**Texto complementar n° 1 - Gráficos**

## 1. Introdução.

No estudo de um fenômeno físico são realizadas experiências onde são medidas diversas grandezas ao mesmo tempo. A relação entre essas grandezas pode ser expressa por meio de fórmulas matemáticas, tabelas ou gráficos. Muitas vezes também o significado de uma lei da natureza ou de uma equação fica mais claro se a representamos num gráfico. Neste texto revisamos algumas idéias básicas necessárias à construção e interpretação de gráficos, particularmente das retas.

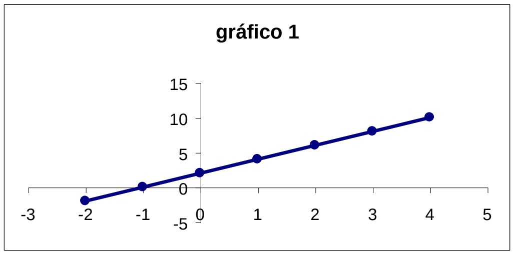
Representamos os gráficos no plano por um sistema de **eixos cartesianos** ortogonais. Para cada eixo adota-se uma escala, sendo que as duas escalas podem ser diferentes.

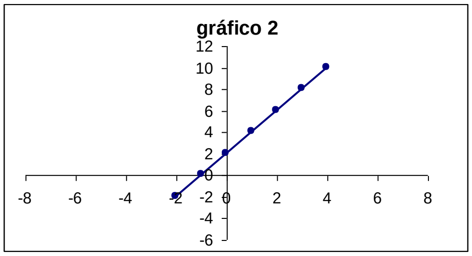
Na construção de um gráfico, a primeira tarefa importante que temos que realizar é **uma escolha conveniente das escalas**. Quando a escala não é conveniente, parte do gráfico pode ficar fora do papel ou, pelo contrário, tão pequeno que não poderemos observar seus detalhes. O procedimento descrito a seguir permite escolher bem a escala.

Determine o tamanho do papel e identifique os valores máximos e mínimos das grandezas que serão representadas nos eixos O*x* e O*y* e, a partir dessas dimensões, calcule a escala que permita ocupar o espaço disponível.

A divisão da escala deve ser definida de modo a permitir a fácil localização e marcação de pontos, bem como uma posterior leitura de valores a partir do gráfico. Isso se consegue usando divisões na escala que sejam múltiplos ou submúltiplos simultâneos de 10, ou seja: ...; 0,1; 1; 10; ...; 0,2; 2; 20; ...; 0,5; 5; 50; ou até mesmo ...; 0,25; 2,5; 25; ..., mas nunca use múltiplos de 3, 7 e 9.

Agora observe os gráficos abaixo e responda rápido: eles representam a mesma função ou funções diferentes?




Para construir um gráfico de uma função organizamos uma tabela com valores convenientes de *x* e os correspondentes valores de *y*. A seguir localizamos no plano (supondo um sistema de eixos cartesianos) cada par (*x*,*y*). O gráfico da função é obtido ligando-se esses pontos; quando eles não estão alinhados numa reta, ligam-se os pontos sucessivos com curvas que acompanham o comportamento indicado pelos pontos vizinhos.

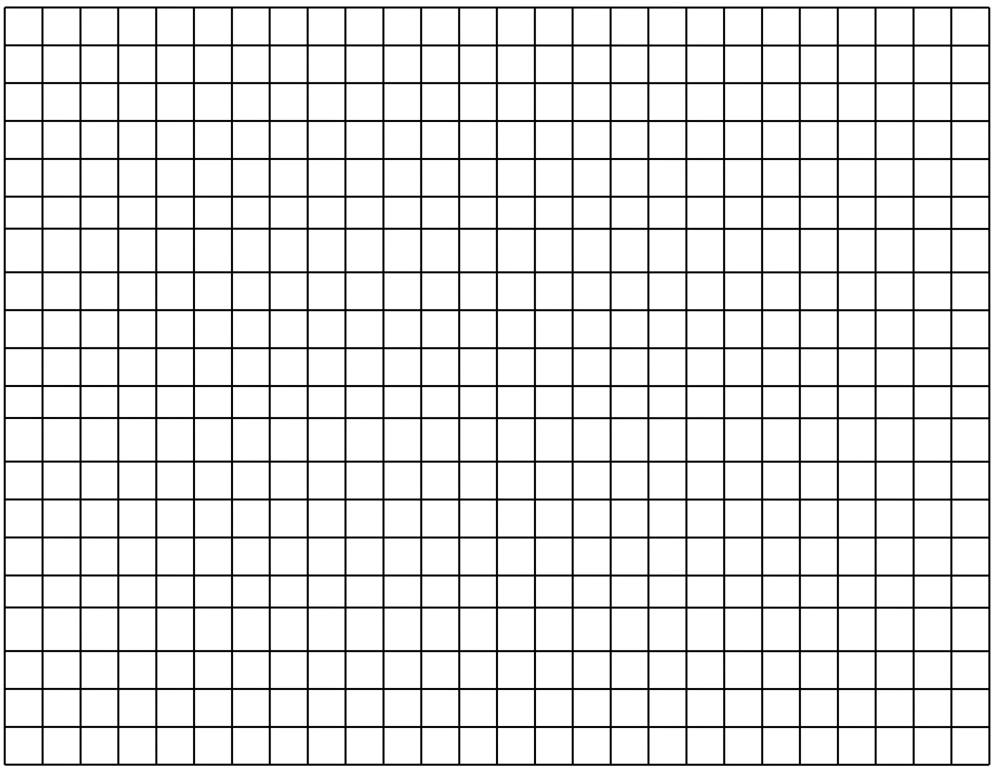
Construa uma tabela com pares de valores *x* e *y* para os dois gráficos acima. Responda novamente: eles representam a mesma função?

## 2. Quando o gráfico é uma reta.

Uma reta é descrita pela função de primeiro grau (primeiro grau porque a variável *x* aparece elevada à potência 1):

$$y = ax + b$$

onde ***a*** e ***b*** são constantes reais. Dizemos que *y* depende linearmente de *x* ou que a relação entre *y* e *x* é linear.



***Exercício 1***. No quadriculado da página anterior, faça os gráficos das 4 funções indicadas abaixo, para *x* variando de – 6 até +6. <u>Escolha a mesma escala para representar todos os gráficos</u>. Escolha com cuidado a escala no eixo *y* de forma a ter a melhor ocupação do espaço, mas de forma que todos os gráficos caibam no papel, no intervalo indicado. Use uma cor diferente para cada gráfico.

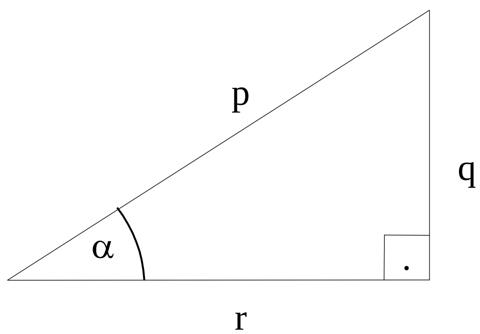
(i) y = 2x + 2 (ii) y = 3x + 2 (iii) y = 2x – 1 (iv) y = –2x + 2

Para cada função dos itens (i), (ii), (iii) e (iv) determine os valores dos coeficientes ***a*** e ***b***.

O que há em comum entre as retas (i) e (ii)? E entre as retas (i) e (iii)? O que distingue a reta do item (iv) das demais?

## 3. Interpretação dos coeficientes *a* e *b* em *y* = *ax* + *b* , quando *x* e *y* têm mesma dimensão.

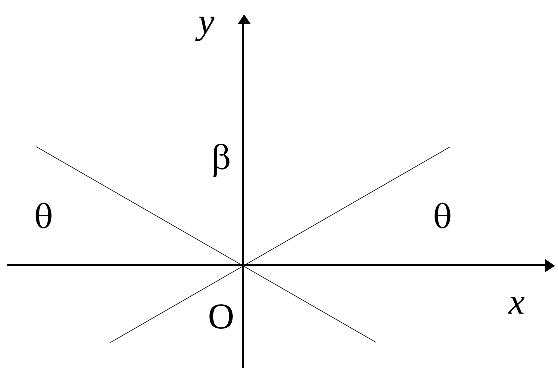
O **número real *a*** é denominado **coeficiente angular** e está associado à **inclinação da reta em relação ao eixo *Ox***. No caso (i), o coeficiente angular é igual a 2; no caso (ii) é igual a 3. Note que a reta descrita pela função do item (ii) é “mais inclinada” que a do item (i). Se ***a*** for negativo (***a*** < 0), como no item (iv), a grandeza *y* decresce à medida que *x* cresce e a reta forma um ângulo maior que 90º com o eixo *x*.




Podemos relacionar o coeficiente angular com o ângulo entre a reta e o eixo *Ox*. Para relembrar, considere o triângulo retângulo abaixo. Os dois lados que formam o ângulo reto são chamados catetos. O lado q é o cateto oposto ao ângulo α e o lado r é o cateto adjacente ao ângulo α. No triângulo retângulo define-se tangente de α (abreviadamente tan α) como a razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente:

$$tg(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{q}{r}$$

Assim, vemos que a constante ***a*** é igual à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *Ox*.




Podemos definir as funções trigonométricas, como seno, coseno e tangente, para qualquer ângulo. A tangente de um ângulo 90° < θ < 180º tem sinal negativo e é igual em módulo à tan (180º - θ). Com esta definição, o coeficiente ***a*** pode ser interpretado como a tangente do ângulo que a reta ***y* = *ax* + *b*** faz com o eixo *x*. Se ***a*** for negativo, o ângulo que a reta forma com o eixo *x* é obtuso e *y* diminui se *x* aumenta. A figura ao lado mostra duas retas com coeficientes angulares de mesmo módulo e sinais contrários.

Chamando de ***a*** o coeficiente angular da reta que forma ângulo θ com o eixo *Ox*, temos ***a*** > 0 e a reta que forma ângulo $\beta = 180^{\circ} - \theta$ tem coeficiente angular ***-a*** .

O número real ***b*** corresponde ao valor de *y* quando *x* = 0, ou seja, indica em que ponto a reta vai "cortar" o eixo *y*. Note que a reta descrita pela função do item (i) cruza o eixo *Oy* em *y* = 2 e a reta do item (iii) cruza o eixo *y* em *y* = -1 . Como o coeficiente angular das duas retas é o mesmo (***a*** = 2), elas têm a mesma inclinação, ou seja, **são paralelas.**

## 4. Interpretação dos coeficientes *a* e *b* em *y = ax + b* , quando *x* e *y* não têm mesma dimensão.

Em física, a maioria das grandezas envolvidas nas equações tem dimensão, isto é, são expressas em relação a uma unidade de medida. Isso faz com que a inclinação do gráfico que expressa um fenômeno físico tenha uma unidade e, na maior parte dos casos, não possa ser interpretada simplesmente como a tangente de um ângulo, necessariamente adimensional.

Entretanto, sempre podemos definir a inclinação da reta a partir de um par qualquer de pontos $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, pela expressão

$$\text{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \quad .$$

Assim, o coeficiente ***a*** é uma grandeza com dimensão física quando as grandezas *x* e *y* não têm a mesma dimensão física. Por exemplo, se *y* mede posição em m e *x* mede tempo em s, a inclinação tem a dimensão de m/s.

É importante, ainda, ter atenção para o fato de que, apesar da reta que representa o gráfico *y*(*x*) formar um ângulo com o eixo *Ox* que pode ser medido, por exemplo, com um transferidor, não podemos dizer que o coeficiente ***a*** seja a tangente desse ângulo. *Isso ocorre porque este ângulo depende da maneira como você escolhe as escalas*. Por isso, deve-se calcular ***a*** usando a expressão para a inclinação dada acima.

Em relação ao coeficiente ***b***, a interpretação é a mesma da situação anterior, exceto pelo fato dele possuir também uma dimensão física na maior parte dos casos.

## 5. Inclinação vs. tangente.

Agora que deixamos claro que somente quando os eixos Ox e Oy estão na mesma escala a inclinação é a tangente do ângulo, vamos entender porque essa inclinação também atende pelo nome coeficiente angular. Vamos, então, recuperar a interpretação simples do caso isométrico, onde a tangente do ângulo é a inclinação.

Vamos lidar com um gráfico de posição por tempo, onde um carro desloca-se numa avenida congestionada entre $x_i$ = 5 m no instante $t_i$ = 3 s e $x_f$ = 95 m no instante $t_f$ = 48 s, com velocidade constante. Note que falamos até agora em gráfico de y por x (x costuma ser o eixo horizontal quando usamos esses dois nomes) e vamos fazer um gráfico x vs t, onde o x vai ser o eixo vertical. Exatamente para que o nome do eixo não importe, temos que adaptar todas as expressões aritméticas para os novos nomes. Assim, a inclinação, que era a razão entre Δy e Δx, agora será a razão entre Δx e Δt.

Para desenhar o gráfico num papel quadriculado de 10 cm por 10 cm, escolhemos uma escala em x tal que 100 m são representados em 10 cm do papel e uma escala de tempo em que 50 s são representados em 10 cm do papel. Os fatores de escala definidos são, portanto, $f_x = \frac{10\,\mathbf{cm}}{100\,\mathbf{m}} = 0{,}1\frac{\mathbf{cm}}{\mathbf{m}}$ e $f_t = \frac{10\,\mathbf{cm}}{50\,\mathbf{s}} = 0{,}2\frac{\mathbf{cm}}{\mathbf{s}}$. Quando calculamos a inclinação da reta no intervalo [18s, 3s], encontramos

$$v = \frac{90\mathbf{m}}{45\mathbf{s}} = 2\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

Se medirmos a tangente do ângulo no papel encontramos, porem,

$$tg(\theta) = \frac{9\,\mathbf{cm}}{9\,\mathbf{cm}} = 1$$

– note que o ângulo é mesmo 45º, que é o arco cuja tangente vale 1, portanto o cálculo está certo. A diferença das respostas vem das escalas, que não poderiam ser iguais uma vez que as dimensões físicas envolvidas nos dois eixos são diferentes. Assim, quando calculamos a tangente trigonométrica, usamos segmentos, portanto

$$tg\theta = \frac{\Delta x\ f_x}{\Delta t\ f_t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{f_x}{f_t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}0{,}5\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

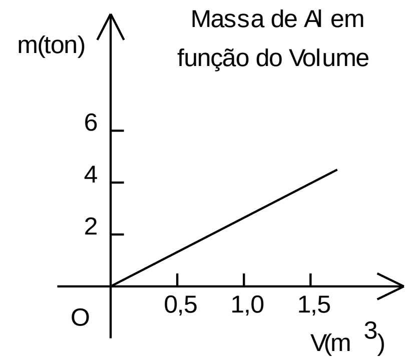
ou seja, a tangente do ângulo está relacionada com a inclinação por um fator que só depende das escalas usadas; no nosso caso, o valor numérico da tangente do ângulo é metade do valor numérico da velocidade do carro expressa em m/s.

Enfim, a inclinação da reta está relacionada com a tangente do ângulo, bastando incluir a razão dos fatores de escala e não nos confundirmos com as unidades. Na prática, nunca medimos o ângulo de inclinação da reta com transferidores, mas sim calculamos a inclinação com a razão Δx/Δt, inclusive porque sempre precisamos desse valor com as unidades correspondentes, que não podem estar embutidas na tangente trigonométrica.

## 6. Variação Proporcional vs. Proporção

Estamos muito habituados a "fazer regra de três" em situações do cotidiano. Calculamos muito rapidamente que, se a dúzia de bananas custa R$2,40, uma dúzia e meia custará R$3,60. Dizemos que o preço da penca é *proporcional* ao número de bananas. Existem muitas outras situações onde há proporcionalidade entre grandezas, por exemplo, um mol de moléculas contém $6\text{x}10^{23}$ moléculas.

**Questão 1.** Chamando de M o número de moles e de N o número de moléculas, escreva uma relação matemática entre o número de moles e moléculas numa substância.

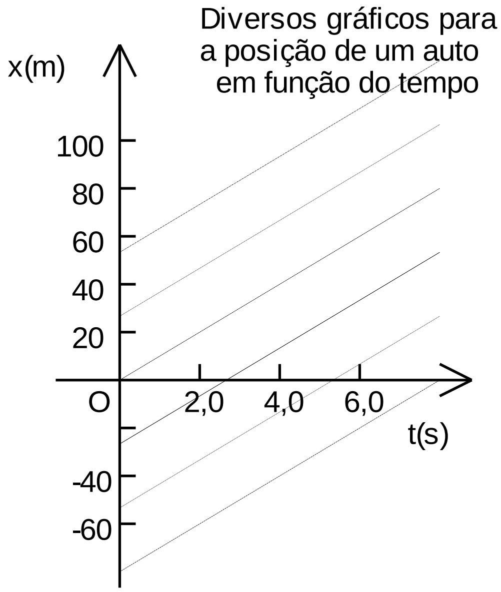



Uma grandeza física que é uma proporção entre duas outras grandezas é a densidade dos corpos homogêneos – a densidade é a razão entre a massa e o volume do corpo. Dizer que o corpo é homogêneo significa dizer que as propriedades de qualquer fragmento são as mesmas do corpo todo.

Para fixar idéias nesta discussão, imagine uma usina de Alumínio. A densidade do Al é 2,7 g/cm$^3$ = 2,7x10$^3$ kg/m$^3$ . A fábrica produz, a partir de um grande corpo de Alumínio que podemos considerar puro nesta discussão, perfis, panelas e papel de Alumínio. Dizer que o grande corpo de Al é homogêneo, em relação à densidade, significa dizer que a proporção entre massa e volume é a mesma para qualquer pedaço desse corpo. Assim, tanto para um pedaço de papel de Alumínio quanto para um caco da panela ou um fragmento de um trilho de cortina, a razão entre massa e volume é $\rho$=2,7x10$^3$ kg/m$^3$. Podemos, portanto, sempre deduzir o volume V de um objeto de Al como V=m/$\rho$. Quando o objeto tem Volume conhecido, podemos deduzir sua massa m como m=$\rho$V.

O gráfico da figura ao lado representa essa propriedade do Alumínio metálico puro nas condições ambientes normais. Note a propriedade, absolutamente importante, do gráfico da massa de Alumínio em função do volume passar pela origem do sistema de coordenadas, identificada pelo ponto O.

Quando lidamos com a velocidade de um objeto, tendemos a pensar que ela representa uma proporção. Afinal, dizer que um automóvel está correndo a 10 m/s significa que ele corre 10 m em 1 s. No entanto, a velocidade não é uma proporção entre a posição e o tempo. Veja, na figuras abaixo, diferentes possíveis gráficos da posição em função do tempo de um automóvel com velocidade v=10m/s.



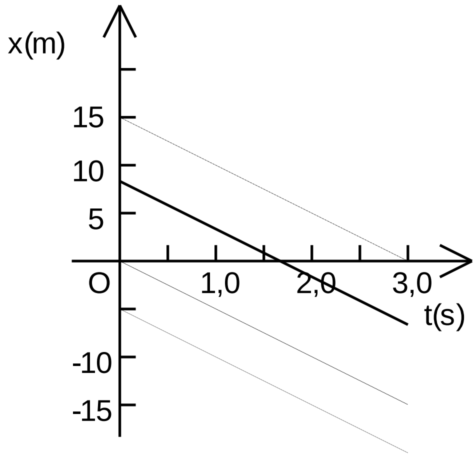

Caso você, equivocadamente, imaginasse a velocidade como uma proporção entre posição e tempo, deduziria que a posição do automóvel em t = 6,0 s é x = 60 m. Vemos no gráfico acima que, exceto na situação descrita pela linha tracejada, a posição do automóvel em t=6,0s NÃO é x = 60 m.

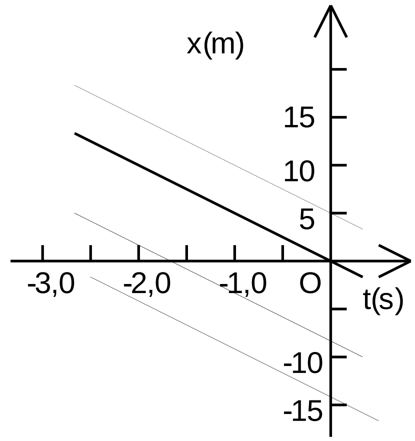
Se a velocidade não é uma proporção, o que ela é? Resposta: é uma *variação proporcional*. Ela representa o deslocamento — uma variação de posição — num *intervalo* de tempo. Assim, a velocidade não é a proporção entre a posição e o tempo, mas sim a proporção entre variação de posição e "variação" de tempo. Quando um corpo mecânico desloca-se à velocidade constante, sua **variação** de posição é **proporcional** ao intervalo de tempo considerado, portanto, é uma **variação proporcional**; ou simplesmente proporção das variações.

**Questão 2**: Qual a propriedade da curva tracejada do gráfico acima que faz com que a velocidade possa ser confundida com uma proporção simples?

Nas situações mais simples onde há apenas um objeto em movimento uniforme, você pode escolher a origem do sistema de coordenadas de maneira que em t = 0 s ele esteja na origem. No entanto, isso não pode ser feito em geral, de maneira que NUNCA devemos pensar na velocidade como uma proporção entre posição e tempo, mesmo que isso dê certo em alguma situação muito particular.

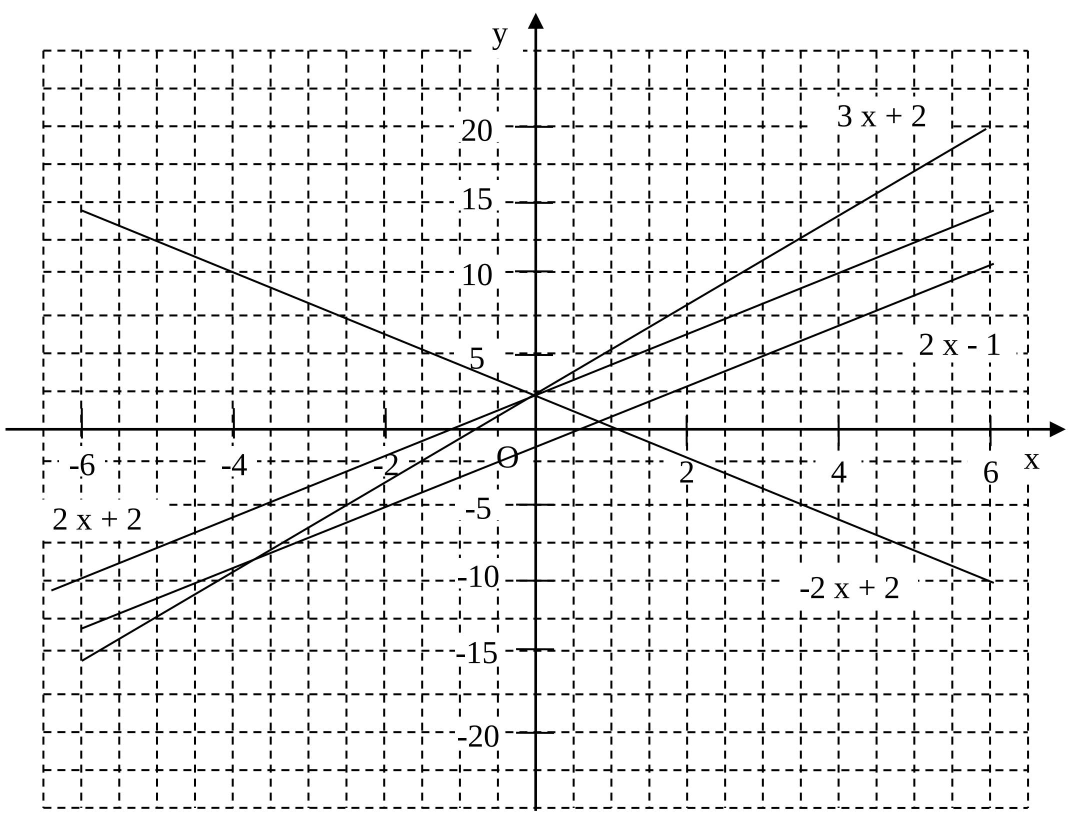
Uma variação proporcional pode, com freqüência, ser expressa por números negativos, o que raramente faz sentido com proporções. Nas figuras abaixo mostramos alguns possíveis gráficos de posição em função do tempo para um objeto à velocidade de -5 m/s. A diferença entre as duas figuras é devida apenas ao intervalo de tempo considerado em cada um dos movimentos.




**Questão 3.** Descreva uma situação física de Movimento Uniforme onde você defina tempos negativos. Veja que basta escolher uma origem para a coordenada tempo que seja posterior ao instante em que você começa a descrever a situação.

Gabarito do Exercício 1.



As escalas escolhidas foram: 1cm para cada unidade no eixo x e 1 cm para cada 5 unidades no eixo y.

Se você teve dificuldade em desenhar os gráficos, lembre que bastam dois pontos para desenhar uma reta. Deve-se escolher pontos distantes para minimizar o erro gráfico, que é devido ao tamanho da ponta do lápis e à precisão da localização do ponto no papel pelo olho humano. Assim, para traçar a reta -2x+2, localizamos os pontos extremos: (-3,10) e (3,14) e os ligamos por uma reta. Para ver se acertamos, conferimos que em x= 0 ele passa pelo ponto y = 2, o que está de acordo com a equação.