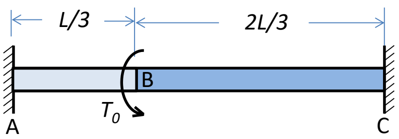
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

**PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – Segunda Prova – 24/05/2017**
**Duração: 100 minutos**

***Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!***

**1ª Questão** ( 3,0 pontos)




O eixo cilíndrico da figura tem comprimento $L$=3m. Ele está engastado em A e em C. A seção transversal da barra tem momento polar $I_P$=10cm$^4$. No ponto $B$ está aplicado um torque $T_O$=500Nm conforme a figura. O eixo é formado por dois materiais elásticos lineares diferentes. O módulo de elasticidade a cisalhamento do material do trecho AB é $G_1 = 80GPa$ e o do trecho BC é $G_2 = 40GPa$. Pede-se:

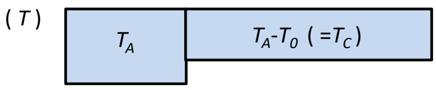
a) calcular os torques reativos em A e C;

b) calcular o giro da seção transversal B.

a)

i)Diagrama de corpo livre:


ii) Diagrama de momentos de torção:




iii) Equação de equilíbrio:

$$T_A - T_0 - T_C = 0$$

iv) Equação de compatibilidade:

$$\phi_{AB} + \phi_{BC} = 0$$

v) Relações entre torque e giro:

$$\phi_{AB} = \frac{T_A L}{3G_1 I_P}; \quad \phi_{BC} = \frac{2(T_A - T_0)L}{3G_2 I_P}$$

Substituindo-se v em iv temos:

$$\frac{T_A}{6} + \frac{2(T_A - T_0)}{3} = 0 \Rightarrow T_A + 4(T_A - T_0) = 0 \Rightarrow T_A = \frac{4}{5}T_0$$

Substituindo o resultado em i:

$$T_C = -\frac{1}{5}T_0$$

Por último, substituindo os valores numéricos, temos:

$$T_A = 400N.m\,; \qquad T_B = -100N.m$$

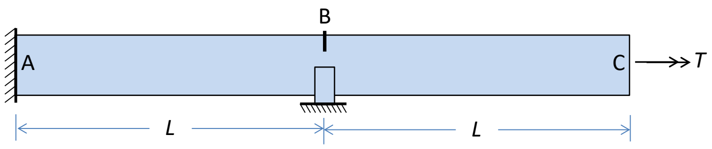
(2,5)

b)Usando v:

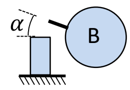
$$\phi_B = \phi_{AB} = \frac{T_A L}{3G_1 I_P} \Rightarrow \phi_B = \frac{400*1}{80*10^9*10*10^{-8}} \Rightarrow \phi_B = 0{,}05rd\ (\sim 2{,}9°)$$

(0,5)

**2ª Questão** ( 3,0 pontos)




*Vista Lateral*




*Vista Frontal*

O eixo cilíndrico da figura tem comprimento $2L$, momento polar $I_P$ e módulo de elasticidade a cisalhamento $G$. Esse eixo está engastado em A e tem um pino infinitamente rígido em B, de dimensões desprezíveis, cujo movimento é limitado por um batente, conforme a figura. Esse batente permite apenas um giro $\alpha$ na seção B a partir da situação indeformada do eixo. Pede-se:

a) calcular o torque $T_\alpha$ que deve ser aplicado na extremidade C para que a seção B tenha o seu giro máximo $\alpha$;

b) calcular o giro da seção transversal C, quando é aplicado em C um torque $T > T_\alpha$.

a)

$$\alpha = \frac{T_\alpha L}{G I_P} \;\Rightarrow\; T_\alpha = \frac{G I_P}{L}\,\alpha$$

(1,0)

b) O giro da extremidade C é a soma dos giros acumulados nos trechos AB e BC:

$$\phi_C = \phi_{AB} + \phi_{BC}$$

Então:

$$\phi_c = \alpha + \frac{TL}{G I_P}$$

(2,0)

*Solução alternativa:*

Se $\phi$ for o giro em C, então:

$$\phi = \beta + 2\alpha$$

onde $\beta$ é o giro provocado por $T - T_\alpha$ e, portanto,

$$\beta = \frac{(T - T_\alpha)L}{G I_P}$$

Assim:

$$\phi = \frac{TL}{G I_P} - \frac{T_\alpha L}{G I_P} + 2\alpha$$

Usando o resultado do item a:

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} + \alpha$$

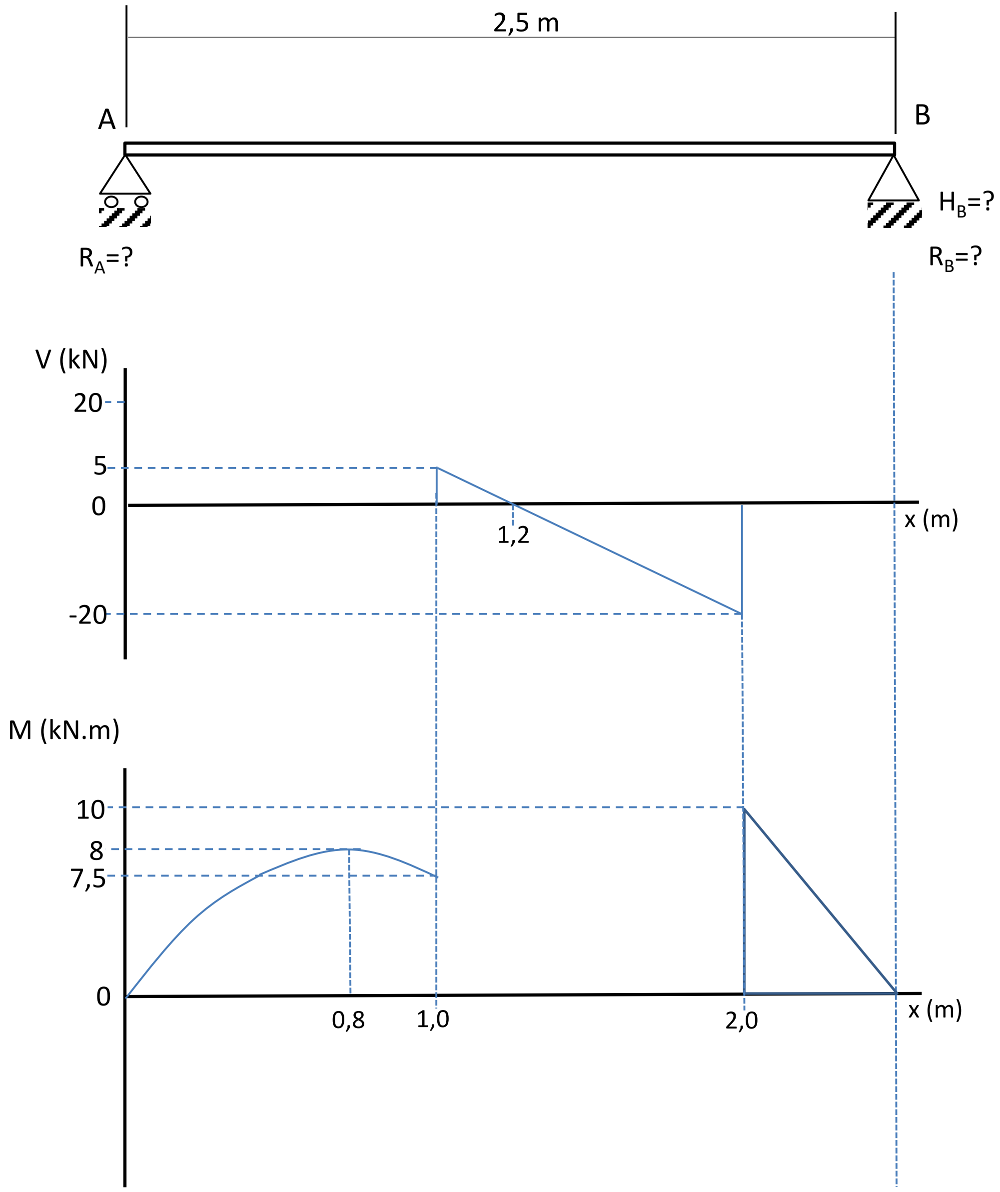
**3ª Questão** (4,0 pontos)

Para a viga simplesmente apoiada mostrada abaixo, pede-se:

(a) desenhar os vetores representantes das reações vinculares, indicando módulo e sentido;

(b) a partir das informações disponíveis, representar as cargas ativas na viga e completar os diagramas de forças cortantes e momentos fletores nas próprias figuras, identificando com clareza as coordenadas de todos os pontos relevantes e justificando as respostas.

Obs.: no trecho entre x=0 e x=1m, considere que a curva é um polinômio de 2º grau e que não há descontinuidade de momento fletor no ponto x=1m.



**Resolução**:

**(1) trecho 0<x<1**

Momento fletor
De acordo com o enunciado, $M(x) = ax^2 + bx + c$; resta determinar $a, b, c$:
$M(0) = 0 \rightarrow c = 0$
$M(0{,}8) = M\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}a + \frac{4}{5}b = 8 \quad (1)$
$M(1) = 7{,}5 = \frac{15}{2} = a + b \; (2)$
Resolvendo (1) e (2) obtém-se

$$a = -\frac{25}{2}, b = 20$$
$$\rightarrow M(x) = -12{,}5x^2 + 20x$$

Força cortante:
$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -25x + 20$ e, assim, a cortante é uma função linear. Com isso, $V(0) = 20\ kN$, conforme mostrado no diagrama de cortantes. Decorre que
$R_A = V(0) = 20\ kN$ (força vincular)
$V(1) = -5\ kN$ (no limite em que $x \rightarrow 1$)

Carregamento externo

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \rightarrow \; -25 = -q(x)$$

$q(x) = 25\ kN/m$ (para baixo)

**(2) trecho 1<x<2**

Carregamento concentrado
$V(x = 1^-) = -5\ kN$ (cálculo anterior)
$V(x = 1^+) = +5\ kN$ (gráfico dado)
$\rightarrow V_1 = -P = -(-10\ kN)$ (para cima, negativo com a convenção adotada)

Força cortante
Pelo gráfico, o coeficiente angular da reta é
$m = -\frac{20}{0{,}8} = -25 \rightarrow V(x) = -25x + C_1$
Como $V(1) = 5$
$5 = -25 + C_1 \rightarrow C_1 = 30$ e
$V(x) = -25x + 30$

Carregamento distribuído
$q(1 < x < 2) = -\frac{dV(x)}{dx} = 25\ kN/m$ (para baixo)

Momento fletor
Como não há indicação de qualquer descontinuidade pela aplicação de um binário concentrado, para $1 \leq x < 2$ vale

$$M(x) = \int_1^2 V(x)dx = -\frac{25}{2}x^2 + 30x + C_2$$
$$M(1) = \frac{15}{2} = -\frac{25}{2} + 30 + C_2 \rightarrow C_2 = -10$$
$$\therefore M(x) = -\frac{25}{2}x^2 + 30x - 10$$

$V(x) = 0 \rightarrow x = 6/5$ é ponto de máximo local
Portanto:

$$M\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{25}{2}\frac{36}{25} + 30\frac{6}{5} - 10 = 8\ kN.m$$
$$M(2) = -\frac{25}{2}4 + 60 - 10 = 0\ kN.m$$

Em $x = 2$ há uma mudança brusca no momento fletor:
$M(2) = 0\ kN.m$
$M(2^+) = 10\ kN.m$
Portanto, foi aplicado um binário $M_1 = -M_o$
$\Longrightarrow -M_0 = +10 \Longrightarrow M_0 = -10\ kN.m$ (sentido horário, negativo de acordo com a convenção adotada)

**(3) trecho 2<x<2,5**

Força cortante
Do gráfico de momentos temos:

$$M(x) = -\frac{10}{0{,}5}x + C_3$$

$M(2) = 10 \rightarrow C_3 = 50 \rightarrow$
$M(x) = -20x + 50$

$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -20\ kN$, constante
Como $M(2{,}5) = 0$ (dado), então, a cortante é decorrente da reação vincular $R_B$. Assim
$R_B = 20\ kN$ (para cima)

Finalmente, com $q(x) = -dV(x)/dx$, nesse trecho não há carregamentos distribuídos.

**Para a pontuação foram adotados os seguintes critérios:**

Reação vincular em A: 0,5 pontos
Reação vincular em B: 0,5 pontos
Carga concentrada em x=1m: 0,5 pontos
Momento concentrado em x=2m: 0,5 pontos
Carga distribuída $q(0 < x < 2)$: 0,5 pontos
Força cortante $V(0 < x < 1)$: 0,5 pontos
Momento fletor $M(1 < x < 2)$: 0,5 pontos
Força cortante $V(2 < x < 2{,}5)$: 0,5 pontos

O diagrama completo é mostrado a seguir: