4300259 – Termoestatística

Noções Básicas de Probabilidade

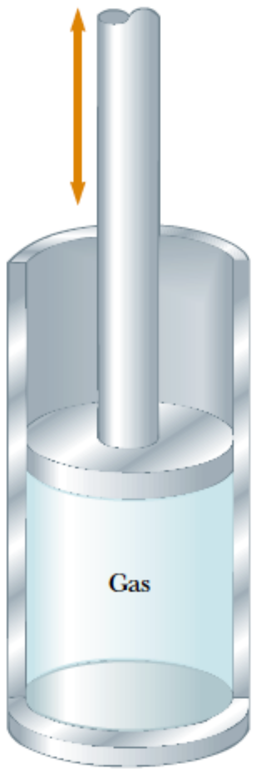
Prof. Marcio Varella

email: mvarella@if.usp.br

página: http://fig.if.usp.br/~mvarella/

Edifício Principal, Ala I, Sala 330

Ponto de Vista da Termodinâmica



Variáveis de Estado (ou Termodinâmicas): grandezas macroscópicas utilizadas para descrever gases (e outros sistemas) em termodinâmica: T, P, V, n (número de moles), etc.

Equações de Estado: Relações (vínculos) entre as variáveis macroscópicas que permitem caracterizar o estado de um sistema (em geral complicadas, a não ser para modelos simplificados).

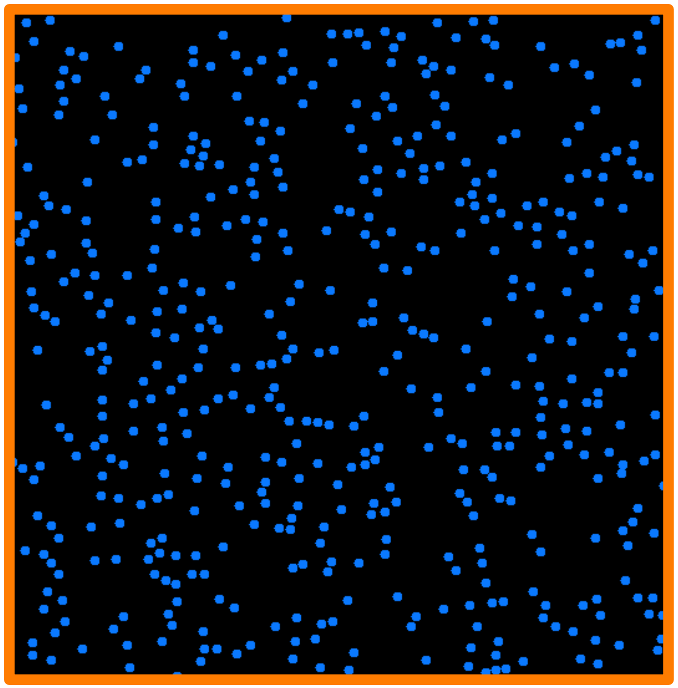
Funções de Estado: Grandezas físicas que podem ser expressas como funções das variáveis termodinâmicas.

Exemplos (gases ideais):

$$pV = nRT = Nk_BT$$ (Equação de Estado)

$$E_{\text{int}} \equiv U = nC_V^{\text{mol}}T = NC_VT$$ (Função de Estado)

Ponto de Vista da Física Estatística



Gás composto por partículas (átomos ou moléculas) indicadas por pontos azuis).

– O gás é formado por um número **gigantesco** de partículas ($\sim 10^{23}$).

– Em Princípio, podemos aplicar as Leis de Newton ao movimento das partículas, mas na prática isso é impossível ($\sim 10^{46}$) equações diferenciais acopladas.

– A Física Estatística procurará conectar a descrição macroscópica (Termodinâmica) à descrição microscópica, por meio de médias sobre as propriedades das partículas que constituem o sistema.

F<u>undamental</u> revisar aspectos básicos de Estatística e Probabilidade.

Definições Elementares

– **Evento Simples**: resultado de um "experimento" de interesse: cara/coroa no lançamento de uma moeda, resultado de uma observação em um laboratório de Física, etc.

Exp. no.	Evento
1	ca
2	ca
3	co
4	ca
5	co
6	co
7	ca
8	co
9	ca
10	ca

–**Frequência**: em uma sequência de "experimentos" é a razão entre o número de vezes em que ocorre um determinado evento (n_i) e o número total de experimentos (N). Por exemplo, se em N = 10 lançamentos de uma moeda ocorrem n_{ca}= 6 caras e n_{co}= 4 coroas, teremos:

$$F_{\text{ca}} = n_{\text{ca}}/N = 6/10 = 0.60$$
$$F_{\text{co}} = n_{\text{co}}/N = 4/10 = 0.40$$

Em geral: $\boxed{F_i = \dfrac{n_i}{N}}$

Definições Elementares

– **Probabilidade a Priori**: Probabilidade (hipotética) atribuída a um evento, independente da realização do experimento. Exemplos: lançamento de uma moeda não viciada: 1/2 para o evento "cara" e 1/2 para o evento "coroa"; lançamento de um dado não viciado: 1/6 para qualquer dos eventos possíveis.

– **Probabilidade a posteriori**: Para definir probabilidade, vamos utilizar um exemplo: 3 sequências de 10 lançamentos de moedas:

Sequência 1

Exp. no.	Evento
1	ca
2	ca
3	co
4	ca
5	co
6	co
7	ca
8	co
9	ca
10	ca

$F_{ca} = 6/10$
$F_{co} = 4/10$

Sequência 2

Exp. no.	Evento
1	ca
2	co
3	ca
4	ca
5	co
6	co
7	ca
8	co
9	co
10	co

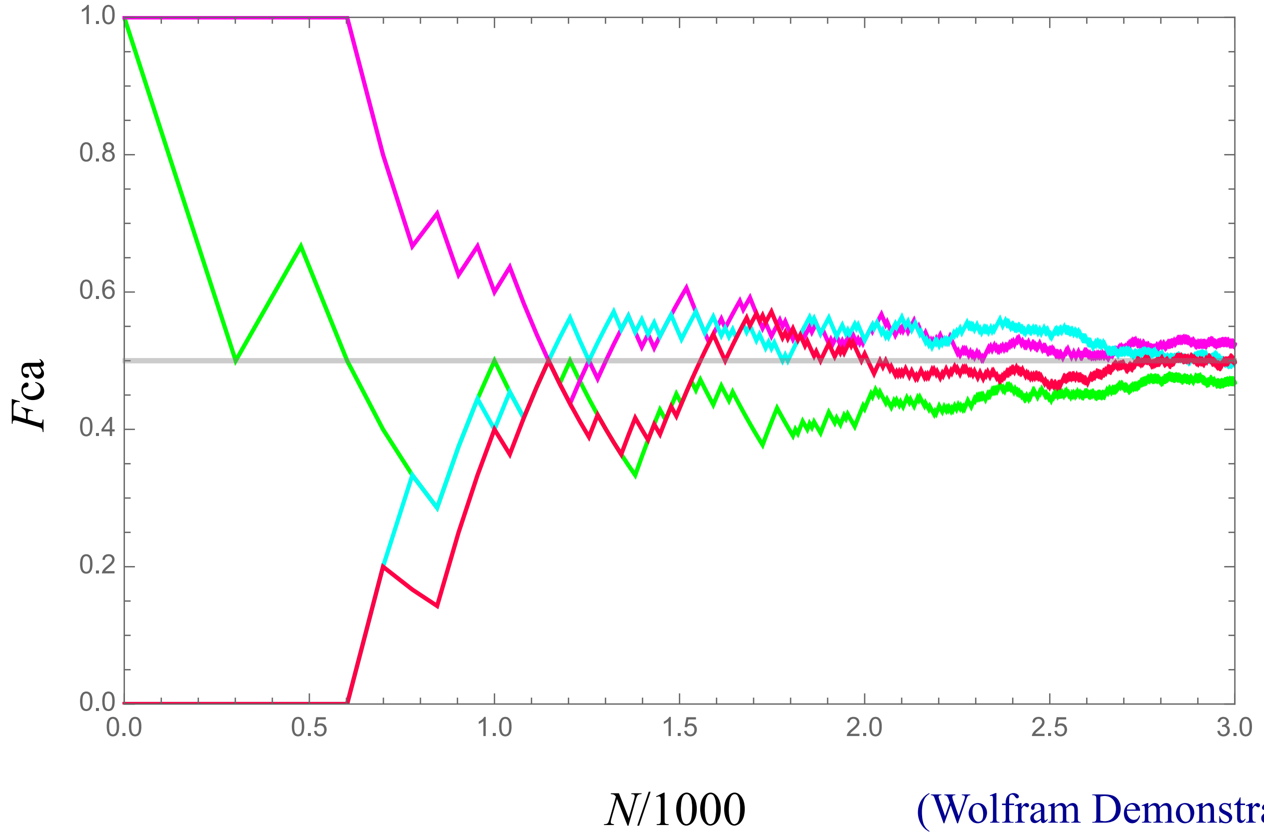
$F_{ca} = 4/10$
$F_{co} = 6/10$

Sequência 3

Exp. no.	Evento
1	co
2	co
3	ca
4	co
5	ca
6	co
7	co
8	co
9	ca
10	co

$F_{ca} = 3/10$
$F_{co} = 7/10$

Consideremos agora 4 sequências de 3000 lançamentos:



(Wolfram Demonstration Project)

Probabilidade de um evento simples (a posteriori):

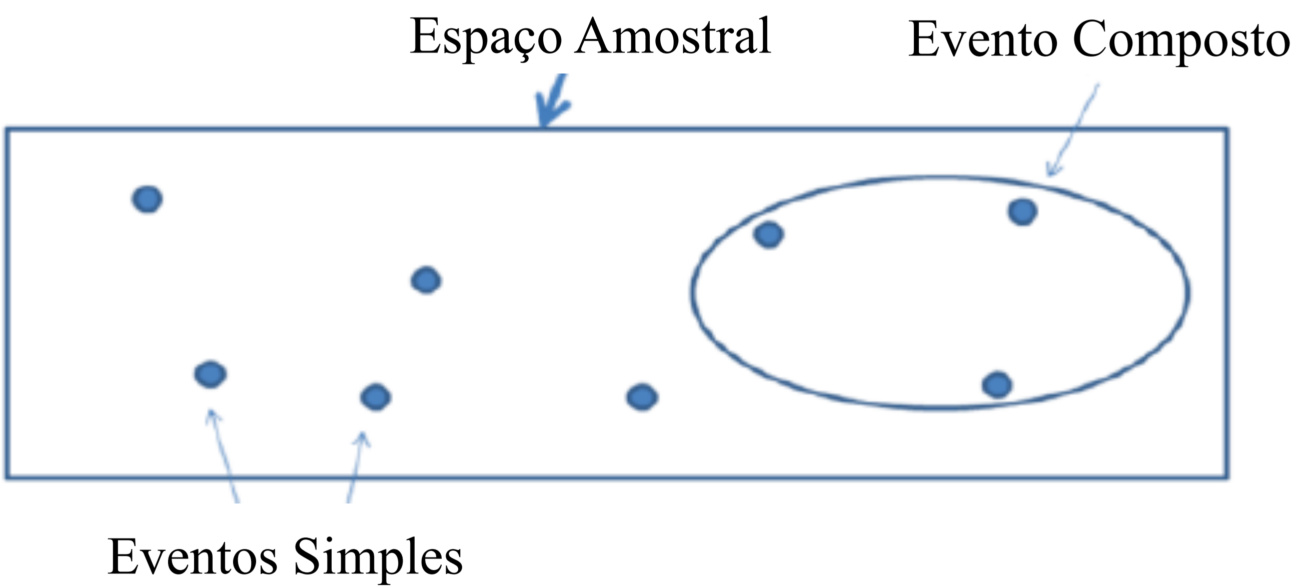
$$\boxed{P_i = \lim_{N\to\infty} F_i = \lim_{N\to\infty} \frac{n_i(N)}{N}} \qquad P_i \geq 0$$

$$\sum_i n_i(N) = N \Longrightarrow \sum_i F_i(N) = 1 \Longrightarrow \sum_i P_i = 1$$

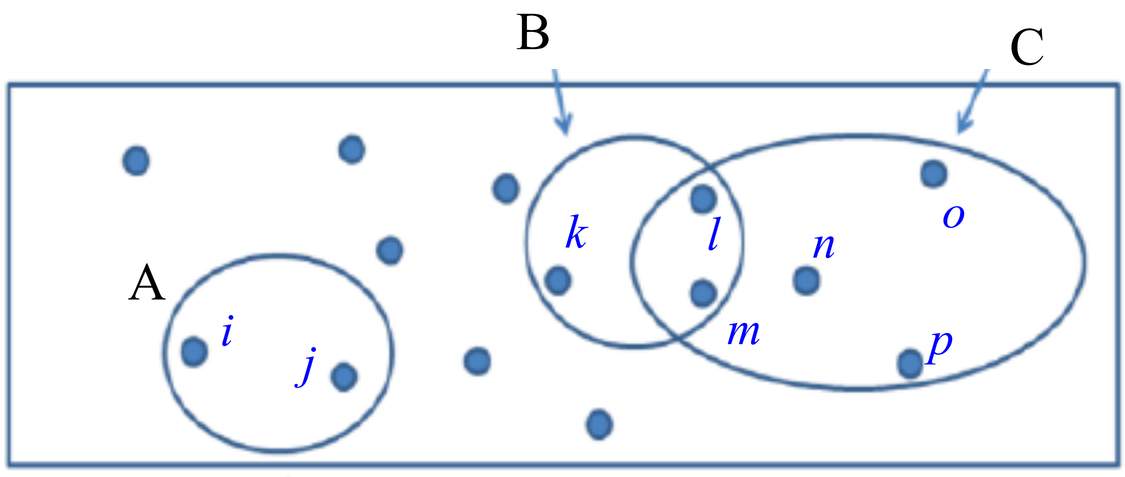
Definições Elementares

– **Espaço Amostral**: conjunto de todos os eventos possíveis.

– **Evento Composto**: conjunto de eventos simples (subconjunto não unitário do espaço amostral).



– **Evento Composto**: Pode ser entendido como união de conjuntos (eventos simples são conjuntos unitários).



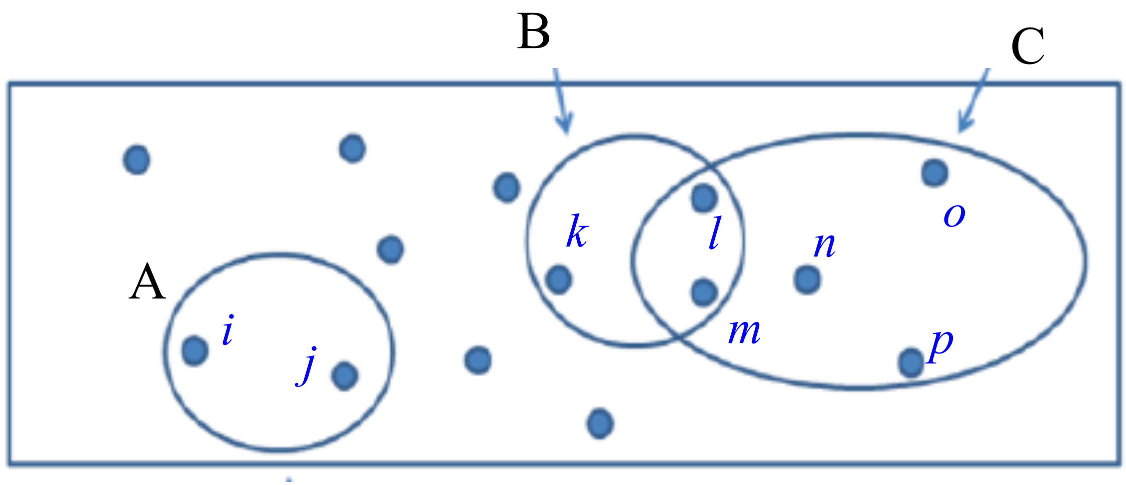
$\mathrm{A} = i \cup j \cup$ $\qquad$ $\mathrm{B} = k \cup l \cup m$ $\qquad$ $\mathrm{C} = l \cup m \cup n \cup o \cup p$

– **Probabilidade de Eventos Compostos**:

$$P(A) = \sum_{\alpha \subset A} P_\alpha = P_i + P_j$$

$$P(B) = \sum_{\alpha \subset B} P_\alpha = P_k + P_l + P_m$$

$$P(C) = \sum_{\alpha \subset C} P_\alpha = P_l + P_m + P_m + P_o + P_p$$



– **Eventos Compostos Disjuntos**: são eventos compostos sem eventos simples comuns (conjuntos com interseção nula).

$A \cap B = 0$ (disjuntos) $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$A \cap C = 0$ (disjuntos) $\quad P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

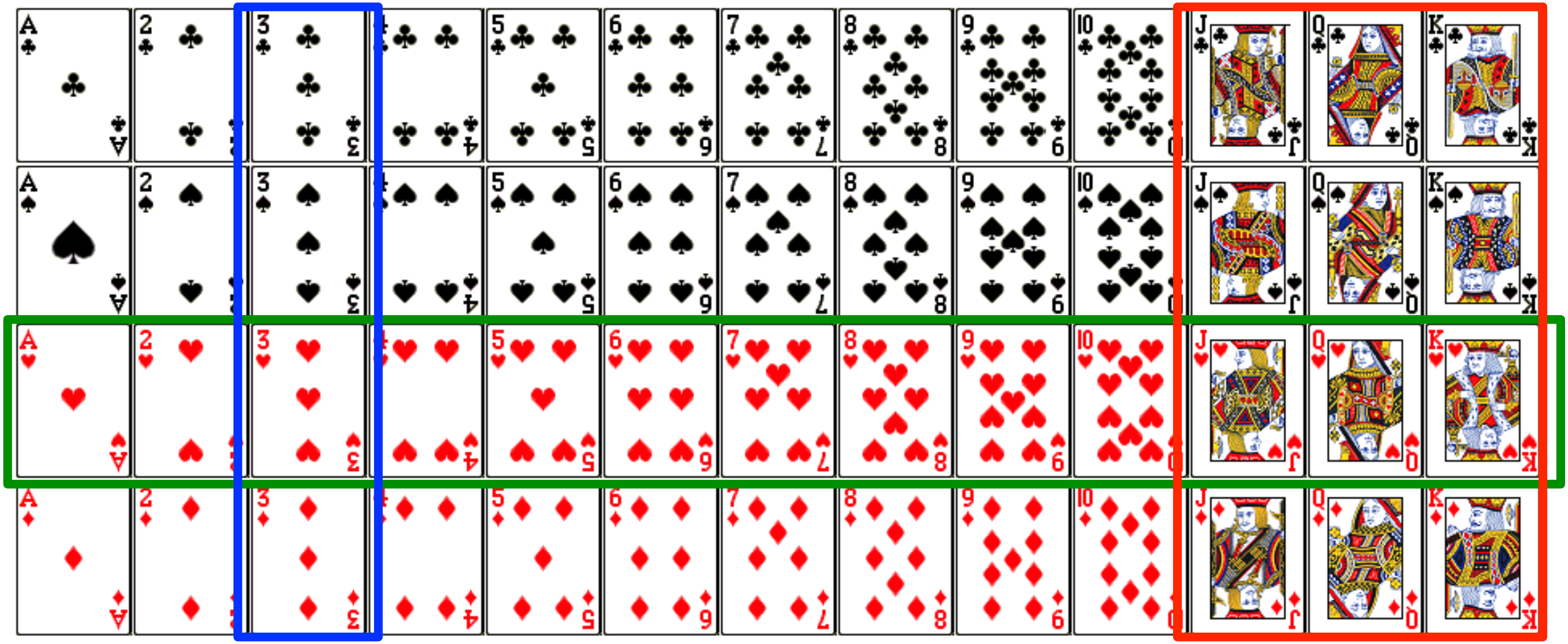
$B \cap C \neq 0$ (não disjuntos) $\quad P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

Exemplo: A figura abaixo mostra o espaço amostral do experimento "sortear uma carta de um baralho" (completo e perfeitamente embaralhado). São também indicados os eventos compostos:

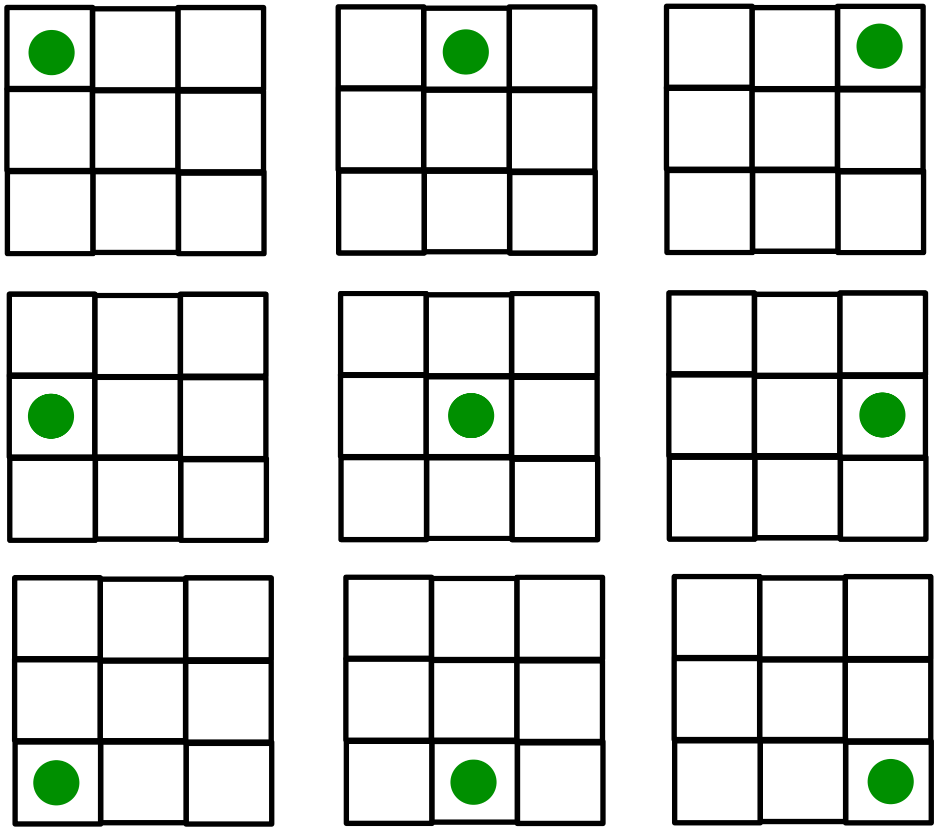
A – sortear uma carta de copas

B – sortear uma carta com o número três

C – sortear uma "figura" (valete, dama ou rei).



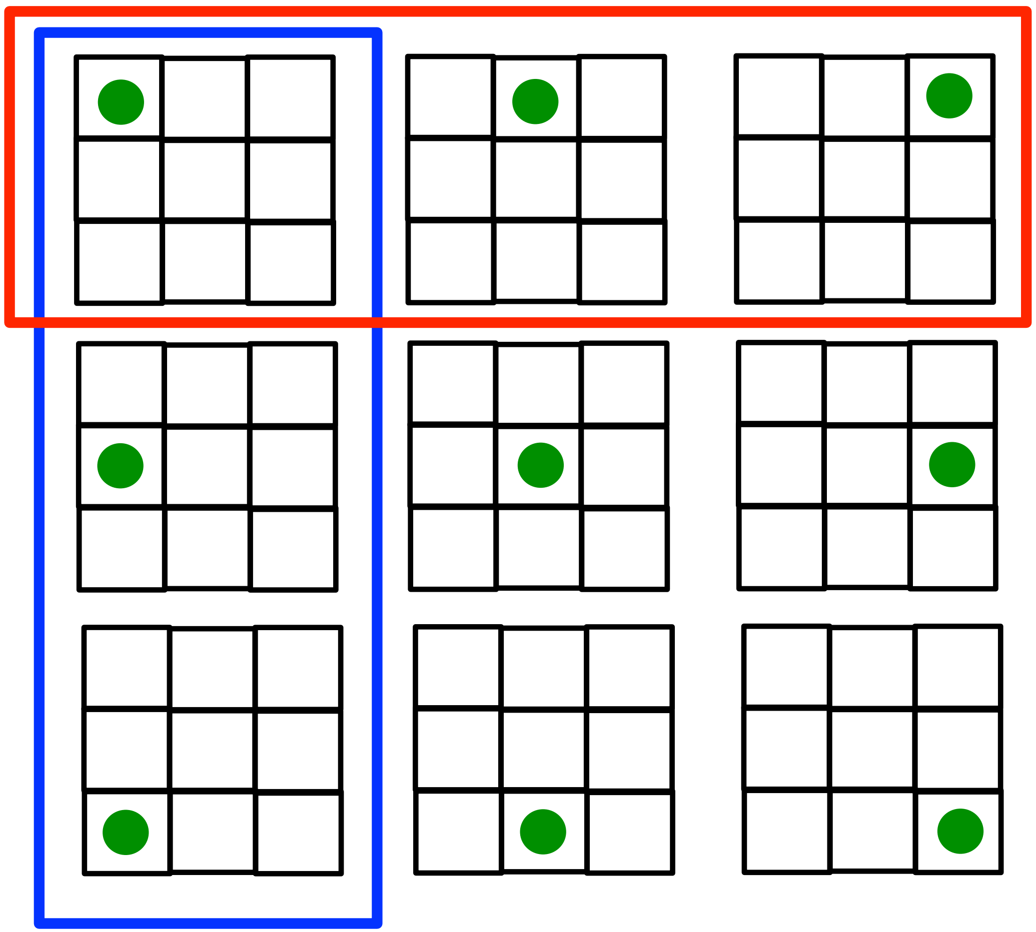
Exercício: Uma partícula se move em uma "caixa" bidimensional, dividida em 9 células. O espaço amostral dos eventos simples "encontrar em partícula em uma das células" é ilustrado abaixo.



Represente, no espaço amostral, os eventos compostos "encontrar a partícula da coluna da esquerda" e "encontrar a partícula na linha superior".

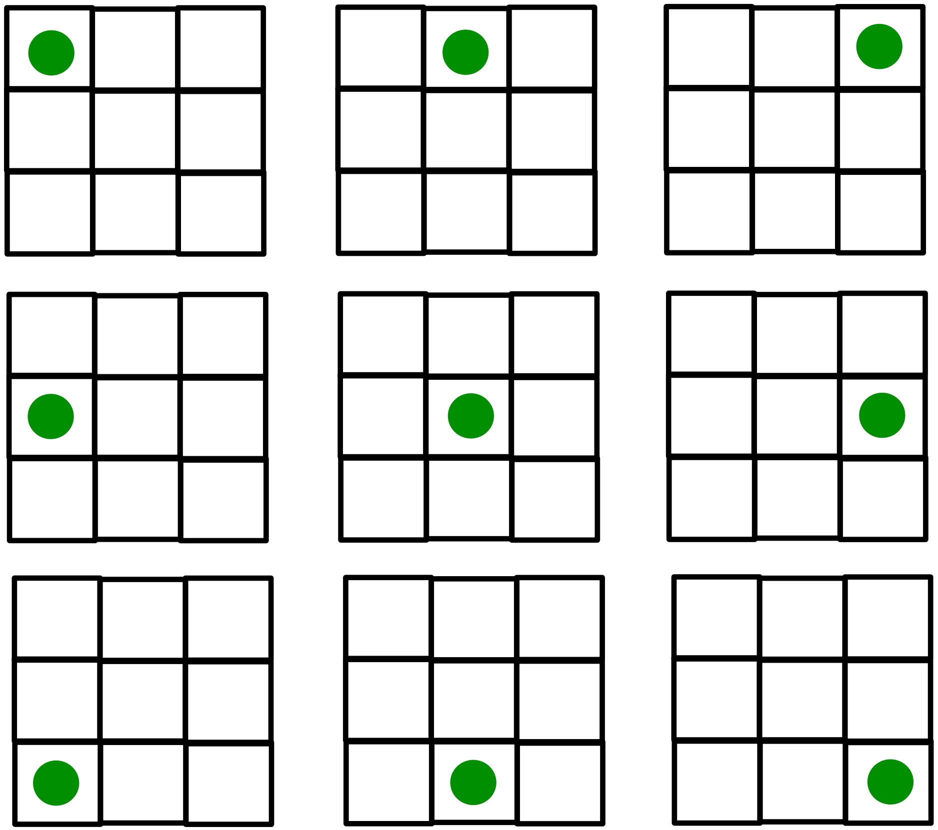
A – encontrar a partícula na coluna da esquerda

B – encontrar a partícula na linha superior



Exercício: A – encontrar a partícula na coluna da esquerda
B – encontrar a partícula na linha superior

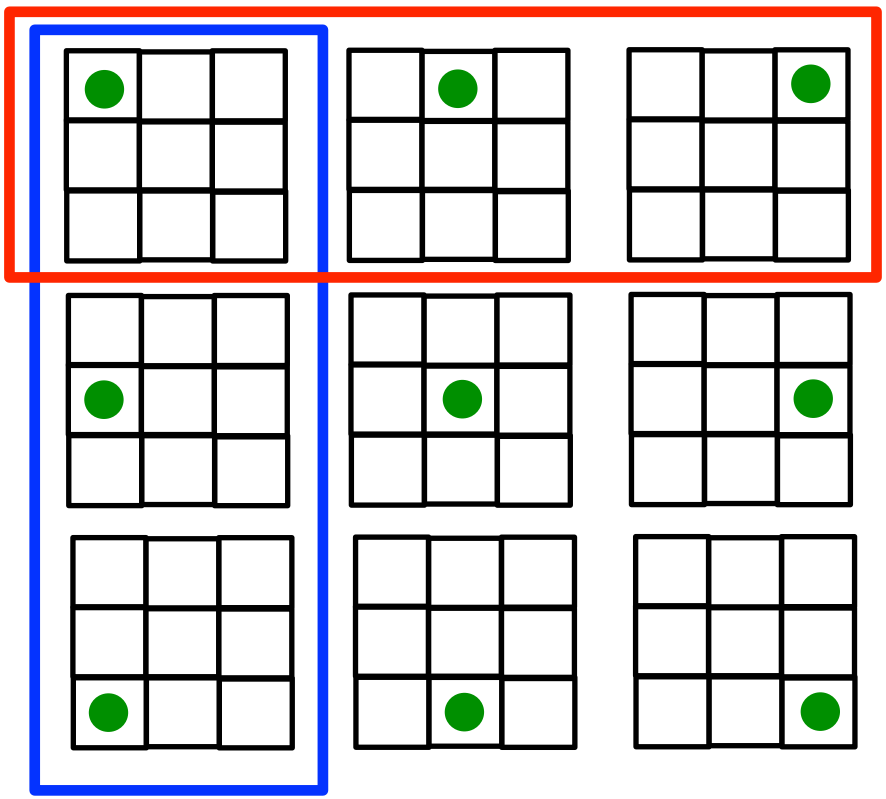
Calcule as probabilidades $P(A)$, $P(B)$, e $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

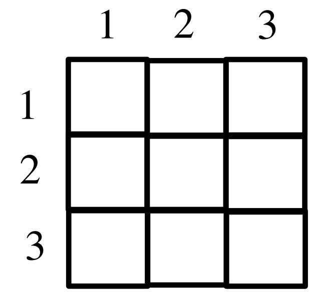


i – encontrar a partícula na i-ésima célula (evento simples)

A – encontrar a partícula na coluna da esquerda (evento composto)

B – encontrar a partícula na linha superior (evento composto)





$$P(A) = P_{11} + P_{21} + P_{31} = \\ = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P_{11} + P_{12} + P_{13} = \\ = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = P_{11} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$