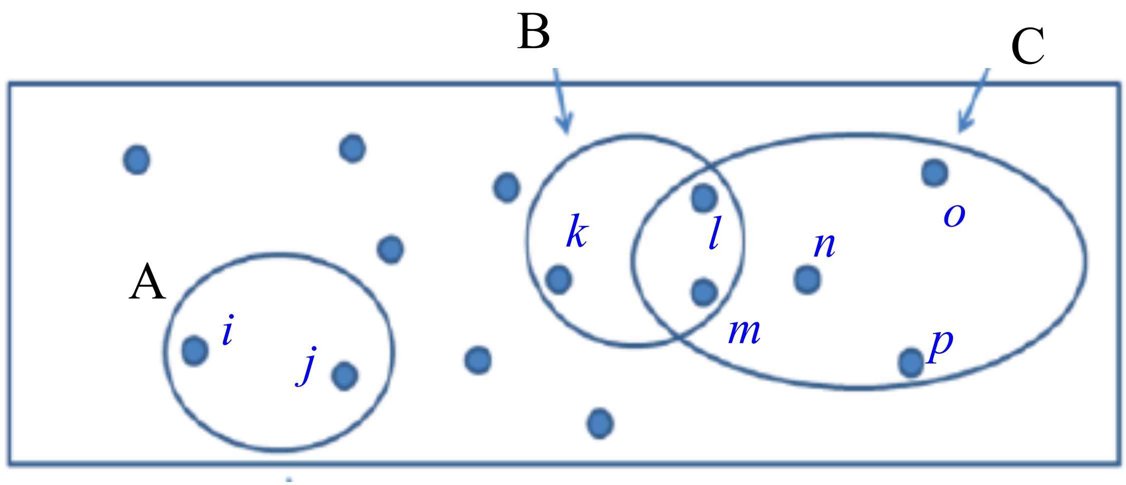
4300259 – Termoestatística

Noções Básicas de Probabilidade – II



– **Eventos Compostos Disjuntos**: são eventos compostos sem eventos simples comuns (conjuntos com interseção nula).

$A \cap B = 0$ (disjuntos) $\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

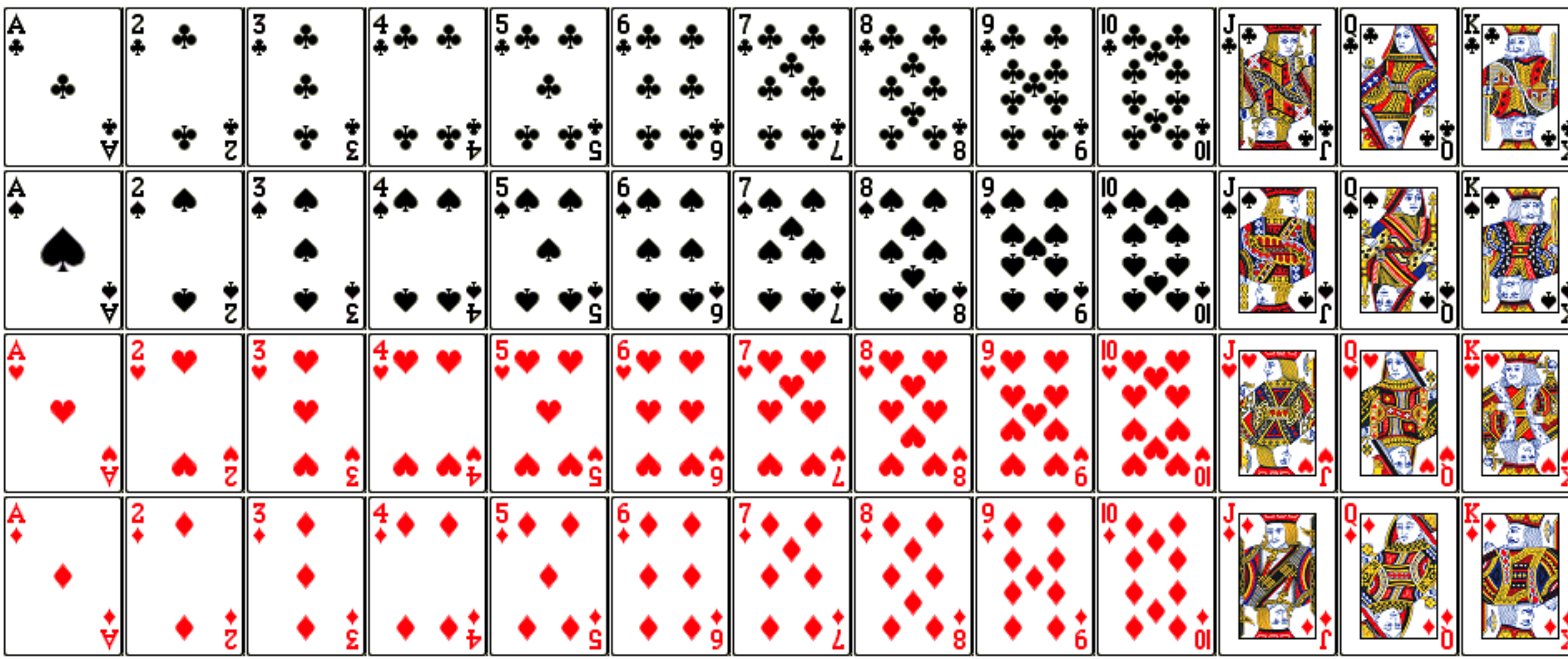
$A \cap C = 0$ (disjuntos) $\qquad P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

$B \cap C \neq 0$ (não disjuntos) $\qquad P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

Exercício: Calcule as probabilidades dos eventos definidos abaixo: $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$ e $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

A – sortear uma carta de copas

B – sortear uma carta com o número três



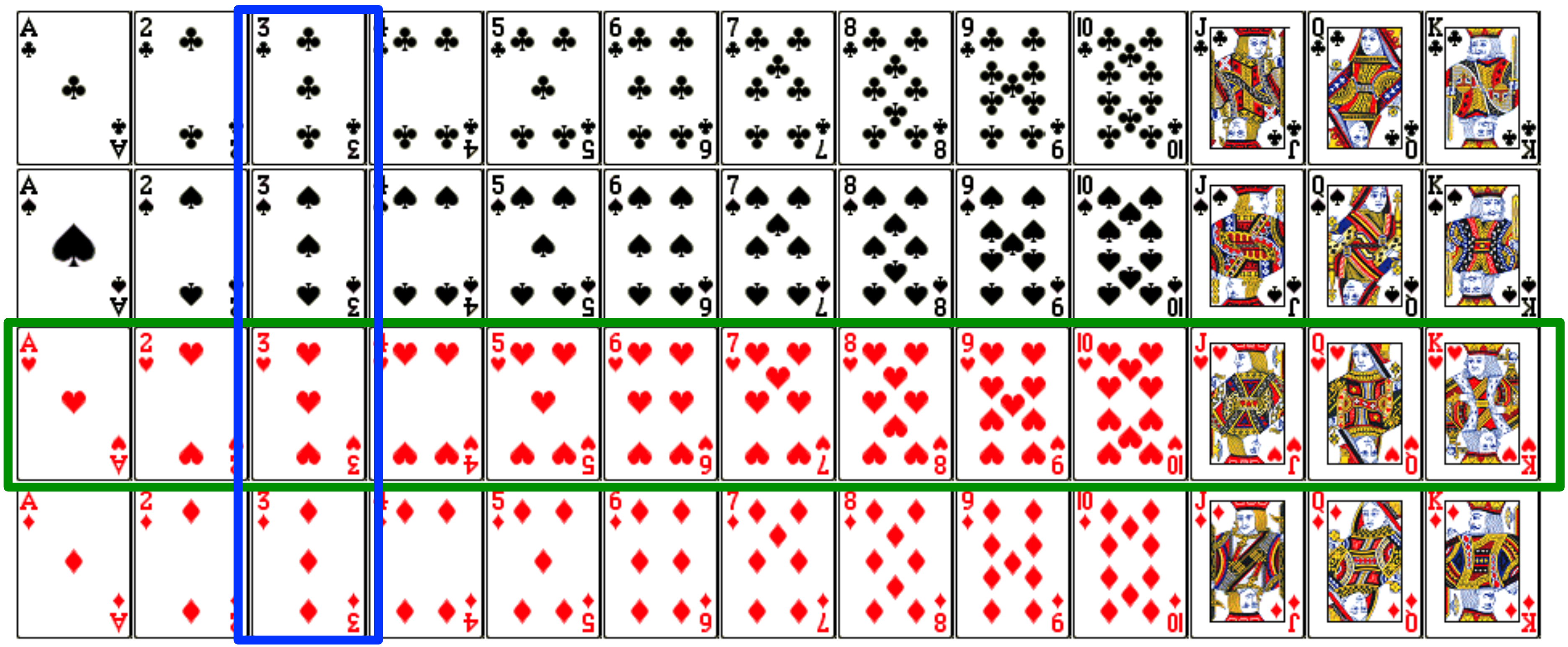
A – carta de copas
B – carta com o número três

$$P(A) = \sum_{i \subset A} P_i = \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{52} = \frac{13}{52}$$

$$P(B) = \sum_{i \subset B} P_i = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(A \cap B) = \sum_{i \subset (A \cap B)} P_i = \frac{1}{52}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$



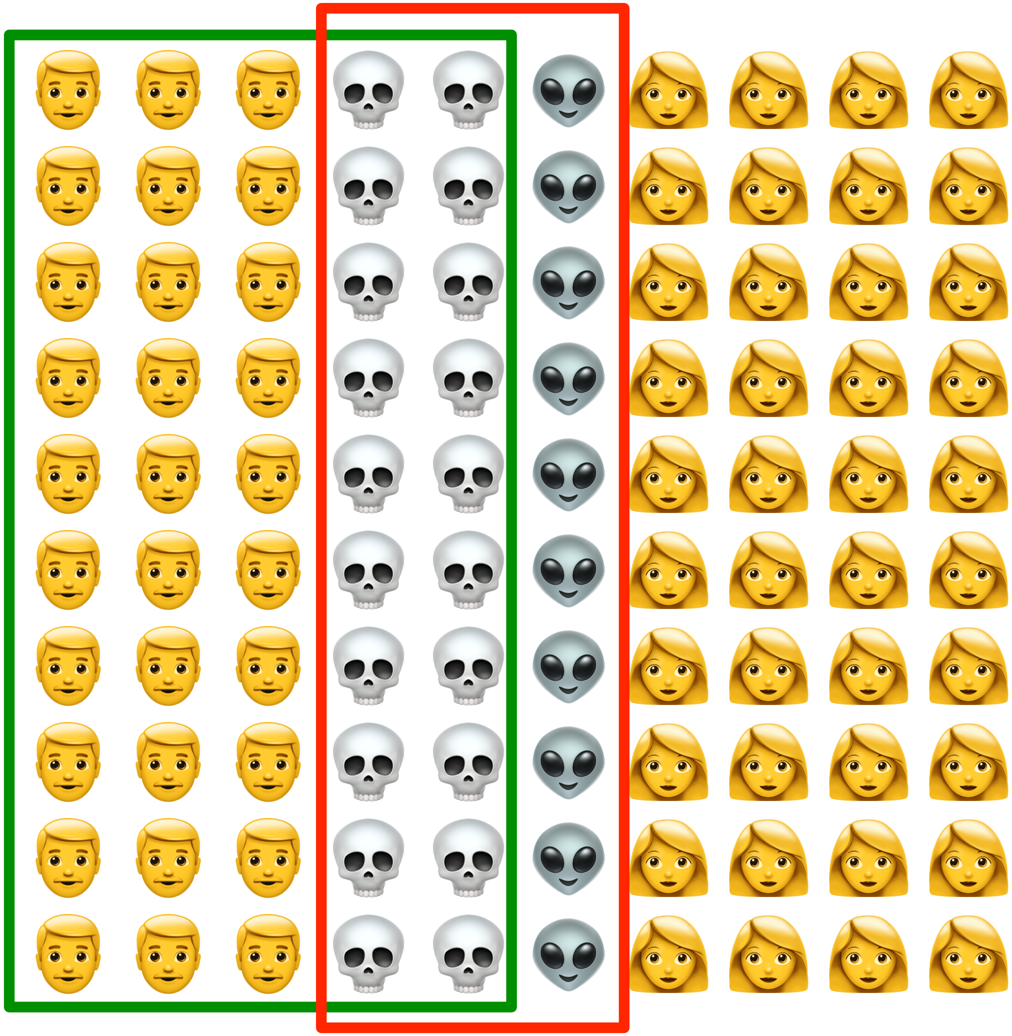
Exercício: Em um povoado, habitam 100 pessoas adultas, sendo 50 homens e 50 mulheres. Uma pesquisa médica detectou altos níveis de colesterol em 30 pessoas adultas, das quais 20 eram homens. Nesse povoado:

(a) Qual a probabilidade $P(A)$ de encontrar, ao acaso, uma pessoa com alto nível de colesterol?

(b) Qual a probabilidade $P(B)$ de encontrar, ao acaso, um homem?

(c) Se você tiver encontrado um homem, qual a probabilidade $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ de que tenha alto nível de colesterol?

(d) Como relacionar a probabilidade do item (c) às probabilidades dos itens (a) e (b)?



Homem saudável

Homem com alto NC

Mulher saudável

Mulher com alto NC

A: Pessoas com alto NC

B: Homens

$$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{20}{50} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)/N}{n(B)/N}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$(N \gg 1)$

– **Probabilidade Condicional**: probabilidade do evento A dado que ocorreu o evento B:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

– **Eventos Independentes**: caso a ocorrência do evento A não afete a probabilidade do evento B, então os eventos A e B são ditos *independentes*. Matematicamente:

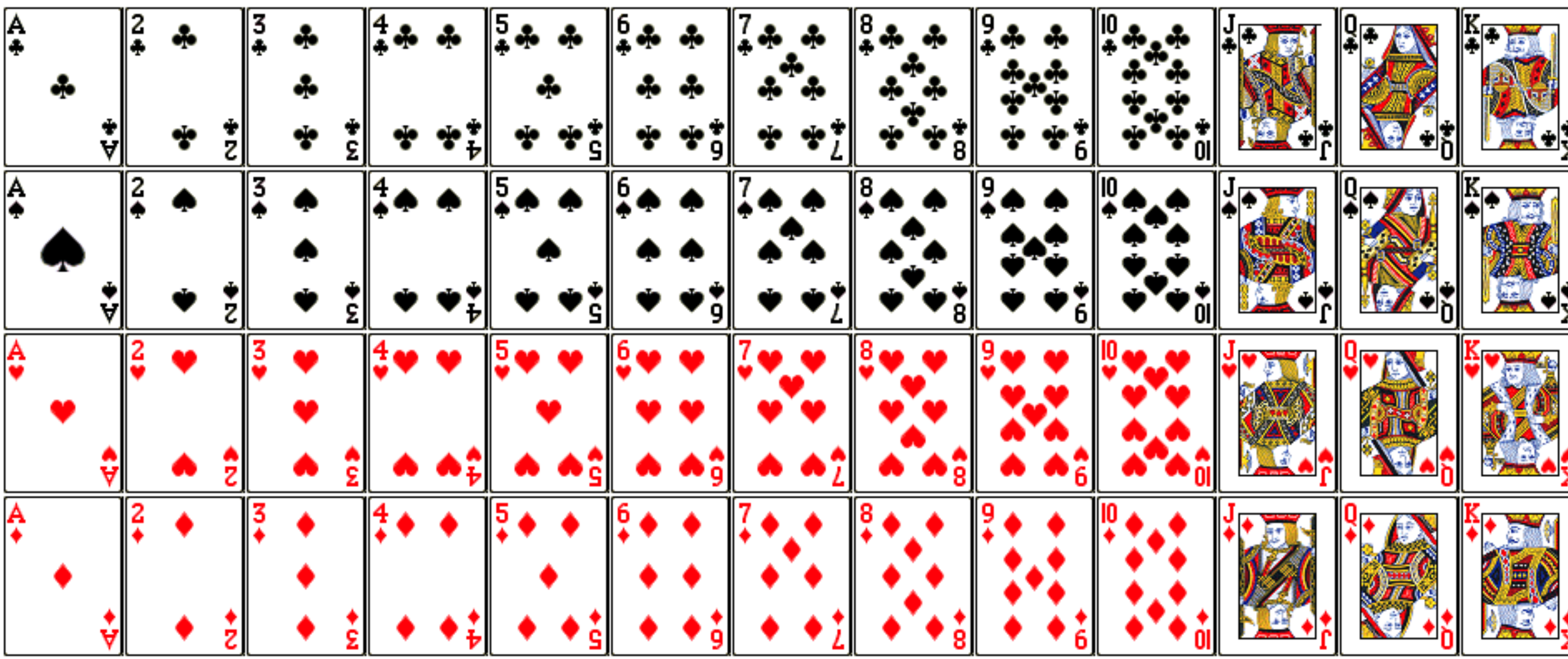
$$P(B|A) = P(B) \quad \text{(eventos independentes)}$$

Perceba que, para eventos independentes, vale a relação:

$$P(B \cap A) = P(B)P(A) \quad \text{(eventos independentes)}$$

$$P(B) = P(B|A) \iff P(B \cap A) = P(B)P(A)$$

Exercício: (a) Qual a probabilidade de uma carta sorteada ser de copas, dado que é um ás?
(b) Qual a probabilidade de uma carta sorteada ser de copas, dado que é vermelha?
(c) Os eventos definidos nos itens (a) e (b) acima são dependentes ou independentes?



(a) A = sortear um ás

B = sortear uma carta de copas

$$P(A) = 4/52$$

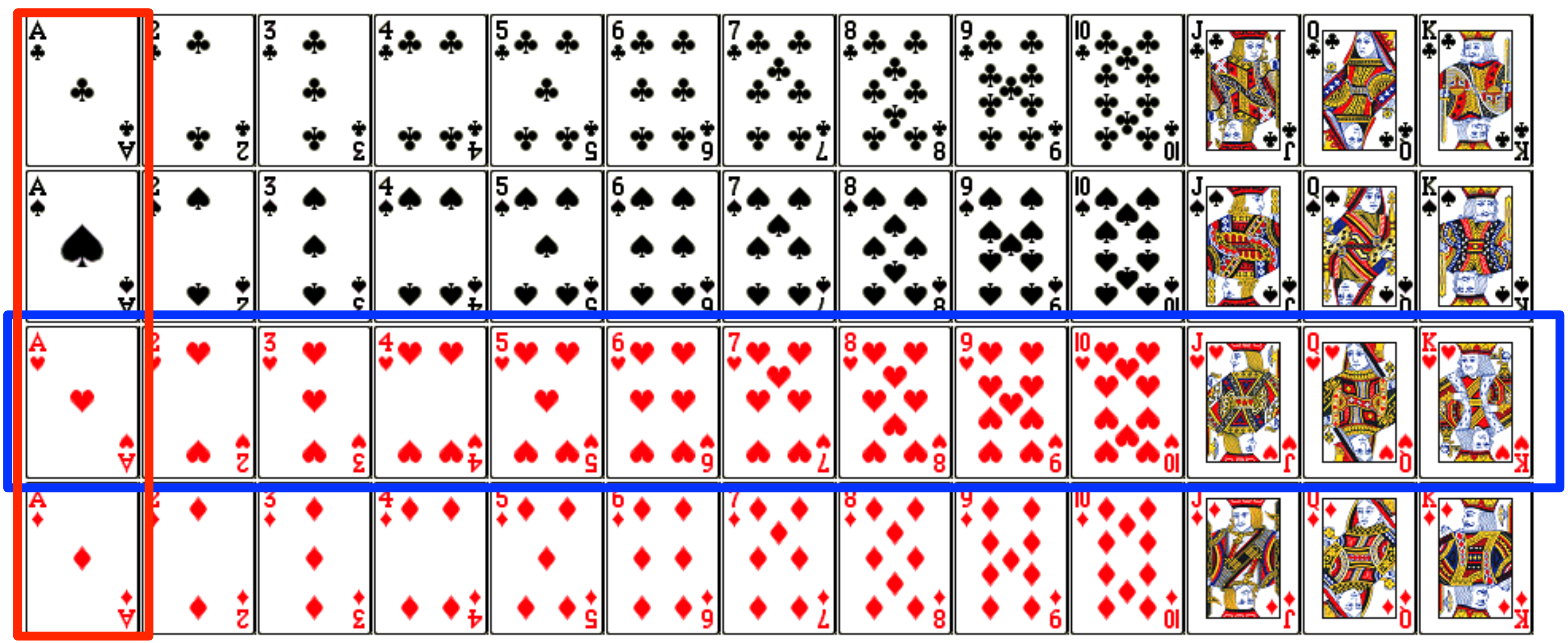
$$P(B) = 13/52$$

$$P(A \cap B) = 1/52$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1/4$$

Porém, note que:

$$P(B)P(A) = 1/52 = P(A \cap B) \implies P(B|A) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$



(b) B = sortear uma carta de copas

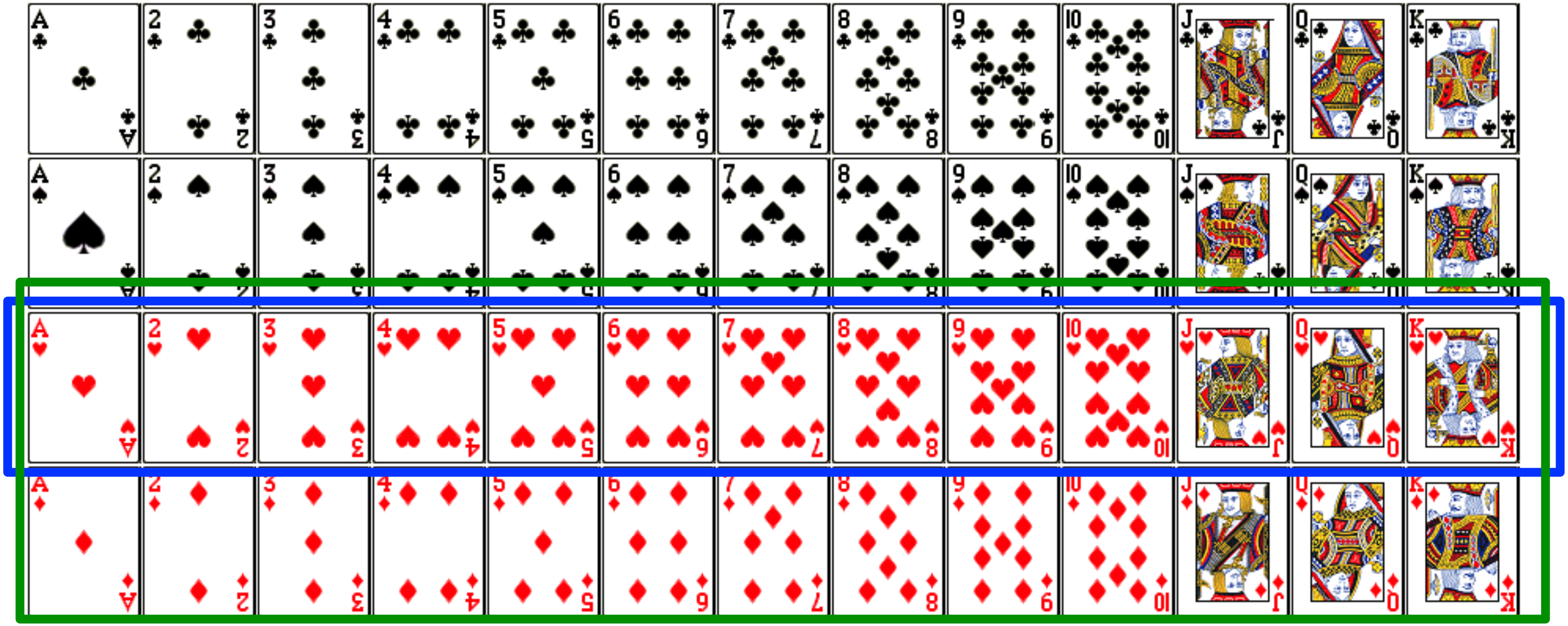
C = sortear uma carta vermelha

$$P(B) = 13/52$$
$$P(C) = 26/52$$
$$P(B \cap C) = 13/52$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 13/26 = 1/2$$

Porém, note que:

$$P(B)P(C) = 1/8 \neq P(B \cap C) \implies P(B|C) \neq \frac{P(B)P(C)}{P(C)}$$



– No item (a), a probabilidade de sortear uma carta de copas, no espaço amostral completo, é $P(B) = 1/4$. Ao sortear um ás (evento A), reduzimos o espaço amostral a quatro eventos possíveis (o ás pode ser de paus, espadas, copas ou ouros). Porém a probabilidade de que o ás seja de copas continua sendo $P(B|A) = P(B) = 1/4$. A ocorrência do evento A não afeta a probabilidade do evento B. Portanto, A e B são eventos independentes, $P(B|A) = P(B)$.

– No item (b), ao sortear uma carta vermelha (evento C), a probabilidade de encontrar uma carta de copas aumenta de $P(B) = 1/4$ para $P(B|C) = 1/2$. Os eventos B e C não são independentes, $P(B|C) \neq P(B)$.

– **Regra da Multiplicação**: a definição de probabilidade condicional estabelece a "regra da multiplicação" ou "regra do produto":

$$\underbrace{P(A \cap B)}_{\substack{\text{probabilidade} \\ \text{de } A \text{ e } B}} = \underbrace{P(A|B)}_{\substack{\text{probabilidade} \\ \text{de } A \text{ dado } B}} \underbrace{P(B)}_{\substack{\text{probabilidade} \\ \text{de } B}}$$

– Caso A e B sejam independentes, $P(A|B) = P(A)$, encontraremos a forma "usual", $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$. (probabilidade de A e B igual ao produto das probabilidades).