

# Matriz Espalhamento (S)

## Parte 1

SEL 369 Micro-ondas/SEL5900 Circuitos de Alta  
Frequência

Amílcar Careli César  
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

# Atenção!

---



- ✓ Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de **SEL-369 Micro-ondas**, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia elétrica/eletrônica e **SEL-5900 Circuitos de Alta Frequência**, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de pós-graduação em engenharia elétrica.
- ✓ Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- ✓ solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

# Caracterização da rede-1

---

- ✓ Em baixas frequências a rede pode ser caracterizada por um conjunto de parâmetros que relaciona as variáveis  $I_1$ ,  $V_1$ ,  $I_2$  e  $V_2$



# Caracterização da rede-2

Parâmetros  $z$

$$\begin{cases} V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases}$$

Parâmetros  $h$

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

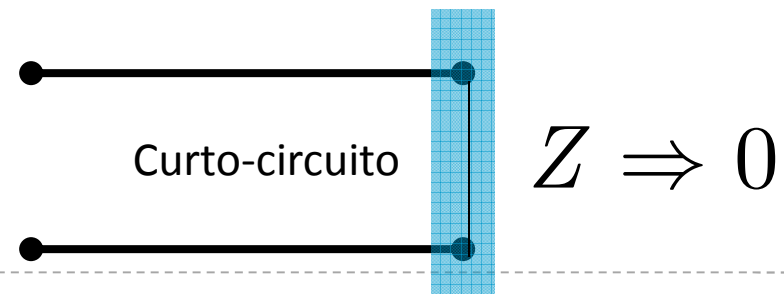
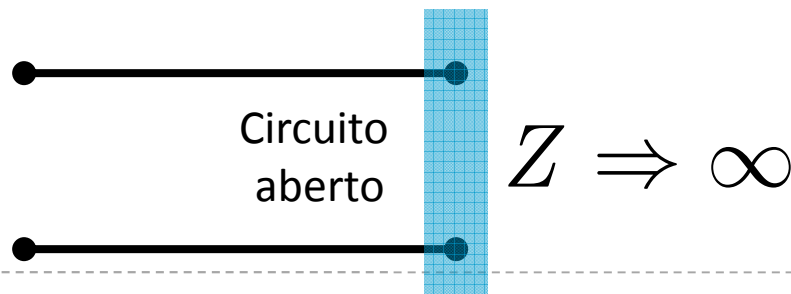
Parâmetros  $ABCD$

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

Curtos e circuitos abertos são essenciais para a realização das medidas destes parâmetros

exemplo  $h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$

$V_2 = 0$  : aplicação de um curto-circuito à porta de saída



## Caracterização da rede-3

---

- ✓ Se a frequência é suficientemente elevada alguns problemas aparecerão
  - Não se dispõe com facilidade de equipamentos para medidas de tensão e corrente nas portas da rede
  - Curto e aberto são difíceis de se obter em uma faixa larga de frequências

# Caracterização da rede-4

---

- ✓ Se a frequência é suficientemente elevada alguns problemas aparecerão
  - Dispositivos ativos como transistor e diodo túnel frequentemente não operam em condições estáveis quando são curto-circuitados ou quando operam em circuito aberto
  - Em frequências elevadas as indutâncias e capacitâncias parasitárias associadas aos curtos e abertos devem ser anulados com o auxílio de tocos de sintonia nas portas
    - Os tocos devem ser ajustados em cada frequência e o dispositivo tende a oscilar, anulando a validade das medidas

# Caracterização da rede-5

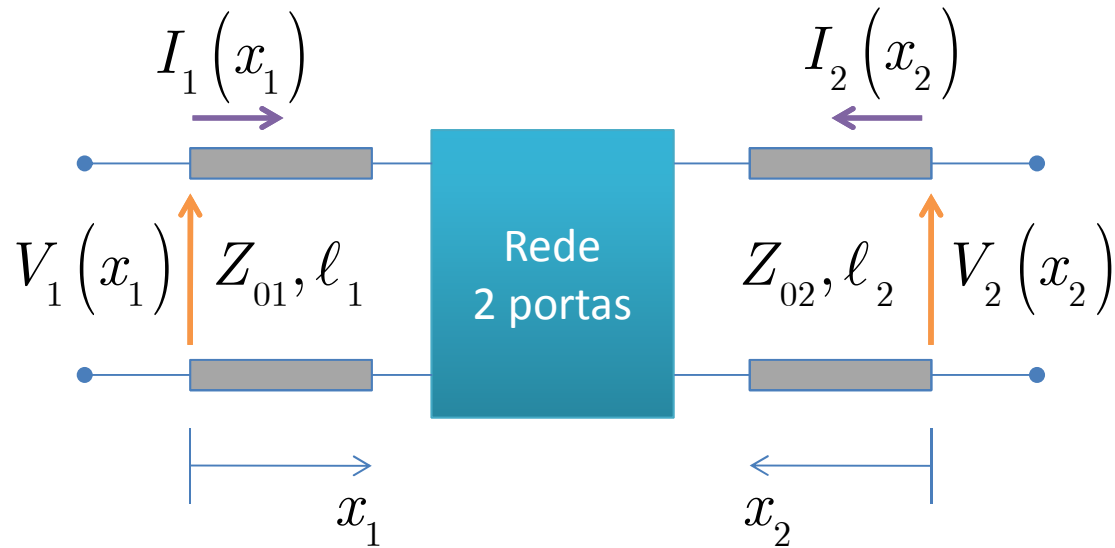
---

- ✓ Há necessidade de um outro conjunto de parâmetros para caracterizar os dispositivos em faixas de frequências nas quais os parâmetros distribuídos descrevem melhor o comportamento físico do que os parâmetros concentrados.



# Ondas normalizadas-1

---



Tensão e corrente totais em linha,  $i = 1, 2$

$$V_i(x_i) = V_i^+(x_i) + V_i^-(x_i)$$

$$I_i(x_i) = I_i^+(x_i) - I_i^-(x_i)$$



## Ondas normalizadas-2

---

$$V_i(x_i) = V_i^+(x_i) + V_i^-(x_i)$$
$$\frac{V_i(x_i)}{Z_{0i}} = \frac{V_i^+(x_i)}{Z_{0i}} + \frac{V_i^-(x_i)}{Z_{0i}}$$

$$I_i(x_i) = I_i^+(x_i) - I_i^-(x_i)$$
$$I_i(x_i) = \frac{V_i^+(x_i)}{Z_{0i}} - \frac{V_i^-(x_i)}{Z_{0i}}$$

$$i = 1, 2$$

## Ondas normalizadas-3

---

Tensão e corrente totais em linha,  $i = 1, 2$

$$V_i^+(x_i) = \frac{1}{2} [V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i)]$$

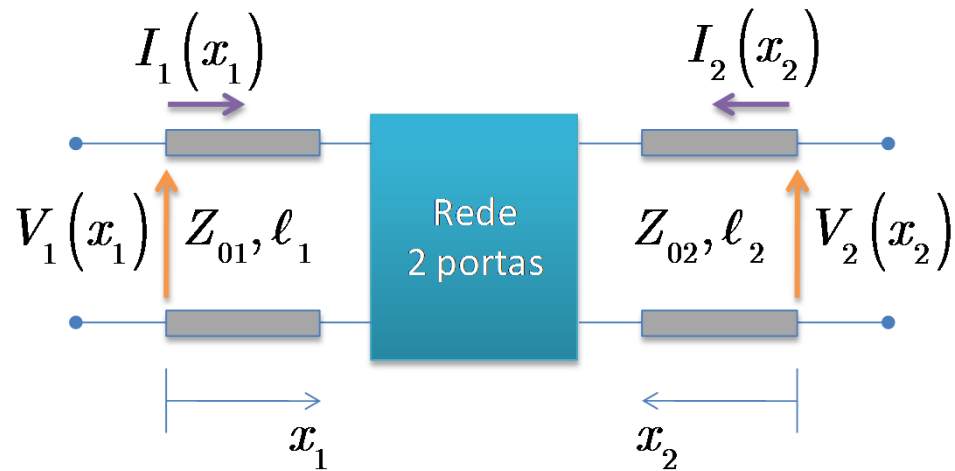
$$V_i^-(x_i) = \frac{1}{2} [V_i(x_i) - Z_{0i} I_i(x_i)]$$

$$\frac{V_i^+(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i)]$$

$$\frac{V_i^-(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) - Z_{0i} I_i(x_i)]$$

$$\frac{V_i^+(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} \equiv a_i(x_i) \quad \text{e} \quad \frac{V_i^-(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} \equiv b_i(x_i)$$

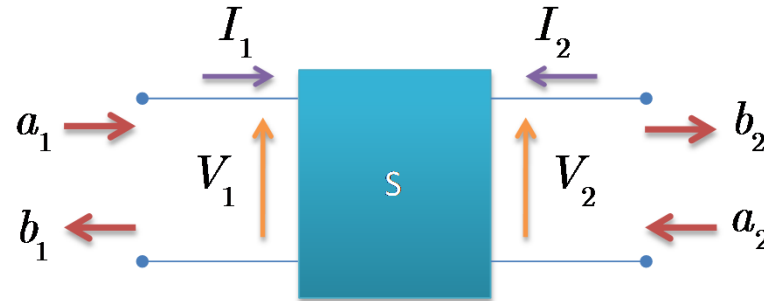
# Ondas normalizadas-4



$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} \left[ V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i) \right]$$

$$b_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} \left[ V_i(x_i) - Z_{0i} I_i(x_i) \right]$$

# Ondas normalizadas-5



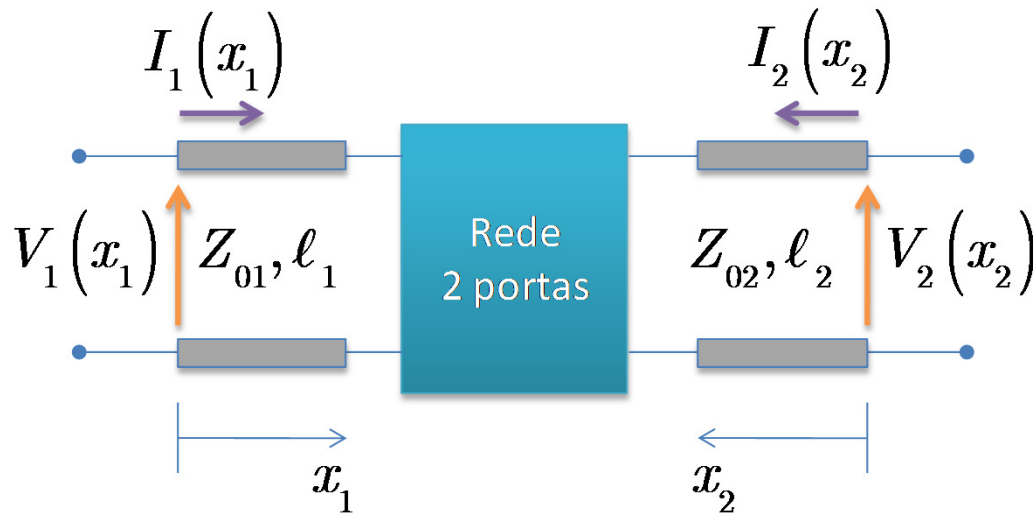
$$\frac{V_i^+(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} \equiv a_i(x_i) \quad \text{e} \quad \frac{V_i^-(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} \equiv b_i(x_i), \quad Z_{0i} \in \mathfrak{R}$$

$$a_i(x_i) a_i^*(x_i) = |a_i(x_i)|^2 = \frac{|V_i^+(x_i)|^2}{Z_{0i}}, \quad [V^2 \cdot \Omega^{-1}] = [W]$$

$$b_i(x_i) b_i^*(x_i) = |b_i(x_i)|^2 = \frac{|V_i^-(x_i)|^2}{Z_{0i}}, \quad [V^2 \cdot \Omega^{-1}] = [W]$$

# Parâmetros S

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = \frac{Z_1 - Z_{01}}{Z_1 + Z_{01}} \\ S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_{01}} V_2(\ell_2)}{\sqrt{Z_{02}} E_{1,Th}} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} S_{12} = \frac{2\sqrt{Z_{02}} V_1(\ell_1)}{\sqrt{Z_{01}} E_{2,Th}} \\ S_{22} = \frac{Z_2 - Z_{02}}{Z_2 + Z_{02}} \end{array} \right.$$

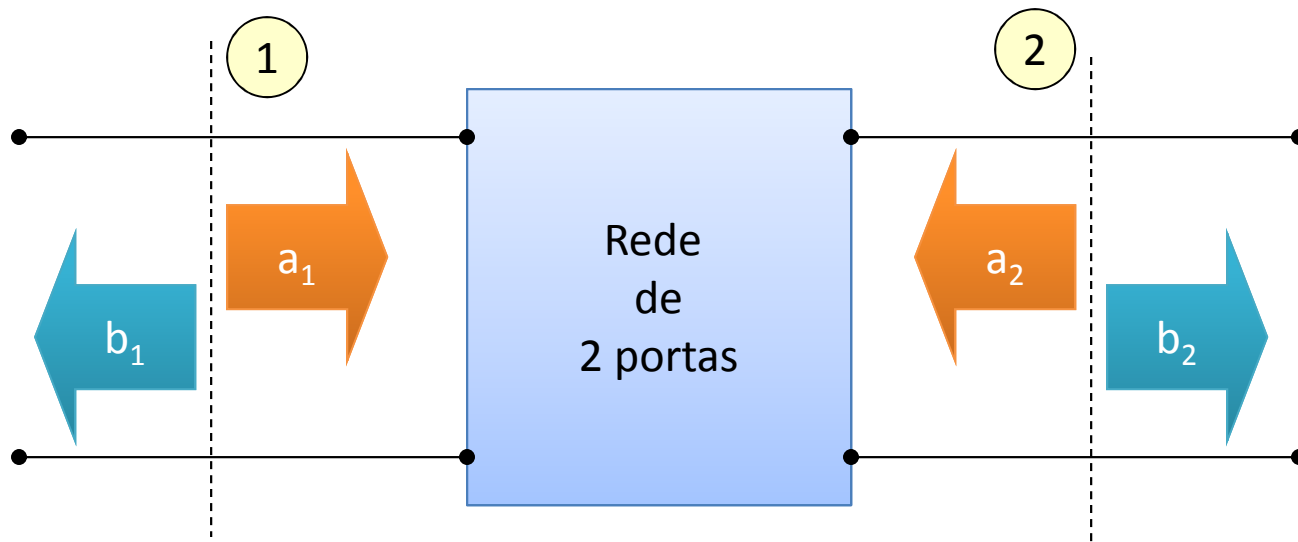


# Definição dos parâmetros S-4

$a_1 a_1^* = |a_1|^2$  potência da onda incidente na porta 1 da rede

$b_1 b_1^* = |b_1|^2$  potência da onda refletida pela porta 1 da rede

$a$ ,  $b$ : ondas normalizadas; amplitudes complexas normalizadas de ondas



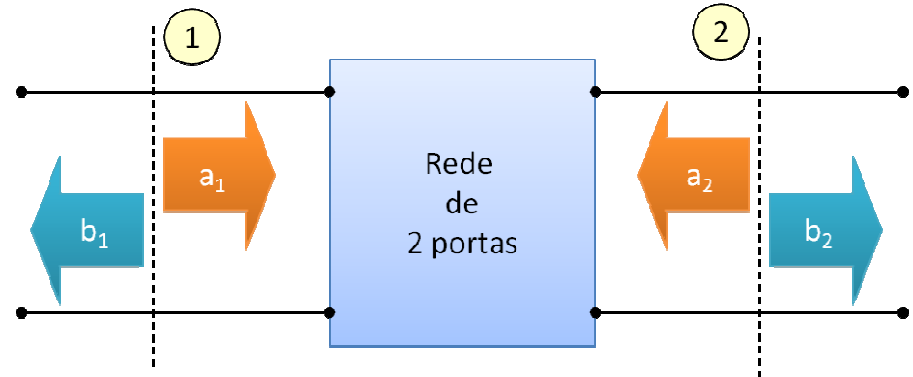
# Definição dos parâmetros S-4

$$\underline{P} = \left( \frac{\underline{V}}{\sqrt{R}} \right) \left( \frac{\underline{V}^*}{\sqrt{R}} \right) = a a^* = |a|^2$$

$$\begin{cases} b_1 = s_{11} a_1 + s_{12} a_2 \\ b_2 = s_{21} a_1 + s_{22} a_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Matriz espalhamento

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$



# A matriz S-1

---

- ✓ A matriz S é uma propriedade intrínseca do dispositivo ou junção e descreve todas as suas propriedades nos circuitos
- ✓ A matriz S relaciona ondas emergentes normalizadas e ondas incidentes normalizadas
- ✓ Os parâmetros de espalhamento só podem ser obtidos através de medidas
- ✓ Se o dispositivo é simétrico, muitas vezes é possível determinar S considerando propriedades gerais de S e simetria dos campos



# A matriz S-2

---

$|a_1|^2$  : potência incidente na porta de entrada (1) da rede

$|a_2|^2$  : potência incidente na porta de saída (2) da rede

potência refletida pela carga  $Z_0$

$|b_1|^2$  : potência refletida pela porta de entrada (1) da rede

potência disponível de uma fonte com impedância interna  $Z_0$

potência líquida entregue à porta de entrada (1) da rede

$|b_2|^2$  : potência refletida pela porta de saída (2) da rede

potência incidente sobre a carga

potência a ser entregue à carga  $Z_0$

# A matriz S-3

---

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

coeficiente de reflexão na entrada com a porta de saída terminada por uma carga casada

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

coeficiente de reflexão na saída com entrada terminada por uma carga casada

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

ganho de transmissão direto (ou perda por inserção) com a porta de saída terminada por uma carga casada

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

ganho de transmissão reverso (ou perda por inserção) com a porta de entrada terminada por uma carga casada

---

# A matriz S-4

---

$$\left| S_{11} \right|^2$$

potência refletida pela porta de entrada  
potência incidente na porta de entrada

$$\left| S_{22} \right|^2$$

potência refletida pela porta de saída  
potência incidente na porta de saída

$$\left| S_{21} \right|^2$$

potência líquida entregue à carga  $Z_0$   
potência disponível da fonte de impedância  $Z_0$

$$\left| S_{12} \right|^2$$

ganho reverso de conversão de potência  
com fonte e carga de valor  $Z_0$

# A matriz S-5

---

As condições para as medidas dos parâmetros  $\underline{S}$  ( $a_1 = 0$  e  $a_2 = 0$ ) são conseguidas a partir de terminações resistivas

Notação

$S_{pp}$  : significa “... da porta  $p$ ”

$S_{pq}$  : significa : “... da porta  $q$  para a porta  $p$ ”

$$\Gamma_1 = S_{11} \text{ e } Z_1 = Z_0 \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}}$$

a relação entre coeficiente de reflexão e impedância é a base da carta de Smith

# Algumas propriedades da matriz S-1

---

(1). Qualquer elemento da matriz  $S$  representa uma função de transferência  $S_{ij}$ , para  $i \neq j$ : função de transferência da porta  $j$  para a porta  $i$ :  $S_{i \leftarrow j}$   
 $S_{ij}$ , para  $i = j$ :  $S_{ii}$ : reflexão intrínseca

(2). Uma junção de  $N$  portas possui  $N^2$  elementos complexos  $S$

(3). **Reciprocidade**: As características de transmissão da porta  $i$  para a porta  $j$  são idênticas às da porta  $j$  para a porta  $i$

$$S_{ij} = S_{ji}, i \neq j \rightarrow [S] = [\tilde{S}] \sim : \text{transposta}$$

Não se aplica para dispositivos que contenham material girotrópico

# Algumas propriedades da matriz S-2

---

- (4). **Conservação de energia** : Circuito passivo sem perdas  
Soma das potência que entram = soma das potências que saem

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \sum_{i=j}^n |b_i|^2 \quad \rightarrow \quad I - \tilde{S}S^* = 0$$

- (5). **Rede com perdas dissipa potência** :  
A potência refletida total é menor que a potência total incidente

$$\sum |b_i|^2 < \sum |a_i|^2 \quad \rightarrow \quad I - \tilde{S} S^* > 0$$

$\sim$ : transposta; \*: complexo conjugada; I: matriz identidade

---

# Referências

---

- ✓ Sophocles J. Orfanidi, Electromagnetic Waves and Antennas, ECE Department, Rutgers University,
  - Capítulo 13
    - <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>
- ✓ Gonzalez
- ✓ Pozar