incluem invarialvelmente lugares e tempos em combinação. Ninguém jamais percebeu um lugar a não ser em um tempo, ou um tempo a não ser em um lugar. Mas eu ainda respeito o dogma que tanto espaço como tempo têm significados independentes."*

A *ocorrência* de um evento não depende do referencial no qual o observador se encontra. A *descrição* desse evento, por outro lado, depende do referencial. As observações incorporam, necessariamente, uma espécie de *perspectiva*, envolvendo espaço e tempo.

• perspectivas

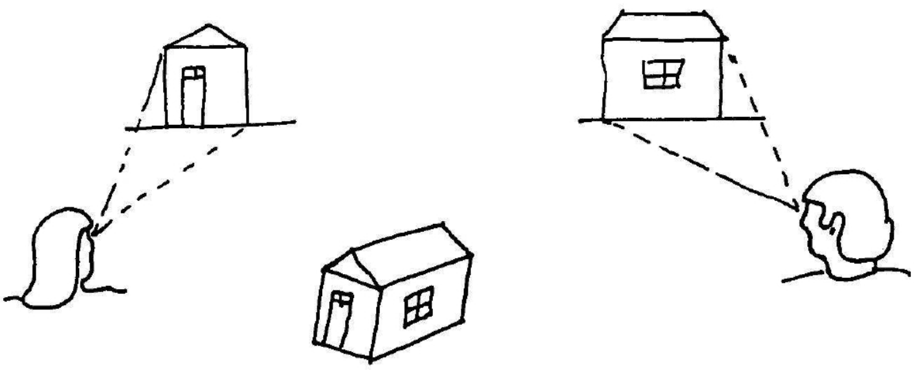

Figura 20.1: Maria e João olham a mesma casa.

Existe uma analogia entre a percepção de eventos na relatividade e o que acontece quando olhamos um objeto qualquer. Tomemos, por exemplo, uma casa. Maria, de pé em frente a ela, vê o que mostra o lado esquerdo da figura 20.1. João, entretanto, em outra posição, vê o que mostra o lado direito da figura 20.1. Maria e João vêem a *mesma casa*, mas as suas visões são diferentes. A casa faz, aqui, o papel de *evento*, a entidade que unifica as duas visões. As visões de Maria e João são observações particulares que, claramente, dependem da posição de cada pessoa em relação à casa. Por isso, as descrições baseadas nessas observações podem mudar, se o observador mudar de posição. Analogamente, na relatividade, as *observações* de um mesmo evento são dependentes dos referenciais. É interessante notar, também, que é impossível para um observador qualquer ver diretamente a casa como um todo. O máximo que ele consegue é ver, separadamente, as várias facetas da casa e reconstruí-la em sua mente. Exatamente o mesmo ocorre com um evento, na relatividade.

A teoria da Relatividade incorpora a idéia de que cada observador, em cada referencial, descreve um *mesmo* evento de forma diferente. Como o evento é o mesmo, estas diferentes descrições guardam relações bem definidas, umas com as outras. Assim, se Maria, no referencial S_M, souber como descrever o evento E e souber, também, como o referencial S_M, onde está João, se move em relação a ela, ela pode reconstruir a descrição de João para esse mesmo evento. No exemplo da casa, se Maria quiser saber como João vê a casa e souber onde ele se encontra, ela pode simplesmente andar até aquele ponto e colocar-se na posição de João. Alternativamente, se ela dispuser de uma teoria de mudança de referencial, ela pode reconstruir a visão de João, mesmo sem se mover, sem sair do seu referencial!

Em relatividade, as regras que permitem efetuar esta operação, ou seja, encontrar as visões de outros observadores a partir da nossa, são as **transformações de Lorentz**. Elas relacionam as descrições, em referenciais com movimento relativo, de um <u>mesmo</u> evento.

A noção de perspectiva em situações envolvendo o tempo é bem menos fácil do que a aplicada apenas ao espaço tridimensional. Na relatividade, para descrever com clareza eventos no referencial S_M, de Maria, associamos a ele um sistema de três eixos e um relógio como na figura 20.2. Analogamente João, no sistema S_J, também possui um sistema de três eixos e um relógio, como na figura 20.3.

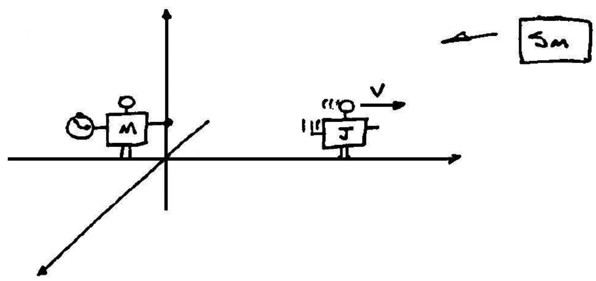

Figura 20.2: O referencial de Maria.

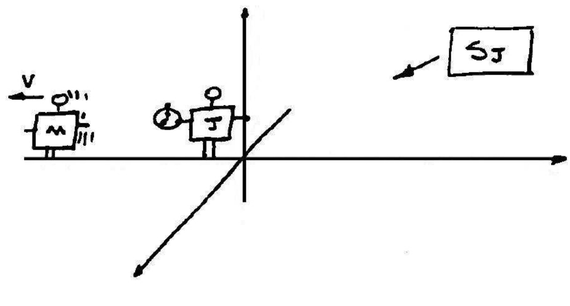

Figura 20.3: O referencial de João.

Imaginemos uma situação em que Maria tenha, em suas mãos, um aparelho capaz de emitir pulsos de luz. No instante em que João passa correndo em frente a ela, ela emite um pulso. Cria-se, então, uma frente de onda esférica que se propaga, de acordo com o segundo princípio da relatividade, com velocidade c em qualquer referencial.

O piscar da luz é um evento, que chamaremos de P, que ocorre no instante em que as origens de S_M e S_J coincidem. Por esse motivo, adotamos o piscar da luz como origem espaço-temporal para os dois referenciais. Este evento é descrito do seguinte modo, por Maria e João:

evento P $$S_M : (x_M^P, y_M^P, z_M^P; t_M^P) = (0,0,0;0) \tag{20.1}$$

$$S_J : (x_J^P, y_J^P, z_J^P; t_J^P) = (0,0,0;0) \tag{20.2}$$

À medida que o tempo passa, em cada um dos referenciais, a luz emitida fica distribuída sobre uma esfera, cujo raio cresce com a velocidade da luz, como mostra a figura 20.4. É importante notar que, no referencial S_M, é Maria que está no centro da esfera enquanto que, em S_J, é João que se encontra nessa posição. Essa situação viola bastante a nossa intuição clássica, já que parece corresponder a uma esfera com dois centros! Podemos nos perguntar se seria possível unificar os dois desenhos em um só, representando simultaneamente as duas visões. A resposta é **não**!!! Tentar fazer isso corresponde à pretensão a uma visão do problema que independe de referenciais particulares, superior e mais poderosa do que as permitidas aos humanos. Seria equivalente, no exemplo da casa, a tentar fazer um desenho mostrando todas as suas faces de uma só vez.

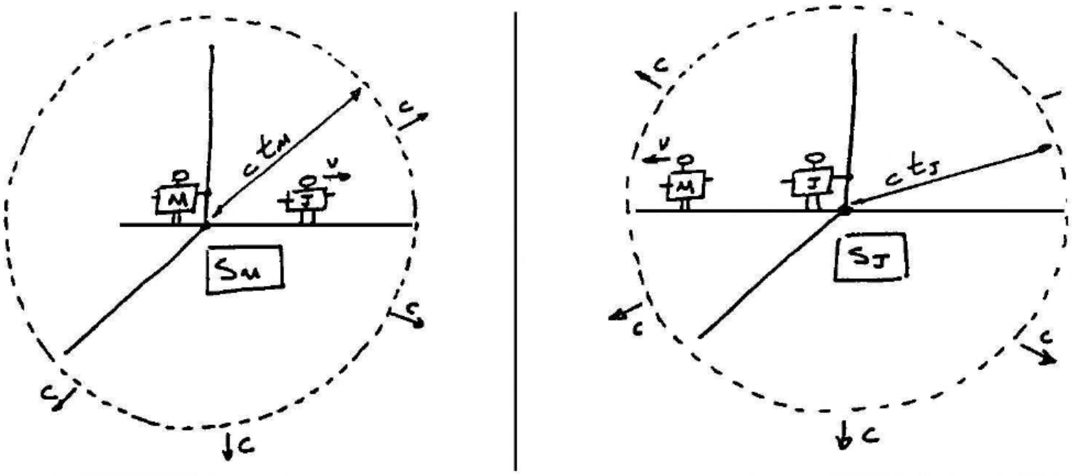

Figura 20.4: A evolução do pulso luminoso nos dois referenciais.

Os seres humanos e os aparelhos empregados em medições estão sempre ligados a referenciais. Por isso, na teoria da relatividade, observações de processos envolvendo espaço e tempo somente podem ser feitas a partir de referenciais específicos. Os nossos sentidos, mesmo estendidos por instrumentos, são prisioneiros dos referenciais. Por isso, os problemas colocados pelas figuras 20.1 e 20.4 são muitos semelhantes. Em ambos os casos, os desenhos envolvem perspectivas, mas não há, nenhuma incompatibilidade entre as visões de Maria e João.

O lado esquerdo da figura 20.4 indica que Maria observa, depois do instante inicial, uma frente de onda esférica que se propaga. Um ponto genérico dessa frente é caracterizado por quatro coordenadas, $(x_M, y_M, z_M; t_M)$, que satisfazem a equação de uma esfera, de raio proporcional à velocidade da luz. Assim

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2\, t_M^2 \qquad \longleftrightarrow \qquad x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - c^2\, t_M^2 = 0\ . \tag{20.3}$$

No referencial de João, por outro lado, as coordenadas da frente de onda são $(x_J, y_J, z_J; t_J)$ e, como mostra o lado direito da figura 20.4, também satisfazem a equação de uma esfera

$$x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2\, t_J^2 \qquad \longleftrightarrow \qquad x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 - c^2\, t_J^2 = 0\ . \tag{20.4}$$

Suponhamos, agora, que um grão de poeira seja iluminado pela frente de onda. Chamando esse segundo evento de E, as suas descrições nos dois referenciais são dados por

evento E

$$S_M : (x_M^E, y_M^E, z_M^E; t_M^E) \tag{20.5}$$

$$S_J : (x_J^P, y_J^P, z_J^P; t_J^P) \tag{20.6}$$

Esses conjuntos de coordenadas, que descrevem o mesmo evento E, são diferentes para Maria e para João e, por isso, incorporam a perspectiva de cada observador.

• transformações de Lorentz

Em relatividade, as regras que permitem relacionar as descrições de um *mesmo* evento, em referenciais com movimento relativo, são as **transformações de Lorentz**.

A obtenção das transformações de Lorentz (TL) é baseada numa hipótese muito geral: a de que as transformações de coordenadas sejam lineares. Ela visa preservar a **homogeneidade do espaço** e a **uniformidade do tempo** nos dois referenciais. A homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo correspondem à idéia de que as propriedades de um sistema físico não se alteram quando de um deslocamento de todo o sistema no espaço ou no tempo. Ou, em outras palavras, que a física não pode depender da escolha das origens das coordenadas espaciais e temporais. Ou, ainda, intuitivamente, que o espaço é o "mesmo" em qualquer ponto e em qualquer instante, e que o tempo "passa" com a mesma "velocidade" em qualquer ponto e em qualquer instante. Por exemplo, se temos um laboratório com um sistema físico em São Paulo, nada muda se ele for transportado para o Rio de Janeiro ou se fizermos experimentos no ano que vem, ao invés de hoje.

Em uma transformação linear, as novas coordenadas são combinações lineares das antigas. Um exemplo de transformação linear seria: $x_M = a\, x_J + b\, t_J$, com a e b constantes. Como exemplo de regras de transformação não lineares, temos: $x_M = x_J^2$, $x_M = A\, e^{B\, x_J}$, $x_M = k\ \ln(B\, t_J)$. Transformação não lineares não mantêm a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo nos dois referenciais.

Neste estudo da relatividade, supomos sempre que os eixos dos sistemas S_M e S_J sejam paralelos e que a velocidade relativa entre os dois seja paralela aos eixos y, como mostram as figuras 20.2 e 20.3. Essa escolha permite uma grande simplificação nas contas, sem nenhuma perda de conteúdo.

A hipótese de linearidade das transformações corresponde a escrever as coordenadas do evento no referencial S_J em função das coordenadas em S_M como

$$\begin{aligned} x_J &= L_{xx}\, x_M + L_{xy}\, y_M + L_{xz}\, z_M + L_{xt}\, t_M\,, && (20.7)\\ y_J &= L_{yx}\, x_M + L_{yy}\, y_M + L_{yz}\, z_M + L_{yt}\, t_M\,, && (20.8)\\ z_J &= L_{zx}\, x_M + L_{zy}\, y_M + L_{zz}\, z_M + L_{zt}\, t_M\,, && (20.9)\\ t_J &= L_{tx}\, x_M + L_{ty}\, y_M + L_{tz}\, z_M + L_{tt}\, t_M\,. && (20.10) \end{aligned}$$

Nestas expressões, os coeficientes da transformação são representados por L, sendo que o primeiro índice corresponde à coordenada em S_J e o segundo, à coordenada S_M. O problema de determinar as TL corresponde a obter os valores dos coeficientes L, em função da velocidade relativa v. Este problema tem simetria cilíndrica, em torno do eixo y e, por isso, é conveniente distinguir as coordenadas x e z, transversais à velocidade, da coordenada y, que é paralela.

O sistema determinado pelas eqs. (20.7-20.10) envolve 16 incógnitas, que podem ser determinadas por meio de um conjunto de eventos particulares.

Evento E_1: Maria observa a posição da origem de S_J, em um instante t_M qualquer.

evento $\mathbf{E_1}$

$$S_M : (0, vt_M, 0; t_M) \qquad (20.11)$$

$$S_J : (0, 0, 0; t_J) \qquad (20.12)$$

Substituindo (20.12) no lado direito das eqs.(20.7-20.10) igualando o lado esquerdo a (20.12), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{xy}\, v + L_{xt})\, t_M\,, && (20.13)\\ 0 &= (L_{yy}\, v + L_{yt})\, t_M\,, && (20.14)\\ 0 &= (L_{zy}\, v + L_{zt})\, t_M\,, && (20.15)\\ t_J &= (L_{ty}\, v + L_{tt})\, t_M\,. && (20.16) \end{aligned}$$

Evento E_2: Maria observa a extremidade superior de uma régua de comprimento a, fixa no referencial S_J e paralela ao eixo z, como mostra o lado esquerdo da figura 20.5.

evento $\mathbf{E_2}$

$$S_M : (0,\ vt_M, a; t_M) \qquad (20.17)$$

$$S_J : (0, 0, a; t_J) \qquad (20.18)$$

Neste caso, as eqs. (20.7-20.10) fornecem

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{xy}\, v + L_{xt})\, t_M + L_{xz}\, a\,, && (20.19)\\ 0 &= (L_{yy}\, v + L_{yt})\, t_M + L_{yz}\, a\,, && (20.20)\\ a &= (L_{zy}\, v + L_{zt})\, t_M + L_{zz}\, a\,, && (20.21)\\ t_J &= (L_{ty}\, v + L_{tt})\, t_M + L_{tz}\, a\,. && (20.22) \end{aligned}$$

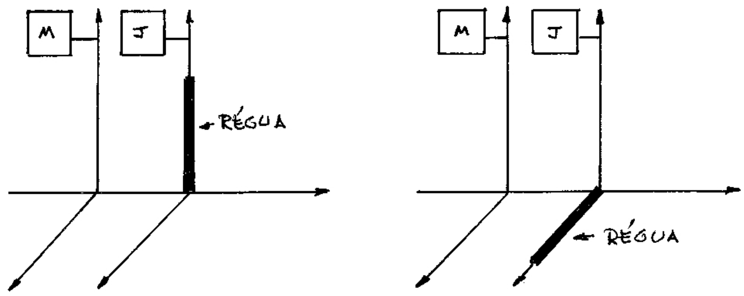

Figura 20.5:

Comparando os conjuntos de equações (20.19-20.22) com (20.13-20.16), obtemos

$$L_{xz} = L_{yz} = L_{tz} = 0\,, \tag{20.23}$$
$$L_{zz} = 1\,. \tag{20.24}$$

Evento E_3**:** Maria observa a extremidade de uma régua de comprimento b, horizontal, fixa no referencial S_J e paralela ao eixo x, representada do lado direito da figura 20.5.

evento $\mathbf{E_3}$ $$S_M : (b,\ vt_M, 0; t_M) \tag{20.25}$$

$$S_J : (b, 0, 0; t_J) \tag{20.26}$$

Usando as eqs. (20.7-20.10) obtemos

$$b = L_{xx}\, b + (L_{xy}\, v + L_{xt})\, t_M\,, \tag{20.27}$$
$$0 = L_{yx}\, b + (L_{yy}\, v + L_{yt})\, t_M\,, \tag{20.28}$$
$$0 = L_{zx}\, b + (L_{zy}\, v + L_{zt})\, t_M\,, \tag{20.29}$$
$$t_J = L_{tx}\, b + (L_{ty}\, v + L_{tt})\, t_M\,, \tag{20.30}$$

e a comparação com (20.13-20.16) fornece

$$L_{xx} = 1\,, \tag{20.31}$$
$$L_{yx} = L_{zx} = L_{tx} = 0\,. \tag{20.32}$$

Evento E_4**:** João observa a posição da origem de S_M em um instante t_J qualquer

evento $\mathbf{E_4}$ $$S_M : (0,\ 0\,0, t_M) \tag{20.33}$$

$$S_J : (0,\ -vt_J, 0, t_J) \tag{20.34}$$

As eqs. (20.7-20.10) tornam-se então

$$0 = L_{xt}\, t_M\,, \tag{20.35}$$
$$-vt_J = L_{yt}\, t_M\,, \tag{20.36}$$
$$0 = L_{zt}\, t_M\,, \tag{20.37}$$
$$t_J = L_{tt}\, t_M\,, \tag{20.38}$$

e, portanto,

$$L_{yt} = L_{zt} = 0\,. \tag{20.39}$$

Usando esses resultados nas eqs. (20.13) e (20.15), temos

$$L_{xy} = L_{zy} = 0\,. \tag{20.40}$$

Os resultados obtidos até aqui, expressos pelas eqs. (20.23), (20.24), (20.31), (20.32), (20.39) e (20.40), permitem-nos reescrever o sistema (20.7-20.10) como

$$x_J = x_M\,, \tag{20.41}$$
$$y_J = L_{yy}\, y_M + L_{yt}\, t_M\,, \tag{20.42}$$
$$z_J = z_M\,, \tag{20.43}$$
$$t_J = L_{ty}\, y_M + L_{tt}\, t_M\,. \tag{20.44}$$

Esses resultados indicam que as coordenadas transversais ao movimento não se alteram pela mudança de referencial e que, das combinações gerais de todas as coordenadas, sobram apenas duas combinações lineares, envolvendo y_M e t_M. Das equações (20.14), (20.36) e (20.38) aprendemos que

$$L_{yt} = -v\, L_{yy}\,, \tag{20.45}$$
$$L_{yt} = -v\, L_{tt}\,, \tag{20.46}$$

e, portanto,

$$L_{tt} = L_{yy}\,. \tag{20.47}$$

Para obter os valores dos coeficientes L_{yy} e L_{ty}, voltamos ao grão de poeira iluminado pela frente de luz descrita nas figuras 20.4. As coordenadas desse evento nos referenciais M e J são dadas pelas eqs. (20.6) e (20.6) e estão vinculadas pelas condições (20.3) e (20.4). Por isso, podemos escrever

$$(x_J^E)^2 + (y_J^E)^2 + (z_J^E)^2 - c^2\,(t_J^E)^2 = (x_M^E)^2 + (y_M^E)^2 + (z_M^E)^2 - c^2\,(t_M^E)^2\,. \tag{20.48}$$

As eqs. (20.41) e (20.43) permitem simplificar esse resultado, e temos

$$(y_J^E)^2 - c^2(t_J^E)^2 = (y_M^E)^2 - c^2(t_M^E)^2\,. \tag{20.49}$$

Usando as eqs. (20.42), (20.44), (20.45) e (20.46), obtemos

$$L_{yy}^2(y_M^E - v\, t_M^E)^2 - c^2(L_{ty}\, y_M^E - L_{yy}\, t_M^E)^2 = (y_M^E)^2 - c^2(t_M^E)^2 \tag{20.50}$$

ou, o que é equivalente,

$$(L_{yy}^2 - c^2\, L_{ty}^2)(y_M^E)^2 - 2\, L_{yy}(v\, L_{yy} + c^2\, L_{ty})\, y_M^E\, t_M^E + L_{yy}^2(v^2 - c^2)\,(t_M^E)^2$$
$$= (y_M^E)^2 - c^2(t_M^E)^2\,. \tag{20.51}$$

Impondo que essa igualdade valha como um polinômio em y_M^E e t_M^E, obtemos:

$$L_{yy}^2 + c^2\ L_{ty}^2 = 1\ , \tag{20.52}$$

$$v\ L_{yy} + c^2 L_{ty} = 0\ , \tag{20.53}$$

$$L_{yy}^2 (v^2 - c^2) = -c^2\ . \tag{20.54}$$

Estas condições nos fornecem

$$L_{yy} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ , \tag{20.55}$$

$$L_{ty} = -\frac{v}{c^2}\, L_{yy}\ . \tag{20.56}$$

O último passo consiste em determinar o sinal de L_{yy}. Isso é feito impondo que S_J e S_M coincidam quando $v = 0$, o que corresponde a escolher o sinal positivo.

Todos estes resultados determinam as **transformações de Lorentz** para $S_M \rightarrow S_J$. Usado a definição

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ , \tag{20.57}$$

obtemos

$$x_J = x_M\ , \tag{20.58}$$

$$y_J = \gamma\,(y_M - v\ t_M)\ , \tag{20.59}$$

$$z_J = z_M\ , \tag{20.60}$$

$$t_J = \gamma \left(t_M - \frac{v}{c^2}\, y_M \right)\ . \tag{20.61}$$

Essas equações constituem o instrumento que permite que, conhecendo as coordenadas de um evento em S_M, possamos encontrar as novas coordenadas que descrevem o *mesmo* evento em S_J.

• a transformação inversa

As transformações de Lorentz, dadas pelas eqs. (20.58 - 20.61) permitem a passagem de S_M para S_J. O conjunto de equações que permite voltar de S_J para S_M corresponde à *transformação inversa*. Existem diversas maneiras de obter esta transformação. Uma possibilidade seria refazer todo o procedimento anterior, trocando J por M em todas as passagens. Uma alternativa, bastante menos trabalhosa, para chegar ao mesmo resultado consiste em isolar $x_M, y_M, z_M; t_M$ no lado direito das eqs. (20.58 - 20.61) e expressar essas variáveis em função de $x_J, y_J, z_J; t_J$. No caso de x_M e z_M, o problema já está resolvido, pois basta escrever

$$x_M = x_J \,, \tag{20.62}$$
$$z_M = z_J \,. \tag{20.63}$$

Para obter y_M, multiplicamos a eq. (20.61) por v e somamos com a eq. (20.59), obtendo

$$y_J + v\, t_J = \gamma\, y_M \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \longleftrightarrow y_M = \gamma\,(y_J + v\, t_J) \ . \tag{20.64}$$

Analogamente, para obter t_M, multiplicamos a eq. (20.59) por v/c^2 e somamos com a eq. (20.61)

$$t_J + \frac{v}{c^2}\, y_J = \gamma\, t_M \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \longleftrightarrow \gamma \left(t_J + \frac{v}{c^2}\, y_J\right) \tag{20.65}$$

Juntando as eqs. (20.62 - 20.65), obtemos as transformações de Lorentz para ir de S_J a S_M:

$$x_M = x_J \,, \tag{20.66}$$
$$y_M = \gamma\,(y_J + v\, t_J) \,, \tag{20.67}$$
$$z_M = z_J \,, \tag{20.68}$$
$$t_M = \gamma \left(t_J + \frac{v}{c^2}\, y_J\right) \,. \tag{20.69}$$

Observe o resultado a que chegamos: a única diferença entre a "ida" de S_M para S_J e a "volta" de S_J para S_M está no sinal da velocidade. De fato, o que determina a passagem de S_M para S_J é a velocidade v de João, em relação a Maria; o que determina a passagem de S_J para S_M é a velocidade $-v$ de Maria, em relação a João. Portanto, um modo mais simples de encontrar a transformação inversa consiste em, simplesmente, substituir os índices M por J e trocar o sinal de v na transformação original.

• alguns detalhes

Uma vez obtidas as transformações de Lorentz, fazemos um resumo do caminho percorrido. Utilizamos o segundo princípio para chegar às eqs. (20.3) e (20.4), nos apoiamos na homogeneidade do espaço e na uniformidade do tempo para argumentar que as transformações deveriam ser lineares e, enfim, consideramos os movimentos de réguas e das origens de S_J e S_M para encontrar a forma das transformações. Essas hipóteses, embora não muito simples à primeira vista, são claras, e a dedução surge delas sem maiores tropeços.

As expressões que representam as transformações de Lorentz, foram obtidas supondo que os referenciais S_M e S_J tivessem uma origem espaço-temporal comum. Nossa dedução foi feita com base nesse fato e ele está, portanto, incorporado nas eqs.(20.58 - 20.61) e (20.66 - 20.69). Tanto isto é verdade, que elas relacionam diretamente o ponto $(0,0,0;0)$ no referencial S_M ao ponto $(0,0,0;0)$ no referencial S_J. Por isso, sempre que formos utilizar as transformações na forma dada por estas equações, precisamos definir um evento para ser adotado como origem dos *dois* referenciais. Todos os demais, serão relacionados a ele.

O tamanho dos efeitos relativísticos é determinado pelo quociente v/c. A sua presença no fator $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ é tal que $\gamma \geq 1$, a igualdade valendo no caso particular $v = 0$. Quando v for comparável a c, o fator γ pode tornar-se grande e os efeitos relativísticos tornam-se correspondentemente importantes. Não há limite superior para γ e, portanto, $1 \leq \gamma < \infty$.

Quando a velocidade relativa v é muito menor que a da luz, $v << c$, o fator de escala γ aproxima-se de 1, e as transformações de Lorentz podem ser escritas como

$$x_J = x_M \ , \tag{20.70}$$

$$y_J \simeq y_M - v\, t_M \ , \tag{20.71}$$

$$z_J = z_M \ , \tag{20.72}$$

$$t_J \simeq t_M \ . \tag{20.73}$$

Assim, no limite, de velocidades baixas, os tempos nos dois referenciais tornam-se iguais e as transformações espaciais coincidem com as transformações de Galileu, usadas na mecânica clássica.

É muito importante notar que o fato de as TL ficarem parecidas com as transformações de Galileu no limite $v << c$ não significa que a física clássica seja um caso particular da relatividade. Os significados físicos das duas transformações são diferentes. Na relatividade, as transformações de Galileu são um limite, uma aproximação, enquanto que na mecânica clássica elas são a própria expressão da realidade. Por outro lado, na relatividade, a expressão da realidade está contida em seus dois princípios: equivalência de todos os referenciais, e constância da velocidade da luz em todos eles. Na mecânica clássica, a proposta de realidade assume a forma de espaço a tempo absolutos e totalmente independentes um do outro. Estas diferenças distinguem fundamentalmente uma concepção da outra.

• referência

[1] H. Minkowski, Space and Time, em “The principle of relativity”, Dover, 1952, pag. 73.

• exercícios

1. Quais das situações seguintes correspondem a eventos: o pingo de um i, colocar o pingo num i, um carro, entrar num carro, a existência de um carro numa garagem.

2. Do ponto de vista matemático, porque as transformações não lineares de coordenadas não são compatíveis com a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo?

3. Escreva as transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas dos sistemas de Ana e de Pedro, sendo que Pedro se move em relação a Ana com velocidade $-v$, segundo o eixo z.

4. Qual os papéis do primeiro e do segundo princípio da relatividade na obtenção dos resultados apresentados na seção **tranformações de Lorentz**?

Capítulo 21

transformações de Lorentz: exemplos

Nesta aula e na próxima, discutimos aplicações das transformações de Lorentz. Apesar das diferenças entre as várias situações abordadas, enfatizamos a existência de um padrão comum entre elas: a comparação das observações de personagens diferentes, em referenciais diferentes, de um *mesmo* conjundo de eventos.

A nossa educação em mecânica clássica ocorre desde o ensino médio e é bastante forte no ensino superior. Ao longo desse processo, construímos uma intuição acerca da cinemática, baseada em relações entre grandezas espaciais e temporais, algumas das quais só valem na mecânica clássica. Por isso, essa intuição não pode ser facilmente transferida para o contexto da relatividade.

Como já discutimos anteriormente, no contexto da relatividade, os conceitos genéricos de espaço e tempo não são necessariamente úteis, e é muito mais conveniente prestar atenção aos eventos. Como todo problema de relatividade envolve apenas *relações entre eventos*, as suas soluções podem ser obtidas através de um procedimento analítico, envolvendo os seguintes passos:

1. *Identificar e rotular os eventos importantes do problema.* Por exemplo, no caso da aula anterior, escrever algo do tipo: evento E, o grão de poeira é iluminado pela frente de onda.

2. *Extrair, a partir das informações fornecidas pelo problema, as 4 coordenadas espaço-temporais de cada evento, em cada um dos referenciais.*

Se os referenciais forem os de Maria e João, escrevemos

$$\textbf{evento E} \qquad S_M : (x_M^E, y_M^E, z_M^E; t_M^E) \tag{21.1}$$

$$S_J : (x_J^E, y_J^E, z_J^E; t_J^E) \tag{21.2}$$

e existem 8 valores a serem determinados. Pelo menos quatro deles precisam ser extraídos do enunciado do problema e não precisam ser necessariamente referentes a um único referencial. Por exemplo, o problema pode ser resolvido se formos capazes de extrair x_M^E, y_J^E, z_J^E e t_M^E a partir do enunciado.

3. *Usar as transformações de Lorentz para obter as 4 coordenadas desconhecidas de um dado evento a partir das 4 coordenadas já conhecidas daquele mesmo evento.*

4. *Repetir esse procedimento para todos os eventos importantes do problema.*

A partir do conhecimento das coordenadas espaço-temporais de cada evento, em cada um dos referenciais, podemos reconstruir as relações entre eles e as maneiras como os dois observadores percebem os fenômenos. Esta forma de pensar aparece em todos os problemas que discutimos a seguir.

• exemplo 1: duas bombas

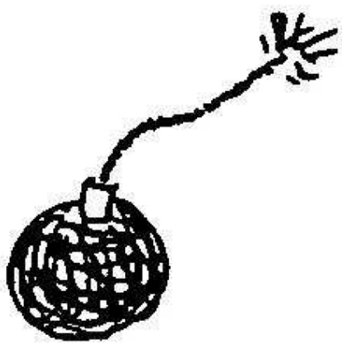

Figura 21.1: Uma bomba...

Existem duas bombas idênticas, com pavios de igual tamanho, que levam um tempo τ para explodir quando estão em repouso. Ou seja, τ representa o tempo próprio de explosão de cada bomba. Maria, em São Paulo, acende os pavios das duas ao mesmo tempo. No instante em que as bombas são acesas, João passa de carro, toma a bomba número 2 e a leva, com uma velocidade v, para a uma cidade à direita de São Paulo.

Para estudar como as explosões das duas bombas são observadas nos referenciais S_M e S_J, listamos abaixo os principais eventos, bem como suas *descrições* nos dois referenciais. Adotamos, como origem espaço-temporal dos dois referenciais, o acionamento das duas bombas, que coincide com a passagem de João por Maria, e supomos que o movimento relativo se dê ao longo dos eixos y dos dois referenciais.

evento de referência E_R**-** acendimento das duas bombas e passagem de João por Maria.

$$\textbf{evento } \mathbf{E_R} \qquad S_M : (0,0,0;0) \tag{21.3}$$

$$S_J : (0,0,0;0) \tag{21.4}$$

evento a - explosão da bomba 1, estacionária em relação a Maria:

$$\textbf{evento a} \qquad S_M : (0, 0, 0; \tau) \tag{21.5}$$

$$S_J : (x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) \tag{21.6}$$

evento b - explosão da bomba 2, estacionária em relação a João:

$$\textbf{evento b} \qquad S_M : (x_M^b, y_M^b, z_M^b; t_M^b) \tag{21.7}$$

$$S_J : (0, 0, 0; \tau) \tag{21.8}$$

Estas expressões incorporam o fato que os dados do problema permitem-nos conhecer diretamente as coordenadas espaço-temporais das explosões da bomba 1, em relação ao referencial S_M, e da bomba 2, no referencial S_J que são dadas pelas eqs (21.6) e (21.8).

Neste ponto, ainda não conhecemos os valores das coordenadas das eqs. (21.6) e (21.8), que serão determinadas com o auxílio das transformações de Lorentz. Para obter as coordenadas do evento a no referencial S_J, usamos as transformações $S_M \to S_J$, eqs.(20.58-20.61) e, depois das contas, obtemos

$$(x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) = (0, \gamma\, v\, \tau,\ 0; \gamma\, \tau)\ . \tag{21.9}$$

Já para obter as coordenadas do evento b no referencial de João, usamos as transformações $S_J \to S_M$, eqs.(20.66-20.69), que nos levam a

$$(x_M^b, y_M^b, z_M^b; t_M^b) = (0, -\gamma\, v\, \tau,\ 0; \gamma\, \tau)\ . \tag{21.10}$$

Incorporando esses resultados nas eqs. (21.6)-(21.8), obtemos as descrições das duas bombas nos dois referenciais:

evento a - explosão da bomba 1, estacionária em relação a Maria:

$$\textbf{evento a} \qquad S_M : (0, 0, 0; \tau) \tag{21.11}$$

$$S_J : (0, \gamma\, v\, \tau, 0; \gamma\, \tau) \tag{21.12}$$

evento b - explosão da bomba 2, estacionária em relação a João:

$$\textbf{evento b} \qquad S_M : (0, -\gamma\, v\, \tau, 0; \gamma\, \tau) \tag{21.13}$$

$$S_J : (0, 0, 0; \tau) \tag{21.14}$$

Os resultados anteriores permitem-nos reconstituir os acontecimentos nos dois referenciais. Começamos pelo referencial S_M, mostrado na figura 21.2. Inicialmente, ocorre o acendimento dos pavios, em $(0, 0, 0; 0)$. Em seguida, a explosão da bomba de Maria em $(0, 0, 0; \tau)$. Finalmente, ocorre a explosão da bomba de João, em $(0, 0, \gamma\, v\, \tau; \gamma\, t)$. Assim, no referencial S_M as duas bombas, apesar de serem idênticas, não explodem simultaneamente. Se a velocidade relativa entre os dois referenciais for não nula, $\gamma > 1$, indicando

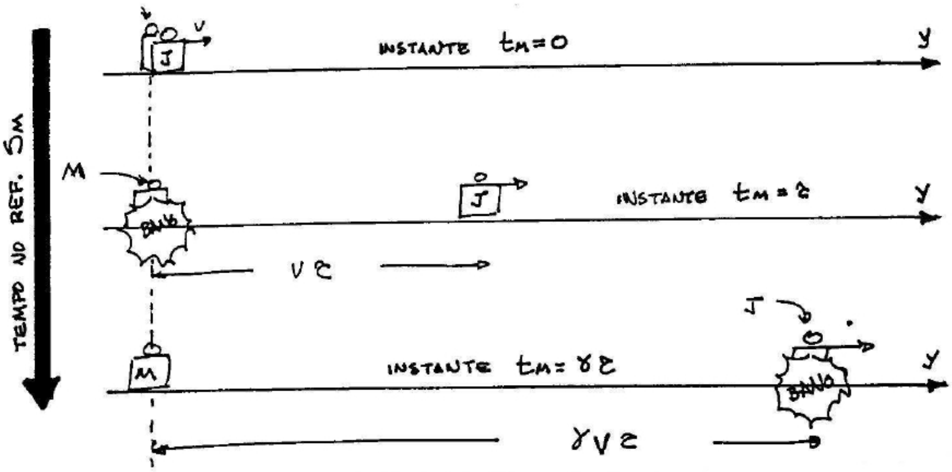

Figura 21.2: A sucessão de eventos no referencial de Maria.

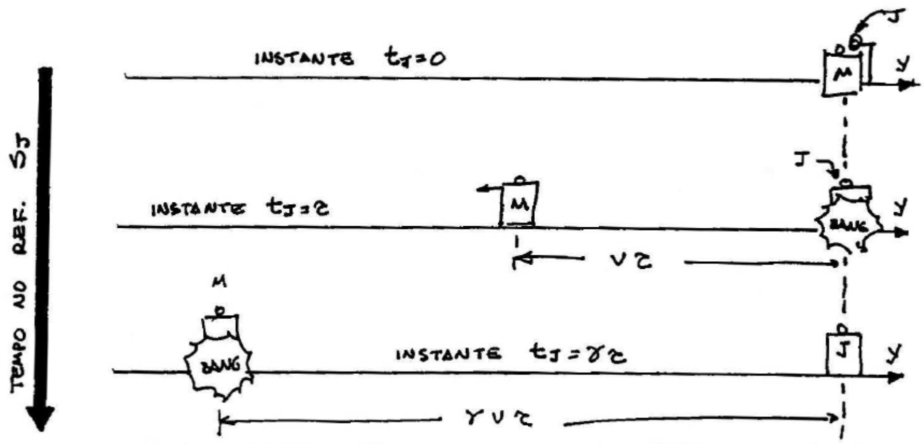

Figura 21.3: A sucessão de eventos no referencial de João.

que $t_M^b > t_M^a$ ou seja, que a bomba 2, em movimento em relação a S_M, demora mais para explodir do que a que ficou em repouso.

No referencial S_J, também, as duas bombas não explodem simultaneamente. Entretanto, agora, os resultados obtidos a partir das transformações de Lorentz indicam $t_J^a > t_M^b$. A bomba 2 explode antes da bomba 1 e os eventos se sucedem como na figura 21.3.

• **mais exemplo 1:** depois do dedo, a lua....

Os resultados formais, dados pelas eqs. (21.12-21.14), podem dar margem a muitas reflexões, algumas das quais são discutidas a seguir.

o primeiro princípio da relatividade:

As expressões (21.12-21.14) indicam que as descrições das duas explosões, nos dois referenciais, são totalmente equivalentes. A única diferença formal está associada ao sinal da velocidade relativa v, que é arbitrário.

dilatação do tempo:

Como discutimos em aulas anteriores, nem sempre as relações entre eventos de um problema podem ser enquadradados como indicando a ocorrência de *dilatação do tempo*. Entretanto, neste exemplo, isso pode ser feito, porque a bomba 2, que se move em relação a S_M, está em repouso em S_J e a bomba 1, que se move em relação a S_J, está em repouso em relação a S_M. Foi por esse motivo que pudemos falar em *tempo próprio* desde o início do problema.

a realidade dos efeitos:

Os efeitos descritos neste exemplo podem, em princípio, ser observados. A ressalva *em princípio* aparece na frase anterior apenas porque, com a tecnologia disponível atualmente, não podemos estudar os efeitos relativísticos em explosões de bombas reais. Ainda assim, como já ressaltamos anteriormente, a dilatação do tempo é um efeito real e não, aparente. Mesmo sem sair do seu referencial, Maria pode constatar isso. Ao explodir, a bomba 2, carregada por João, pode deixar na estrada uma cratera, real e objetiva, cuja posição pode ser medida por Maria. Como ela conhece a velocidade de João, ela pode calcular, facilmente, o instante em que a bomba 2 explodiu no seu referencial e comparar o resultado com a medida direta do instante em que a sua própria bomba explodiu.

a ordem dos eventos:

Neste exemplo, aparece um efeito que é muito típico da relatividade e que perturba a nossa intuição clássica: a ordem temporal das explosões depende do referencial. Na relatividade, a ordem de dois eventos pode depender do referencial, desde que não haja *relação causal* entre eles. Ou seja, se a ocorrência de um deles não puder influenciar a ocorrência do outro.

No caso das duas bombas, essa questão corresponde, no referencial S_M, a determinar se a explosão da bomba 1 pode, ou não, influenciar a explosão da bomba 2. Isso poderia acontecer, por exemplo, se o pavio da bomba 2 pudesse ser cortado por meio de um dispositivo acionado pela luz emitida pela bomba 1, ao explodir. Nesse cenário, a explosão da bomba 1 impediria a explosão da bomba 2.

Para estudar se isso é possível, consideramos um quarto evento E_c, que corresponde à luz emitida na explosão da bomba 1 atingir João. A figura 21.4 permite-nos expressar as coordenadas desse evento em S_M, em função de t_M^c, como

$$S_M : (0, v\, t_M^c, 0, t_M^c) \tag{21.15}$$

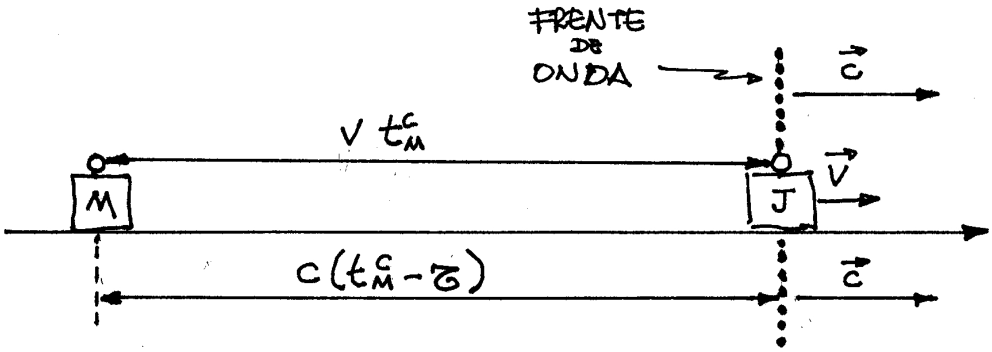

Figura 21.4:

O instante t_M^c é obtido a partir da condição de encontro entre João e a frente de luz e é dado por

$$t_M^c = \frac{1}{1 - v/c}\, \tau\,. \tag{21.16}$$

Para determinar a possibilidade de relação causal entre os eventos E_a e E_b, é preciso comparar os instantes t_M^b e t_M^c. Usando as eqs. (21.14) e (21.16), escrevemos

$$\frac{t_M^b}{t_M^c} = \frac{\gamma}{1/(1-v/c)} = \frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}} \;<\; 1\,. \tag{21.17}$$

Esse resultado indica que a explosão da bomba 2 ocorre necessariamente antes que o sinal luminoso proveniente da bomba 1 chegue até João. Ou seja, a explosão da bomba 1 não pode alterar o destino da bomba 2 e, portanto, não pode haver relação causal entre esses dois eventos.

• exemplo 2: fotos de um relógio em movimento

João viaja num trem que se desloca para a direita, com velocidade $v = 3/5c$ em relação ao solo, e carrega um relógio. O trem passa por uma estação, onde Maria posicionou quatro máquinas fotográficas e, em frente a cada uma delas, um relógio idêntico ao de João. Esses relógios são digitais, têm forma de lâmina, e dois mostradores verticais, localizados em faces opostas, como se pode ver na figura 21.5. Eles foram construídos deste modo para que duas pessoas, uma em frente à outra, possam ver sua marcação simultaneamente.

As máquinas fotográficas de Maria estão separadas umas das outras, por uma distância L. Neste problema vamos supor que $L = 108 \times 10^8$m, ou seja, $L = 10,8$ milhões de km. Esta não é uma distância fácil de imaginar, mas é o preço a ser pago para que possamos obter efeitos "observáveis" na escala de tempo de nossa vida diária, em segundos ou minutos.

No referencial S_M, os relógios estão sincronizados, marcando os quatro exatamente a mesma hora. Cada máquina fotográfica é acionada independentemente, pela passagem

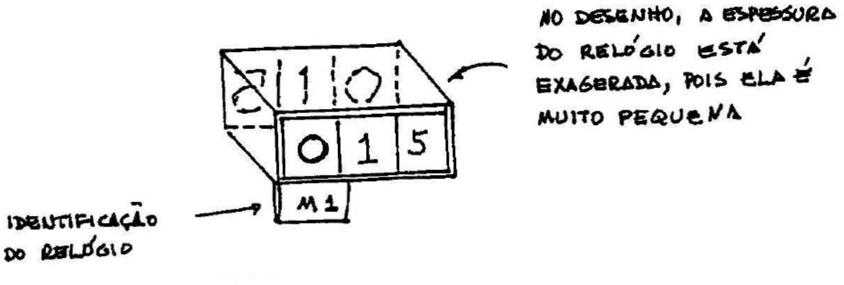

Figura 21.5: Um relógio digital com duas faces.

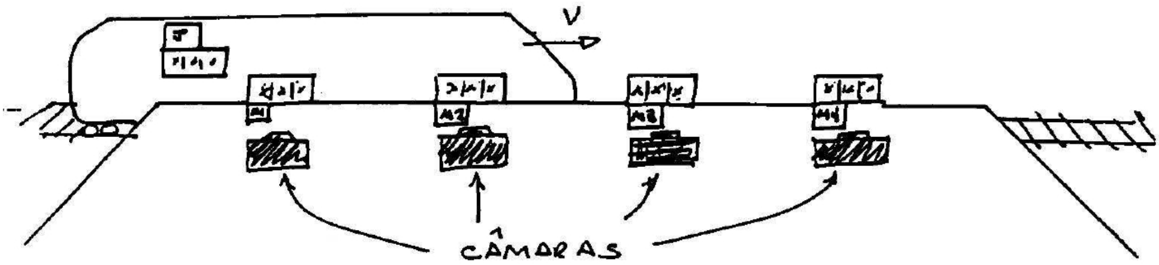

Figura 21.6: O arranjo experimental, no referencial de Maria.

de João e, no momento em que ele passa em frente a uma dada máquina, ela fotografa conjuntamente o relógio do trem e aquele na estação que está em frente a ela. Assim, João é sucessivamente fotografado por cada uma das quatro máquinas, mostradas na figura 21.6.

João e Maria combinaram um experimento de modo que, no instante em que o relógio do trem estivesse em frente ao relógio M1 da estação, este relógio e o de João deveriam começar a marcar o tempo. Assim, a primeira foto dos dois relógios é a mostrada na figura 21.7.

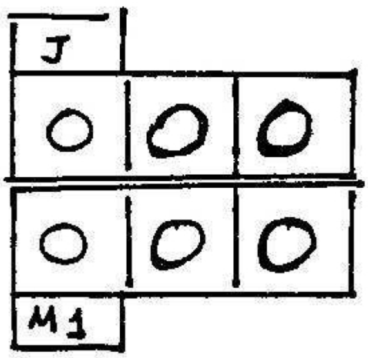

Figura 21.7: Foto dos relógios J e M1, tirada por Maria; a bem da simplicidade, nesta figura não representamos a contração do relógio de João.

O nosso objetivo, agora, consiste em saber como ficam as outras fotos. Para responder a esta questão, é conveniente nomear os vários eventos e explicitar as suas descrições nos dois referenciais. Neste problema, cada uma das fotos representa um evento. Em geral, a origem espaço-temporal dos sistemas de coordenadas é totalmente arbitrária e podemos colocá-la onde quisermos. O único critério a seguir é procurar tornar as coisas simples. Escolhendo a foto dos relógios J e M1 como referência para os demais, podemos representar os vários eventos do problema do seguinte modo:

evento a, **de referência** - foto dos relógios J e M1:

$$\textbf{evento a} \qquad S_M : (0,0,0;0) \tag{21.18}$$

$$S_J : (0,0,0;0) \tag{21.19}$$

evento b - foto dos relógios J e M2:

$$\textbf{evento b} \qquad S_M : (0,L,0;L/v) \tag{21.20}$$

$$S_J : (0,0,0;t_J^b) \tag{21.21}$$

evento c - foto dos relógios J e M3:

$$\textbf{evento c} \qquad S_M : (0,2L,0;2L/v) \tag{21.22}$$

$$S_J : (0,0,0,t_J^c) \tag{21.23}$$

evento d - foto dos relógios J e M4:

$$\textbf{evento d} \qquad S_M : (0,3L,0;3L/v) \tag{21.24}$$

$$S_J : (0,0,0;t_J^d) \tag{21.25}$$

Note que as coordenadas dos eventos em S_M foram extraídas diretamente do enunciado do problema.

Os tempos dos eventos no referencial de João, que ainda não conhecemos, são determinadas por meio das transformações de Lorentz. Para obter a descrição completa do evento b, usamos a eq.(20.61) e escrevemos

$$t_J^b = \gamma\Big(\frac{L}{v} - \frac{v\,L^2}{c^2}\Big) = \frac{L}{\gamma\,v}\,. \tag{21.26}$$

Os tempos dos demais eventos são determinados de modo análogo, e obtemos

$$t_J^c = \frac{2L}{\gamma\,v}\,, \tag{21.27}$$

$$t_J^d = \frac{3L}{\gamma\,v}\,. \tag{21.28}$$

O valor de γ é sempre menor do que 1 e, portanto, para cada um dos eventos, a marcação do relógio de João é *menor* que o de Maria. Isso corresponde à dilatação do tempo de João,

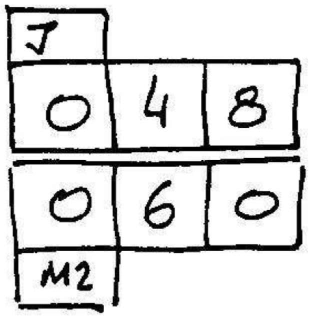

Figura 21.8: Foto dos relógios J e M2, tirada por Maria.

quando observado em S_M. Usando os números do problema temos, com as unidades do sistema internacional (SI): $v = 3c/5 = 1,8\times10^8 m/s, t_M^b = L/v = 108\times10^8/1,8\times10^8 = 60$ s e $t_J^b = t_M^b \times \frac{4}{5} = 48$ s. Assim, a segunda foto registra a dilatação do tempo e corresponde, real e concretamente, à situação mostrada na figura 21.8.

Os instantes dos eventos 3 e 4 nos dois referenciais, obtidos de modo totalmente análogo, são: $t_M^c = 2L/v = 120s$, $t_J^c = t_M^c\times\frac{4}{5} = 96s$, $t_M^d = 3L/v = 180s$ e $t_J^d = t_M^c\times\frac{4}{5} = 144s$. Estas marcações dos relógios correspondem às fotos mostradas na figura 21.9, que registram materialmente os eventos c e d. O conteúdo das quatro fotos são o nosso resultado. Exploramos, agora, alguns de seus aspectos físicos.

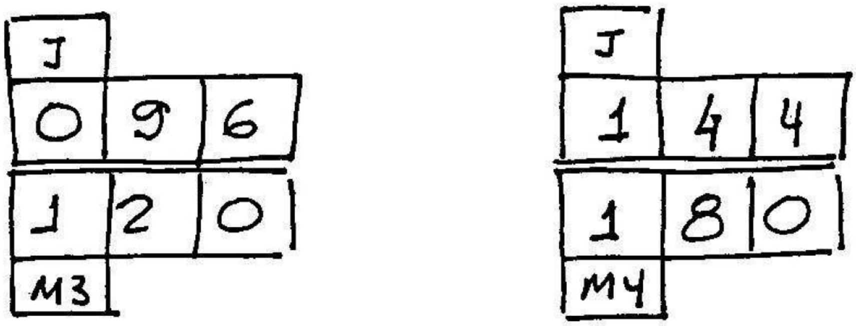

Figura 21.9: Fotos dos relógios J e M3 e J e M4, tiradas por Maria.

a dilatação do tempo e o relógio

Consultando a segunda "foto", mostrada na fig. 21.8, vemos que $t_M^b = 60$s e $t_J^b = 48$s. O fato de t_M^b ser maior do que t_J^b indica que o tempo marcado pelo relógio J aparece dilatado ou contraído para Maria?

Poderíamos ser tentados a pensar que o tempo de João se contraiu, já que 48 é menor do que 60. Entretanto, esta maneira de encarar o problema é incorreta. Entre os dois mesmos eventos passaram-se 60s para Maria e 48s para João. Ou seja, passaram-se 12 unidades de tempo a mais para Maria, o que corresponde a mais tempo para Maria do que para João, entre esses dois mesmos eventos. Isso signifiica que o relógio J, visto por

Maria, *funciona mais devagar* do que os que ela possui. Por exemplo, se João piscar os olhos uma vez a cada 8s, ele piscará 6 vezes entre uma foto e outra. Para Maria, por outro lado, estas 6 piscadas levam 60s para ocorrer, indicando que, para ela, João pisca uma vez a cada 10s. Isso significa que os processos determinados pelo relógio J aparecem como sendo mais lentos para Maria. Isso vale, inclusive, para a mudança do marcador do relógio. Assim, a **dilatação** do tempo corresponde à idéia de que um observador vê o funcionamento de um relógio que se move em relação a ele ocorrer mais devagar.

a uniformidade do tempo

A uniformidade do tempo, ou seja a noção que o tempo passa "sempre" com a mesma "velocidade", é muito importante em física e, por isso, é importante saber se ela é alterada no contexto da relatividade restrita. A tabela abaixo mostra os resultados das quatro fotos.

foto	1	2	3	4
$t_J(s)$	0	48	96	144
$t_M(s)$	0	60	120	180

Ela mostra que o *intervalo* entre dois eventos sucessivos em cada um dos referenciais é sempre o mesmo: 48s para João e 60s para Maria. Isso significa que a "velocidade" de passagem do tempo em *cada* dos referencial é sempre a mesma. O relógio de João é visto por Maria como funcionando sempre com a mesma "velocidade" e existe sempre uma razão constante entre os intervalos de tempo observados por ambos. Esta razão é dada pelo fator de conversão γ que, no nosso exemplo, vale $5/4$. Em resumo, para Maria, o relógio de João funciona sempre com o mesmo ritmo, ainda que mais lento do que o ritmo dos seus próprios relógios.

• exemplo 3: a simetria da dilatação do tempo

No título deste exemplo, usamos a construção *"dilatação do tempo"* apenas porque ela é popular e recorrente. Entretanto, conforme discutimos em aulas anteriores, essa idéia não pode ser usada indiscriminalmente em problemas de relatividade. Em algumas situações ela é boa e, em outras, não. Este exemplo foi construído com o propósito de discutir essa questão.

Ana e Maria viajam numa enorme nave espacial e cruzam, a uma velocidade $v = 3/5c$, com uma outra nave, onde estão João e Zé como mostra a figura 21.10. Em ambas as naves, cada passageiro possui um relógio de duas faces, semelhante ao dos exemplos da aula anterior e, *em cada uma das naves*, os relógios estão sincronizados entre si. Além disso, cada pessoa possui uma máquina fotográfica, colocada de modo a poder fotografar simultaneamente o seu relógio e o do passageiro da outra nave, que passa à sua frente num dado instante. Os vários passageiros estão dispostos nas naves de modo que, *no* *referencial* S_M, tanto a distância entre Ana e Maria como a distância entre João e Zé são iguais a $L = 1,8 \times 10^9$m.

Para facilitar a discussão supomos, também, que os relógios sejam coloridos, com a seguinte corresondência:
João $\longrightarrow$ branco; Zé $\longrightarrow$ laranja; Maria $\longrightarrow$ preto; Ana $\longrightarrow$ verde.

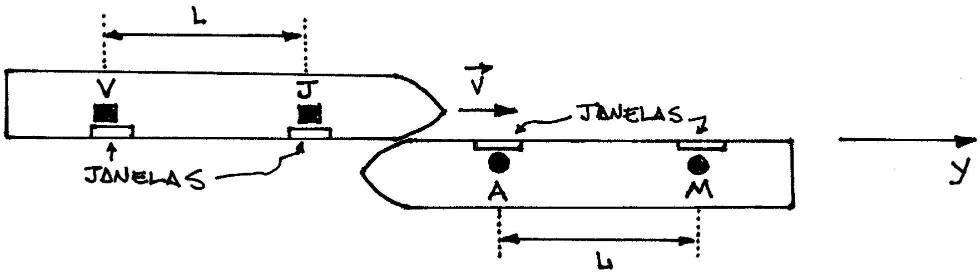

Figura 21.10: As duas naves, vistas no referencial S_M; os homens são representados por quadradinhos e as mulheres, por bolinhas.

O objetivo deste exemplo é mostrar que a dilatação do tempo ocorre simetricamente nos referenciais S_M e S_J e, para tanto, consideramos três eventos, que correspondem aos encontros de João com Ana, de João com Maria e de Ana com Zé. Ou seja, os encontros do viajante mais à frente de cada uma das naves com os dois outros personagens da outra. Tomando o primeiro deles como referência, e extraindo do enunciado as coordenadas dos outros dois em S_M, temos **evento de referência -** encontro de Ana com João:

$$\textbf{evento R} \qquad S_M : (0,0,0;0) \tag{21.29}$$

$$S_J : (0,0,0;0) \tag{21.30}$$

evento a - encontro de Maria com João:

$$\textbf{evento a} \qquad S_M : (0,L,0;L/v) \tag{21.31}$$

$$S_J : (x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) \tag{21.32}$$

evento b - encontro de Ana com Zé:

$$\textbf{evento b} \qquad S_M : (0,0,0;L/v) \tag{21.33}$$

$$S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \tag{21.34}$$

Para obter os valores das coordenadas em S_J, usamos as transformações de Lorentz, dadas pelas eqs.(**??**-**??**). No caso do evento a, temos

$$x_J^a = 0 \,, \tag{21.35}$$

$$y_J^a = \gamma \left(L - v\, \frac{L}{v} \right) = 0 \,, \tag{21.36}$$

$$z_J^a = 0 \,, \tag{21.37}$$

$$t_J^a = \gamma \left(\frac{L}{v} - v\, \frac{L}{c^2} \right) = \frac{L}{\gamma\, v} \,. \tag{21.38}$$

O evento b, no referencial S_J, é determinado por

$$x_J^b = 0 \,, \tag{21.39}$$

$$y_J^b = \gamma \left(0 - v\, \frac{L}{v} \right) = -\gamma L \,, \tag{21.40}$$

$$z_J^b = 0 \,, \tag{21.41}$$

$$t_J^b = \gamma \left(\frac{L}{v} - 0 \right) = \gamma \frac{L}{v} \,. \tag{21.42}$$

A interpretação de fenômenos com base na idéia de dilatação do tempo envolve sutilezas importantes, e é muito menos simples do que aparenta. Como vimos na aula 18, a dilatação do tempo pode ser percebida quando o funcionamento de um *único* relógio, em repouso num dado referencial, é comparado com os relógios de *vários observadores*, num outro referencial. No caso deste exemplo que estamos considerando, esta situação ocorre com o relógio verde de Ana, que compara o seu funcionamento com os de João e Zé e, também, com o relógio branco de João, que compara o seu funcionamento com os de Ana e Maria.

Consideremos, inicialmente, o relógio verde. Nele decorre um intervalo de tempo próprio $\Delta\tau^v = t_M^b - 0 = L/v$, entre os encontros de Ana com João e Zé. Já no referencial S_J, o intervalo de tempo entre esses dois eventos é $\Delta t_J^v = t_J^b - 0 = \gamma L/v$. Usando esses resultados, podemos escrever

$$\Delta t_J^v = \gamma\, \Delta\tau^v \,, \tag{21.43}$$

o que indica que o tempo marcado pelo relógio de Ana é visto com dilatado no referencial S_J dos homens.

A situação do relógio branco é totalmente simétrica. O intervalo de tempo próprio decorrido entre os seus dois encontros é $\Delta\tau^b = t_J^a - 0 = L/\gamma v$, enquanto que o tempo que passou entre os mesmos dois eventos no referencial S_M é dado por $\Delta t_M^b = t_M^a - 0 = L/v$. Assim,

$$\Delta t_M^b = \gamma\, \Delta\tau^b \,. \tag{21.44}$$

Este resultado indica que o relógio branco é visto, pelas mulheres, como funcionando mais lentamente do que os que elas possuem.

Para tornar esta discussão um pouco mais concreta, vamos supor que, quando se encontram, cada personagem fotografa o próprio relógio e o do outro, o que é possível graças aos dois mostradores que cada relógio possui. As fotos envolvendo Ana e João aparecem nas figuras 21.11a e 21.12a. Usando os resultados anteriores e os dados numéricos do problema, temos $t_M^a = 10,0$s, $t_J^a = 8,0$s, $t_M^b = 10,0$s e $t_J^b = 12,5$s e, assim, os encontros de Ana com Zé e de João com Maria correspondem às fotos mostradas nas figuras 21.11b e 21.12b. Olhando estas figuras, podemos notar que o tempo do relógio verde de Ana é visto como dilatado pelos homens e que o tempo do relógio branco de João é visto como dilatado pelas mulheres.

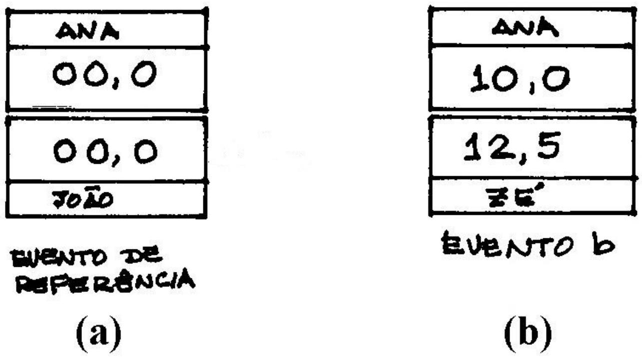

Figura 21.11: Ana é fotografada pelos homens.

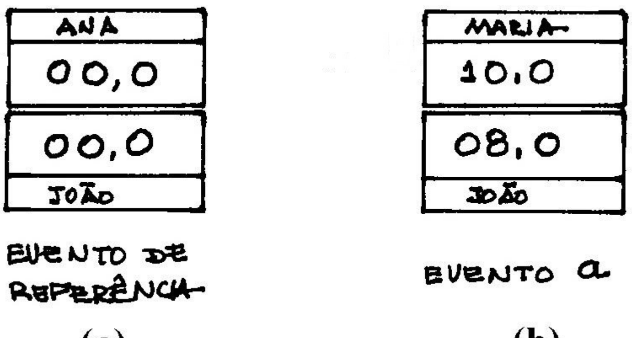

Figura 21.12: João é fotografado pelas mulheres.

Entre os eventos de referência e b, passam-se $10,0$s no relógio verde de Ana, $12,5$s no referencial dos homens, e o fator de escala é $\gamma = 5/4$. Neste caso, comparamos o tempo de *um relógio* em S_M, com o tempo do *referencial* S_J. Ou seja, comparamos o relógio verde com os relógios branco e laranja.

A outra dilatação pode ser percebida ao compararmos os intervalos de tempo entre os eventos de referência e a, vistos por João e pelas mulheres. Enquanto para João passam-se

$8,0$s, no referencial S_M decorrem $10,0$s e o fator de escala também é $\gamma = 5/4$, idêntico ao anterior. Esta conclusão foi obtida a partir de uma comparacão do relógio branco de João com os preto e verde das mulheres, ou seja, do tempo de um *relógio* em S_J, com o tempo do *referencial* S_M.

A simetria exigida pelo primeiro princípio apareceu: o tempo do relógio branco é visto como dilatado pelas *mulheres*, e o tempo do relógio verde é visto como dilatado pelos *homens*. **A diltação do tempo é, portanto, simétrica nos dois referenciais!**

• exemplo 4: a régua contraída

João está num trem, que se move com velocidade $v = 4/5$c para a direita, em relação à terra. No trem, existe uma régua de comprimento $\lambda = 10$m, paralelamente à direção da velocidade. Maria encontra-se na plataforma de uma estação, onde ela alinha um número muito grande de máquinas fotográficas, dispostas lado a lado e ligadas por fios de mesmo comprimento, a um único disparador, como mostra a figura 21.13. Assim, acionando o disparador, ela pode tirar fotos, simultâneas no seu referencial, capazes de abranger a régua inteira.

Este sistema de máquinas fotográficas permite a Maria medir o comprimento da régua estacionária no trem. Para tanto, ela deve fazer o seu sistema funcionar e, em seguida, inspecionar todas as fotos. Ela encontrará, em uma delas, a extremidade esquerda da régua e, em outra, a direita. Para obter o comprimento da régua, em S_M basta, em seguida, medir a distância entre os pontos na plataforma onde as máquinas que tiraram estas duas fotos estavam.

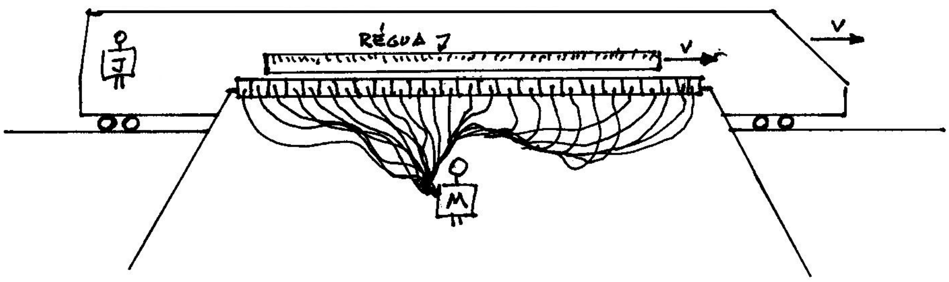

Figura 21.13: O problema visto no referencial de Maria.

As discussões feitas na aula 19 permitem-nos antecipar que o tamanho da régua, obtido a partir das fotos, será menor do que o tamanho próprio da régua no trem. O que queremos, agora, é obter esse resultado usando as transformações de Lorentz.

Os eventos mais importantes neste problema, que efetivamente mostram o tamanho da régua, são as fotos de seus dois extremos. Estes eventos são, por construção, simultâneos no referencial da estação. Entretanto, nada podemos afirmar, a priori, sobre os instantes em que eles ocorrem no referencial do trem, onde está João.

Tomando a foto do extremo esquerdo da régua como origens dos dois sistemas de coordenadas, temos:

evento de referência - foto da extremidade esquerda da régua

$$\textbf{evento R} \qquad S_M : (0,0,0;0) \tag{21.45}$$

$$S_J : (0,0,0;0) \tag{21.46}$$

evento a - foto da extremidade direita da régua

$$\textbf{evento a} \qquad S_M : (x_M^a, y_M^a, z_M^a; 0) \tag{21.47}$$

$$S_J : (0, \lambda, 0; t_J^a) \tag{21.48}$$

Existem quatro incógnitas no evento a, x_M^a, y_M^a, z_M^a e t_J^a, que podem ser obtidas por meio das transformações de Lorentz. Utilizando as expressões (20.58-20.61), obtemos

$$0 = x_M^a \; , \tag{21.49}$$

$$\lambda = \gamma \, y_M^a \; , \tag{21.50}$$

$$0 = z_M^a \; , \tag{21.51}$$

$$t_J^a = -v \, y_M^a / c^2 \; . \tag{21.52}$$

O comprimento da régua no referencial S_M de Maria, é dado pela distância entre as duas máquinas fotogáficas que participaram dos dois eventos descritos acima e, portanto, vale $L_M = y_M^a - 0 = \lambda/\gamma$. Usando os dados do problema, obtemos $\gamma = 5/3$ e $L_M = 6$ m. Concluímos, então, que o comprimento da régua é menor no referencial S_M. É importante notar que essa contração da régua não é aparente, ou uma ilusão de ótica. Ela é real e está objetivamente documentada nas fotos !

Um outro aspecto interessante deste problema diz respeito à simultaneidade entre os dois eventos. As eqs. (21.51) e (21.52) permitem-nos concluir que

$$t_J^a = -\frac{v \, \lambda}{c^2 \, \gamma} \tag{21.53}$$

e, portanto que, em S_J, a medida da extremidade direita da régua é anterior à medida da extremidade esquerda. Já em S_M, essas medidas são simultâneas, indicando que, na relatividade, a noção de simultaneidade depende do referencial.

• exercícios

1. Considere a situação descrita no exemplo 1, supondo que as bombas levem 0,5s para explodir e que a velocidade de João em relação a Maria seja $v = 4c/5$.

a) Determine numericamente as posições e tempos das explosões das duas bombas nos dois referenciais.
b) Faça dois gráficos, colocando o eixo y na horizontal e o eixo t na vertical, representando os eventos nos referencial de Maria e de João. Tente imaginar um filme, mostrando os acontecimentos nos dois referenciais.

2. No caso do exemplo 2, o que mostraria a foto de um quinto relógio, M5, situado à esquerda do relógio M1, e separado deste por uma distância L?

3. No caso do exemplo 2, o que mostrariam as quatro "fotos", caso elas houvessem sido tiradas por João?

4. No caso do exemplo 2, por que o tempo marcado pelo relógio de João aparece dilatado em S_M, mas os tempos dos relógios de Maria parecem não exibir uma dilatação quando observados por João? Afinal de contas, não deve existir, neste problema, uma *simetria* entre S_J e S_M?

5. Considere o encontro entre duas naves, representado na figura 21.10. No contexto da relatividade, este encontro pode ser considerado como um *único* evento? Ou, alternativamente, como um conjunto de eventos?

6. Considere a situação descrita no exemplo 3 e faça desenhos representando os relógios de Ana, Maria, João e Zé quando:
a) Ana e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_M;
b) Ana e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_J;
c) Ana e Zé se encontram, do ponto de vista do referencial S_M;
d) Ana e Zé se encontram, do ponto de vista do referencial S_J;
e) Maria e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_M;
f) Maria e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_J.
Para fazer este exexcício, é importante lembrar que, na relatividade, a sincronização de relógio somente vale dentro de um referencial. Assim, a sincronização existente no interior de S_M não pode ser transferida automaticamente para a nave dos homens e, vice-versa.

7. Num dado instante, em S_M, os relógios das mulheres estão sincronizados, mas isso não acontece com os homens. Os tempos de *todos* os homens passam uniformentente, parecendo dilatados para as mulheres, e a dessincronização dos relógios não varia. Assim, por exemplo, o relógio de Zé, em S_M, está *sempre* $4,5$s($\approx 10,6$s) adiantdo em relação ao de João, e esta diferença se mantém inalterada à medida que o tempo passa.

8. Um foguete que se afasta da Terra com velocidade v emite, ao atingir a distância L, no referencial da Terra, um sinal luminoso em direção a ela. Calcule os instantes e posições da emissão e da recepção do sinal no referencial da Terra e no referencial do foguete.

• respostas

2. $t_M = -L/v, \qquad t_J = -L/(\gamma\, v).$

3. As fotos de João seriam, a menos de distorções provocadas pela contração do espaço, iguais às tiradas por Maria. Esse resultado pode parecer estranho, mas é preciso lembrar que ambos fotografam os *mesmos* eventos, os encontros dos relógios, dois a dois. O fato de cada um estar em lados opostos de um dado par de relógios não faz a mínima diferença. Uma foto é um registro objetivo de um evento, um documento. Assim, um dia, João poderia descer do trem, encontrar Maria e comparar as duas fotos do mesmo evento. E elas teriam de mostrar a mesma coisa.

4. Neste problema, *não* existe uma simetria total entre João e Maria. É preciso notar que, em cada evento existe a comparação do *mesmo* relógio de João com um relógio *diferente* de Maria. Assim, o tempo do *relógio* de João é comparado com o tempo do *referencial* de Maria. Esse fato, sem importância no contexto da mecânica clássica, é responsável, na teoria da relatividade, por uma assimetria entre quem carrega o relógio e o outro referencial.

5. Um conjunto de eventos. Em particular, na solução apresentada no texto, os encontros Ana-João e Maria-Zé correspondem e são tratados como dois eventos distintos.

6. Observando as coordenadas espaço-temporais dos eventos notamos que, *no referencial dos homens*, os relógios de João e Zé estão sempre sincronizados, mas isso não acontece com os relógios das mulheres. O contrário acontece *no referencial das mulheres*: os relógios de Ana e Maria estão sincronizados, mas os dos homens, não. Essa situação decorre do fato de a simultaneidade entre eventos depender do referencial. Se uma série de relógios, distantes uns dos outros, ao longo da direção do movimento, estiverem sincronizados num dado referencial, eles certamente não o estarão num outro referencial, em movimento com relação ao primeiro.

7. Use os resultados do exercício anterior para explicar como é possível que os homens possam ver o tempo de Ana dilatado e, simetricamente, as mulheres possam ver o tempo de João dilatado.

8. Evento de referência: saída do foguete da Terra; evento a: emissão da luz; evento b: chegada da luz à Terra.

evento R $\quad S_T : [0, 0, 0; 0]$

$S_F : [0, 0, 0; 0]$

evento a $\quad S_T : \left[0,\ L,\ 0; \dfrac{L}{v}\right]$

$S_F : \left[0, 0, 0; \dfrac{\gamma L}{v}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\right]$

evento b $\quad S_T : \left[0, 0, 0; \dfrac{L}{v} + \dfrac{L}{c}\right]$

$S_F : \left[0, -\gamma L\left(1 + \dfrac{v}{c}\right), 0; \dfrac{\gamma L}{v}\left(1 + \dfrac{v}{c}\right)\right]$

Capítulo 22

transformações de Lorentz: mais exemplos

• exemplo 1: o problema dos dardos

João, viajando num trem de madeira, com velocidade $v = 3/5c$, passa por uma estação, onde se encontra Maria. Na plataforma ela colocou dois lançadores de dardos, separados pela distância $L_M = 10m$, e ligou cada um deles, por meio de fios de mesmo comprimento a um único interruptor, que permite lançar os dois dardos simultaneamente. No instante em que o trem passa pela estação, Maria aciona o disparador e os dardos cravam-se no trem, como mostra a figura 22.1.

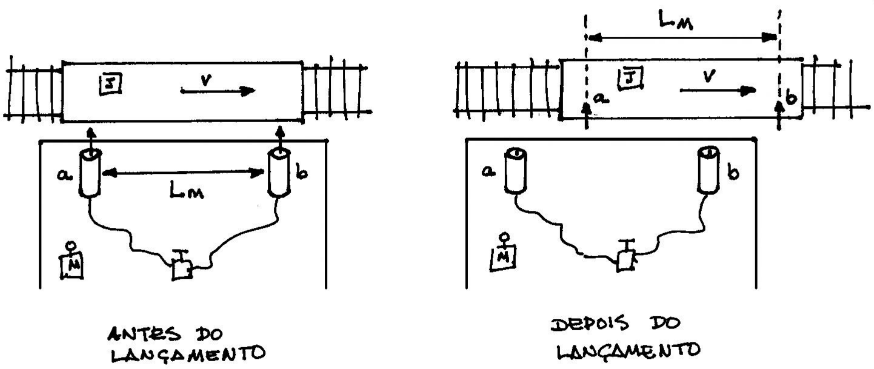

Figura 22.1: O problema, visto no referencial de Maria.

Posteriormente, o trem volta à estação e João desce dele. Na plataforma, João e Maria comparam a distância entre os dardos com aquela entre os disparadores. E constatam, objetivamente, que elas são diferentes, como indicado na figura 22.2. O propósito deste exemplo é obter a distância entre os dardos no referencial do trem e discutir as explicações dos acontecimentos nos dois referenciais.

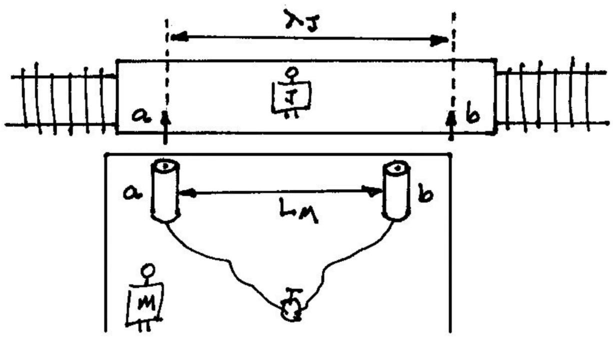

Figura 22.2: O trem está parado em relação à estação.

Neste problema ocorrem quatro eventos principais, as saídas dos dardos a e b da estação e as suas chegadas ao trem. Para simplificar um pouco as coisas, vamos supor que a distância entre os disparadores e o trem seja tão pequena, a ponto de podermos desprezar o intervalo de tempo entre a saída e a chegada de cada um dos dardos. Deste modo, precisamos considerar apenas dois eventos, os disparos dos dois dardos, e descrevê-los referenciais de S_J e S_M.

O evento a, o disparo do dardo a, é arbitrariamente escolhido como origem espaço-temporal dos dois referenciais. Além disso, no referencial S_M, os dois eventos ocorrem simultaneamente e a distância entre eles é conhecida. Temos, portanto

evento a, de referência - disparo do dardo a:

evento a $$S_M : (0, 0, 0; 0) \tag{22.1}$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \tag{22.2}$$

evento b - disparo do dardo b:

evento b $$S_M : (0, L, 0; 0) \tag{22.3}$$

$$S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \tag{22.4}$$

As coordenadas do evento b no referencial de João são obtidas por meio das transformações de Lorentz:

$$(x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) = (0, \gamma\, L, 0; -\gamma\, v\, L/c^2)\ . \tag{22.5}$$

A distância entre os dardos no trem corresponde a um comprimento próprio λ_J, dado por $\lambda_J = y_J^b - y_J^a = \gamma\, L_M$. Usando os dados do problema, obtemos $\lambda_J = 12,5$m.

O nosso cálculo mostra portanto que no trem, a distância entre os dardos é de 12,5m. Quando o trem passa pela estação, esses 12,5m aparecem contraídos, para 10m, quando observados por Maria. Quando o trem pára e volta à estação, a distância entre os dardos cravados no trem continua a ser 12,5m, como mostra a figura 22.7. O trem e os disparadores, colocados lado a lado, em repouso, constituem uma demonstração inequívoca da contração do espaço. Ela *não* é uma ilusão, ou uma falsa impressão de Maria. No contexto da Relatividade, Maria pode compreender a discrepância entre as distâncias entre os lançadores e os dardos cravados no trem recorrendo à noção de contração do espaço.

a explicação de João

Como João, no trem, explica a situação da figura 22.2? Parte da sua explicação é que, em S_J, os dois dardos não atingem o trem simultaneamente. No seu referencial, há um intervalo de tempo entre os eventos a e b, dado por

$$\Delta t_J = t_J^b - t_J^a = -\gamma\, v\, L/c^2\,, \tag{22.6}$$

sendo que o sinal negativo indica que o evento b é anterior ao evento a. É importante notar que um tempo negativo não tem nada demais, ele é apenas o produto da nossa escolha arbitrária da origem dos tempos. O que acontece depois dessa origem é positivo, o que acontece antes, é negativo. O sinal indica, portanto, somente uma ordem relativa dos eventos, nada mais. Se o ano atual fosse adotado como origem da contagem de tempo você, provavelmente, teria nascido por volta do ano -20: qual o problema?

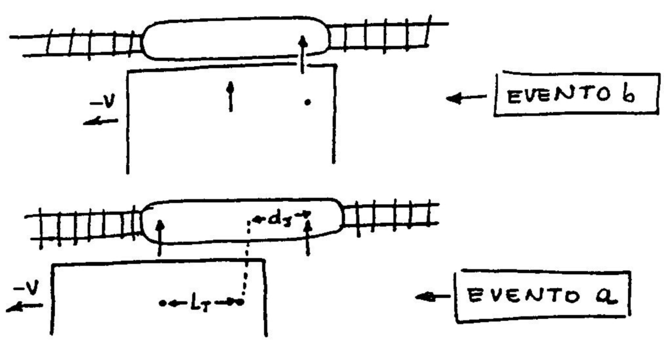

Figura 22.3: Os eventos no referencial de João, onde o trem não se move.

No referencial S_J, o dardo b é lançado, a estação se desloca para a esquerda uma distância $d_J = \gamma\; L_M\; v^2/c^2$ e, em seguida, o dardo a é lançado. Esta situação está representada na figura 22.3.

Sabemos que a distância entre os lançadores de dardos, na estação, é L_M. Quando vista do trem, entretanto, essa distância aparece contraída, pois a estação está em movimento, e ela vale L_M/γ.

Assim, João explica a distância entre os dardos no seu referencial através da soma

$$\lambda_J = \frac{L_M}{\gamma} + \gamma\; L_M\; \frac{v^2}{c^2} = \gamma L_M\;. \tag{22.7}$$

Ou seja, distância entre os dardos, no trem, é dada por λ_J, igual à distância entre os dois lançadores, vista do trem, somada à distância percorrida pela estação entre os dois eventos. Usando os dados do problema, a explicação de João para os seus 12,5 m contra os 10 m de Maria é a seguinte: para ele os 10m de Maria aparecem contraidos para 8 m. Além disso, os disparos dos dois dardos não são simultâneos, e a estação se move 4,5 m durante esse tempo. Logo, os seus 12,5 m são iguais a 8 m somados a 4,5 m.

Neste exemplo, podemos ver o primeiro princípio da relatividade em ação: os dois observadores, João e Maria, são indistinguíveis e qualquer um deles é capaz de explicar satisfatoriamente a relação entre dois eventos. Entretanto, cada observador produz uma explicação apropriada ao seu ponto de vista.

• exemplo 2: simultaneidade

São dados dois trens compridos, D e E, ao longo dos quais existem muitos relógios digitais, dispostos como na figura 22.4. Os relógios de *cada um* dos trens estão sincronizados *entre si*. Os trens D e E viajam, respectivamente, com velocidades $v\vec{j}$, para a direita, e $-v\vec{j}$, para a esquerda, por uma ferrovia retilínea, composta por dois pares de trilhos paralelos. Na região onde os trens se cruzam existe uma "ilha", entre os trilhos, sobre a qual estão dispostas quatro câmeras fotográficas, localizadas nos pontos A e B, representadas na figura 22.5. No referencial do solo, S_S, os dois pares de câmeras estão separados pela distância L e podem ser ser acionados simultaneamente, por meio de impulsos elétricos transmitidos por cabos de comprimentos iguais, ligados a um único interruptor I, equidistante deles.

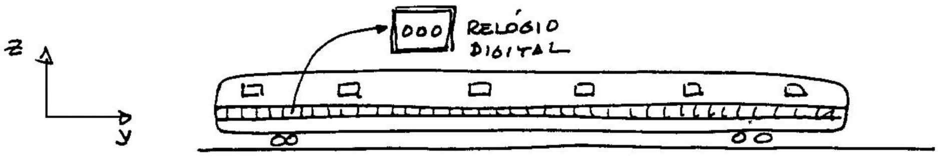

Figura 22.4: Relógios dispostos ao longo de um tremo.

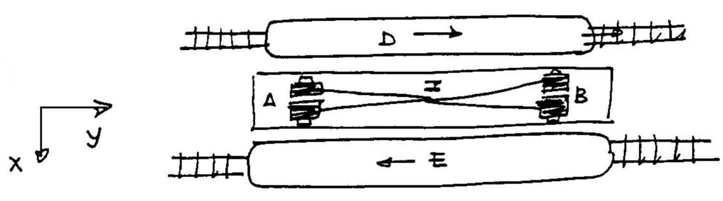

Figura 22.5: Fotos dos trens que se cruzam, no referencial do solo.

Num dado instante, as quatro câmeras são acionadas e cada uma delas fotografa o relógio do trem que está exatamente em frente a ela. No referencial do solo, estas quatro fotos são simultâneas, por cosntrução. O nosso problema consiste, agora, em determinar as marcações dos relógios dos dois trens. Para tanto, tomamos como evento de referência as duas fotos feitas no ponto A e, lembrando que estamos tratando com três referenciais, escrevemos

evento a, de referência - fotos das câmeras localizadas em A

evento a

$$S_s : (0, 0, 0; 0) \tag{22.8}$$

$$S_D : (0, 0, 0; 0) \tag{22.9}$$

$$S_E : (0, 0, 0; 0) \tag{22.10}$$

evento b - fotos das câmeras localizadas em B

evento b

$$S_s : (0, L, 0; 0) \tag{22.11}$$

$$S_D : (0, \gamma\, L, 0; -\gamma\, v\, L/c^2) \tag{22.12}$$

$$S_E : (0, \gamma\, L, 0, +\gamma\, v\, L/c^2) \tag{22.13}$$

sendo que as coordenadas do evento b, nos referenciais dos trens D e E, foram obtidas a partir das transformações de Lorentz das (22.12).

No referencial S_D, a foto em B é *anterior* à foto em A. Já no trem E, a foto em B é *posterior* à foto em A. Assim, os eventos simultâneos em S_s, deixam de sê-lo em outros referenciais, que se movem em relação ao solo. Estes resultados indicam, também, que a ordem dos eventos depende da velocidade relativa. Isso pode parecer espantoso, do ponto de vista da intuição clássica.

causalidade

Os resultados discutidos neste exemplo podem gerar uma dúvida perturbadora: se a ordem de dois eventos pode ser invertida somente pelo fato de invertermos o sentido do movimento de um observador, então será que a causa de um fenômeno físico pode virar efeito e esse efeito aparecer antes da causa? Será que, na relatividade, não vale mais o princípio da causalidade?

Isto não acontece e a relatividade mantém a noção de causalidade! Nesta teoria, causas e efeitos podem estar relacionados apenas por trocas de informações que se propaguem com velocidades iguais ou menores que a da luz. Em particular, eventos que ocorrem num mesmo ponto do espaço nunca podem ter a sua ordem temporal invertida. Mesmo na Relatividade, seu pai nunca poderia ter nascido antes de você.

No caso do presente exemplo, um raio de luz não viaja suficientemente rápido para que as fotos no ponto A possam influenciar as fotos no ponto B e, por isso, as fotos nos dois pontos não têm e nem podem ter correlação direta entre si. A simultaneidade entre elas no referencial da Terra pode ser considerada como uma espécie de coincidência e a ordem delas pode ser alterada por uma mudança de referencial.

• exemplo 3: sinais luminosos

Figura 22.6:

Desde o ano passado, Maria trabalha em um posto de gasolina, situado ao lado de uma estrada retilínea e muito longa. Ao longo da estrada, a uma distância L do posto, em S_M, existe uma casa de paredes brancas, como mostra a figura. Nas tediosas noites escuras, Maria passa o tempo mandando sinais luminosos com uma ponteira laser em direção à parede da casa e observando a volta deles. Numa dessas noites, o carro dirigido por seu amigo João passa pelo posto, com velocidade constante v e, imediatamente, Maria envia um sinal luminoso em direção à casa. Depois de ser refletido, o sinal é visto por João. Neste exemplo, tomando como origem das coordenadas e dos tempos a passagem de João por Maria, desejamos determinar, nos dois referenciais, as coordenadas espaço-temporais dos seguintes eventos:
- a, que corresponde à medida de posição da casa quando João passa por Maria;
- b, que corresponde à chegada da luz à casa;
- c, que corresponde à chegada do sinal refletido a João.

O evento R, de referência, que corresponde à passagem de João por Maria, é descrito por

evento R $$S_M : (0,0,0;0) \tag{22.14}$$

$$S_J : (0,0,0;0) \tag{22.15}$$

No referencial S_M, os eventos a e R são simultâneos e, portanto,

evento a $$S_M : (0,L,0;0) \tag{22.16}$$

$$S_J : (x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) \tag{22.17}$$

As coordenadas do evento a em S_J são obtidas por meio das TL e valem

$$(x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) = (0,\, \gamma\, L, 0, -\gamma\, v\, L/c^2)\,. \tag{22.18}$$

No referencial S_M, o tempo que a luz emitida a partir do ponto leva para chegar à casa é $t^b_M = L/c$. Assim, para o evento b, escrevemos:

evento b $$S_M : \left(0, L, 0, \frac{L}{c}\right) \tag{22.19}$$

$$S_J : \left(0, \gamma L\left[1 - \frac{v}{c}\right], 0, \frac{\gamma L}{c}\left[1 - \frac{v}{c}\right]\right) , \tag{22.20}$$

sendo que as coordenadas em S_J foram obtidas por meio das TL.

O evento c ocorre, em S_M, no instante t^c_M, que é determinado pela condição

$$v\, t^c_M = L - c\,(t^c_M - t^b_M) \tag{22.21}$$

onde vt^c_M corresponde à distância percorrida pelo cano e $L - c(t^c_M - t^b_M)$, à coordenada da luz no seu trajeto de volta. Essa condição fornece $t^c_M = 2L/(c + v)$ e, portanto,

evento c $$S_M : \left(0, \frac{2v\,L}{c+v}, 0; \frac{2L}{c+v}\right) \tag{22.22}$$

$$S_J : \left(0, 0, 0; \frac{2\,\gamma\,L}{c}\left[1 - \frac{v}{c}\right]\right) \tag{22.23}$$

onde, novamente, as coordenadas em S_J foram obtidas usando as TL.

Neste exercício, o enunciado enfatiza apenas o ponto de vistade Maria acerca dos acontecimentos. Por isso, é interessante pensarmos um pouco na perspectiva que João tem do problema. No referencial S_J, João está imóvel, fixo na origem do sistema. É por isso, por exemplo, que as coordenadas espaciais do evento c são todas nulas, já que ele ocorre no ponto onde João se encontra.

Em S_J, João está no assento do seu carro e, à medida que o tempo passa, a casa se aproxima dele. A velocidade da casa pode ser calculada a partir das coordenadas do evento a, dadas pelas eq. (22.16), usando

$$v_{casa} = \frac{y^a_J}{t^a_J} = -v \ , \tag{22.24}$$

segundo o eixo y. Este é um resultado esperado, pois a casa está fixa em S_M e este referencial se move com velocidade $\vec{v} = -v\vec{j}$ em relação a S_J.

No referencial S_J, entre os eventos b e c, a luz se move de encontro a João. A velocidade desse movimento pode ser determinada por meio da razão entre os intervalos

$$\Delta y = y^c_J - y^b_J = -\gamma\, L\left[1 - \frac{v}{c}\right] \tag{22.25}$$

e

$$\Delta t = t^c_J - t^b_J = \frac{2\gamma L}{c}\left[1 - \frac{v}{c}\right] - \frac{\gamma L}{c}\left[1 - \frac{v}{c}\right] = \frac{\gamma L}{c}\left[1 - \frac{v}{c}\right], \tag{22.26}$$

que fornece

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -c\,. \tag{22.27}$$

Este resultado é, evidentemente, o que se espera do segundo princípio da relatividade.

• exemplo 4: o paradoxo dos gêmeos

Nesta seção, apresentamos o famoso paradoxo dos gêmeos que, de fato, não é um paradoxo de verdade. Ele é apenas aparente. Existem inúmeras formulações possíveis para ele e nós colocamos o problema do seguinte modo:
"Duas irmãs gêmeas, Ana e Bia, moram na cidade de SP, que supomos fixa em um referencial inercial. Um dia, elas vão à estação de trem e Bia faz uma viagem de ida e volta a uma outra cidade, chamada de R, enquanto que Ana a espera em SP. Após o retorno de Bia, elas notam que Ana havia envelhecido mais do que Maria, devido ao efeito de dilatação do tempo".

O que é aparentemente paradoxal neste caso, é que Bia parece ter-se movido *relativamente* a Ana, do mesmo modo que Ana moveu-se *relativamente* a Bia. Ao pensarmos assim, parece haver uma simetria no problema, que não permite entender porque uma das irmãs acaba sendo mais velha do que a outra. A solução dessa aparente contradição passa por perceber que as situações das duas irmãs não são totalmente simétricas, já que Ana permanece sempre num único referencial, enquanto que, em seu percurso Bia precisa passar por três referenciais: SP, trem de ida, trem de volta, SP. Com Ana, isso não acontece.

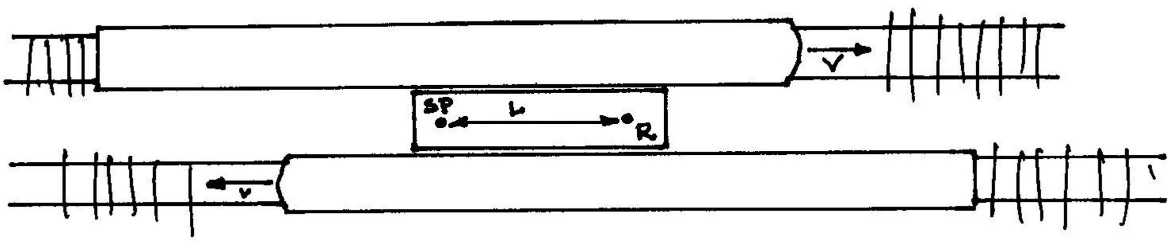

Figura 22.7: Vista dos dois trens, no referencial da Terra.

Para discutir este problema, supomos que as viagens de ida e volta sejam efetuadas em dois trens muito longos. O trem D se move para a direita, no sentido SP $\rightarrow$ R (sistema S_D) enquanto que o trem E se move para a esquerda, no sentido R $\rightarrow$ SP (sistema S_E). Os módulos das velocidades dos dois trens relativamente à Terra são iguais a v, como mostra a figura 22.7, que representa a visão de alguém no referencial S_T, da Terra, suposto inercial.

Por convenção, tomamos as origens espaço-temporais nos três referenciais como sendo coincidentes, determinadas pelo instante em que Bia pula da estação em SP para o trem que está indo para R. Assim:

evento a, de referência - Maria pula para o trem D

$$\textbf{evento a} \qquad S_T : (0,0,0;0) \tag{22.28}$$

$$S_D : (0,0,0;0) \tag{22.29}$$

$$S_E : (0,0,0,;0)\,. \tag{22.30}$$

O segundo evento importante é a chegada de Bia a R, onde ela pula diretamente para o trem de volta, sem parar na estação. As coordenadas deste evento podem ser facilmente determinadas no referencial da Terra e escrevemos

evento b - Maria chega a R e entra no trem E

$$\textbf{evento b} \qquad S_T : \left(0, L, 0; \frac{L}{v}\right) \tag{22.31}$$

$$S_D : \left(0, 0, 0; \frac{L}{\gamma v}\right) \tag{22.32}$$

$$S_E\left(0, 2\gamma L, 0; \frac{\gamma L}{v}\left[1 + \frac{v^2}{c^2}\right]\right) \tag{22.33}$$

sendo que as coordenadas em S_D e S_E foram obtidas por meio das TL. O resultado para as coordenadas espaciais em S_D não é surpresa, já que Bia, uma vez no trem D, sempre esteve parada na origem desse sistema de referência.

O terceiro e último evento importante é a chegada de Bia a SP, cujas coordenadas, no referencial da Terra, são obtidas notando que o tempo que o trem leva para vir de R a SP é o mesmo que o outro levou para ir de SP a R. Assim, escrevemos

evento c - Bia chega a SP

$$\textbf{evento c} \qquad S_T : (0, 0, 0; 2L/v) \tag{22.34}$$

$$S_D : \left(0, -2\gamma L, 0; \frac{2\gamma L}{v}\right)\,, \tag{22.35}$$

$$S_E : \left(0, 2\gamma\ L, 0; \frac{2\gamma L}{v}\right). \tag{22.36}$$

sendo os valores, para S_D e S_E determinados pelas TL. Esses resultados permitem-nos calcular o tempo total decorrido para Bia durante a sua viagem de ida e volta. Durante a ida, ela estava no refrencial S_D e o tempo de viagem, observado tanto no relógio do trem D quanto no seu próprio, é dado por

$$\Delta t_{Bia}^{ida} = t_D^b - t_D^a = \frac{L}{\gamma v}\ . \tag{22.37}$$

A duração da viagem de volta, também determinada tanto pelo relógio do trem E quanto pelo de Bia, é

$$\Delta t_{Bia}^{volta} = t_D^c - t_E^b = 2\gamma \frac{L}{v} - \frac{\gamma L(1 + v^2/c^2)}{v} = \frac{L}{\gamma v}\ . \tag{22.38}$$

É interessante notar que, como esperado, $\Delta t_{Bia}^{ida} = \Delta t_{Bia}^{volta}$. Assim, o tempo total para a viagem de Bia, tal como indicado no seu relógio, é dado por

$$\tau_{Bia} = \Delta_{Bia}^{ida} + \Delta_{Bia}^{volta} = \frac{2L}{\gamma v} \,. \tag{22.39}$$

Por outro lado, o tempo próprio decorrido para Ana, que ficou em SP esperando a irmã, foi

$$\tau_{Ana} = \frac{2L}{v} \,, \tag{22.40}$$

maior do que τ_{Bia}. A diferença de idade entre Ana e Bia é

$$\Delta\tau = \tau_{Ana} - \tau_{Bia} = \frac{2L}{v}\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right]. \tag{22.41}$$

Como o tempo de vida de uma pessoa é determinado pelo relógio que ela carrega, Ana ficou, de fato, mais velha do que Bia. Existe, portanto, uma assimetria, real e concreta, entre os tempos decorridos nas vidas de Ana e Bia, que se deve ao fato de esta última ter mudado de referencial para poder sair e voltar a SP. Elas viveram felizes para sempre, mesmo tendo de comemorar seus aniversários em datas diferentes.

outras formulações

A apresentação que fizemos do problema conhecido como *o paradoxo dos gêmeos* é apenas uma, dentre muitas outras possíveis, que podem ser achadas em outros textos. Nós, aqui, limitamo-nos a mencionar algumas outras possibilidades, relativamente exóticas, de formas de reencontro entre Ana e Bia e as suas consequências.

• Bia vai de SP até R, onde desce do trem com velocidade v e fica parada na plataforma. Em seguida Ana, que havia ficado em SP, toma um outro trem, com velocidade v', em direção a R. Ao descer dele, em R, as duas irmãs se encontram. Se $v = v'$ Bia e Ana terão a mesma idade, se $v > v'$, Bia é mais nova do que Ana, se $v < v'$, Bia é mais velha do que Ana.

• Bia vai até R, onde desce do trem e telefona para Ana, que ficou em SP, combinando um reencontro no meio do caminho. Cada uma delas toma uma bicicleta, cuja velocidade é v' e parte em direção ao ponto de encontro. Quando este ocorre, a diferença de idade entre as duas irmãs é de

$$\Delta\tau = \frac{L}{v}\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right]. \tag{22.42}$$

• Bia vai até R, desce do trem e volta de bicicleta a SP. Quando ela reencontra Ana, a diferença de idade entre elas é $\Delta\tau$, que está no intervalo

$$\frac{L}{v} = \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right] < \Delta\tau < \frac{2L}{v}\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right]. \tag{22.43}$$

uma confirmação experimental

No universo em que vivemos, não é possível fazer uma viagem que se inicie e termine no mesmo ponto do espaço, sem algum tipo de aceleração. Em 1971, relógios atômicos de césio foram colocdos em aviões, que circunavegaram a Terra nos sentidos horário e anti-horário. Suas marcações foram comparadas com as de relógios estacionários na Terra e as diferenças observadas eram compatíveis com as previsões da teoria da relatividade[1].

• referência

[1] J.C. Hafele e R.E. Keating, Science, vol. 177, págs. 166 e 168 (1972).

• exercícios

1. Numa estação de trem, existem duas catapultas, separadas por uma distância L, cada uma delas contendo um relógio, sincronizado com o da outra. As catapultas são acionadas simultaneamente, por meio de dispositivos elétricos, de modo que os dois relógios são lançados no interior de um trem que passa em frente à estação, com velocidade v. No interior do trem, os dois relógios são apanhados por dois passageiros que, em seguida, caminham com velocidades iguais e muito baixas, um em direção ao outro, até se encontrarem. Determine a diferença entre os tempos marcados pelos dois relógios, supondo que eles permaneçam funcionando normalmente quando são atirados no trem.

2. Na discussão do paradoxo dos gêmeos, vimos que $\tau_{Ana} > \tau_{Bia}$. Um certo dia, depois da viagem, as duas irmãs passam a discutir. Bia diz que, como ambas nasceram juntas e, naquele dia ela (Bia) tem menos idade que Ana, então ela (Bia) *viveu tanto quanto* a irmã, só que precisou de menos tempo para fazer isso. Ana retruca, dizendo que isso é bobagem, já que Bia é efetivamente mais nova e, por isso mesmo, *viveu menos* que ela (Ana). Quem está com a razão?

3. No caso do paradoxo dos gêmeos:
a) Quais deveriam ser os valores de L e v para que a diferença de idade entre as duas irmãs pudesse ser de um dia?
b) Haveria alguma diferença de idade entre elas se Bia tivesse descido do trem em R e voltado a pé para SP?
c) Imagine uma outra situação. Bia chega ao Rio, mas não sai do trem de ida, referencial S_D. Nesse instante, Ana pula para dentro deste trem, e caminha, pelo seu interior, até encontrar Bia. Existe diferença de idade entre as duas irmãs quando elas se encontram?

4. No problema do paradoxo dos gêmeos, adote $v = 3/5c$, $L = 400.000$km, e preencha a tabela abaixo:

referencial		S_T	S_D	S_E
evento a	y			
	t			
evento b	y			
	t			
evento c	y			
	t			

Faça um desenho, para cada um dos referenciais, indicando os instantes e posições onde ocorreram os vários eventos. Interprete, se possível, os vários resultados em termos de contrações do espaço e dilatações do tempo.

• respostas

1. o módulo da diferença é

$$|\Delta t| = \frac{\gamma\, v\, L}{c^2}$$

3. a) Um dia tem $8,64 \times 10^4$ segundos. Existem muitos conjuntos de valores que, substituídos na eq. (22.36), reproduzem este valor. Adotando $c = 3 \times 10^8$m/s, um deles pode ser $v = 1,8 \times 10^8$m/s e $L = 3,888 \times 10^{13}$m.

b) sim, Bia continua mais nova.

c) sim, Ana é um pouco mais nova.

Capítulo 23

adição de velocidades

Na relatividade, os comportamentos dos intervalos de espaço e de tempo por mudanças de referencial são bastante diferentes dos da mecânica clássica. Nesta aula, mostramos que o mesmo acontece com a chamada *adição de velocidades*, que relaciona as velocidades de um mesmo móvel em referenciais diferentes. Na mecânica clássica, se um trem se move em relação ao solo com velocidade $\vec{v}$ e um corpo se desloca com velocidade $\vec{u}_T$ em relação ao trem, então a velocidade deste corpo em relação ao solo é $\vec{u}_S = \vec{u}_T + \vec{v}$. Na relatividade, entretanto, esta relação precisa ser modificada. Para nos convencer disto tomemos, por exemplo, $\vec{u}_T = \vec{v}$, com $|\vec{v}| = 0,8\,c$, e o resultado clássico corresponde a $|\vec{u}_S| = 1,6\,c$, em contradição com a noção relativística de que a velocidade da luz no vácuo não pode ser superada.

• a adicão de velocidades na relatividade

Na relatividade, as descrições do movimento de *um mesmo corpo*[1], em vários referenciais diferentes, são relacionadas pelas transformações de Lorentz. Tanto na mecânica clássica como na relatividade, a velocidade de um corpo é dada pelo quociente da distância percorrida, pelo tempo necessário para percorrê-la. Na relatividade, entretanto, tanto os intervalos espaciais como os temporais dependem do referencial e, por isso, num referencial S_q, qualquer, a velocidade instantânea de um corpo é dada por

$$\vec{v}_q = \frac{d\vec{r}_q}{dt_q} \,, \tag{23.1}$$

onde dt_q é o tempo gasto no percurso do intervalo $d\vec{r}_q$, naquele referencial.

O problema da adição de velocidades pode ser colocado da seguinte forma: se Maria observa um corpo movendo-se com velocidade $\vec{u}_M$ no referencial S_M, como João, que se move com velocidade $\vec{v}$ relativamente a ela, descreve o movimento deste mesmo corpo no

[1]Nós, aqui, discutimos apenas situações nas quais as dimensões dos corpos são irrelevantes e eles podem ser considerados como pontos materiais.

referencial S_J? Em outras palavras, se representarmos por $\vec{u}_J$ a velocidade do corpo em relação S_J, qual é a relação entre $\vec{u}_J$ e $\vec{u}_M$?

Para obter esta relação, inicialmente expressamos as velocidades *do mesmo corpo* nos referenciais S_M e S_J, em termos das suas componentes cartesianas:

$$\vec{u}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt_M} = \frac{dx_M}{dt_M}\vec{i} + \frac{dy_M}{dt_M}\vec{j} + \frac{dz_M}{dt_M}\vec{k}\ , \tag{23.2}$$

$$\vec{u}_J = \frac{d\vec{r}_J}{dt_J} = \frac{dx_J}{dt_J}\vec{i} + \frac{dy_J}{dt_J}\vec{j} + \frac{dz_J}{dt_J}\vec{k}\ . \tag{23.3}$$

Em seguida, diferenciamos as expressões das transformações de Lorentz, dadas pelas eqs.(20.58-20.61), e obtemos

$$dx_J = dx_M = u_M^x\ dt_M\ , \tag{23.4}$$

$$dy_J = \gamma\,(dy_M - v\ dt_M) = \gamma\,(u_M^y - v)\ dt_M\ , \tag{23.5}$$

$$dz_J = dz_M = u_M^z\ dt_M \tag{23.6}$$

$$dt_J = \gamma\left(dt_M - \frac{v}{c^2}\ dy_M\right) = \gamma\left(1 - \frac{v\ u_M^y}{c^2}\right)\ dt_M\ . \tag{23.7}$$

Dividindo as eqs.(23.4-23.6) pela eq.(23.7), obtemos a relação desejada entre $\vec{u}_J$ e $\vec{u}_M$ que, em componentes, tem a forma

$$u_J^x = \frac{u_M^x}{\gamma\,(1 - v\ u_M^y/c^2)}\ , \tag{23.8}$$

$$u_J^y = \frac{u_M^y - v}{1 - v\ u_M^y/c^2}\ , \tag{23.9}$$

$$u_J^z = \frac{u_M^z}{\gamma\,(1 - v\ u_M^y/c^2)}\ . \tag{23.10}$$

Estes resultados permitem conhecer $\vec{u}_J$, a partir de $\vec{u}_M$ e $\vec{v}$. Como no caso das tranformações de Lorentz, discutidas na aula 21, a solução para a operação inversa pode ser obtida trocando os índices J e M e o sinal de v: $J \leftrightarrow M$, $v \rightarrow -v$. Assim,

$$u_M^x = \frac{u_J^x}{\gamma\,(1 + v\ u_J^y/c^2)}\ , \tag{23.11}$$

$$u_M^y = \frac{u_J^y + v}{1 + v\ u_J^y/c^2}\ , \tag{23.12}$$

$$u_M^z = \frac{u_J^z}{\gamma\,(1 + v\ u_J^y/c^2)}\ . \tag{23.13}$$

Note que, nos dois conjuntos de relações, as expressões para as duas componentes da velocidade perpendiculares a $\vec{v}$ são semelhantes entre si, mas diferentes da componente paralela a $\vec{v}$.

Os resultados (23.8-23.10) e (23.11-23.13) representam as regras relativísticas para a adição de velocidades. Para tornar mais claro os seus significados apresentamos, a seguir, algumas aplicações.

• exemplo 1.

Maria, no referencial S_M, observa João passando para a direita, com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$. Pedro também passa por Maria, com velocidade $\vec{u}_M = u\vec{j}$, como mostra a figura 23.1. Qual a velocidade $\vec{u}_J$, de Pedro relativamente a João?

Figura 23.1: Os movimentos de João e Pedro, observados por Maria.

Segundo a mecânica clássica, tal velocidade seria

$$\vec{u}_J^{cl} = \vec{u}_M - \vec{v} = (0, u - v, 0) \tag{23.14}$$

No caso da relatividade, entretanto, usamos as eqs.(23.8-23.10) e obtemos

$$u_J^x = 0\,, \tag{23.15}$$

$$u_J^y = \frac{u - v}{1 - v\,u/c^2}\,, \tag{23.16}$$

$$u_J^z = 0\,. \tag{23.17}$$

Esses resultados podem ser agrupados na expressão vetorial,

$$\vec{u}_J = \left(0, \frac{u - v}{1 - v\,u/c^2}, 0\right)\,. \tag{23.18}$$

A comparação com a eq.(23.14) indica que ela é diferente da clássica. Para explorar este resultado, consideramos uma situação particular, em que João move-se para a direita em relação a Maria, com velocidade $\vec{v} = 3c/5\,\vec{j}$ e Pedro move-se para a esquerda em relação a Maria, com velocidade $\vec{u}_M = -4c/5\,\vec{j}$. Num caso como este, a *previsão clássica* para a velocidade de Pedro relativamente a João seria $\vec{u}_J^{cl} = (0, -7c/5, 0)$, que corresponde a uma velocidade para a esquerda, com módulo maior do que c. Já a *previsão relativística* é $\vec{u}_J = (0, -35c/37, 0)$, cujo módulo é menor do que c. Deste modo, a regra relativística de adição de velocidades produz um resultado coerente com o fato de c ser a velocidade limite.

• exemplo 2.

João está numa plataforma, que se move paralelamente ao eixo y, com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, em relação a S_M, onde está Maria. Sobre esta plataforma, existe um corpo que se move segundo o eixo x, com velocidade $\vec{u}_J = u\,\vec{i}$, em relação à origem de S_J, como indica a figura 23.2. Quais são as previsões clássica e relativística para a velocidade do corpo, relativamente a Maria?

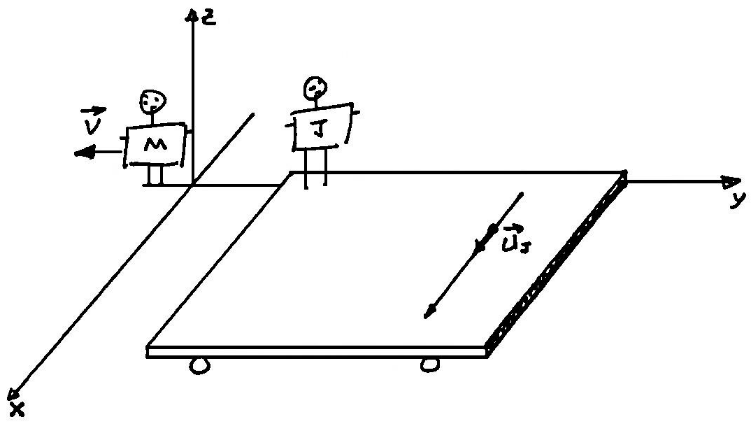

Figura 23.2: Os movimentos do corpo, e de Maria, observados por João.

A prescrição clássica fornece

$$\vec{u}_M^{cl} = (u, v, 0) \;, \tag{23.19}$$

enquanto que, na relatividade, de acordo com as eqs.(23.11)-(23.13), temos

$$\vec{u}_M = \left(\frac{u}{\gamma}, v, 0\right) . \tag{23.20}$$

Se, por exemplo, adotarmos, $v = 3c/5$ e $u = 4c/5$, temos $\vec{u}_M^{cl} = (4c/5, 3c/5, 0)$ e $\vec{u}_M = (16c/25, 3c/5, 0)$, cujos, módulos são, respectivamente, $|\vec{u}_M^{cl}| = c$ e $|\vec{u}_M| = \sqrt{481}\; c/\sqrt{625}$. Assim, novamente, notamos que o cálculo relativístico é consistente com o fato de que o módulo da velocidade de um corpo tem de ser sempre *menor* do que c.

• o limite de baixas velocidades

Quando dois observadores se movem relativamente, com velocidade v, sendo $v << c$, podemos desprezar o quociente v/c nas eqs.(23.8)-(23.10) e escrever a relacão vetorial aproximada $\vec{u}_J \cong \vec{u}_M - \vec{v}$. Este resultado é formalmente parecido com as transformações de Galileu, utilizadas na mecânica clássica. Entretanto, isso não significa que esta mecânica newtoniana seja um caso limite da relatividade, já que as duas teorias correspondem a visões do mundo muito diferentes.

• exemplo 3. a velocidade da luz

No interior de um trem existe uma fonte de laser, que emite um feixe horizontal, formando um ângulo α_T com o eixo do trem, como mostra a figura 22.3. Quando o trem se move ao longo do eixo y, com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, qual é a velocidade da luz em relação ao solo?

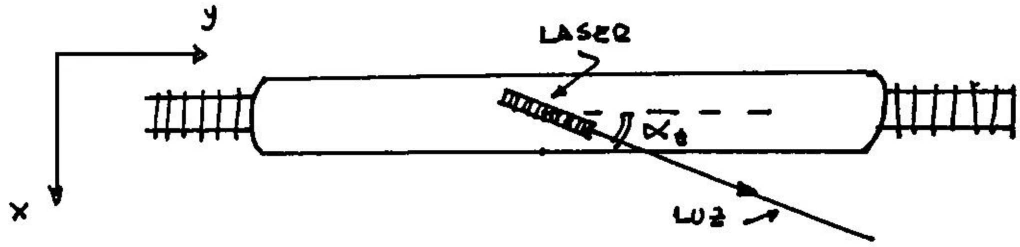

Figura 23.3: O laser e o seu feixe, vistos do referencial do trem.

Neste tipo de questão, é conveniente pensarmos no feixe de laser como sendo composto por muitos fótons, cada um deles com velocidade

$$\vec{c}_T = (c \operatorname{sen} \alpha_T, c \cos \alpha_T, 0) \ , \tag{23.21}$$

no referencial do trem. A velocidade de cada fóton em relação ao solo pode ser obtida por meio das eqs.(23.8)-(23.10) e suas componentes são

$$c_S^x = \frac{c \operatorname{sen} \ \alpha_T}{\gamma(1 - v \cos \alpha_T/c)} \ , \tag{23.22}$$

$$c_S^y = \frac{c \cos \alpha_T - v}{1 - v \cos \alpha_T/c} \ , \tag{23.23}$$

$$c_S^z = 0 \ . \tag{23.24}$$

Para interpretar este resultado calculamos, inicialmente, o módulo do vetor $\vec{c}_S$, dado por

$$|\vec{c}_S|^2 = \frac{(1 - v^2/c^2) \, c^2 \operatorname{sen}^2\alpha_T + (c \cos \alpha_T - v)^2}{(1 - v \cos \alpha_T/c)^2} = c^2 \ . \tag{23.25}$$

Assim, o módulo da velocidade da luz em relação ao solo é também igual a c, independentemente dos valores adotados para v e α_T. Este resultado indica que as regras de adição de velocidades, obtidas nesta aula, são compatíveis com o segundo princípio da relatividade, segundo o qual o *módulo* da velocidade da luz no vácuo é sempre o mesmo em qualquer referencial inercial.

É interessante notar que, neste problema, a direção da velocidade da luz depende do referencial. Para determinar o ângulo α_S, entre o feixe de laser e o eixo y, no referencial do solo, escrevemos $\vec{c}_S = (c \,\text{sen}\, \alpha_S, c \cos \alpha_S, 0)$ e comparamos com as eqs.(23.22)-(23.24), obtendo

$$\text{sen}\ \alpha_S = \frac{\text{sen}\ \alpha_T}{\gamma(1 - v \cos \alpha_T / c)} , \tag{23.26}$$

$$\cos \alpha_S = \frac{\cos \alpha_T - v/c}{1 - v \cos \alpha_T / c} . \tag{23.27}$$

Deste modo,

$$\alpha_S = \arctan \left[\frac{\text{sen}\ \alpha_t}{\gamma} \Big(\cos \alpha_T - \frac{v}{c} \Big) \right] . \tag{23.28}$$

Nos casos particulares em que o feixe de luz é paralelo ou antiparalelo à velocidade do trem, temos $\alpha_T = 0$ e $\alpha_T = \pi$ e os vetores velocidade da luz são dados, respectivamente, por $\vec{c}_T = \vec{c}_S = (0, c, 0)$ e $\vec{c}_T = \vec{c}_S = (0, -c, 0)$, respectivamente. Por outro lado, quando o laser é orientado perpendicularmente ao trem, temos $\alpha_T = \pi/2$ e, portanto, os dois vetores são diferentes, apesar de terem os módulos iguais: $\vec{c}_T = (c, 0, 0)$ e $\vec{c}_S = (c/\gamma, -v, 0)$.

• exemplo 4: o decaimento do π^0

Na física das partículas elementares, são comuns os processos em que uma partícula pode decair em outras duas. Por exemplo, um méson π, neutro, representado por π^0, pode decair em dois fótons, num processo representado por $\pi^0 \to \gamma\gamma$. Nosso interesse, neste problema, é determinar o ângulo entre os dois fótons provenientes do decaimento, porque esse ângulo pode ser medido em experimentos. Em geral, nesses experimentos, o π^0 que decai está em movimento. Por isso, neste exemplo, supomos que a velocidade do π^0, antes do decaimento, seja $\vec{v} = \vec{j}$, no sistema S_L do laboratório.

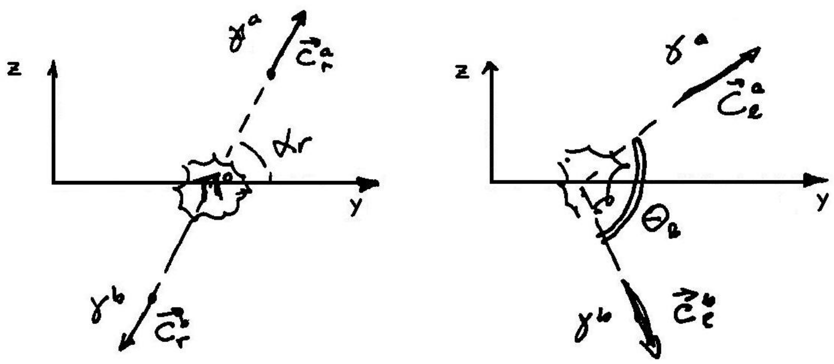

Figura 23.4: O decaimento do π^0, nos referenciais S_R e S_L.

Para resolver este problema, é conveniente raciocinar, inicialmente, no referencial S_R, onde o π^0 está em repouso. Neste referencial, a descrição do problema é mais simples, pois a quantidade de movimento do píon é nula e os fótons têm velocidades opostas, como mostra a figura 23.4a. Sem perda de generalidade vamos supor que as velocidades dos dois fótons, designados por a e b, estejam contidas no plano yz, e escrevemos

$$\vec{c}_{Ra} = (0, c\cos\alpha_R, c\,\mathrm{sen}\;\alpha_R)\;, \tag{23.29}$$

$$\vec{c}_{Rb} = (0, -c\cos\alpha_R, -c\,\mathrm{sen}\;\alpha_R)\;. \tag{23.30}$$

Usando as eqs.(23.11)-(23.13), podemos escrever os vetores velocidades dos fótons no referencial do laboratório como

$$\vec{c}_{La} = \left(0, \frac{c\cos\alpha_R + v}{1 + v\cos\alpha_R/c}, \frac{c\,\mathrm{sen}\;\alpha_R}{\gamma(1 + v\cos\alpha_R/c)}\right)\;, \tag{23.31}$$

$$\vec{c}_{Lb} = \left(0, \frac{-c\cos\alpha_R + v}{1 - v\cos\alpha_R/c}, \frac{-c\,\mathrm{sen}\;\alpha_R}{\gamma(1 - v\cos\alpha_R/c)}\right)\;. \tag{23.32}$$

Para determinar o ângulo entre $\vec{c}_{La}$ e $\vec{c}_{Lb}$, usamos o fato de que o produto escalar de dois vetores quaisquer $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sempre pode ser escrito como $\vec{A}\cdot\vec{B} = \mid\vec{A}\mid\mid\vec{B}\mid\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Como no exemplo 3, eq. (23.25), podemos mostrar que $\mid c_{La}\mid = \mid c_{Lb}\mid = c$. Por isso, para o ângulo entre as velocidades dos dois fótons provenientes do π^0, podemos escrever

$$\cos\theta_L = \frac{\vec{c}_{La}\cdot\vec{c}_{Lb}}{c^2} = \frac{-1 + v^2(1 + \mathrm{sen}^2\,\alpha_R)/c^2}{1 - v^2\cos^2\alpha_R/c^2}\;. \tag{23.33}$$

É interessante comparar este resultado com o correspondente produzido pela mecânica clássica. Usando a regra neutoniana para a adição de velocidades, as velocidades dos fótons no referencial S_L seriam

$$\vec{c}^{\,cl}_{La} = (0, c\cos\alpha_R + v,\; c\,\mathrm{sen}\;\alpha_R) \tag{23.34}$$

$$\vec{c}^{\,cl}_{Lb} = (0, -c\cos\alpha_R + v,\; -c\,\mathrm{sen}\;\alpha_R) \tag{23.35}$$

e, portanto,

$$\cos\theta^{cl}_L = \frac{\vec{c}_{La}\cdot\vec{c}_{Lb}}{|\vec{c}_{La}|\,|\vec{c}_{Lb}|} = \frac{-1 + v^2/c^2}{\sqrt{(1 + v^2/c^2)^2 - 4v^2\cos^2\alpha_R/c^2}}\;. \tag{23.36}$$

Este resultado clássico é bastante diferente do relativístico, dado em (23.33). A importância desse fato é que, em princípio, o ângulo θ_L pode ser observado por meio de experimentos e, portanto, através de medidas, podemos determinar qual das duas teorias descreve melhor a natureza.

• exemplo 5: o decaimento do K^0

Um outro decaimento envolve o méson K^0, sem carga elétrica, que pode se transformar em dois mésons π, com massas iguais e cargas elétricas positiva e negativa, denotados por π^+ e π^-, respectivamente. Estes mésons são chamados de kaons e píons, por simplicidade, e o decaimento é representado simbolicamente por $K^0 \to \pi^+\pi^-$.

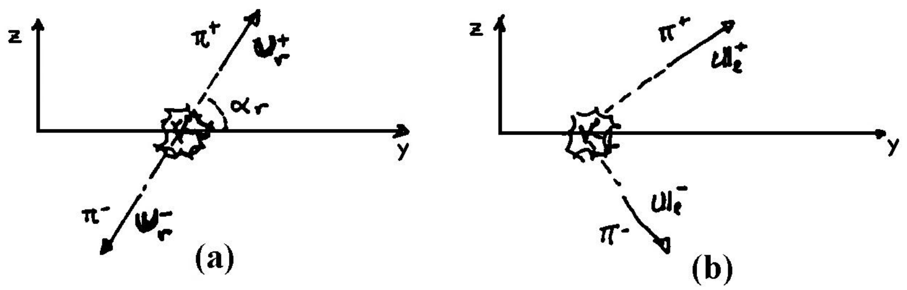

Figura 23.5: O decaimento do K^0, nos referenciais S_R e S_L.

No sistema de referência S_R, em que o kaon está em repouso, a conservação de momento obriga que as velocidades dos dois píons tenham módulos e direções iguais e sentidos opostos. Em S_R, o módulo das velocidades pode ser determinado a partir dos dados experimentais como sendo $u_R = 0,83\,c$. Supondo que, neste sistema, as trajetórias dos dois píons estejam contidas no plano yz e que o ângulo entre a velocidade do π^+ e o eixo y seja α_R, como mostra a figura 23.4, podemos escrever

$$\vec{u}_{R+} = (0, u_R \cos\alpha_R, u_R \operatorname{sen}\alpha_R) \,, \tag{23.37}$$

$$\vec{u}_{R-} = (0, -u_R \cos\alpha_R, -u_R \operatorname{sen}\alpha_R) \,. \tag{23.38}$$

Nos experimentos realizados no sistema S_L, do laboratório, os káons que decaem não estão, em geral, em repouso. Por isso, neste exemplo, estamos interessados em determinar as velocidades dos píons resultantes do decaimento em S_L onde o kaon se move com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$. Como o kaon está em repouso no sistema S_R, $\vec{v}$ é também a velocidade relativa entre os referenciais S_L e S_R. Usando as eqs.(23.11-23.13), podemos escrever, em componentes, as velocidades dos dois píons como

$$u^x_{L+} = 0 \,, \tag{23.39}$$

$$u^y_{L+} = \frac{u_R \cos\alpha_R + v}{1 + v u_R \cos\alpha_R / c^2} \,, \tag{23.40}$$

$$u^z_{L+} = \frac{u_R \operatorname{sen}\alpha_R}{\gamma(1 + v u_R \cos\alpha_R / c^2)} \,, \tag{23.41}$$

$$u^x_{L-} = 0 \,, \tag{23.42}$$

$$u^y_{L-} = \frac{-u_R \cos\alpha_R + v}{1 - v u_R \cos\alpha_R / c^2} \,, \tag{23.43}$$

$$u^z_{L-} = \frac{-u_R \operatorname{sen}\alpha_R}{\gamma(1 - v u_R z, \cos\alpha_R / c^2)} \,. \tag{23.44}$$

Estes resultados determinam $\vec{u}_{L+}$ e $\vec{u}_{L-}$ em função dos dados u_R e α_R e indicam que, em geral, os dois píons terão velocidades diferentes, em módulo e orientação, no referencial do laboratório, como indica a figura 23.4b.

Na física das partículas elementares, as velocidades envolvidas são, em geral, comparáveis à da luz. Mesmo em um processo como o $K^0 \to \pi^+\pi^-$, que não tem nada de excepicional, as velocidades dos pions em S_R já são de $0,83\,c$. Por isso, o estudo das partículas oferece muitas situações onde é possível testar, experimentalmente, as previsões da relatividade contra as da mecânica clássica. Uma delas ocorre neste exemplo. Enquanto, na sistema S_R, o ângulo entre os momentos dos píons é 180°, em S_L ele é menor e pode ser obtido a partir do produto escalar entre as velocidades dos dois píons. Chamando de θ_L este ângulo, temos

$$\cos\theta_L = \frac{\vec{u}_{L+} \cdot \vec{u}_{L-}}{|u_{L+}|\,|u_{L-}|} \tag{23.45}$$

e, portanto, ele pode ser obtido a partir das eqs.(23.39)-(23.44). Efetuando os cálculos, encontramos

$$\cos\theta_L = \frac{-u_R^2 + v^2 + u_R^2 v^2 \,\mathrm{sen}^{\,2}\alpha_R/c^2}{\sqrt{[u_R^2 + v^2 - u_R^2 V^2 \mathrm{sen}^{\,2}\alpha_R/c^2]^2 - 4u_R^2 v^2 \cos^2\alpha_R}} \tag{23.46}$$

Neste problema, o resultado correspondente do cálculo clássico pode ser obtido tomando o limite $c \to \infty$ do resultado relativístico. Fazendo isso, obtemos

$$\cos\theta_L^{cl} = \frac{-u_R^2 + v^2}{\sqrt{[u_R^2 + v^2]^2 - 4u_R^2 v^2 \cos^2\alpha_R}}\,. \tag{23.47}$$

Como no caso discutido no exemplo 4, as previsões da relatividade e da mecânica clássica são diferentes entre si e podem ser discriminadas por meio de experimentos.

Finalmente, podemos adquirir um sentimento acerca das ordens de grandeza deste problema consideramos, inicialmente, a situação particular em que $\alpha_R = 0$, que corresponde a

$$\vec{u}_{L+} = \left(0, \frac{u_R + v}{1 + v u_R/c^2}, 0\right)\,, \tag{23.48}$$

$$\vec{u}_{L-} = \left(0, \frac{u_R - v}{1 - v u_R/c^2}, 0\right)\,. \tag{23.49}$$

Supondo, por exemplo, que $v = 0,5\,c$ e adotando o valor experimental $u_R = 0,83\,c$, temos $\vec{u}_{L+} = (0, 0{,}94\,c, 0)$ e $\vec{u}_{L-} = (0, 0{,}56\,c, 0)$. Por outro lado, se $\alpha_R = \pi/2$, obtemos

$$\vec{u}_{L+} = (0, v, u_R/\gamma)\,, \tag{23.50}$$

$$\vec{u}_{L-} = (0, v, -u_R/\gamma)\,. \tag{23.51}$$

e, assim, $\vec{u}_{L+} = (0, 0{,}5\,c, 0{,}72\,c)$ e $\vec{u}_{L-} = (0, 0{,}5\,c, -0{,}72\,c)$.

• exercícios

1. Considere a situação descrita no exemplo 1. Calcule a velocidade de Pedro relativamente a João:
a) no caso em que ambos têm a mesma velocidade em relação a Maria.
b) quando $\vec{v} = 3c/5\vec{j}$ e $\vec{u}_M = 4c/5\vec{j}$. Qual é a razão entre o módulo desta velocidade e a previsão clássica?

2. Ana está num carro, que se move para a direita com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, ao longo de uma estrada retilínea, paralela ao eixo y. Num dado ponto desta estrada está Pedro, no interior de um carro parado. Ana passa por Pedro e, depois de decorrido um intervalo de tempo T, no referencial do solo, Pedro passa a perseguir o carro de Ana, com uma velocidade u_S, $(u_S > v)$. Tomando como origem a passagem de Ana por Pedro, determine:
a) o instante e a posição da saída de Pedro, nos referenciais do solo e de Ana;
b) o instante e a posição em que Pedro alcança Ana, nos referenciais do solo e de Ana;
c) a velocidade de Pedro em relação a Ana, usando os resultados anteriores.
d) a velocidade de Pedro em relação a Ana, usando as regras de adição de velocidades, eqs. (23.8-23.13).

3. Um trem move-se para a direita em relação ao solo, com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$ e, no seu interior, existe uma fonte de luz, que emite um feixe vertical.
a) calcule o vetor velocidade do feixe de luz em relação ao solo;
b) usando o resultado do item anterior, calcule o módulo, a direção e o sentido da velocidade da luz, em relação ao solo.

4. Maria está parada na origem do referencial S_M, enquanto que João desloca-se com velocidade constante $\vec{v} = v\vec{j}$ ao longo da reta $x = L, z = 0$, como mostra a figura 23.6. No instante em que João cruza o eixo x, Maria parte ao seu encontro, com uma velocidade $\vec{u}_M$.
a) determine o valor de u supondo que o encontro ocorra no instante T, em S_M.
b) neste caso, qual é o vetor velocidade de Maria relativamente a João?

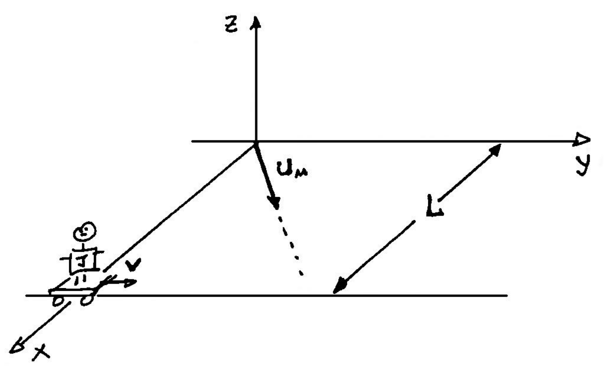

Figura 23.6: A situação do exercício 4.

• respostas

1. a) $\vec{u}_M = \vec{v} \rightarrow \vec{u}_J = 0$ **b)** $25/13$

2. a) evento $E_1 \rightarrow S_S : (0, 0, 0, T)$; $S_A : (0, -\gamma\, v\, T, 0, \gamma T)$

b) evento $E_2 \rightarrow S_S : (0, \frac{u_S\, v\, T}{u_S - v}, 0; \frac{u_S\, T}{u_S - v})$; $S_A : (0, 0, 0; \frac{u_S\, T}{\gamma(u_S - v)})$

c) e d) $\vec{u}_A = \frac{u_S - v}{1 - u_S\, v/c^2}\, j$

3. a) $\vec{c}_S : (0, V, c/\gamma)$

b) $|\vec{c}_S| = c$, o feixe de luz faz um ângulo $\alpha_S = \tan^{-1}[c/(\gamma\, v)]$ com o eixo y e o sentido é ascendente.

4. a) $\vec{u}_M = L/T\, \vec{i} + v\vec{j}$

b) $\vec{u}_J = \gamma\, L/T\, \vec{i}$