Métodos Estatísticos em Física Experimental – 2015

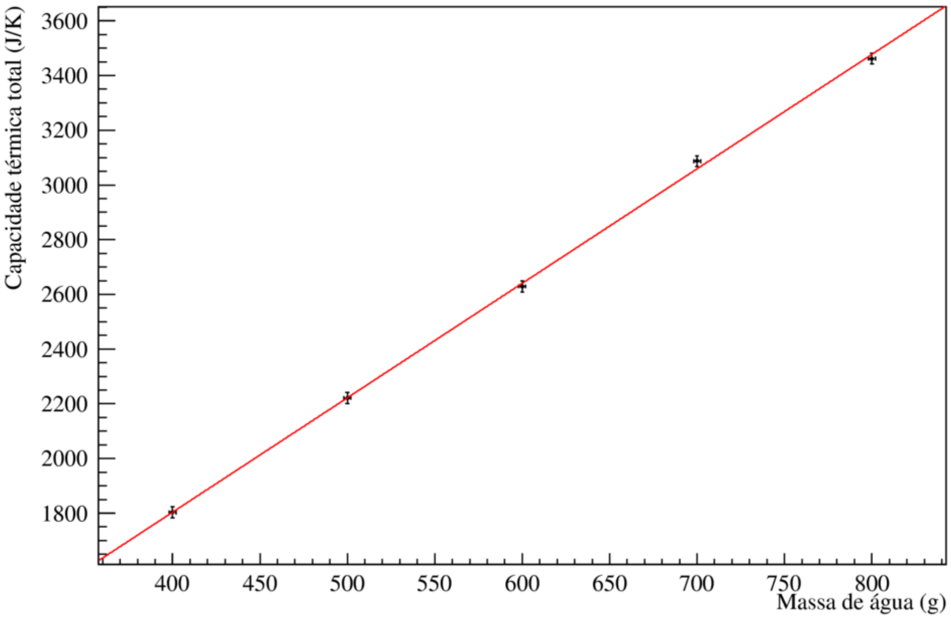
Compilação de exercícios feitos em aula – parte 2 (exercícios 8 a 12)

8) O gráfico apresenta os resultados do ajuste pelo WebRoot* da capacidade térmica total de um calorímetro (uma garrafa térmica de alumínio) em função da massa de água nele contido [dados adaptados do artigo "*Calorímetro Didático*", de J.H. Vuolo e C.H. Furukawa, publicado na Rev. Brasileira de Ensino de Física **17** (1995) p.140]. A função ajusta foi $y = [0] + [1]\,x$.

(**a**) Escreva os valores obtidos para a capacidade térmica do calorímetro e para o calor específico da água de maneira adequada.

(**b**) Com base nos resultados deste ajuste, determine a capacidade térmica total do calorímetro com 550 g de água.

(**c**) Por que a incerteza da capacidade térmica do conjunto calorímetro mais 550 g de água (item **b**) é menor que a incerteza apenas da capacidade térmica do calorímetro (item **a**)?



Resultados do ajuste

Número de parâmetros	2
Chi²	2.46282
Número de graus de liberdade	3

parâmetro	Valor	Incerteza
0	129.753	42.262
1	4.18441	0.0685581

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 1786.08 & -2.82012 \\ -2.82012 & 0.00470021 \end{bmatrix}$$

Matriz de correlação

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -0.97 \\ -0.97 & 1.00 \end{bmatrix}$$

*Grupo de Íons pesados Relativísticos (GRIPER) do IFUSP (2011

---

9) Considere dois experimentos nos quais uma mesma grandeza, x, foi determinada como a média de muitas medições sujeitas apenas a erros aleatórios. Identificando os valores médios de cada experimento como x_1 e x_2 e os correspondentes desvios-padrões das médias como σ_1 e σ_2 (não necessariamente iguais), a função Verossimilhança que possibilita relacionar essas informações experimentais com x_0, o valor verdadeiro da grandeza x é dada por:

$$\mathcal{L}(\{x_1, x_2\}/x_0) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_1\ \sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

a) Para obter a função Verossimilhança apresentada no enunciado é preciso considerar que a função densidade de probabilidade de cada uma das médias, x_1 e x_2, seja gaussiana. Com base nas informações do enunciado, é razoável supor que a função densidade de probabilidade dessas médias seja gaussiana?

b) Mostre que a estimativa de Máxima Verossimilhança para o valor da grandeza x é dada por:

$$\tilde{x} = \frac{x_1\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + x_2\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2}$$

---

10) Considere o conjunto (completamente artificial) de dados (x_i, y_i, σ_i) apresentados na tabela 3.1 e na figura 3.1.

Tabela 10.1 – Dados artificiais para ajuste

x_i	y_i	σ_i
0	1,0	0,5
2	1,0	0,5
4	4,0	0,5
6	6,0	0,5
8	7,0	0,5
10	11,0	0,5

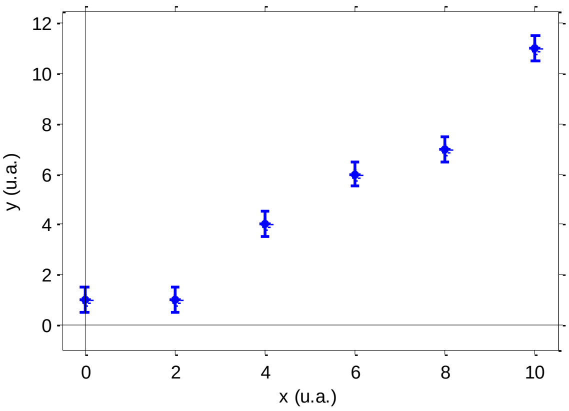


Figura 10.1 – Gráfico com dados da Tabela 1

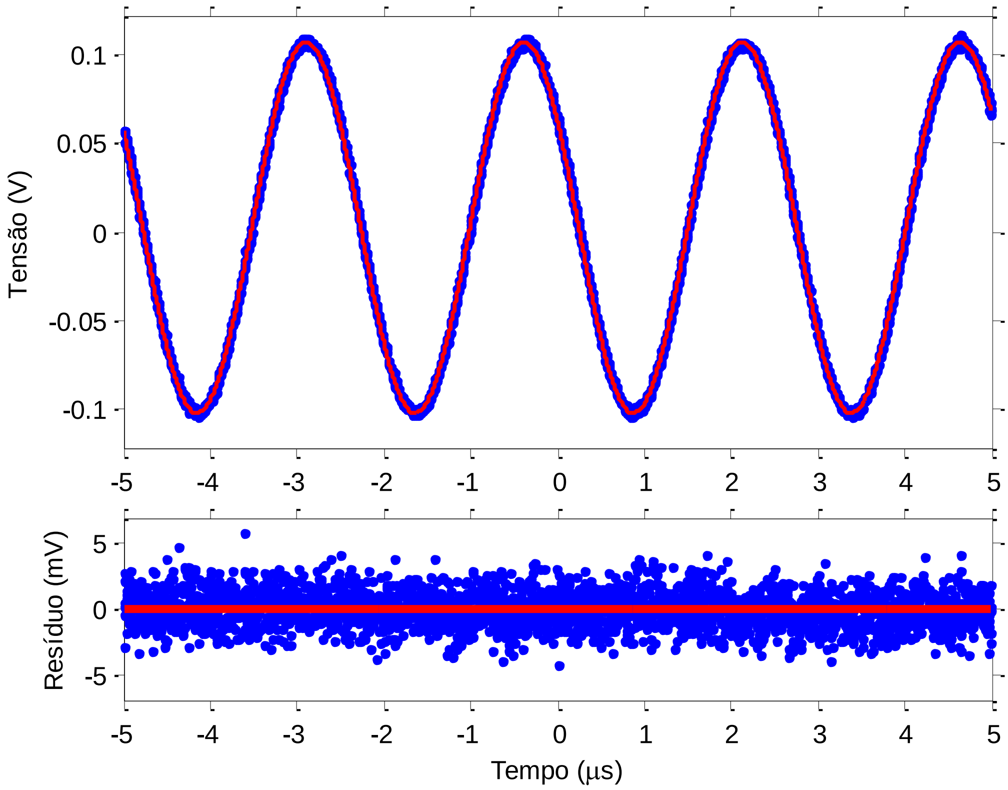
a) Faça o ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, de uma reta do tipo $y = a + b.x$ e determine os parâmetros a e b com a respectiva matriz de covariâncias. Escreva o resultado final para os parâmetros a e b com suas respectivas incertezas, bem como a covariância e o coeficiente de correlação entre eles.

b) Faça um segundo ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, de uma reta do tipo $y = A + B.X$, com $X = x - 5$ e determine os parâmetros A e B com a respectiva matriz de covariâncias. Escreva o resultado final para os parâmetros A e B com suas respectivas incertezas, bem como a covariância e o coeficiente de correlação entre eles.

c) Finalmente, faça um terceiro ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, de uma reta do tipo $y = \alpha + \beta.\chi$, com $\chi = x - 10$ e determine os parâmetros α e β com a respectiva matriz de covariâncias. Escreva o resultado final para os parâmetros α e β com suas respectivas incertezas, bem como a covariância e o coeficiente de correlação entre eles.

---

11) A figura abaixo apresenta dados (reais) medidos com um osciloscópio digital da tensão em função do tempo de um sinal oscilatório de frequência bem conhecida. Como as incertezas dos dados não são conhecidas, inicialmente foi feito o ajuste dos N = 2500 dados pela função modelo $V(t) = a_1 \cos(2\pi f t) + a_2 \sin(2\pi f t) + a_3$ usando 1V como incerteza de cada dado. Os valores numéricos obtidos nesse ajuste inicial foram: $\chi^2 = 0{,}00477$; $\tilde{a}_1 = 0{,}0598025 \pm 0{,}0283522$; $\tilde{a}_2 = -0{,}0852298 \pm 0{,}0282174$ e $\tilde{a}_3 = 0{,}0022374 \pm 0{,}0200005$



a) Qual parece ser a incerteza de cada dado quando se analisa o gráfico de resíduos?

b) Considerando-se os resultados do ajuste inicial pelo MMQ (apresentados em aula), qual é a melhor estimativa para a incerteza dos dados devida aos erros aleatórios?

c) Escreva o resultado final para os parâmetros do ajuste (isto é, com as incertezas corrigidas, com os algarismos significativos escritos de forma adequada e com unidades).

d) Qual é a amplitude (e respectiva incerteza) desse sinal? Considere $Amp = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$).

---

12) Responda as questões abaixo que envolvem os testes "t" e "z". Se necessário, utilize a Tabela 12.1 que apresenta os valores para o módulo da variável aleatória $t = \frac{x - x_0}{\tilde{\sigma}_x}$ que definem os intervalos de confiança de 68,3% e 95,5% em termos do número de dados, N, usados para estimar $\tilde{\sigma}_x$. Os valores que definem os limites para a variável aleatória $z = \frac{x - x_0}{\sigma_x}$ correspondem ao caso em que $N = \infty$.

a) Qual é o (menor) intervalo que encerra uma probabilidade de 68,3% de se obter um dado que siga uma função densidade de probabilidade gaussiana com média 5,0 e desvio-padrão verdadeiro 2,0.

b) Qual é o intervalo de 95,5% para o valor verdadeiro da grandeza que seria estimado quando o valor medido for 9,3 com desvio-padrão verdadeiro de 2,0. Considere que a função densidade de probabilidade que rege essa medida seja gaussiana.

c) Como mudam as respostas dos itens **a** e **b** se os valores dos desvios padrões indicados não fossem apenas estimativas dos desvios padrões obtidas a partir de N=5 dados?

d) E se a estimativa tivesse sido feita com N=20 dados?

e) Explique, qualitativamente, por que a largura dos intervalos de confiança para a variável aleatória t (itens **c** e **d**) são maiores do que os correspondentes intervalos para z (itens **a** e **b**). Explique, também, por que a diferença entre as larguras dos intervalos de confiança para t e para z diminuem conforme aumenta o número de dados, N.

Tabela 12.1. Valores de t_I e t_{II}, que definem os intervalos de confiança de 68,3% e 95,5%, para alguns valores do número de dados na medida, **N**.

N	t_I $\alpha \cong$ 68,3%	t_{II} $\alpha \cong$ 95,5%
2	1,84	14,0
3	1,32	4,53
4	1,20	3,31
5	1,14	2,87
10	1,06	2,32
20	1,03	2,14
∞	1	2