Métodos Estatísticos em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

1º semestre de 2015

Aula 8

Lei geral de propagação de incertezas

- A incerteza de uma grandeza f, calculada com base em resultados experimentais x, y, ... com incertezas σ_x, σ_y, ... pode ser determinada usando:

$$\sigma_f^2 = \langle (f - f_0)^2 \rangle$$

onde $f = f(x, y)$ e $f_0 = f(x_0, y_0)$.

- A Lei geral de propagação de incertezas é obtida pela expansão da função f em série de Taylor até a primeira ordem:

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

Lei geral de propagação de incertezas

- Assim, obtêm-se:

$$\sigma_f^2 = \left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)\right]^2 \right\rangle$$

Sabendo que $\sigma_\emptyset^2 = \langle(\emptyset - \emptyset_0)^2\rangle$, a Lei geral de propagação de incertezas é obtida:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) cov(x, y)$$

Onde $cov(x, y) = \langle(x - x_0)(y - y_0)\rangle$ é a covariância entre x e y.

Limitações da lei geral de propagação de incertezas

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)cov(x,y)$$

Para a aplicabilidade dessa lei a expansão de f em primeira ordem deve ser adequada:

- Sempre verdade no caso de funções lineares em $x, y, \ldots$
- No caso de funções não lineares, a aproximação deve ser adequada dentro de um intervalo de algumas incertezas ao redor dos valores medidos
  - **É mais fácil satisfazer essa condição quanto menores forem as incertezas referentes aos termos não lineares**

Um uso importante da lei geral de propagação de incertezas

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)cov(x,y)$$

Se as grandezas x e y forem estatisticamente independentes (correlação zero) a contribuição da incerteza de cada grandeza para a incerteza de f pode ser analisada separadamente:

- A contribuição da incerteza de x para f é dada por

$$\sigma_{f_{[x]}} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right|$$

➢ **Útil para planejamento de experimentos pois permite identificar qual das grandezas (x, y, ...) contribui mais para a incerteza de f**

As covariâncias

- As covariâncias podem tanto aumentar quanto diminuir a incerteza de f
  - O efeito das covariâncias depende das derivadas parciais e da própria covariância
- Em ajustes e em resultados de medições simultâneas de muitas grandezas é preciso fornecer a matriz de covariâncias, $M_{i,j} = \langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(x,y) & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

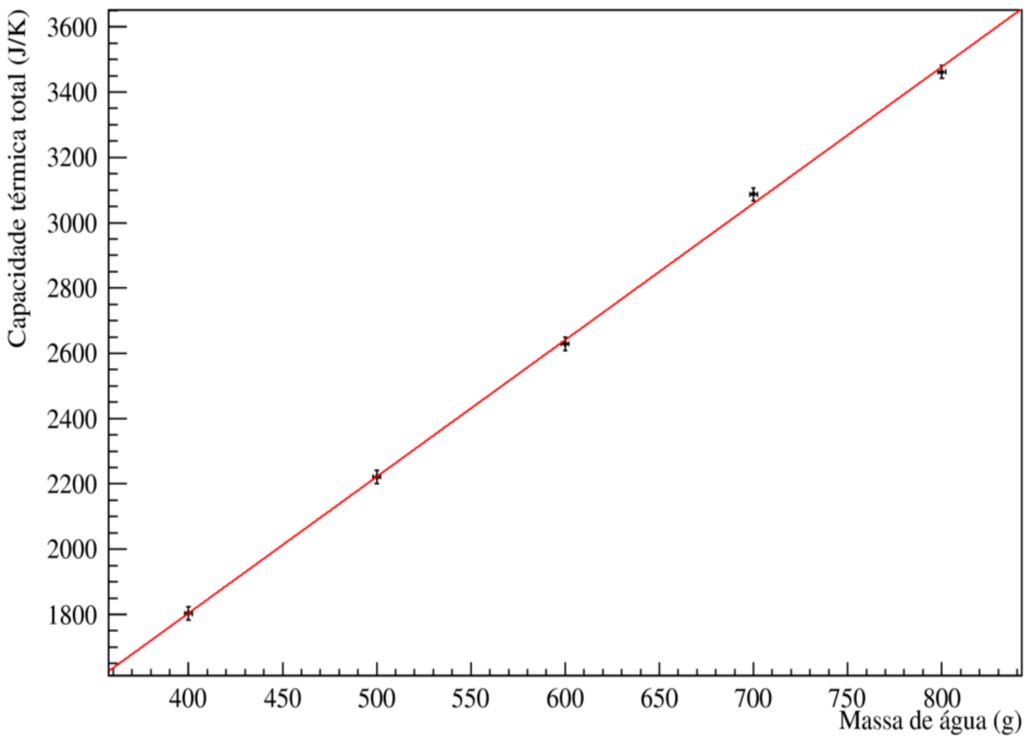
As correlações

- Correlações são covariâncias normalizadas pelo produto dos desvios-padrões correspondentes, $\rho_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$
  - As correlações são limitadas ao intervalo de -1 a +1
  - Dados independentes tem correlação zero
  - Quanto mais o módulo da correlação se aproxima de 1, mais correlacionados são as grandezas
- A matriz de correlações, $C_{i,j} = \rho_{i,j}$, é:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho(x,y) \\ \rho(x,y) & 1 \end{bmatrix}$$

Um exemplo de covariâncias

Parâmetros de ajustes usualmente tem covariâncias importantes, como no exemplo abaixo que mostra o ajuste da capacidade térmica total em função da massa de água no calorímetro. Dados adaptados do artigo "*Calorímetro Didático*", de J.H. Vuolo e C.H. Furukawa [Rev. Bras. de Ensino de Física **v.17** (1995) p.140]. Ajuste pelo WebRoot* de uma função y=[0] + [1]*x



Resultados do ajuste

Número de parâmetros		**2**
Chi2		**2.463**
Número de graus de liberdade		**3**

parâmetro	**Valor**	**Incerteza**
0	**129.753**	**42.262**
1	**4.18441**	**0.0685581**

Matriz de covariância

1786.08	**-2.82012**
-2.82012	**0.00470021**

Matriz de correlação

1.00	**-0.97**
-0.97	**1.00**

*O WebRoot foi desenvolvido pelo Grupo de Íons pesados Relativísticos (GRIPER) do IFUSP (2011)