Métodos Estatísticos em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

1º semestre de 2015

Aulas 11 e 12

O método dos mínimos quadrados (revisão)

- O método dos mínimos quadrados consiste em determinar os parâmetros como àqueles que minimizam a seguinte somatória:

$$Q(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - G(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right)^2$$

onde a função modelo, $G(x_i, \vec{a})$, descreve a relação entre o valor esperado do i-ésimo dado experimental com os parâmetros a serem estimados. Por exemplo, no caso do ajuste de uma reta $G(x, \vec{a}) = a_1 + a_2 x$

Ajuste de funções lineares nos parâmetros pelo MMQ (revisão)

- Escrevendo a função modelo como:

$$G(x,\vec{a}) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_M g_M(x)$$

- O sistema linear de equações do MMQ pode ser escrito de forma matricial: $\overline{D} = \mathbf{M}\overline{\tilde{A}}$

$$D_l = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i g_l(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad M_{l,c} = \sum_{i=1}^{N} \frac{g_l(x_i) g_c(x_i)}{\sigma_i^2}$$

cuja solução é: $\overline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_M \end{bmatrix} = (\mathbf{M}^{-1})\overline{D}$ com $\mathrm{V}_{\tilde{A}} = \mathbf{M}^{-1}$

Exemplos de ajuste de funções lineares nos parâmetros pelo MMQ

$$G(x,\vec{a}) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_M g_M(x)$$

- Posição em função do tempo de um corpo em queda livre partindo do repouso:

$$G = a_1 + a_2 t^2,$$

o que implica $g_1 = 1$ e $g_2 = t^2$

- Tensão da rede elétrica em função do tempo medida em um osciloscópio:

$$G = a_1 \cos(2\pi f t) + a_2 \sin(2\pi f t),$$

o que implica $g_1 = \cos(2\pi f t)$ e $g_2 = \sin(2\pi f t)$

Exemplo numérico de ajuste de uma função linear nos parâmetros pelo MMQ

$$G(x,\vec{a}) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_M g_M(x)$$

- Considere o volume de combustível em trajetos com diferentes composições de trechos urbano e rodoviário

  a) **42,2** litros em **120,3** km na cidade e **451,6** km na estrada
  b) **27,2** litros em **195,1** km na cidade e **115,3** km na estrada
  c) **35,8** litros em **10,2** km na cidade e **523,5** km na estrada
  d) **31,9** litros em **320,9** km na cidade
  e) **29,4** litros em **110,6** km na cidade e **277,4** km na estrada

$$y = \begin{bmatrix} 42{,}2 \\ 27{,}2 \\ 35{,}8 \\ 31{,}9 \\ 29{,}4 \end{bmatrix} \qquad g_1 = \begin{bmatrix} 120{,}3 \\ 195{,}1 \\ 10{,}2 \\ 320{,}9 \\ 110{,}6 \end{bmatrix} \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 451{,}6 \\ 115{,}3 \\ 523{,}5 \\ 0 \\ 277{,}4 \end{bmatrix}$$

Resultados do exemplo numérico:

$$y = \begin{bmatrix} 42{,}2 \\ 27{,}2 \\ 35{,}8 \\ 31{,}9 \\ 29{,}4 \end{bmatrix} \qquad g_1 = \begin{bmatrix} 120{,}3 \\ 195{,}1 \\ 10{,}2 \\ 320{,}9 \\ 110{,}6 \end{bmatrix} \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 451{,}6 \\ 115{,}3 \\ 523{,}5 \\ 0 \\ 277{,}4 \end{bmatrix}$$

Considerando que a incerteza dos valores de y sejam $\sigma_i = 0{,}1\ l$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0{,}09962\ (26)\ \ l/km \\ 0{,}06661\ (14)\ \ l/km \end{bmatrix}$$

$$cov(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = -1{,}365.10^{-8}\ \ l^2/km^2 \qquad \rho_{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2} = -0{,}365$$

E a qualidade do ajuste pode ser avaliada pelo teste de χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - G(x_i, \tilde{a})}{\sigma_i} \right)^2 = 4{,}64$$

O teste de χ^2

- O teste de χ^2 avalia se a dispersão dos pontos ao redor da função ajustada é consistente com as incertezas dos dados. Para dados estatisticamente independentes:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - G\left(x_i, \vec{\tilde{a}}\,\right)}{\sigma_i} \right]^2$$

cujo valor esperado é $\langle \chi^2 \rangle = N - P = \nu$, onde N é o número de dados e P o número de parâmetros e $\nu = N - P$ é o número de graus de liberdade. Por esse motivo, é comum analisar a grandeza $\chi^2_{Red} = \frac{\chi^2}{\nu}$

Teste de hipótese usando o χ^2

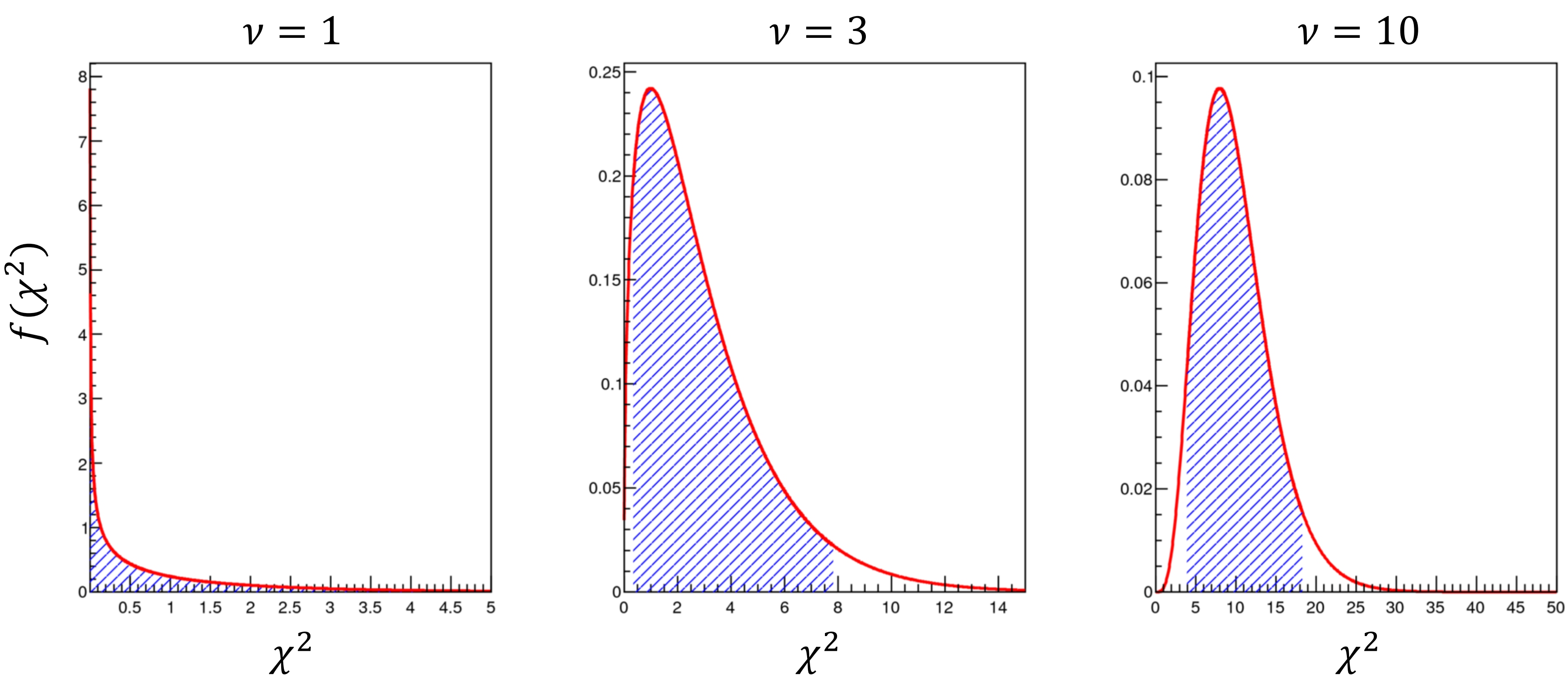
- Se a função ajustada for adequada (isto é, se o gráfico de resíduos não tiver estrutura clara), e a função densidade de probabilidade dos dados forem gaussianas com incertezas conhecidas, a função densidade de probabilidade do χ^2 é dada por:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\left(\frac{\nu}{2}\right)-1} e^{\frac{-\chi^2}{2}}$$

onde $\Gamma(n)$ é a função gama, definida para n inteiro ou semi-inteiro. Se n for inteiro, $\Gamma(n) = (n-1)!$, mas se n for semi-inteiro, $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$.

Teste de hipótese usando o χ^2 (parte II)

- A função densidade de probabilidade de χ^2 tem uma assimetria positiva bastante pronunciada quando o número de graus de liberdade, $\nu = N - P$, é pequeno:



Os testes z e t – intervalos de confiança

- Se os dados seguem uma função densidade de probabilidade gaussiana com desvio-padrão conhecido, a variável aleatória

$$z = \frac{x - x_0}{\sigma_x}$$

também segue uma gaussiana com valor médio 0 e desvio-padrão 1, e os intervalos de confiança podem ser obtidos diretamente de uma tabela de integrais da gaussiana. Em especial é muito usado o fato de que $P(|z| \leq 1) \cong 68{,}3\%$ e que $P(|z| \leq 2) \cong 95{,}5\%$

Os testes z e t – intervalos de confiança
(parte II)

No entanto, quando a variável x seguir uma função densidade de probabilidade gaussiana, mas o desvio-padrão de x não for conhecido, mas tiver sido estimado a partir de N dados, a variável aleatória

$$t = \frac{x - x_0}{\tilde{\sigma}_x}$$

não terá f.d.p. gaussiana. De fato, como é mais provável subestimar o desvio-padrão ($\tilde{\sigma} < \sigma$) do que superestimá-lo ($\tilde{\sigma} > \sigma$), a largura dos intervalos de confiança para a variável aleatória t serão sempre maiores do que para z.

Os testes z e t – intervalos de confiança (parte III)

$$t = \frac{x - x_0}{\tilde{\sigma}_x}$$

Valores de t_I e t_{II}, que definem os intervalos de confiança de 68,3% e 95,5%, para alguns valores do número de dados *N* na medida.

N	t_I a=68,3%	t_{II} a=95,5%
2	1,84	14,0
3	1,32	4,53
4	1,20	3,31
5	1,14	2,87
10	1,06	2,32
20	1,03	2,14
∞	1	2

As funções densidade de probabilidade de z e t

$$z = \frac{x - x_0}{\sigma_x}$$

$$t = \frac{x - x_0}{\tilde{\sigma}_x}, \text{ com } \nu = 3$$