



CAPITULO 3

Aula 14

Conceitos básicos de dispositivos semicondutores: silício dopado, mecanismos de condução (difusão e deriva), exercícios.
(Cap. 3 p. 117-121)

Eletrônica I – PSI3321

Programação para a Segunda Prova

| | | | | |
|-----------------|-------|--|--|-----------------------|
| 10 ^a | 07/04 | Circuito retificador em ponte. Circuito retificador de meia onda com o capacitor de filtro. | Sedra, Cap. 3 p. 109-111 | |
| 12 ^a | 02/05 | Retificador de onda completa com capacitor de filtro, superdiodo. Exercícios (exemplo 3.9). | Sedra, Cap. 3 p. 112-115 | Teste 06 9h20-9h35 |
| 13 ^a | 05/05 | Circuitos limitadores, circuitos grampeadores, dobrador de tensão, exercícios: 3.27, 3.28. | Sedra, Cap. 3 p. 115-118 | |
| 14 ^a | 09/05 | Conceitos básicos de dispositivos semicondutores: silício dopado, mecanismos de condução (difusão e deriva), exercícios. | Aula avulsa + Sedra, Cap. 3 p. 117-121 | Teste 07 9h20-9h35 |
| 15 ^a | 12/05 | Modelos de cargas, junção pn na condição de circuito aberto, potencial interno da junção, junção pn polarizada, exercícios. | Aula avulsa + Sedra, Cap. 3 p. 121-126 | |
| 16 ^a | 16/05 | Distribuição de portadores minoritários na junção pn diretamente polarizada. Dedução elementar da equação de corrente na junção pn, exercícios. | Aula avulsa + Sedra, Cap. 3 p. 127-128 | Teste 08 9h20-9h35 |
| 17 ^a | 19/05 | Capacitância de difusão, largura da região de depleção da junção pn polarizada, capacitância de depleção. a junção pn na região de ruptura (efeito zener e efeito avalanche), exercícios. | Sedra, Cap. 3 p. 124-125 | |
| 18 ^a | 23/05 | A junção pn na região de ruptura (efeito zener e efeito avalanche), exercícios. | Sedra, Cap. 3 p. 128-129 | Teste 09 9h20-9h35 |
| 19 ^a | 26/05 | Estruturas e símbolos dos transistores bipolares de junção, definição dos modos de operação (corte, ativo, saturação) do TBJ, operação do transistor npn no modo ativo (polarização e distribuição de portadores minoritários). | Sedra, Cap. 5 p. 235-238 | |
| 20 ^a | 30/05 | Equações das correntes no transistor (definição do ganho de corrente em emissor comum - β - e do ganho de corrente em base comum - α), modelos de circuitos equivalentes para grandes sinais do transistor npn operando no modo ativo, exercícios. | Sedra, Cap. 5 p. 239-243. | Teste 10 9h20-9h35 |

Eletrônica I – PSI3321

Programação para a Segunda Prova (cont.)

| | | | | |
|-----------------|-------|---|--|-----------------------|
| 21 ^a | 02/06 | Análise cc de circuitos com transistores, exercícios selecionados: 5.1, 5.4, 5.10. | Sedra, Cap. 5 p. 246 + 264-269 | |
| 22 ^a | 06/06 | O TBJ como amplificador para pequenos sinais (as condições c.c., a corrente de coletor e a transcondutância) | Sedra, Cap. 5, p. 263-264; p. 275-276. | Teste 11 9h20-9h35 |
| 23 ^a | 09/06 | A corrente de base e a resistência de entrada da base, a resistência de entrada do emissor. Ganho de tensão, Exemplo 5.38, modelos equivalentes (modelos π -híbrido e T) | Sedra, Cap. 5, p. 276-279 | |
| 24 ^a | 13/06 | Aplicação dos modelos equivalentes para pequenos sinais, Efeito Early. O amplificador emissor comum (EC) - Exercício 5.43 | Sedra, Cap. 5 p. 290-293 | Teste 12 9h20-9h35 |
| 25 ^a | 20/06 | O amplificador emissor comum com resistência de emissor | Sedra, Cap. 5 p.293-295 | Teste 13 9h20-9h35 |
| 26 ^a | 23/06 | O amplificador base comum (BC) | Sedra, Cap. 5 p. 296-297 | |
| 27 ^a | 27/06 | O amplificador coletor comum (CC) | Sedra, Cap. 5 p. 297-302 | Teste 14 9h20-9h35 |
| 28 ^a | 30/06 | Aula de Exercícios | | |

2^a. Semana de Provas (01/07 a 07/07/2017)

Data: xx/xx/2017 (xxxx-feira) – Horário: xx:xxhs

14ª Aula:

Silício dopado, mecanismos de condução (difusão e deriva)

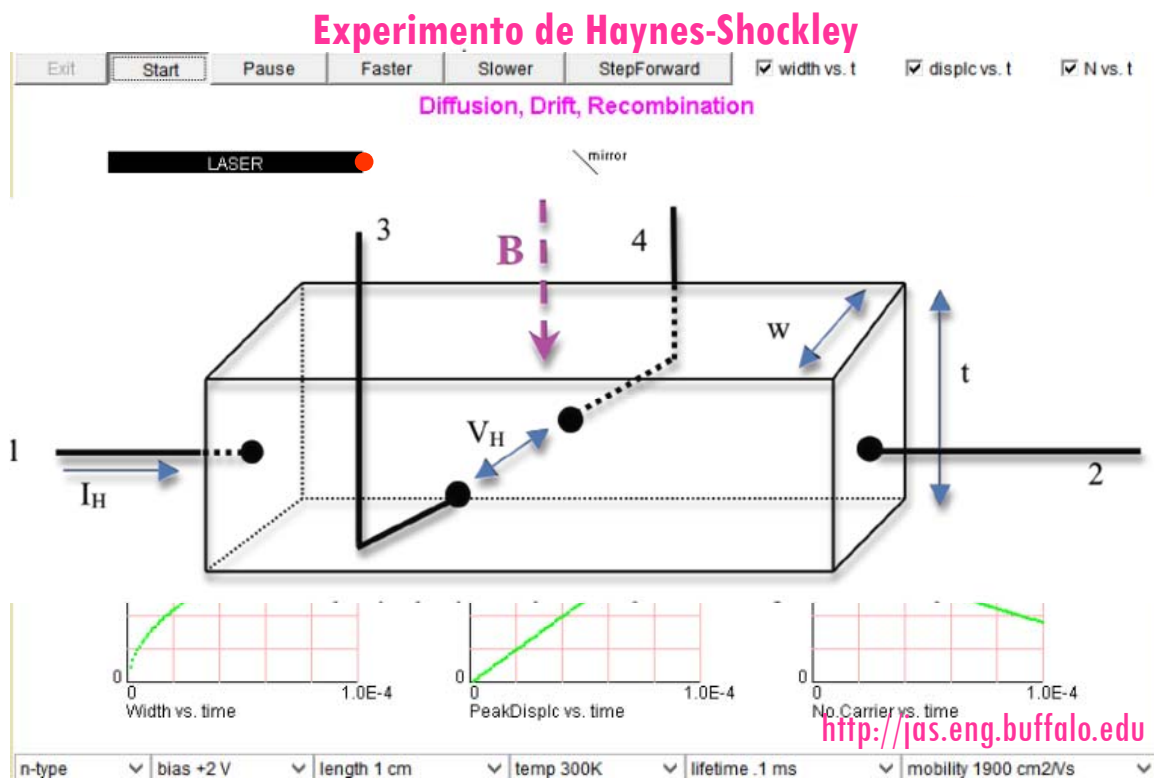
Ao final desta aula você deverá estar apto a:

- Descrever os principais mecanismos de geração de corrente elétrica em um material semiconductor
- Apresentar a estrutura cristalina 3D e sua representação 2D, dando uma ordem de grandeza das dimensões envolvidas
- Explicar a existência de elétrons livres na estrutura e o conceito de lacunas (buracos)
- Calcular a concentração intrínseca de portadores livres
- Explicar as consequências da dopagem de materiais semicondutores
- Olhar a Lei de Ohm do lado de dentro do material, explicando os conceitos de condutividade e mobilidade

Materiais para Eletrônica

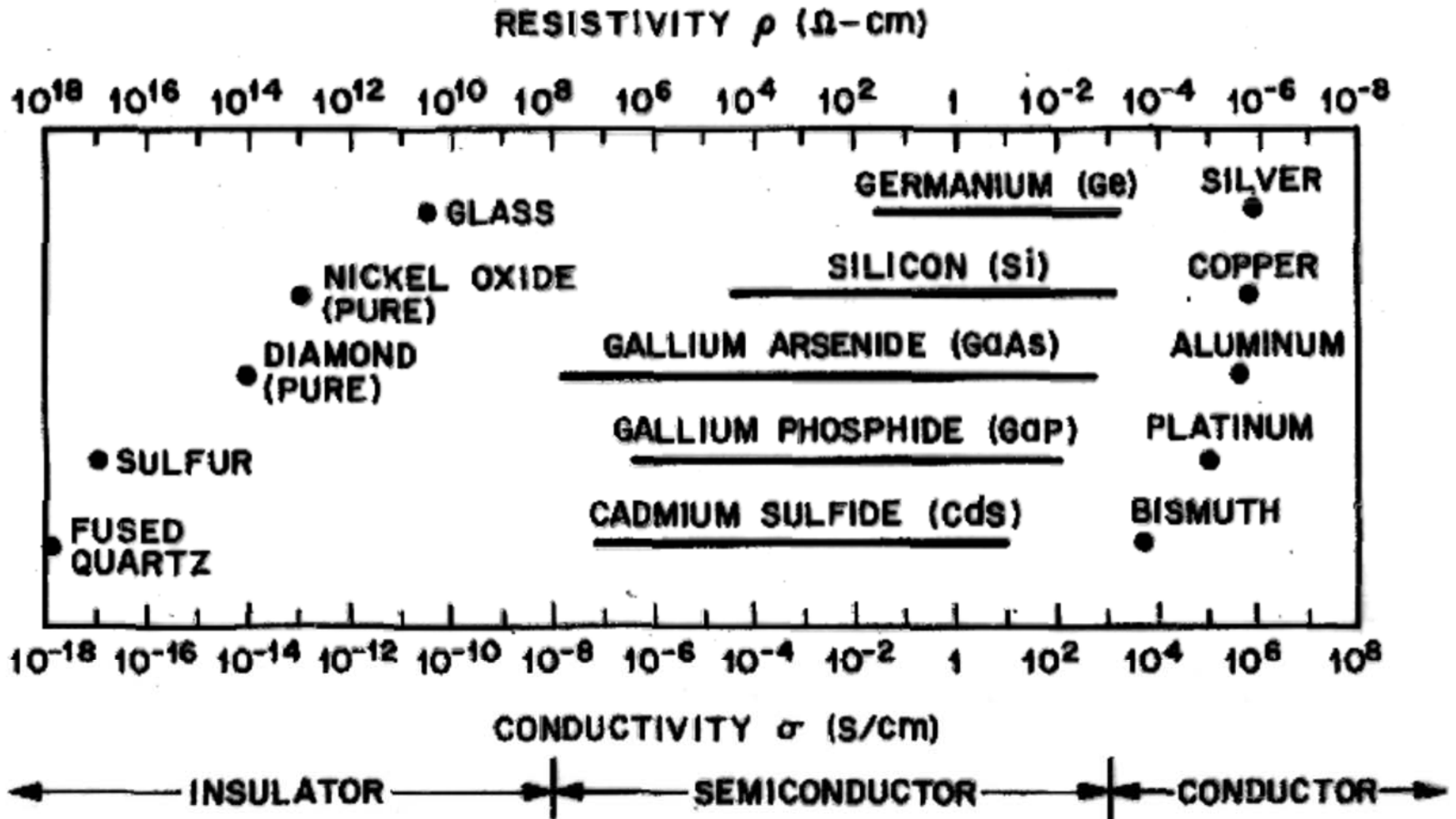
A resistividade de um semicondutor é sensível à:

- Temperatura
- Iluminação
- Campos magnéticos
- Pequenas doses de impurezas



Materials para Eletrônica

(pequenas doses de impurezas)



Estrutura Cristalina

Os materiais semicondutores são encontrados na forma cristalina, policristalina e amorfa.

Estudaremos basicamente os materiais semicondutores na forma cristalina:

- Os átomos estão arrançados de uma forma periódica tridimensional
- A esse arranjo chamaremos de rede cristalina

Materiais para Semicondutores

| IA | | | | | | | | | | | | VIIIA | | | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1 1.008 H Hydrogen | | Transition Metals | | | | | | | | | | 5 10.811 B Boron | 6 12.011 C Carbon | 7 14.007 N Nitrogen | 8 15.999 O Oxygen | 9 18.998 F Fluorine | 10 20.183 Ne Neon |
| 3 6.939 Li Lithium | 4 9.012 Be Beryllium | | | | | | | | | | | 13 26.981 Al Aluminum | 14 28.086 Si Silicon | 15 30.974 P Phosphorus | 16 32.064 S Sulfur | 17 35.453 Cl Chlorine | 18 39.948 Ar Argon |
| 11 22.989 Na Sodium | 12 24.312 Mg Magnesium | IIIB | IVB | VB | VIB | VII B | VIII B | | IB | IIB | 31 69.72 Ga Gallium | 32 72.59 Ge Germanium | 33 74.922 As Arsenic | 34 78.96 Se Selenium | 35 79.909 Br Bromine | 36 83.90 Kr Krypton | |
| 19 39.102 K Potassium | 20 40.08 Ca Calcium | 21 44.956 Sc Scandium | 22 47.90 Ti Titanium | 23 50.942 V Vanadium | 24 51.996 Cr Chromium | 25 54.938 Mn Manganese | 26 55.847 Fe Iron | 27 58.933 Co Cobalt | 28 58.71 Ni Nickel | 29 63.54 Cu Copper | 30 65.37 Zn Zinc | 49 114.82 In Indium | 50 118.69 Sn Tin | 51 127.76 Sb Antimony | 52 127.60 Te Tellurium | 53 126.904 I Iodine | 54 131.30 Xe Xenon |
| 37 85.47 Rb Rubidium | 38 87.62 Sr Strontium | 39 88.905 Y Yttrium | 40 91.22 Zr Zirconium | 41 92.906 Nb Niobium | 42 95.94 Mo Molybdenum | 43 99 Tc Technetium | 44 101.07 Ru Ruthenium | 45 102.91 Rh Rhodium | 46 106.4 Pd Palladium | 47 107.87 Ag Silver | 48 112.40 Cd Cadmium | 81 204.37 Tl Thallium | 82 207.19 Pb Lead | 83 208.96 Bi Bismuth | 84 210 Po Polonium | 85 210 At Astatine | 86 222 Rn Radon |
| 55 132.90 Cs Cesium | 56 137.34 Ba Barium | 57 138.91 La Lanthanum | 72 178.49 Hf Hafnium | 73 180.95 Ta Tantalum | 74 183.85 W Tungsten | 75 186.2 Re Rhenium | 76 190.2 Os Osmium | 77 192.2 Ir Iridium | 78 195.09 Pt Platinum | 79 196.967 Au Gold | 80 200.59 Hg Mercury | | | | | | |
| 87 223 Fr Francium | 88 226 Ra Radium | 89 227 Ac Actinium | 104 Rf | 105 Ha | 106 Sg | 107 Uns | 108 Uno | 109 Une | 110 Uun | | | | | | | | |

↑ Nonmetals

↑ Metalloids (semimetals)

Lanthanides

Actinides

| | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 58 140.12 Ce Cerium | 59 140.91 Pr Praseodymium | 60 144.24 Nd Neodymium | 61 147 Pm Promethium | 62 150.35 Sm Samarium | 63 151.96 Eu Europium | 64 157.25 Gd Gadolinium | 65 158.92 Tb Terbium | 66 162.50 Dy Dysprosium | 67 164.93 Ho Holmium | 68 167.26 Er Erbium | 69 168.93 Tm Thulium | 70 173.04 Yb Ytterbium | 71 174.97 Lu Lutetium |
| 90 232.04 Th Thorium | 91 231 Pa Protactinium | 92 238.03 U Uranium | 93 237 Np Neptunium | 94 242 Pu Plutonium | 95 243 Am Americium | 96 247 Cm Curium | 97 247 Bk Berkelium | 98 249 Cf Californium | 99 254 Es Einsteinium | 100 253 Fm Fermium | 101 256 Md Mendelevium | 102 253 No Nobelium | 103 257 Lr Lawrencium |

Materials para Semicondutores

Table 1 Portion of the Periodic Table Related to Semiconductors

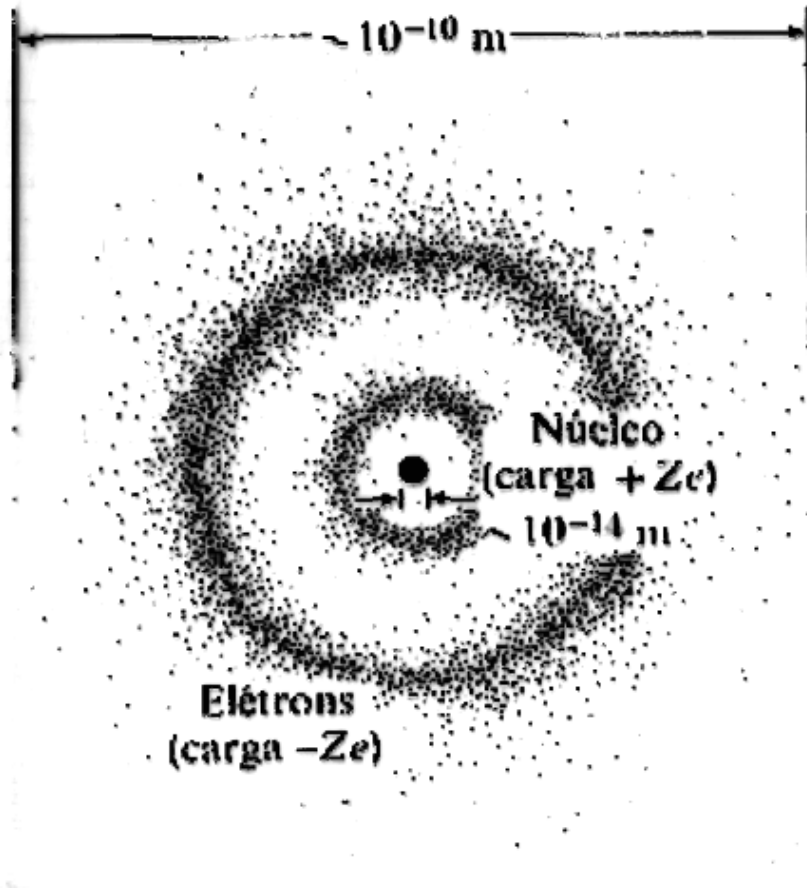
| Period | Column II | III | IV | V | VI |
|--------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2 | | B Boron | C Carbon | N Nitrogen | |
| 3 | Mg Magnesium | Al Aluminum | Si Silicon | P Phosphorus | S Sulfur |
| 4 | Zn Zinc | Ga Gallium | Ge Germanium | As Arsenic | Se Selenium |
| 5 | Cd Cadmium | In Indium | Sn Tin | Sb Antimony | Te Tellurium |
| 6 | Hg Mercury | | Pb Lead | | |

Materials para Semicondutores

Table 2 Element and Compound Semiconductors

| Element | IV-IV Compounds | III-V Compounds | II-VI Compounds | IV-VI Compounds |
|----------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Si | SiC | AlAs | CdS | PbS |
| Ge | | AlSb | CdSe | PbTe |
| | | BN | CdTe | |
| | | GaAs | ZnS | |
| | | GaP | ZnSe | |
| | | GaSb | ZnTe | |
| | | InAs | | |
| | | InP | | |
| | | InSb | | |

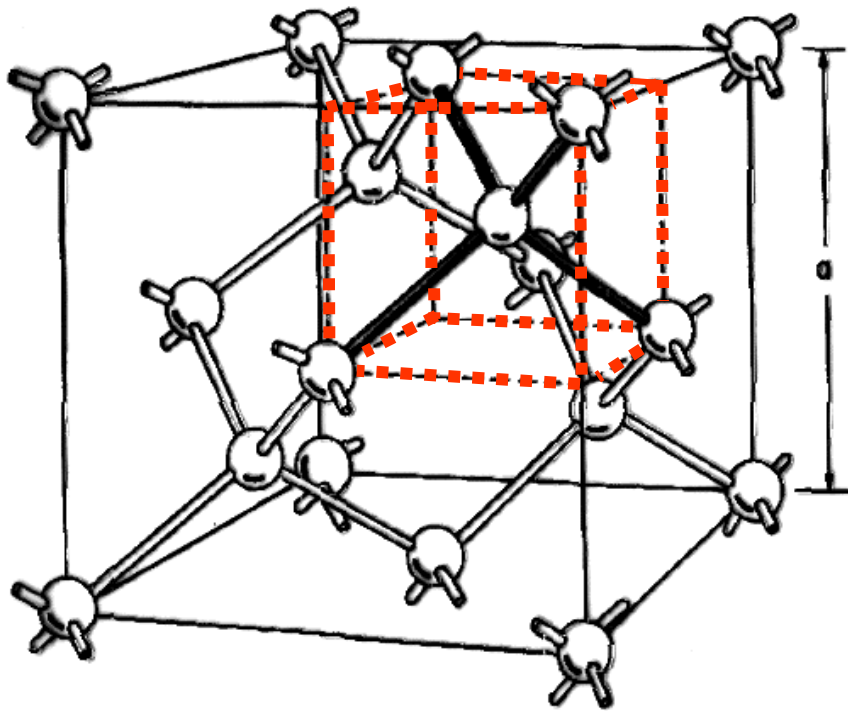
O Átomo



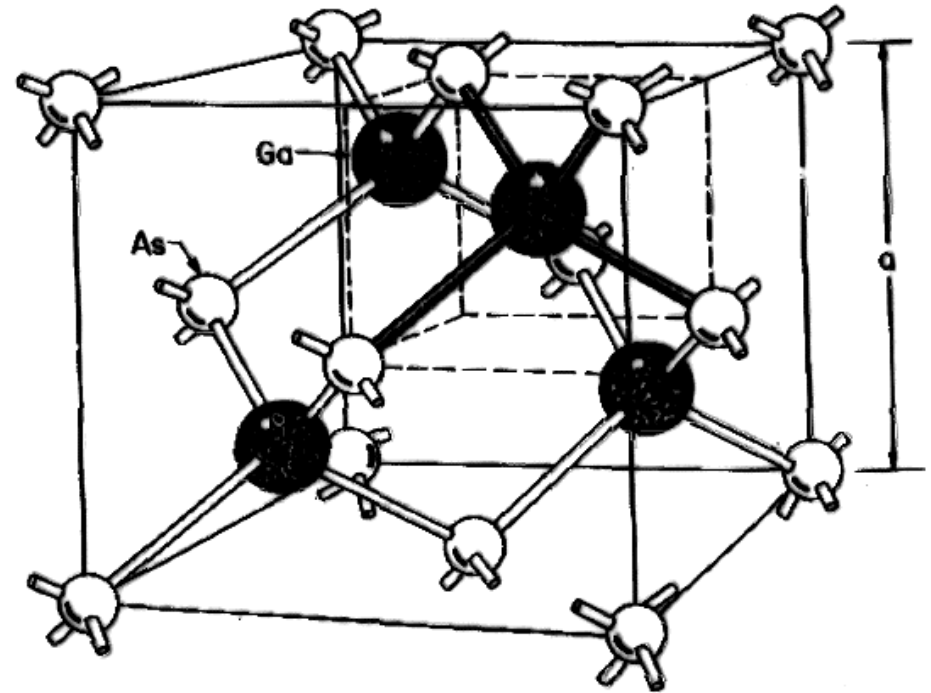
- Núcleo composto por nêutrons e prótons (+q) com massas iguais de $1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (1.700 vezes a massa do elétron). O núcleo tem diâmetro de $\sim 10^{-14} \text{ cm}$
- Uma nuvem de elétrons recobre o núcleo, estendendo-se até $\sim 10^{-10} \text{ cm}$
- O átomo é eletricamente neutro

Estrutura Cristalina

A estrutura do diamante (e dos principais materiais semicondutores)

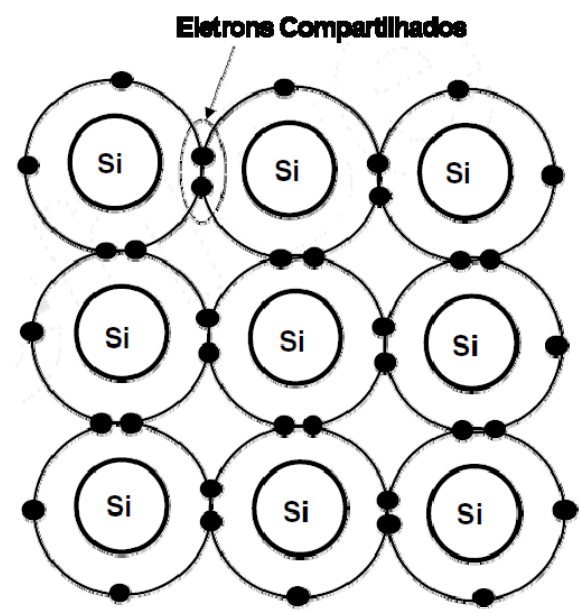
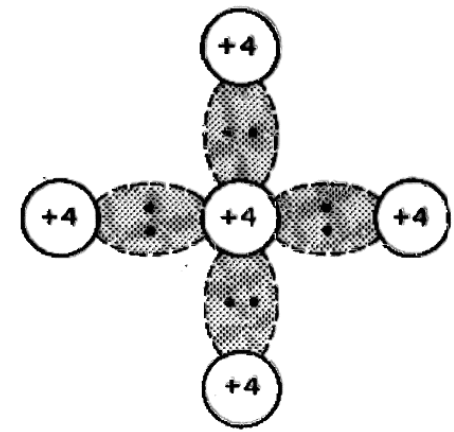
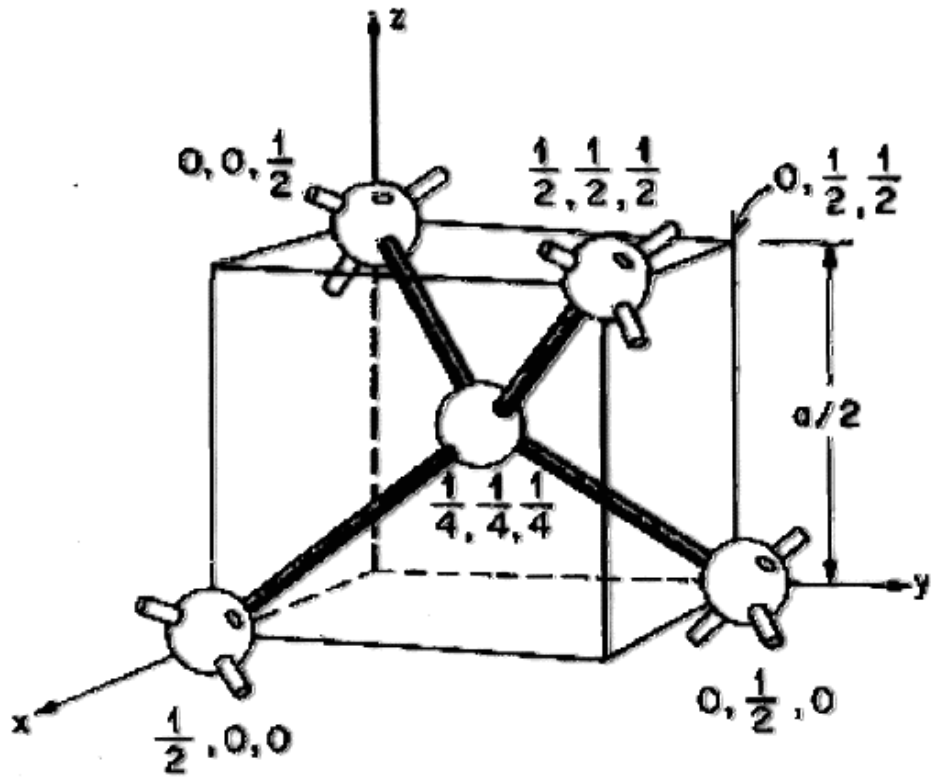


Silício ($a = 5,43 \text{ \AA}$)

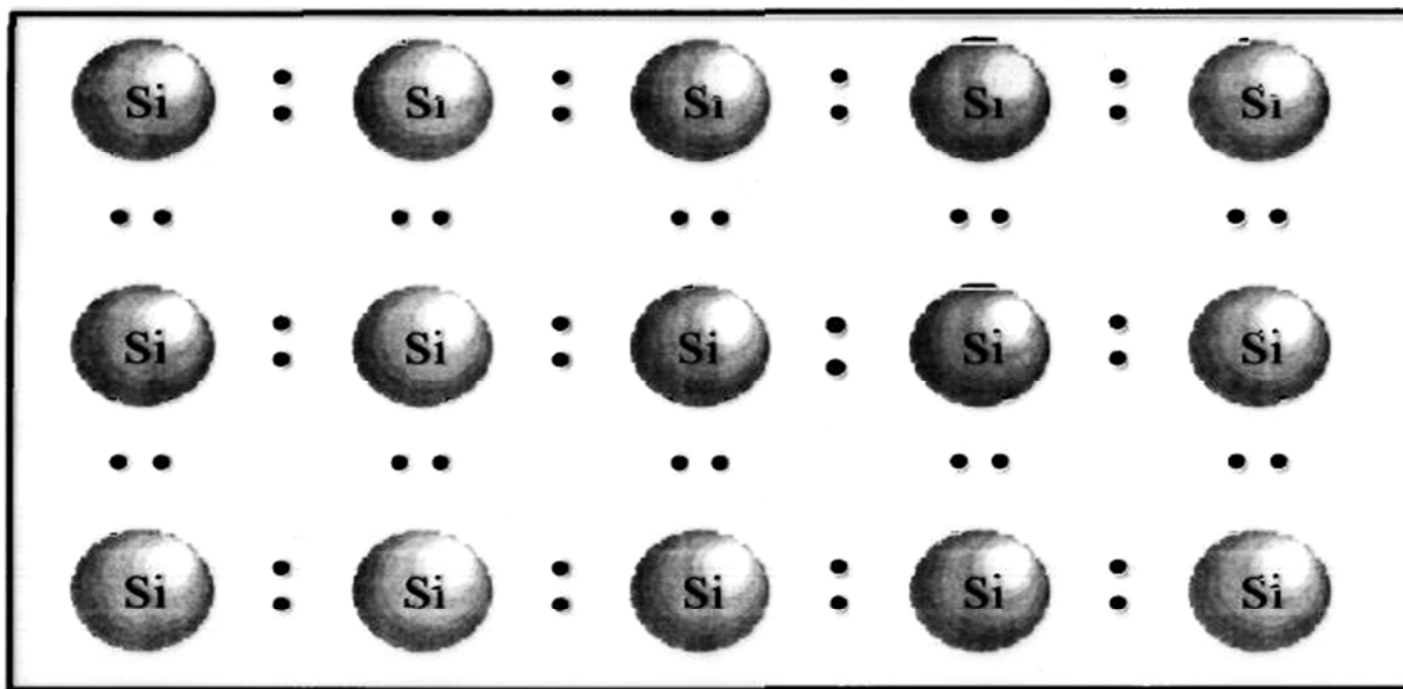


GaAs ($a = 5,63 \text{ \AA}$)

Estrutura Cristalina do Silício

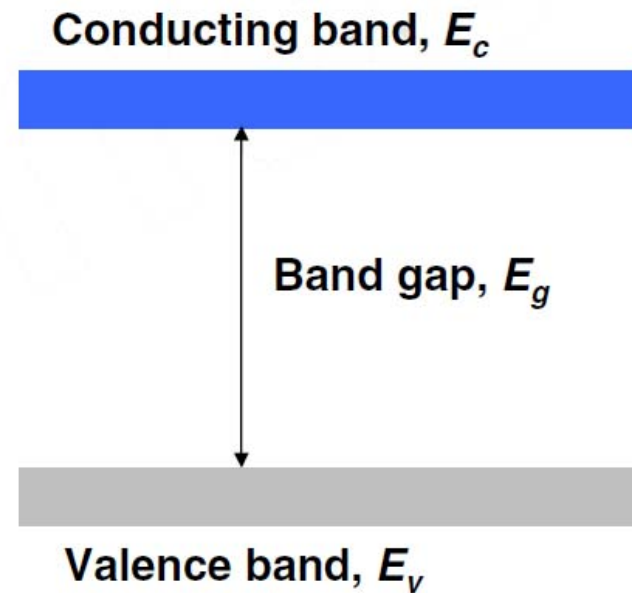
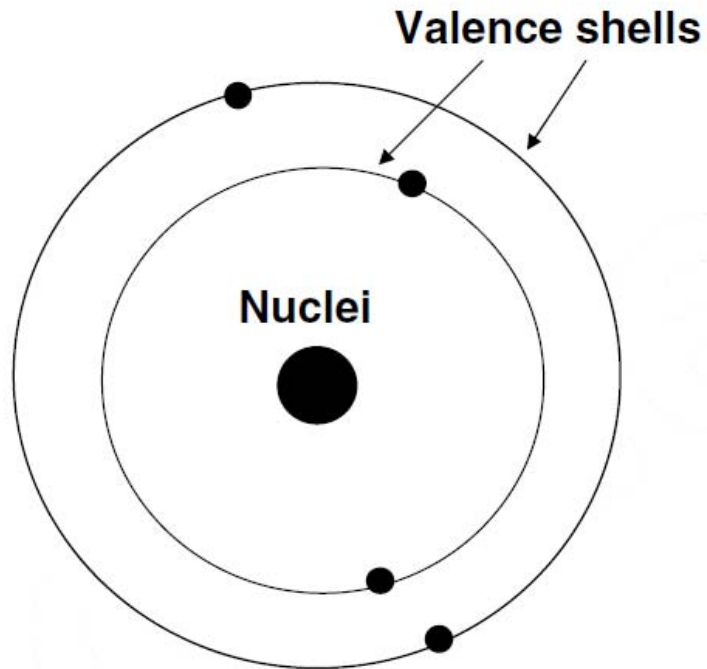


Utilizando uma representação bidimensional (simplificação), cada átomo de silício (4 elétrons na última camada) precisa de 4 ligações covalentes (4 átomos de Si) para atingir a estabilidade.



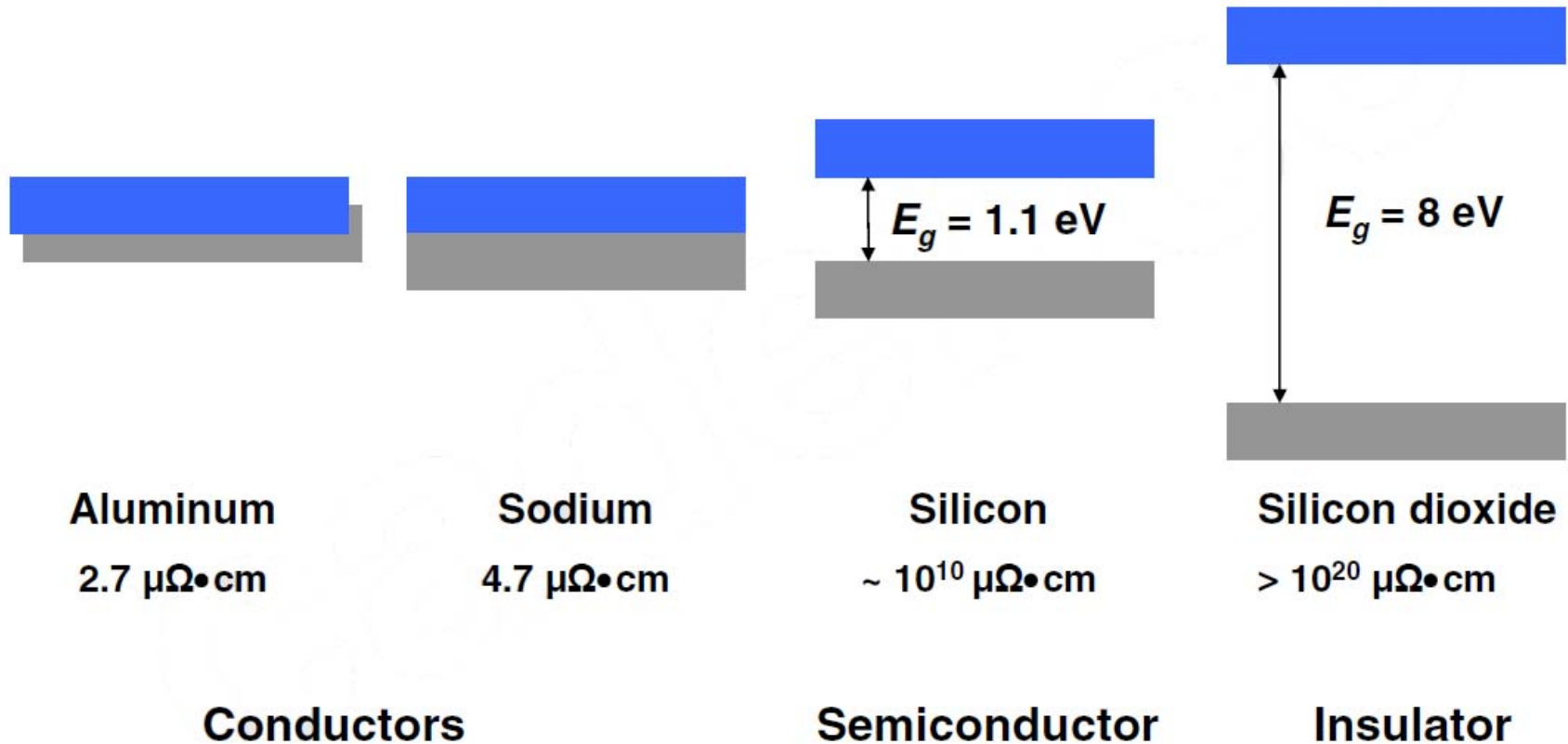
Em 0 Kelvin todos os elétrons estão presos em suas ligações covalentes

A Interpretação da Física de Estado Sólido

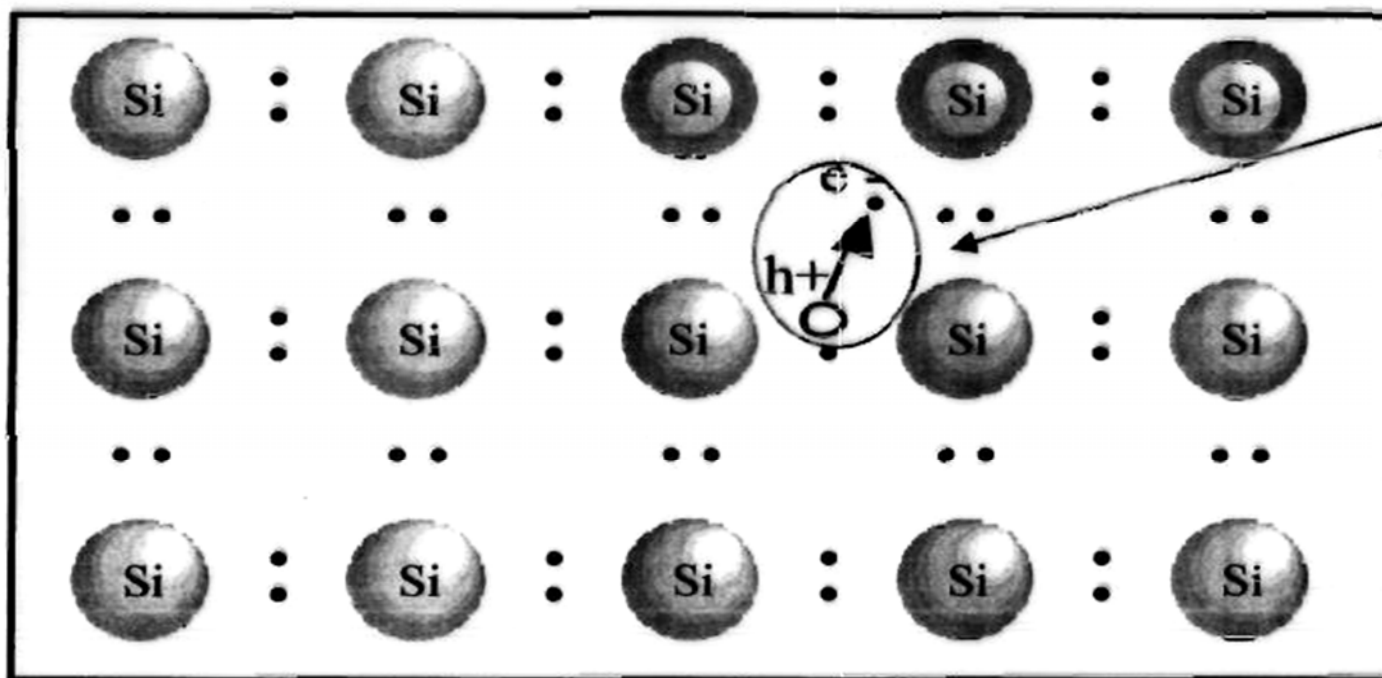


A Interpretação da Física de Estado Sólido

Porque um material é condutor, semiconductor ou isolante?



Em temperatura maior que 0 K (temperatura ambiente, por exemplo, $T = 300\text{ K}$), elétrons podem adquirir energia suficiente (ionização térmica) para escapar da ligação covalente.



Geração do par
Elétron(e^-)-lacuna(h^+)

n = conc. de elétrons
 p = conc. de lacunas

n_i = conc. intrínseca
 $n = p = n_i$

Neste processo, chamado de Geração de portadores, o elétron torna-se livre e deixa no seu lugar um buraco (lacuna) que também apresentará característica de portador de corrente.

Concentração Intrínseca

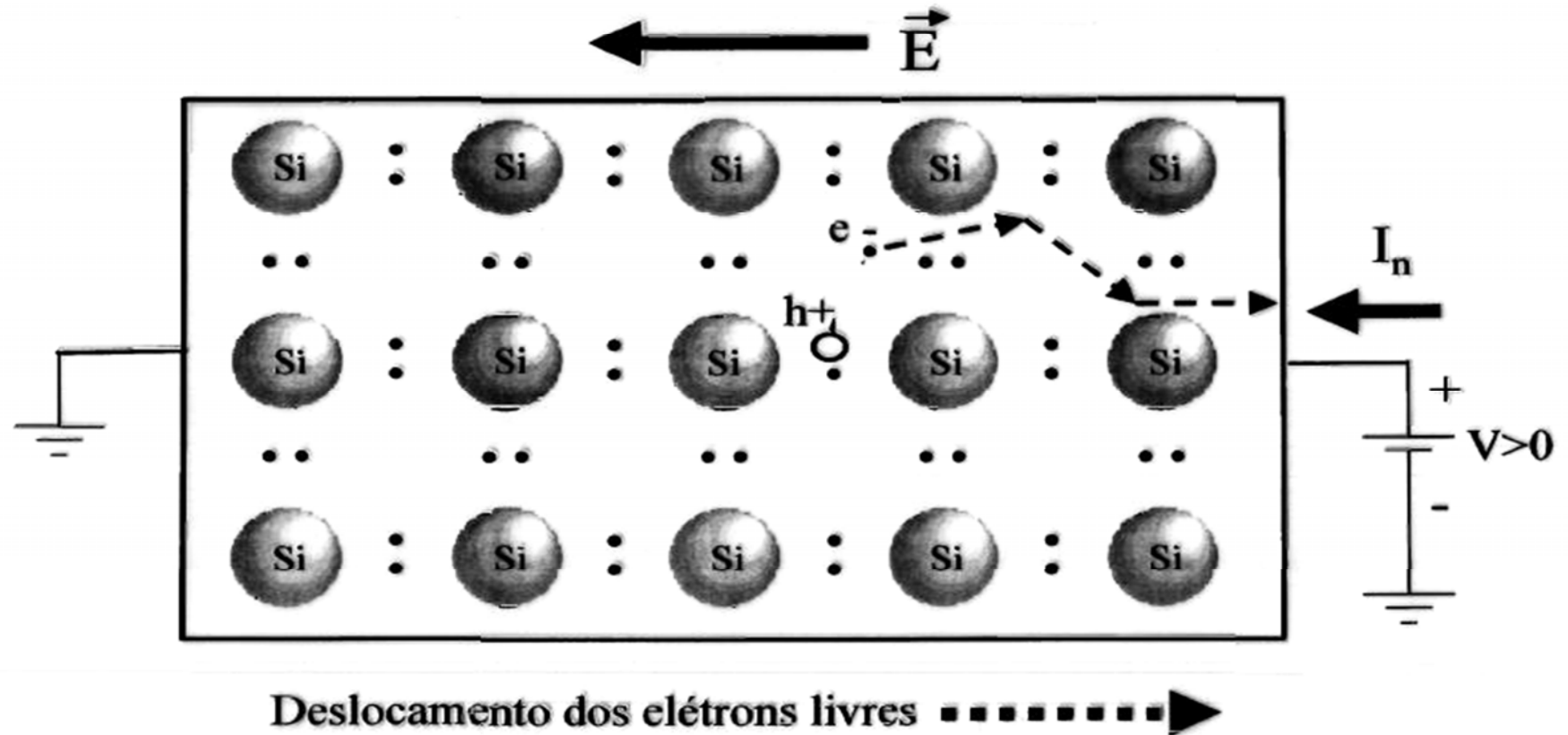
$$n_i(T) = [B \cdot T^3 \cdot e^{-E_G/kT}]^{1/2}$$

- B = parâmetro que depende do material
($B = 5,4 \times 10^{31} / \text{K}^3 \cdot \text{cm}^3$ para o silício)
- T = temperatura em Kelvin
- E_G = Energia mínima para quebrar uma ligação covalente
(1,12 eV para o silício)
- $K = 8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$

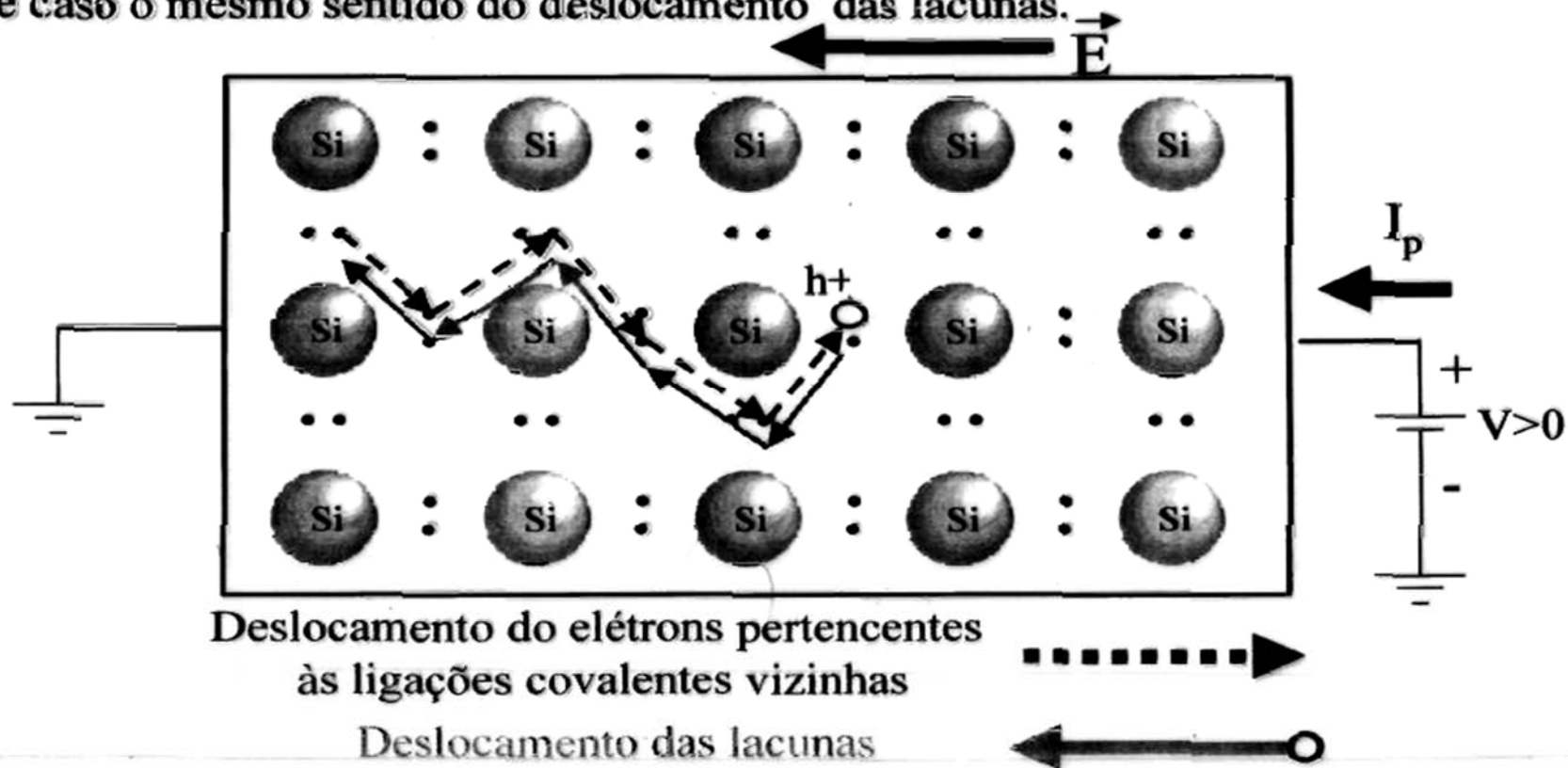
Exemplo: Para $T = 300 \text{ K} \rightarrow n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ portadores/cm}^3$, ou seja, $1,45 \cdot 10^{10} \text{ elétrons/cm}^3$ e $1,45 \cdot 10^{10} \text{ lacunas/cm}^3$, já que no silício intrínseco $n = p = n_i$

Lembrar que o silício tem $5 \cdot 10^{22}$ átomos de silício/cm³

O elétron gerado encontra-se livre para se deslocar dentro do silício. Por exemplo, se for aplicada uma tensão como indicada abaixo, o campo elétrico induzirá o deslocamento dos elétrons no sentido inverso ao do campo elétrico. A corrente convencional associada (I_n), porém, terá o mesmo sentido do campo elétrico, como de praxe.

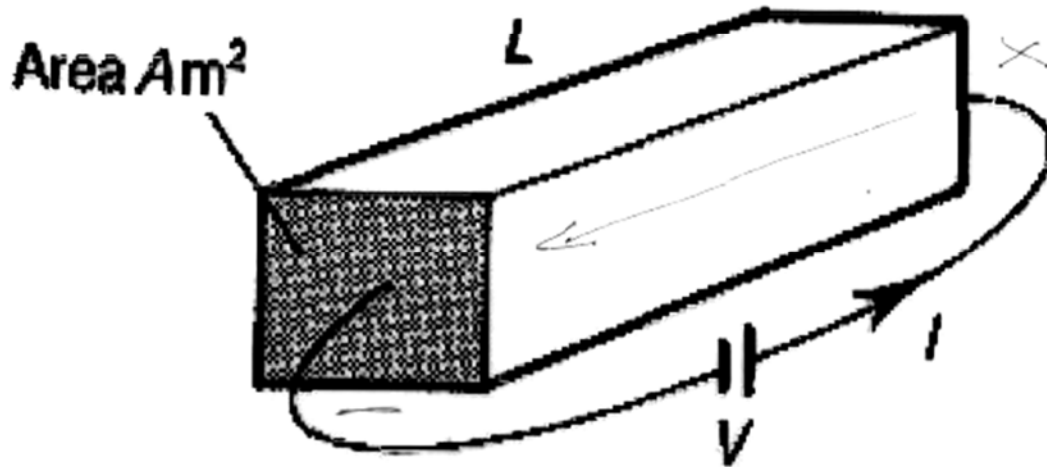


A lacuna gerada pode ser ocupada por um outro elétron vizinho (também pertencente a uma ligação covalente), que por sua vez deixará uma lacuna no seu lugar e assim sucessivamente. Por exemplo, se for aplicada uma tensão como indicada abaixo, o campo elétrico induzirá o deslocamento dos elétrons pertencentes as ligações covalentes no sentido inverso ao do campo elétrico. O processo também pode ser visto como o deslocamento de lacunas no mesmo sentido do campo elétrico, com carga positiva de carga equivalente a do elétron em módulo. A corrente convencional associada (I_p) terá neste caso o mesmo sentido do deslocamento das lacunas.



Revisitando a Lei de Ohm

Suponha uma barra de material condutor ou semiconductor homogêneo (com características uniformes) de resistividade ρ_e ($\Omega.m$), comprimento L (m) e seção A (m^2), submetido a um campo elétrico E :



A corrente que circula por ele é dada por: $I = \frac{V}{R} = \frac{VA}{\rho_e L}$

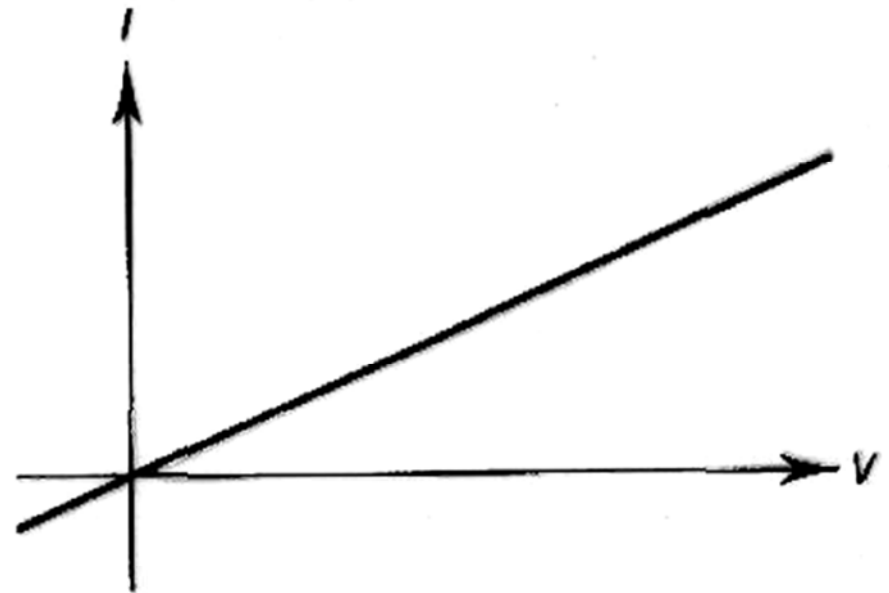
Podemos reescrever essa relação de outra forma:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{VA}{\rho_e L}$$

$$\frac{I}{A} = \frac{1}{\rho_e} \frac{V}{L} \quad [\text{A/m}^2]$$

ou

$$J = \sigma \times E \quad [\text{A/m}^2]$$



Materiais para Eletrônica

Resistividade elétrica:

$$\rho_e \text{ em } [\Omega.m]$$

$\rho_e \neq \rho(z) \rightarrow$ dens. de cargas

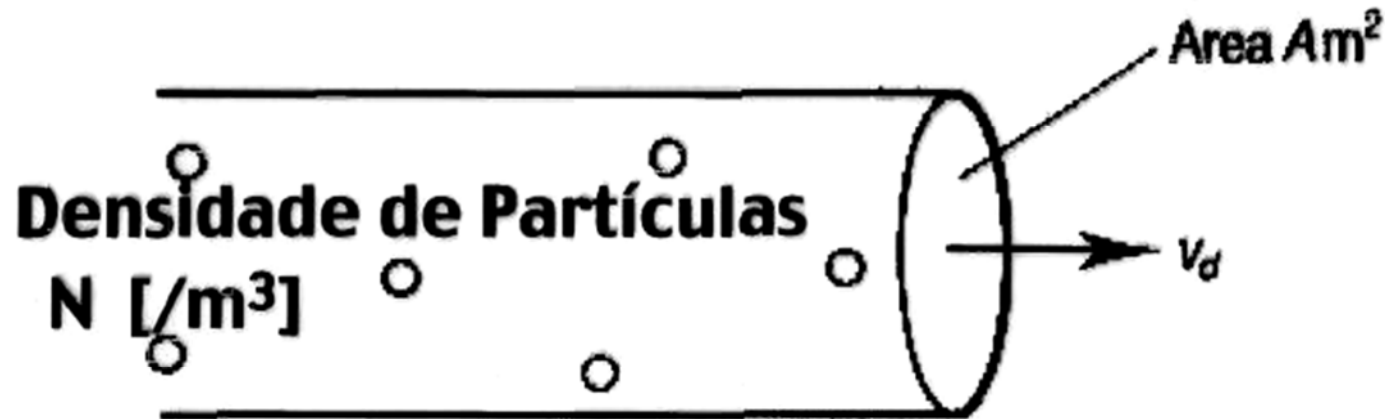
Condutividade elétrica:

$$\sigma = \frac{1}{\rho_e} \quad [1/(\Omega.m)]$$

Velocidade de Deriva

$$I, V \rightleftharpoons J, E$$

Vamos olhar melhor para σ :



Número de partículas em 1 m de tubo: $N \cdot A$ [1/m]

Número de partículas em um

determinado ponto/segundo : $N \cdot A \cdot v_d$ [1/s]

em cargas por segundo: $Q \cdot N \cdot A \cdot v_d$ [A]

ou, em outras palavras:

$$J = Q.N.v_d \text{ [A/m}^2\text{]}$$

A velocidade v_d é conhecida como velocidade de deriva.

Ela se aplica a qualquer material e situação onde pode-se definir uma certa densidade de partículas móveis e uma velocidade MÉDIA pode ser definida.

Condutividade e Mobilidade

Concluimos que:

$$\mathbf{J} = \sigma \times \mathbf{E} \quad [\text{A/m}^2]$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q.N.v_d} \quad [\text{A/m}^2]$$

Logo:

$$\mathbf{v_d} = \text{constante} \times \mathbf{E}$$

Essa constante, $\sigma / \mathbf{Q.N}$, é conhecida como MOBILIDADE μ [$\text{m}^2/\text{V.s}$]

Podemos reescrever \mathbf{J} como:

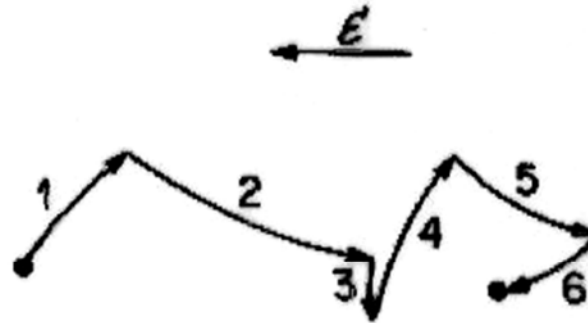
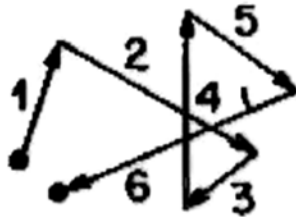
$$\mathbf{J} = \mathbf{Q.N.\mu.E} \quad [\text{A/m}^2]$$

E a condutividade como:

$$\sigma = \mathbf{Q.N.\mu} \quad [\Omega/\text{m}]$$

Velocidade de Deriva e Velocidade Térmica

$$\mathcal{E} = 0$$



$$v_{th} = \left(\frac{8kT}{\pi M} \right)^{1/2} \text{ [m/s]}$$

10^5 m/s a 300K

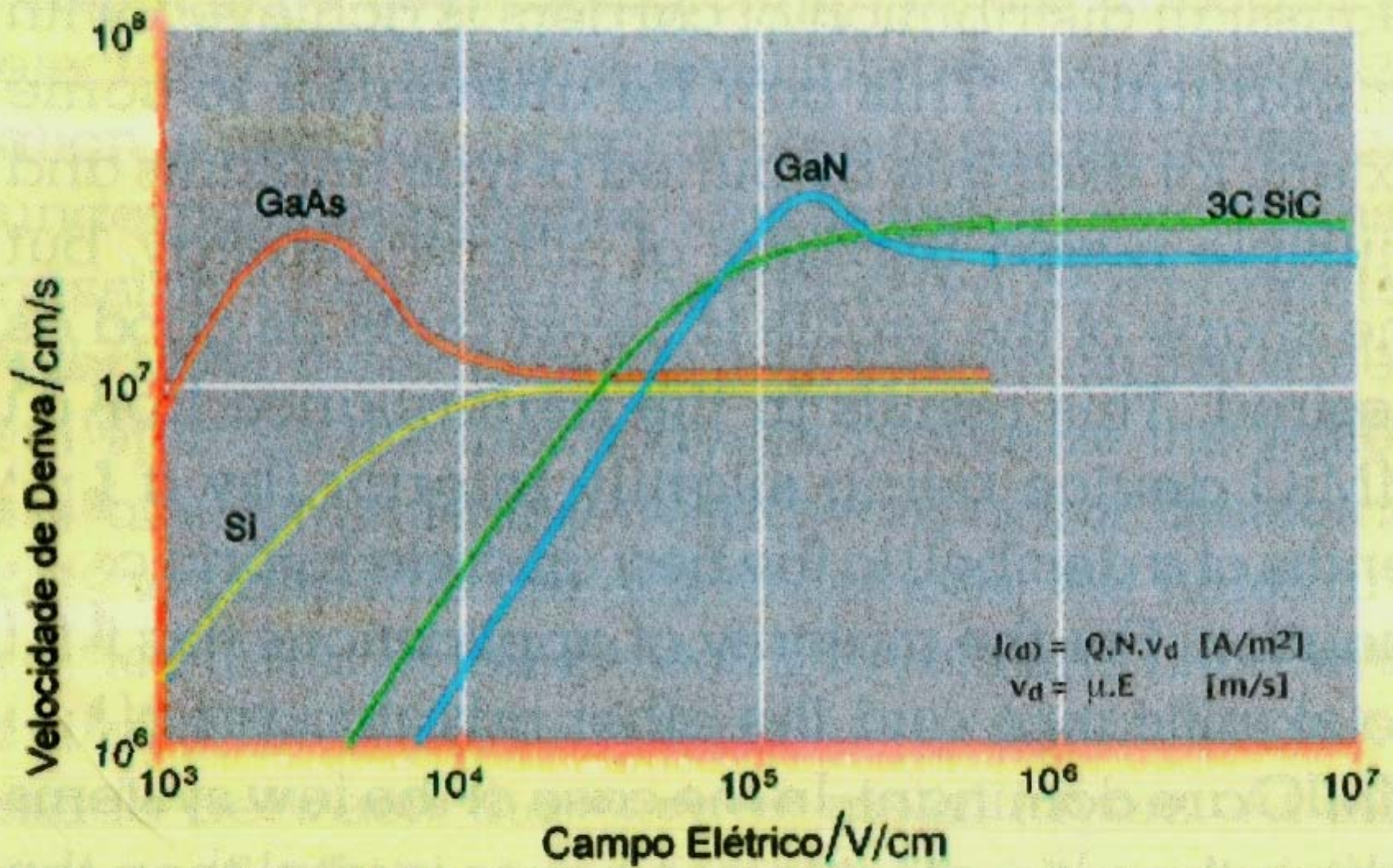
ou 0,026 eV

para elétrons em Si

$$v_d = \mu \times E$$

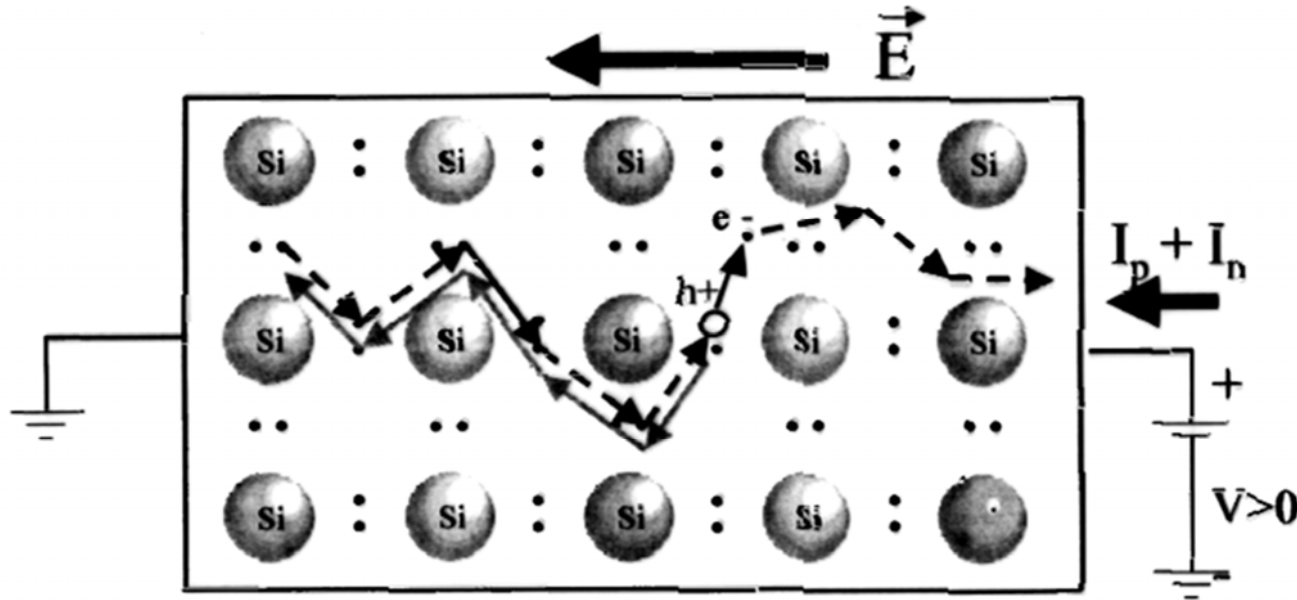
$$\mu \cong 0,1 \text{ m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$$

$$v_d \ll v_{th}$$



Velocidade de deriva dos elétrons para arseneto de gálio, silício, nitreto de gálio e carbeto de silício

Mecanismos de Condução de Corrente em Semicondutores: Deriva (Drift)



Resistividade:

$$\rho = 1/[q(p\mu_p + n\mu_n)]$$

μ_p e μ_n = mobilidade das lacunas e elétrons respectivamente.

$$(\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{V.s}, \mu_n = 1350 \text{ cm}^2/\text{V.s})$$

Relação de Einstein:

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = V_T$$

$$v_{p\text{-der}} = \mu_p E$$

$$v_{n\text{-der}} = \mu_n E$$

$$J_{p\text{-der}} = qp\mu_p E$$

$$J_{n\text{-der}} = qn\mu_n E$$

$$I_{p\text{-der}} = q \cdot A \cdot p \cdot \mu_p \cdot E$$

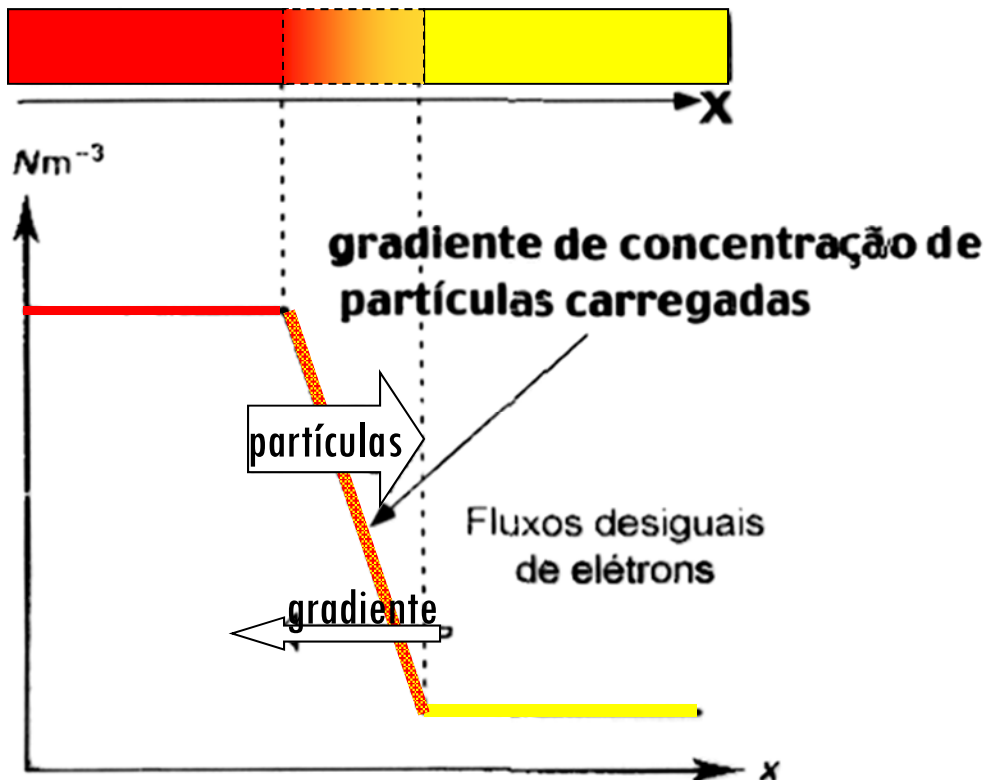
$$I_{n\text{-der}} = q \cdot A \cdot n \cdot \mu_n \cdot E$$

$$I_{T\text{-der}} = I_{p\text{-der}} + I_{n\text{-der}} = q \cdot A \cdot E \cdot (p \cdot \mu_p + n \cdot \mu_n)$$

A Corrente de Difusão

Devido a agitação térmica, as partículas carregadas movem-se aleatoriamente, mesmo na ausência de campo elétrico.

Considere a situação a seguir:



Note:

- a) Há movimento aleatório**
- b) Há um gradiente de concentração**

A Corrente de Difusão

$$\text{Fluxo}_{\text{dif}} = -D \frac{dN}{dx} \quad [1/(m^2.s)]$$

onde D é o coeficiente de difusão das partículas

Logo:

$$J_{\text{dif}} = -qD \frac{dN}{dx} \quad [A/m^2]$$

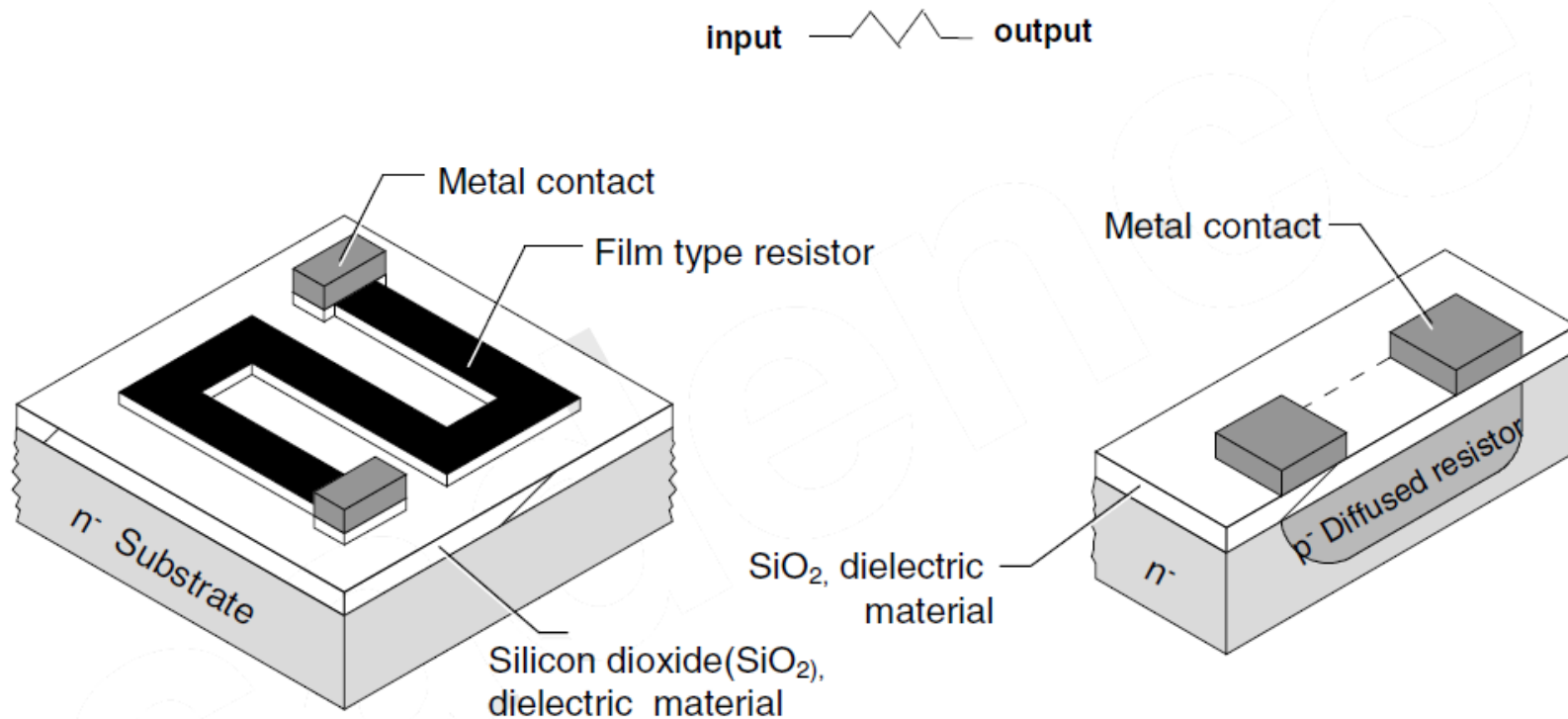
As Correntes de Deriva e de Difusão

Em semicondutores observamos que em condições normais as correntes de deriva e de difusão constituem praticamente toda a corrente que flui no material. Logo:

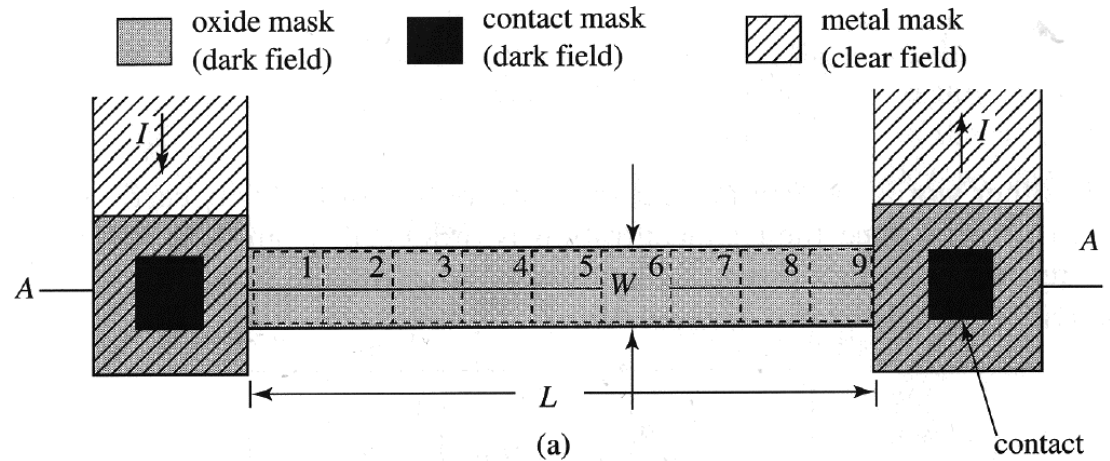
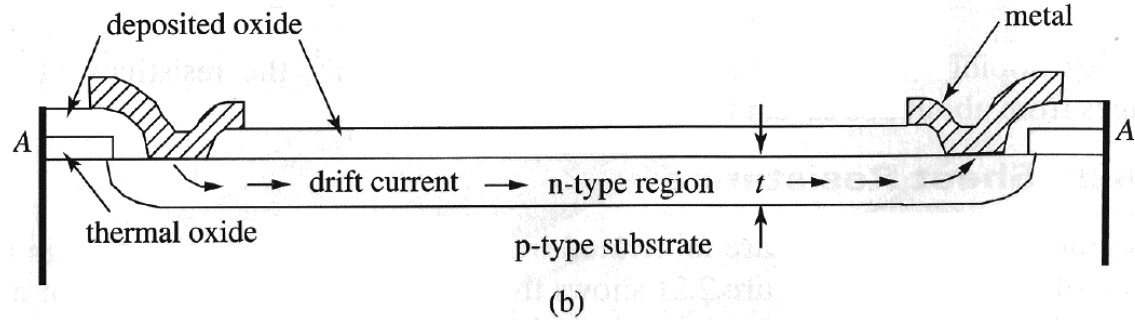
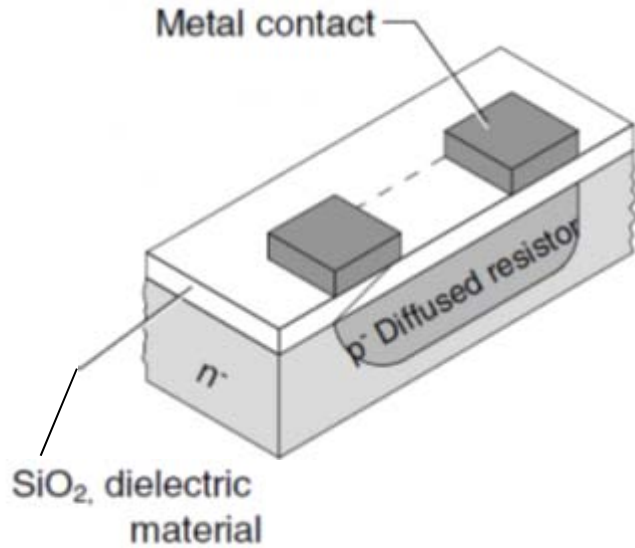
$$\mathbf{J_{TOTAL} = J_{der} + J_{dif}} \quad \text{(vale a lei da superposição!)}$$

$$\mathbf{J_{TOTAL} = Q \cdot N \cdot \mu \cdot E - QD \frac{dN}{dx} \quad [A/m^2]}$$

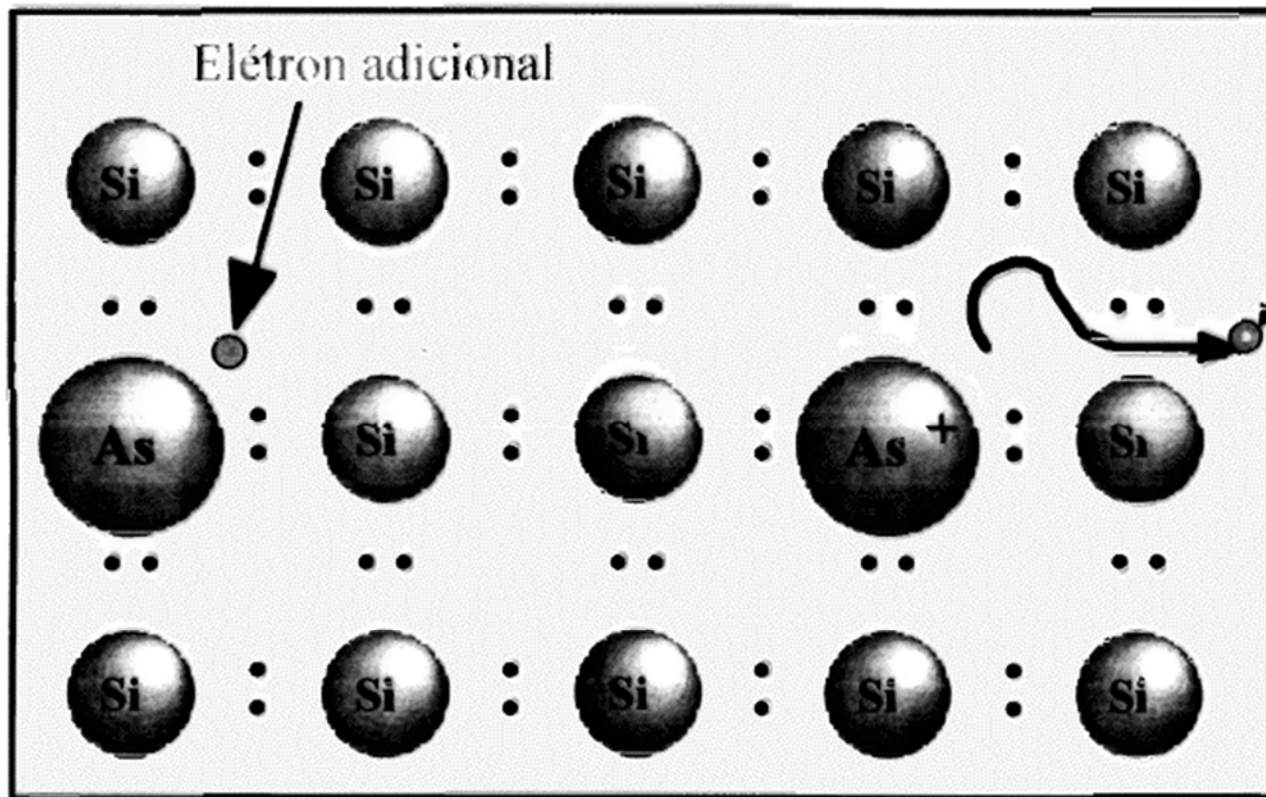
Exemplos de Resistores em um CI



Exemplos de Resistores em um CI



Silício Tipo n (elétrons adicionais)



Elétron livre
se deslocando

Em equilíbrio térmico :

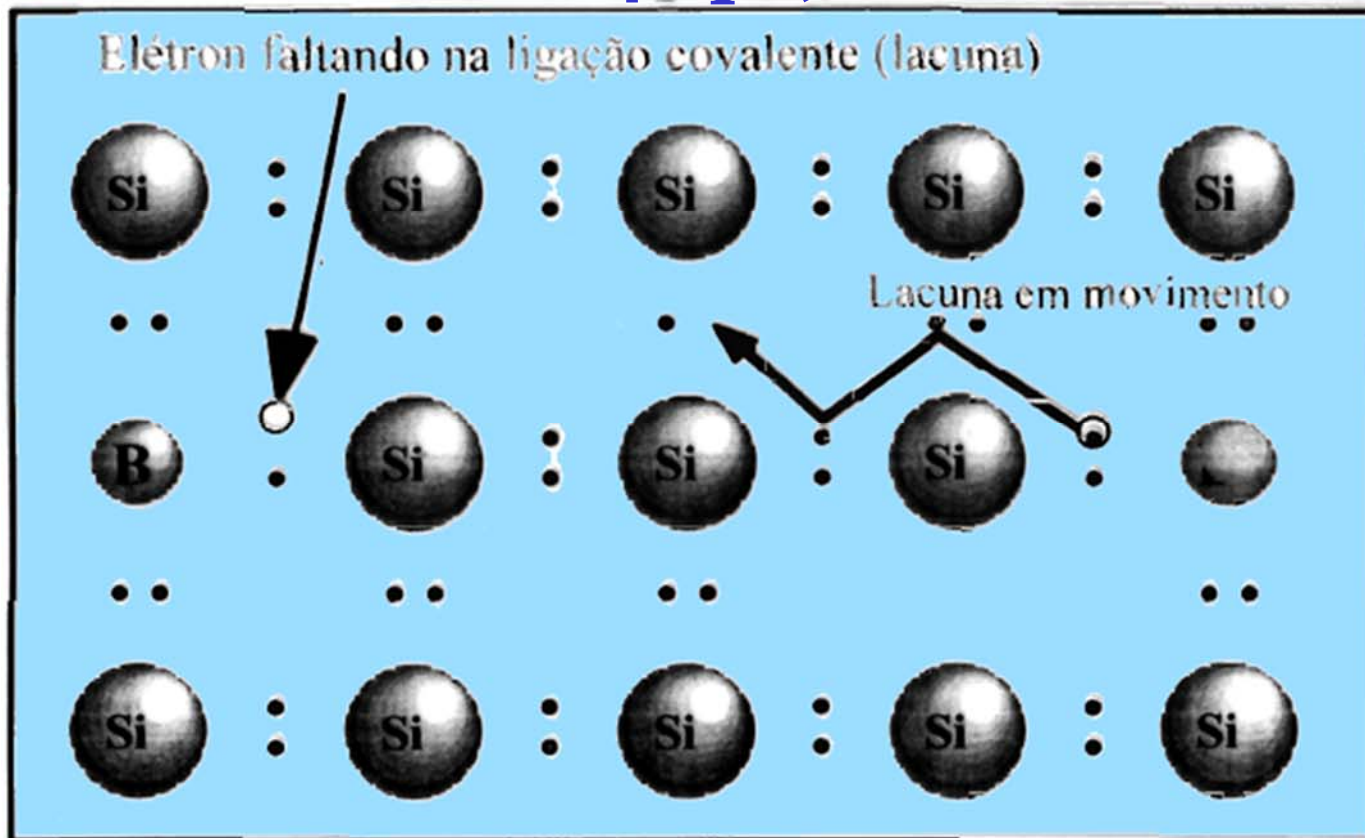
$$n \cdot p = n_i^2$$

$$n = N_D + n_i \cong N_D$$

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{n_i^2}{N_D}$$

No processo de dopagem do silício com elementos PENTAVALENTES (Arsênio por exemplo), cada átomo de arsênio que ocupa a posição de um átomo de silício doa um elétron livre para a estrutura cristalina (DOADORA), já que os 4 outros estarão fazendo parte das ligações covalentes. Quando este elétron se distancia das proximidades do arsênio, diz-se que o átomo ficou “ionizado” com carga positiva igual em módulo à carga do elétron perdido.

Silício Tipo *p* (lacunas adicionais)



Em equilíbrio
térmico:

$$n \cdot p = n_i^2$$

$$p = N_A + n_i \cong N_A$$

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{n_i^2}{N_A}$$

No processo de dopagem do silício com elementos TRIVALENTES (BORO por exemplo), cada átomo de boro que ocupa a posição de um átomo de silício dá origem a uma lacuna para a estrutura cristalina (ACEITADORA), já que uma das ligações covalentes não se concretiza. Quando esta lacuna se desloca das proximidades do boro, diz-se que o átomo ficou “ionizado” com carga negativa igual à carga do elétron que ocupou a lacuna.

Resumo

Tabela 3.1 RESUMO DASEQUAÇÕES IMPORTANTES PARA OPERAÇÃO DA JUNÇÃO *pn*.

| Grandeza | Relação | alores de Constantes e Parâmetros (para Si intrínseco a T = 300 K) |
|---|--|--|
| Concentração de portadores no silício intrínseco (/cm ³) | $n_i^2 = BT^3 e^{-E_G/kT}$ | $B = 5,4 \times 10^{31}/(\text{K}^3 \text{cm}^6)$ $E_G = 1,12 \text{ eV}$ $k = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ $n_i = 1,5 \times 10^{10}/\text{cm}^3$ |
| Densidade da corrente de difusão (A/cm ³) | $J_p = -qD_p \frac{dp}{dx}$ $J_n = -qD_n \frac{dn}{dx}$ | $q = 1,60 \times 10^{-19} \text{ Coulomb}$ $D_p = 12 \text{ cm}^2/\text{s}$ $D_n = 34 \text{ cm}^2/\text{s}$ |
| Densidade da corrente de deriva (A/cm ³) | $J_{\text{deriva}} = q(p\mu_p + n\mu_n)E$ | $\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ $\mu_n = 1350 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ |
| Resistividade ($\Omega \text{ cm}$) | $\rho = 1/[q(p\mu_p + n\mu_n)]$ | μ_p e μ_n diminuem com o aumento na concentração de dopantes |
| Relação entre mobilidade e difusividade | $\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = V_T$ | $V_T = kT/q$ $\cong 25 \text{ mV}$ |
| Concentração de portadores no silício tipo <i>n</i> (/cm ³) | $n_{n0} \cong N_D$ $p_{n0} = n_i^2/N_D$ | |
| Concentração de portadores no silício tipo <i>p</i> (/cm ³) | $p_{p0} \cong N_A$ $n_{p0} = n_i^2/N_A$ | |
| Tensão interna da junção (V) | $V_0 = V_T \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right)$ | |