UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais

PCS 2039
Modelagem e Simulação de Sistemas Computacionais

Graduação em Engenharia de Computação
4o. Módulo Acadêmico - 2017

IV - Redes de Petri

Agenda

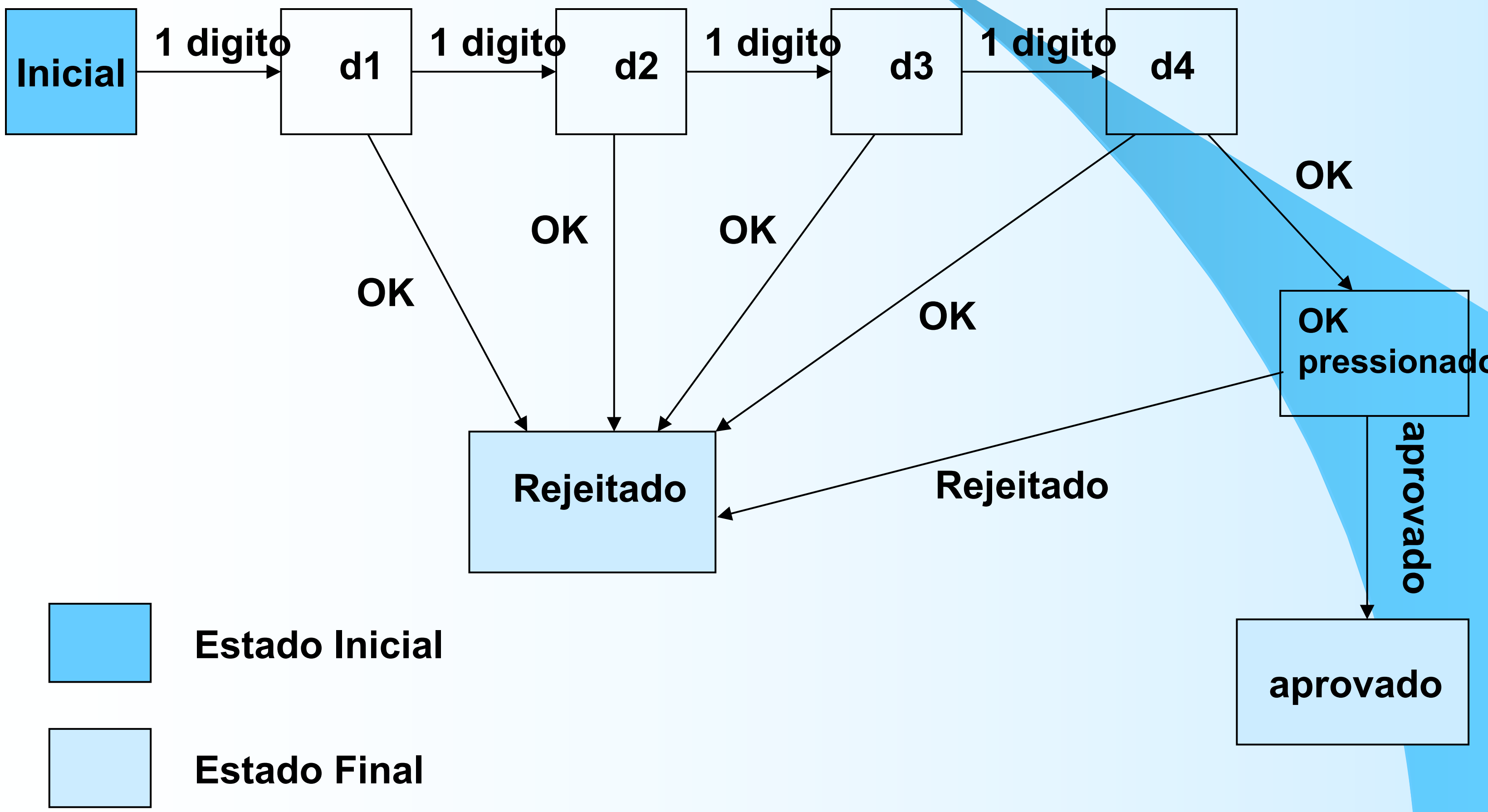
- 4 Introdução
- 4.1 Definições;
- 4.2 Notação Matricial;
- 4.3 Propriedades de Redes de Petri;
- 4.4 Análise de Redes de Petri;
- 4.5 Redes de Petri Temporizadas;
- Exercícios.

1 - Definições

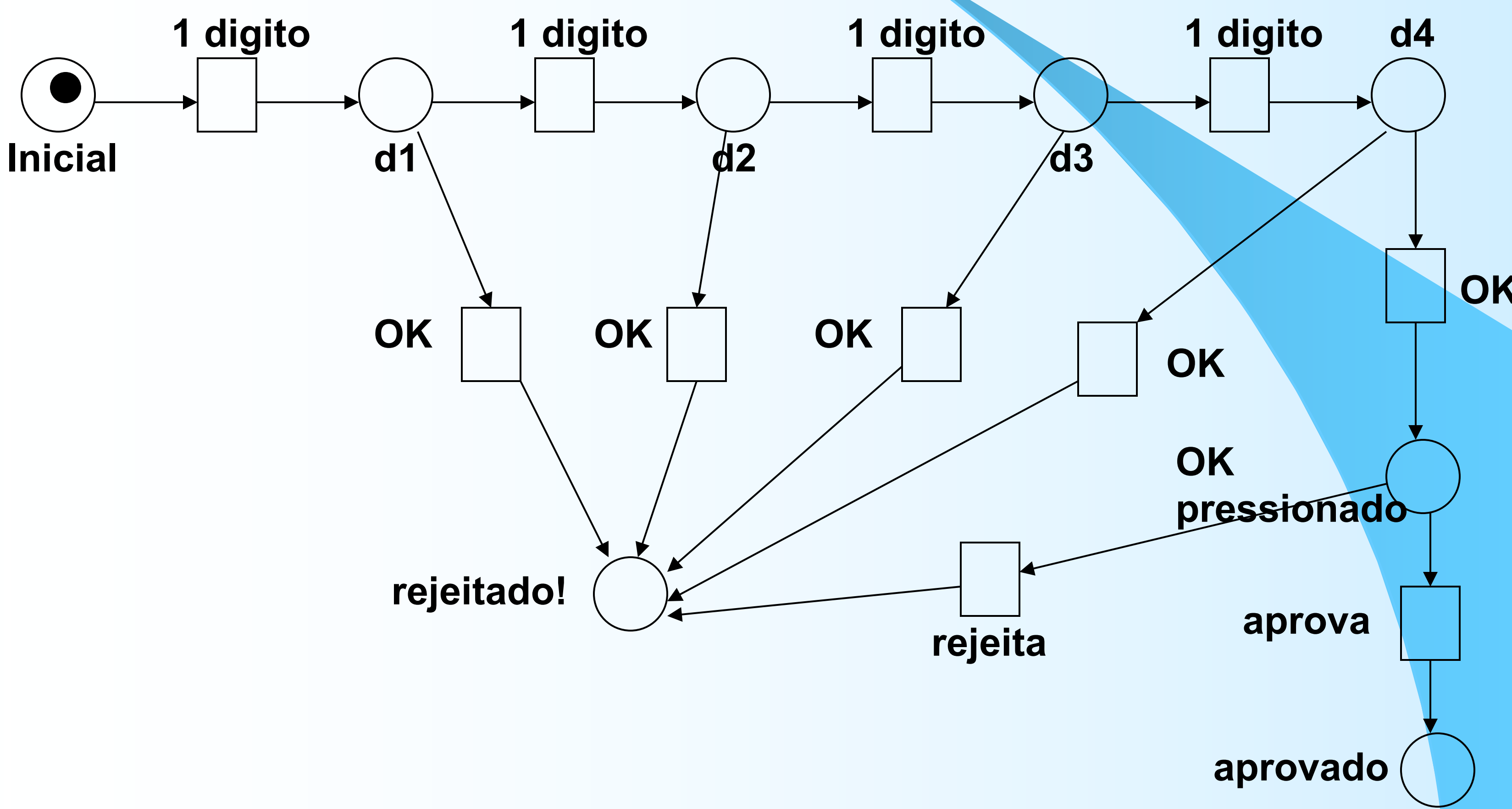
Redes de Petri

- Criada em 1962 por Carl Adam Petri (Tese de PhD);
- Aplicada na modelagem e simulação de sistemas dinâmicos e eventos discretos;
- Exemplos de aplicação:
  - Projeto de Software;
  - Automação de Processos;
  - Gerenciamento de *workflow*;
  - Análise de Dados;
  - Programação concorrente;
  - Engenharia de Confiabilidade.

Exemplo: validação de senha em ATM



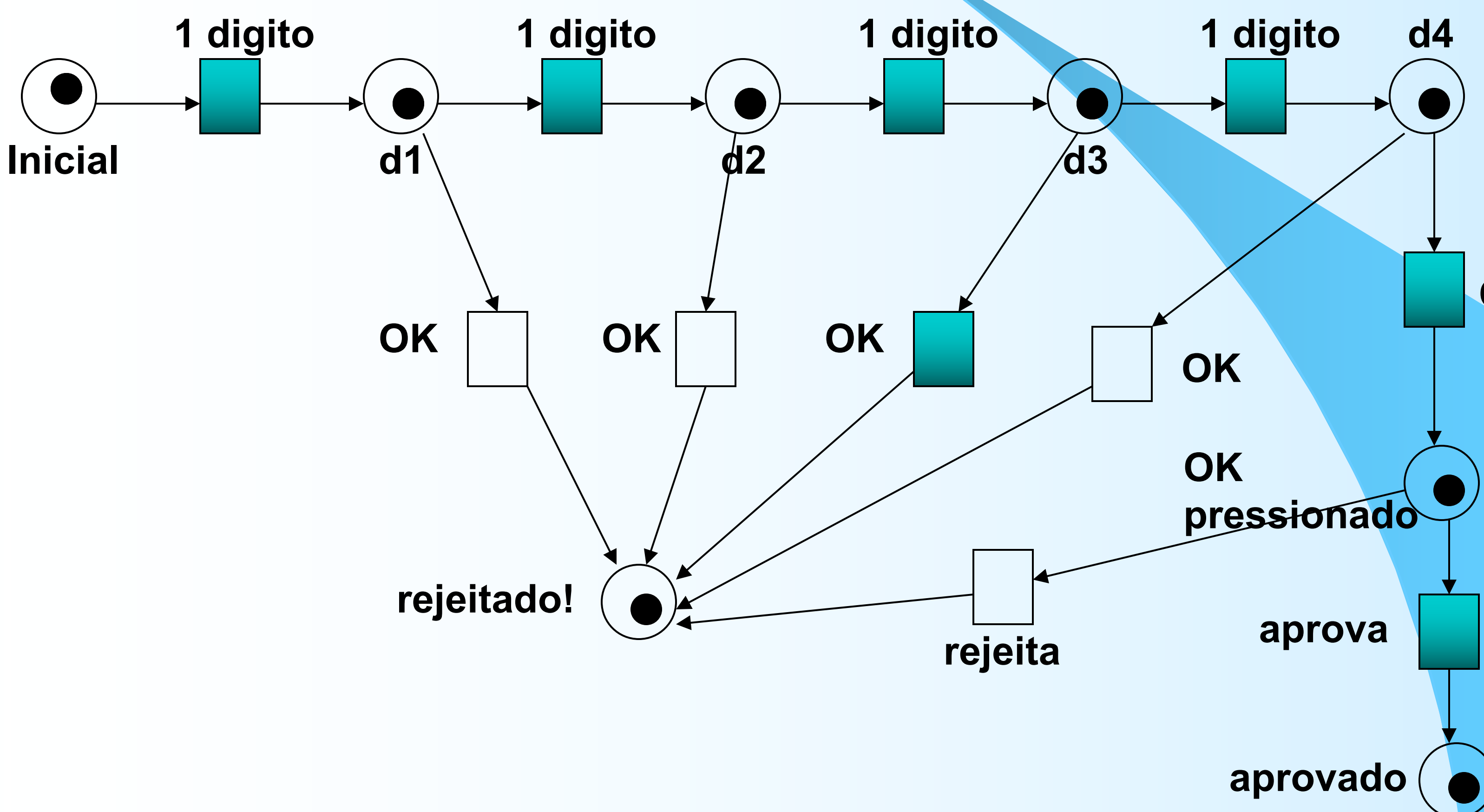
Exemplo: validação de senha em ATM



Exemplo: validação de senha em ATM

- Cenário 1: Normal
  - Entra todos os 4 dígitos e pressiona OK.
- Cenário 2: Excepcional
  - Entra somente 3 dígitos e pressiona OK.

Exemplo: validação de senha em ATM



Especificação de Redes de Petri

- Consiste de 3 tipos de componentes: *lugares* (círculos), *transições* (retângulo ou linhas paralelas) e *arcos* (flechas):
  - Lugares representam possíveis estados do sistema;
  - Transições são eventos ou ações que causam mudanças de estado; e
  - Todo arco conecta um lugar com uma transição ou uma transição com um lugar.

Uma mudança de estado …

- é representado por um movimento de *token(s)* (marcas) de lugar(es) para lugar(es); causado por um *disparo* de uma transição.
- O disparo representa uma ocorrência de um evento ou uma ação ocorrida.
- O disparo depende de condições prévias, representada pela disponibilidade de *tokens*.

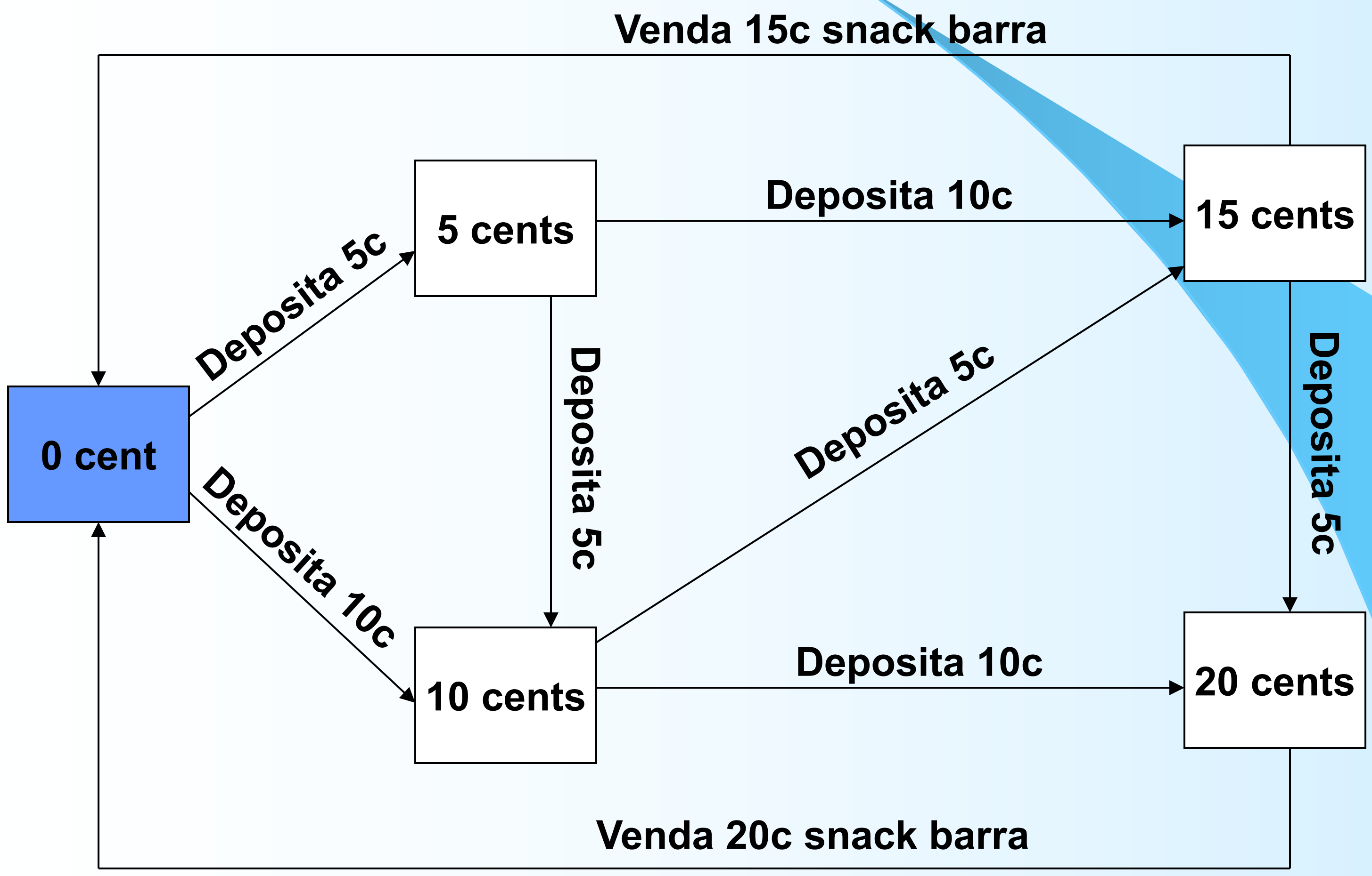
Uma mudança de estado

- Uma transição é disparável ou habilitada quando existem tokens suficientes nos lugares de entrada.
- Depois do disparo, tokens serão transferidos dos lugares de entrada (estado antigo), para os lugares de saída (novo estado).

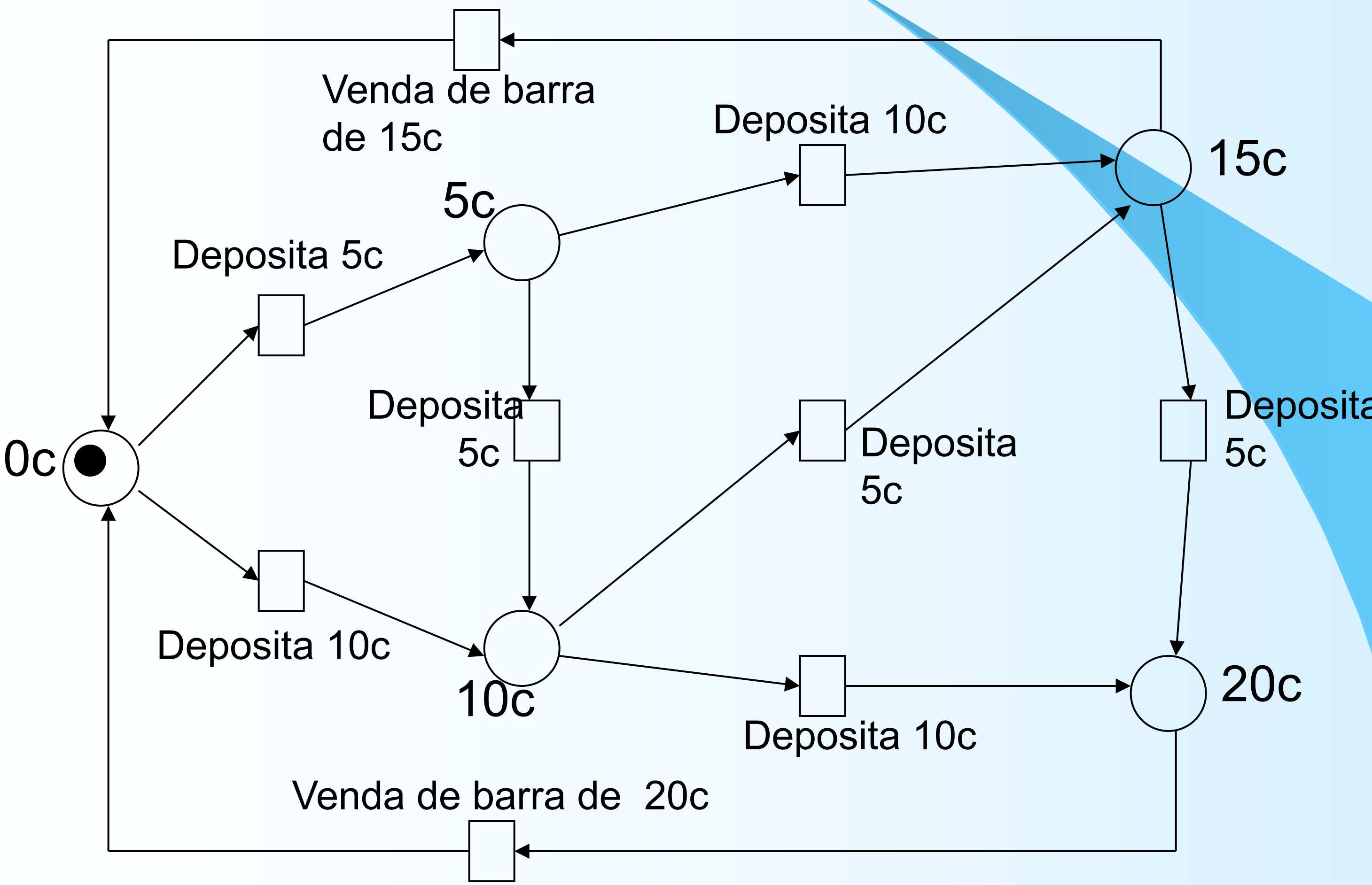
Exemplo: Máquina de Vendas

- A máquina irá vender dois tipos de barraras
  – 20c and 15c.
- Somentes dois tipos de moedas podem ser utilizadas:
  – 10c e 5c.
- A máquina não retorna troco.

Exdemplo: Máquina de vendas (Máquina de estados finito)



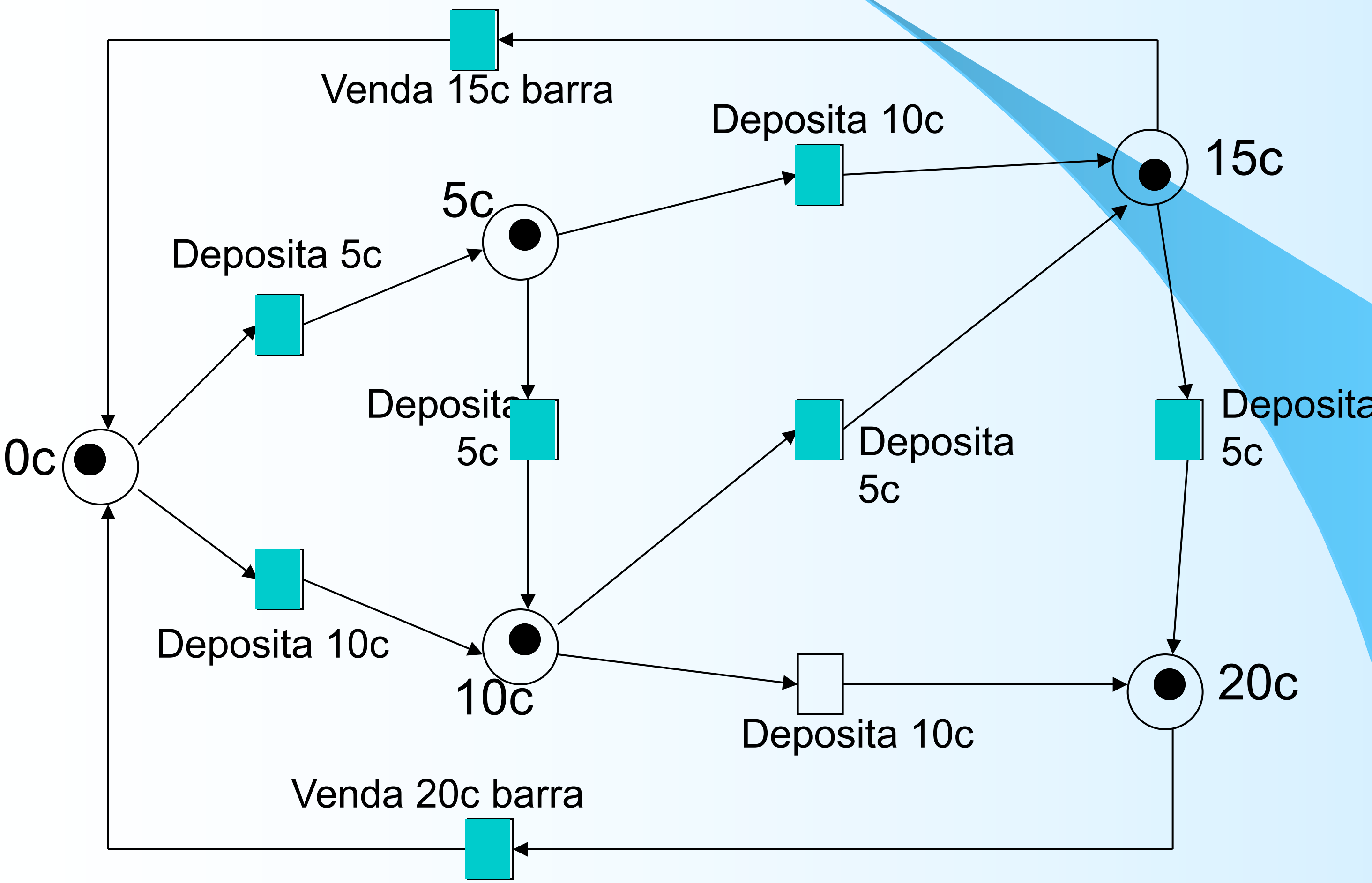
Exemplo: Máquina de vendas (Rede de Petri)



Exemplo: Máquina de vendas (3 cenários)

- Cenário 1:
  - Deposita 5c, Deposita 5c, Deposita 5c, Deposita 5c, Venda de barra de 20c.
- Cenário 2:
  - Deposita 10c, Deposita 5c, Venda de barra de 15c.
- Cenário 3:
  - Deposita 5c, Deposita 10c, Deposita 5c, Venda de barra de 20c.

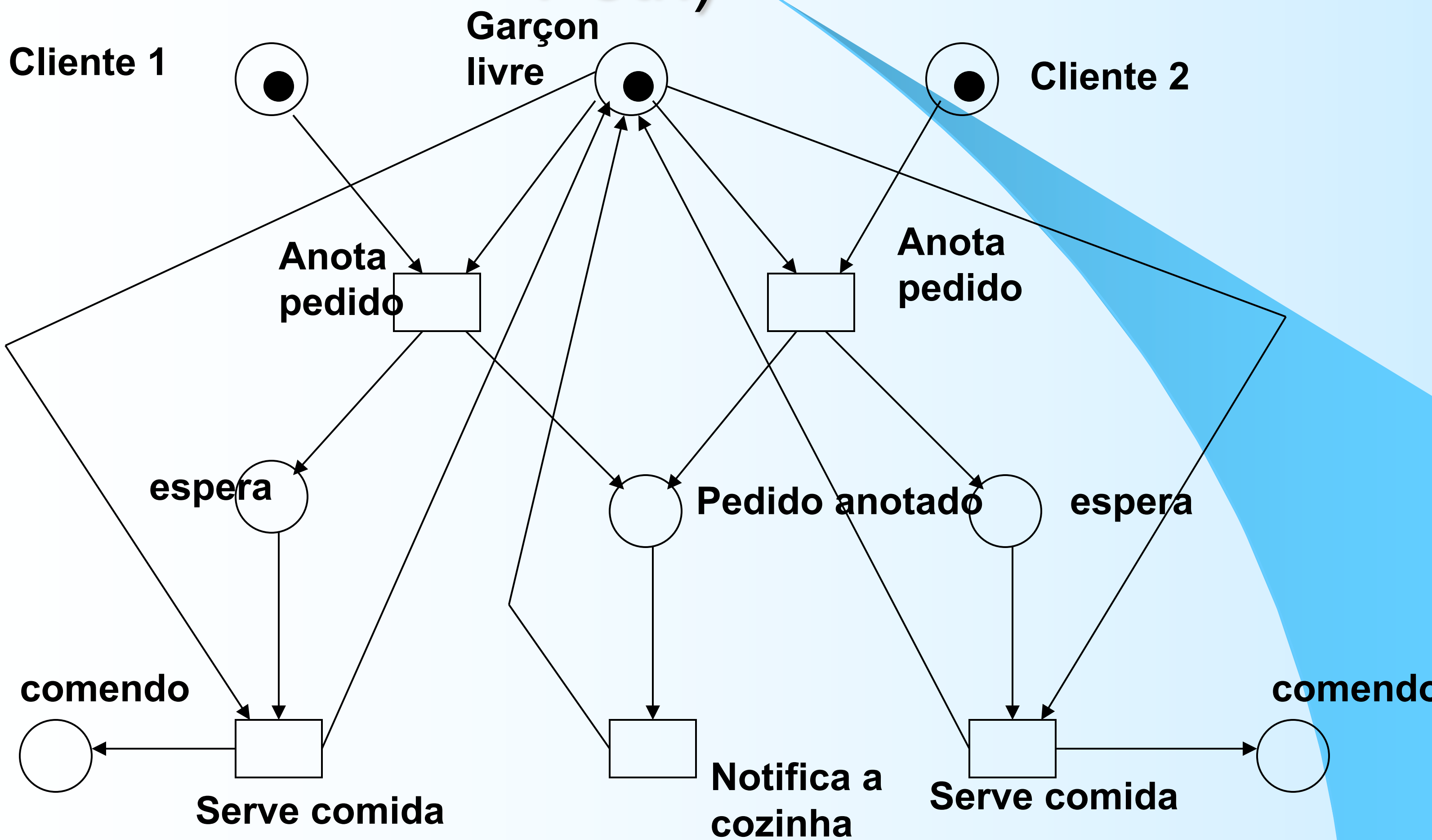
Exemplo: Máquina de vendas



Múltiplos estados

- No mundo real, eventos acontecem simultaneamente.
- Um sistema pode ter múltiplos estados locais para formar um único estado global.
- É necessário modelar concorrência e sincronização

Exemplo: Em um restaurante(Rede de Petri)

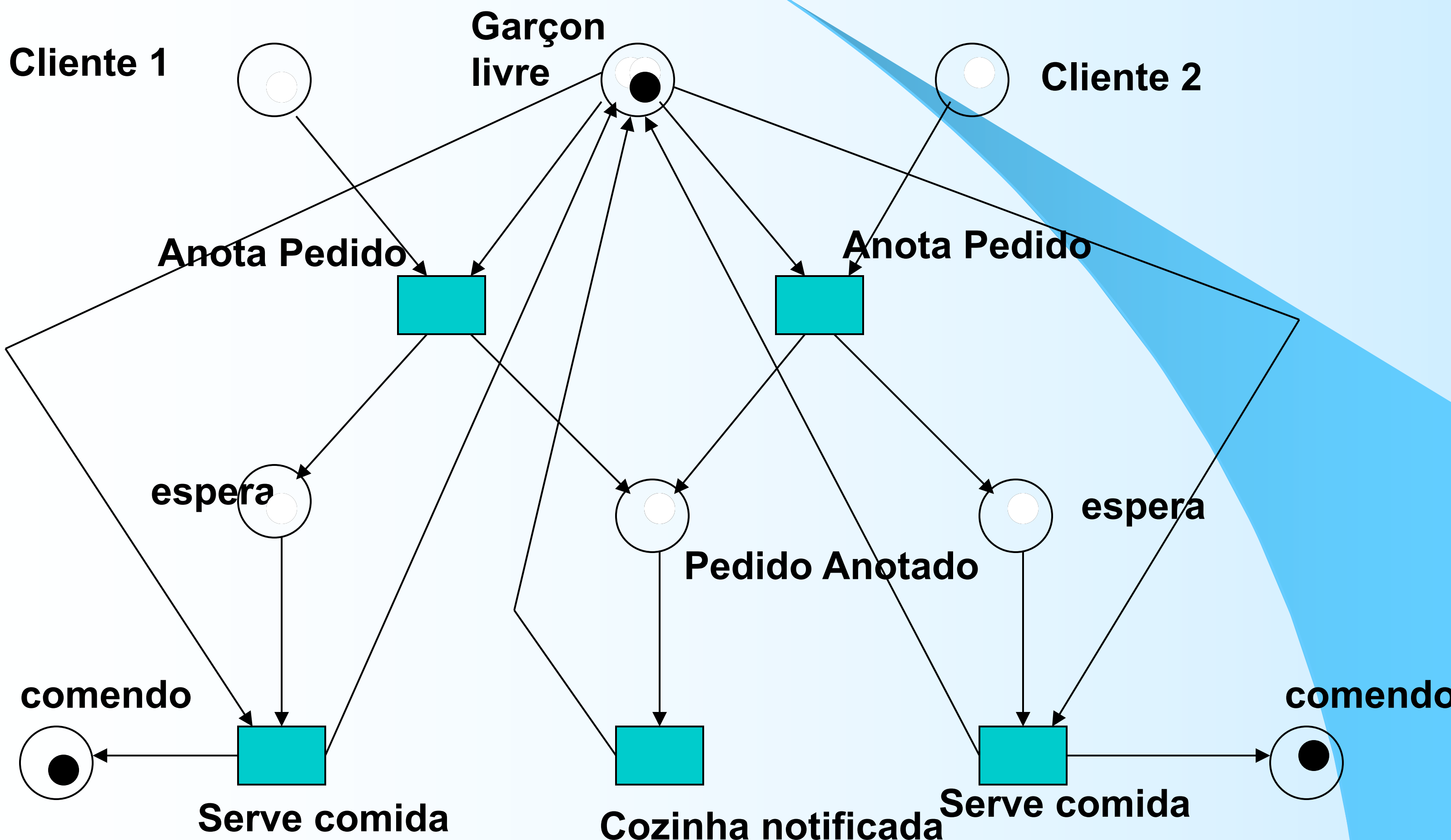


2001, Chris Ling

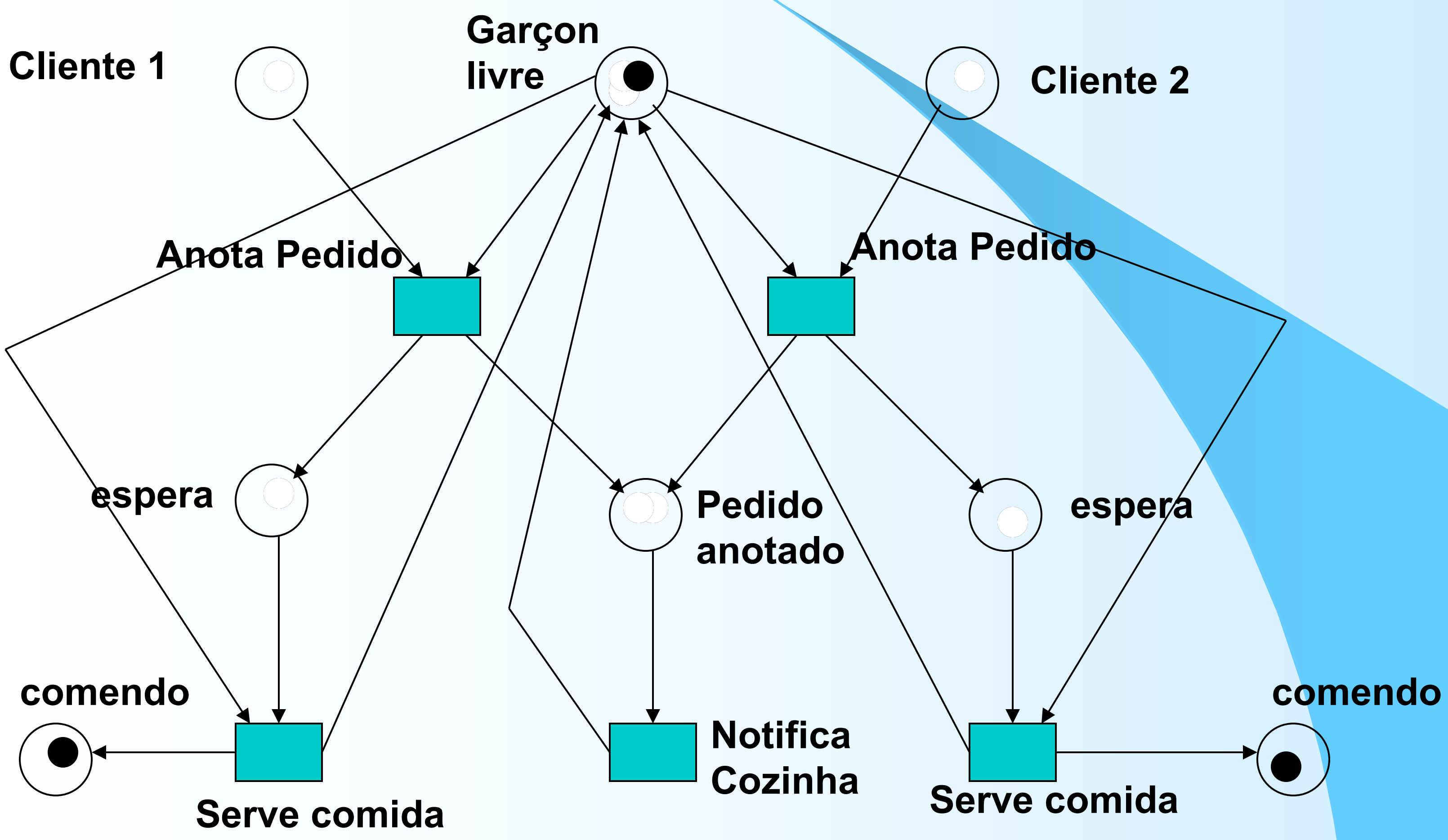
Exemplo: Restaurante (dois cenários)

- Cenário 1:
  - Garçon Pedido anotado do Cliente 1; serve Cliente 1; Pedido anotado do Cliente 2; serve Cliente 2.
- Cenário 2:
  - Garçon Pedido anotado doCliente 1; Pedido anotado do Cliente 2; serve Cliente 2; serve Cliente 1.

Exemplo: Restaurante (Cenário 1)

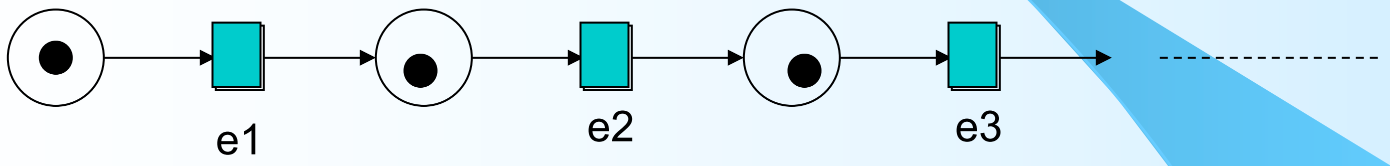


Exemplo: Restaurante (Cenário 2)

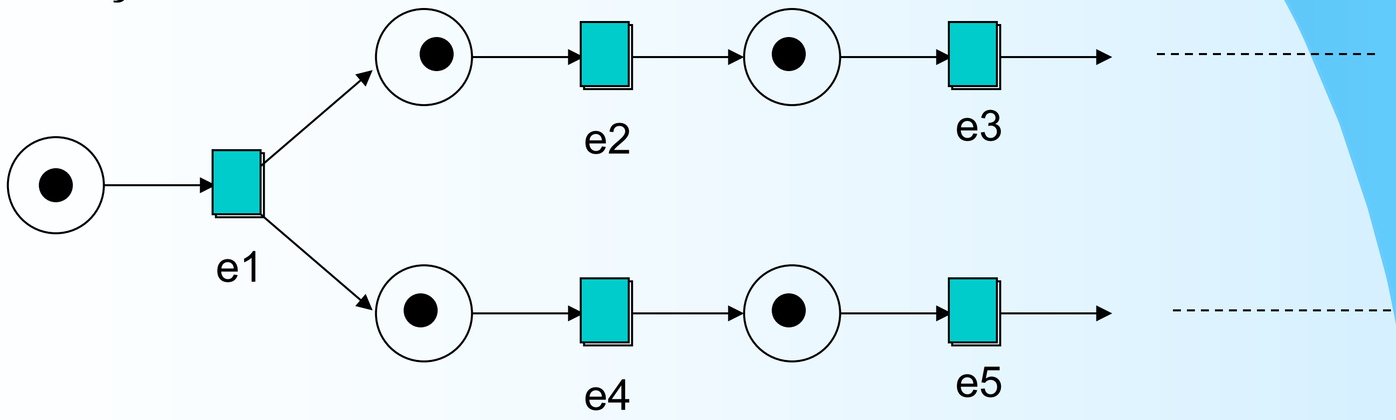


Estruturas de Rede

- Uma sequencia de eventos/ações:

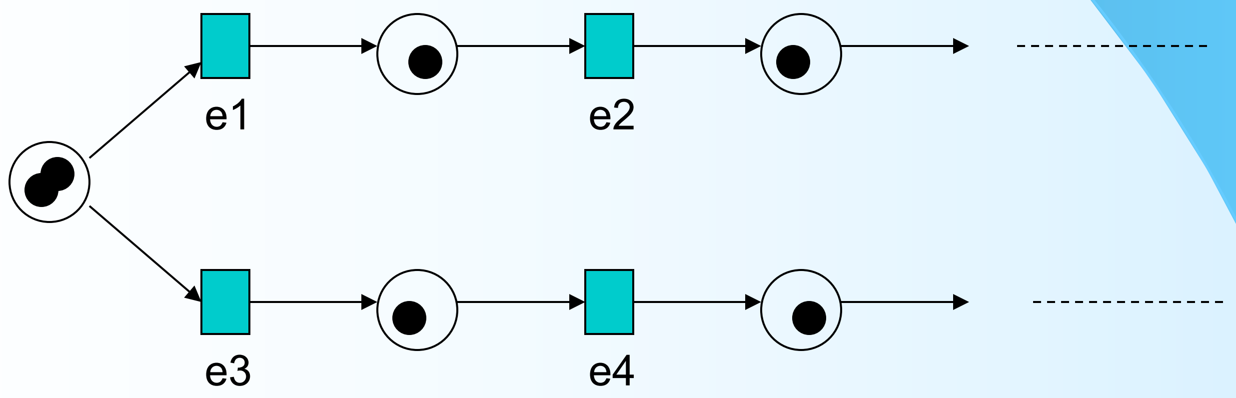


- Execução concorrente:



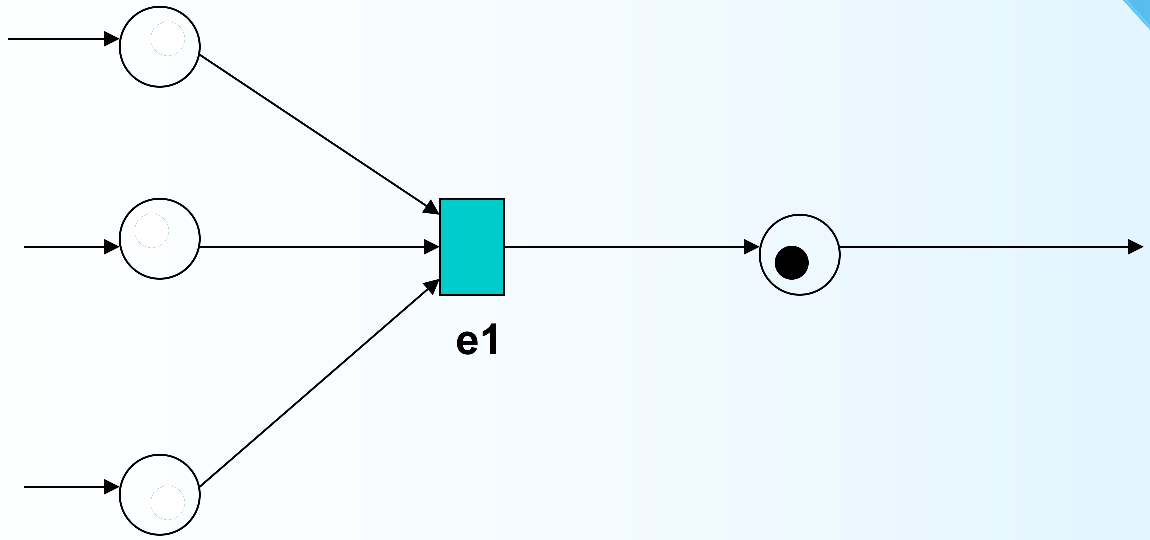
Estruturas de Rede de Petri

- Eventos não determinísticos- conflito, escolha ou decisão: Escolha de e1, e2 … ou e3, e4 ...



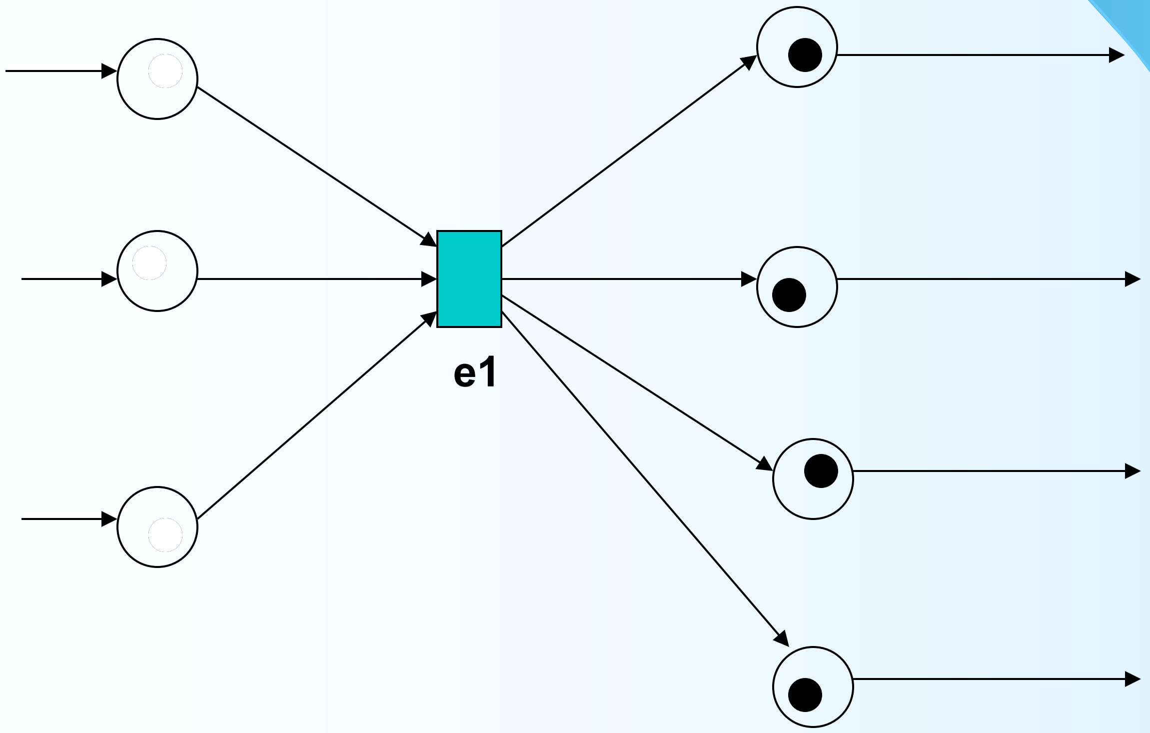
Estruturas de rede

- Sincronização



Estruturas de Rede de Petri

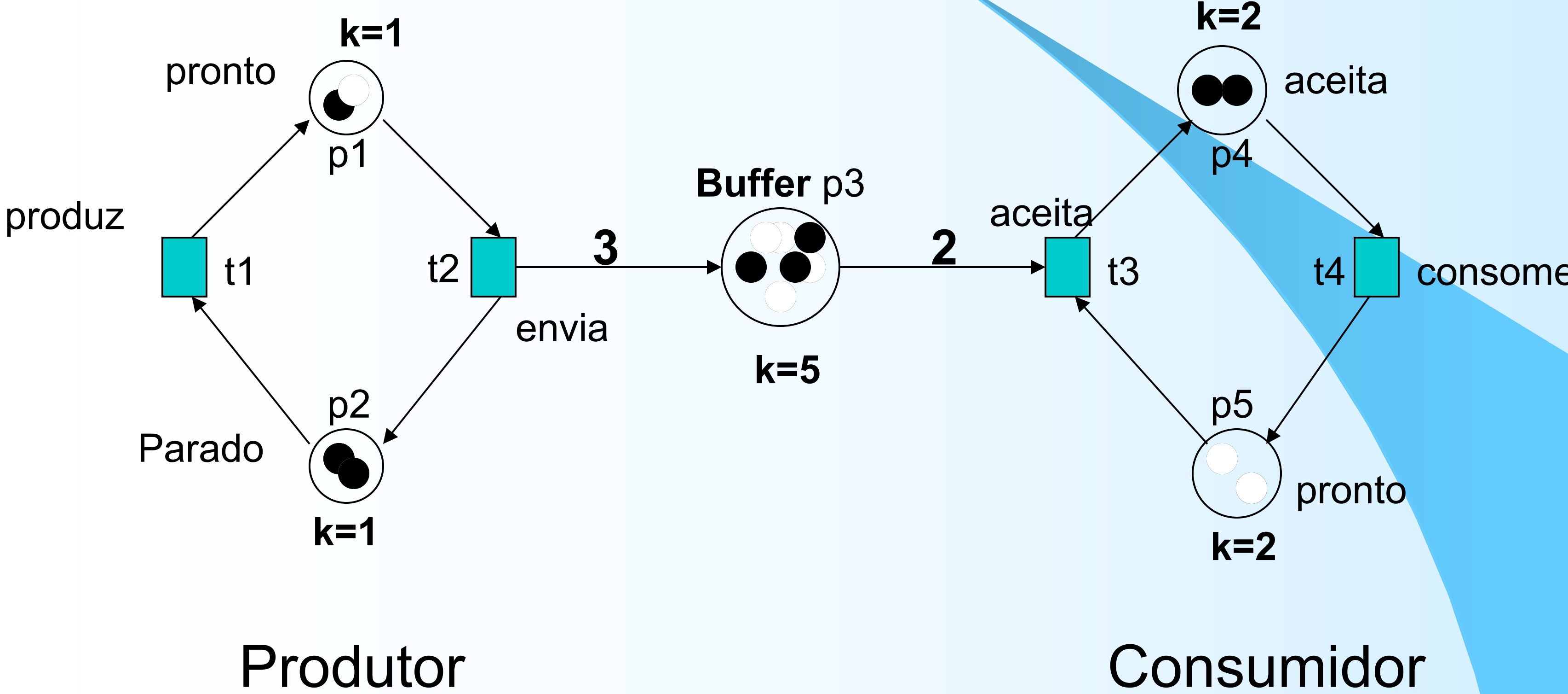
- Sincronização e Concorrência



Outro Exemplo

- Um sistema de produtor/consumidor, considete de um produtor, dois consumidores e um buffer com as seguintes condições:
  - O buffer pode conter até 5 ítens;
  - O produtor envia 3 ítens em cada produção;
  - Ao menos um consumidor está habilitado para acessar o buffer por vez;
  - Cada consumidor remove dois items quando acessa o buffer.

Sistema Produtor-Consumidor



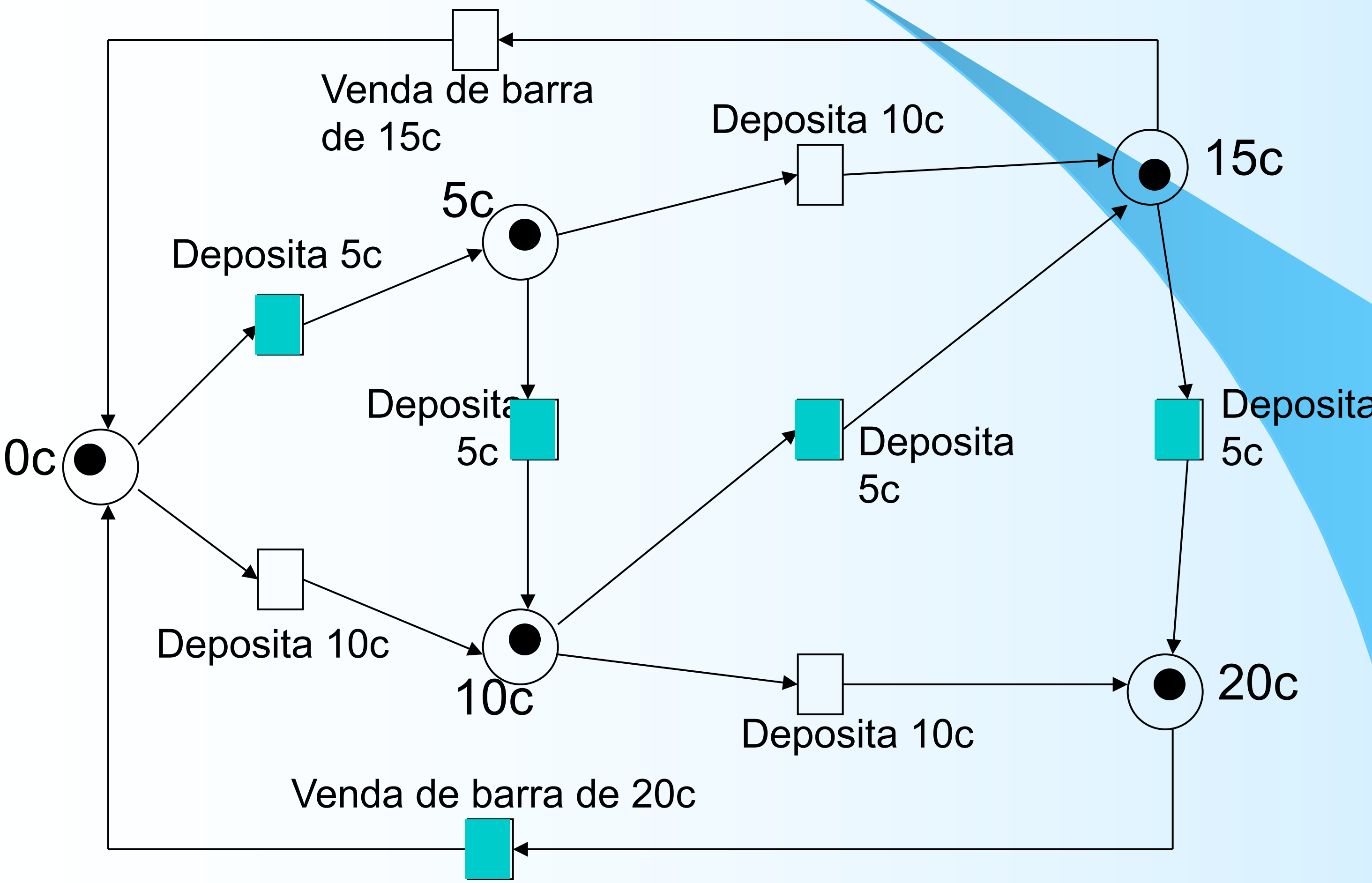
Exemplo de produtor-consumidor

- Nesta Rede de Petri todo lugar tem uma *capacidade* e cada arco tem um *peso*.
- Permite modelar comportamentos mais complexos.

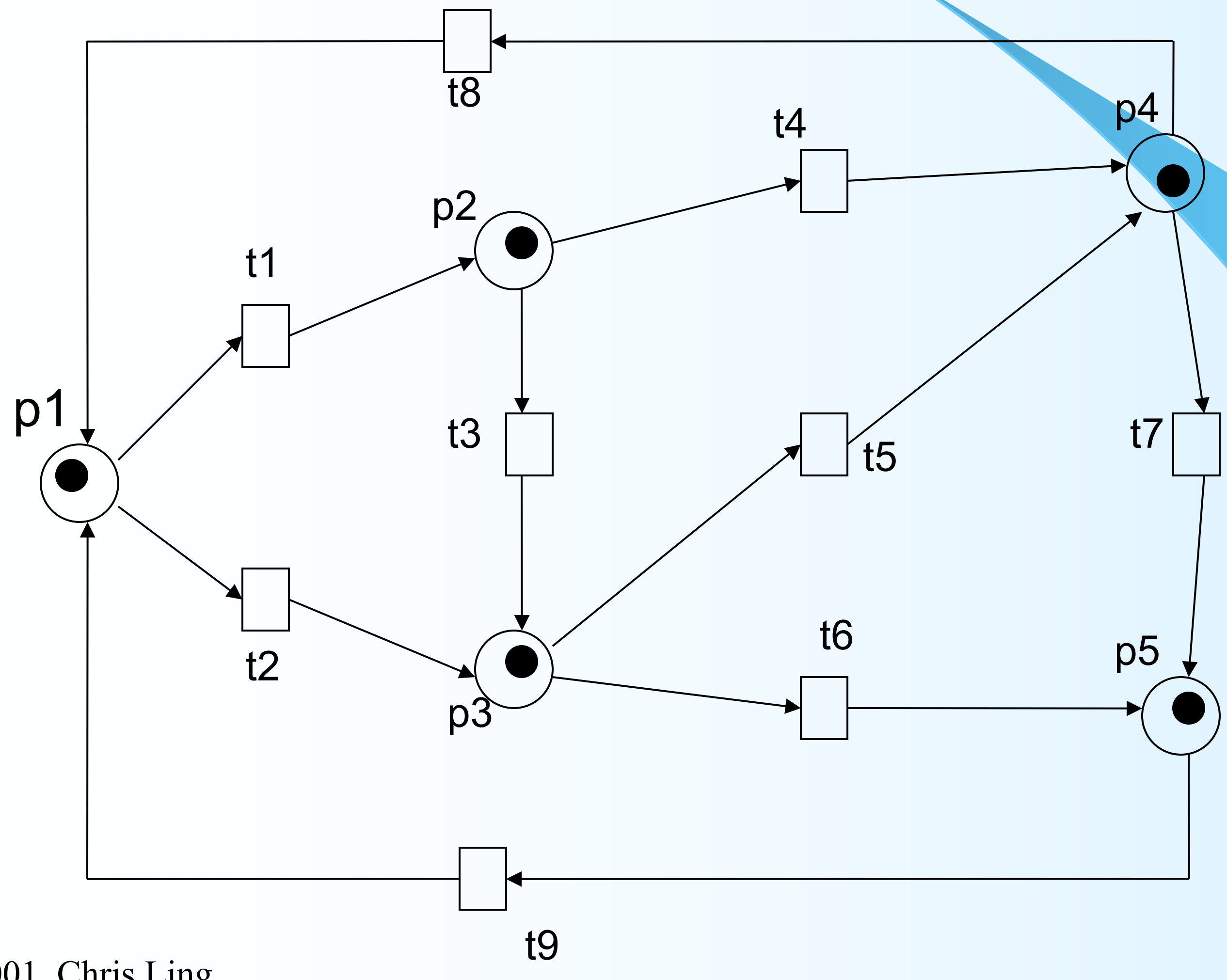
Propriedades comportamentais

- Alcançabilidade
  - “Podemos alcançar um estado particular a partir de um outro?”
- Limite
  - “Existe algum lugar com risco de *overflow*?”
- Vivacidade
  - “O sistema para num determinado estado ?”

Máquina de Vendas



Marcação é um estado...



M0 = (1,0,0,0,0)

M1 = (0,1,0,0,0)

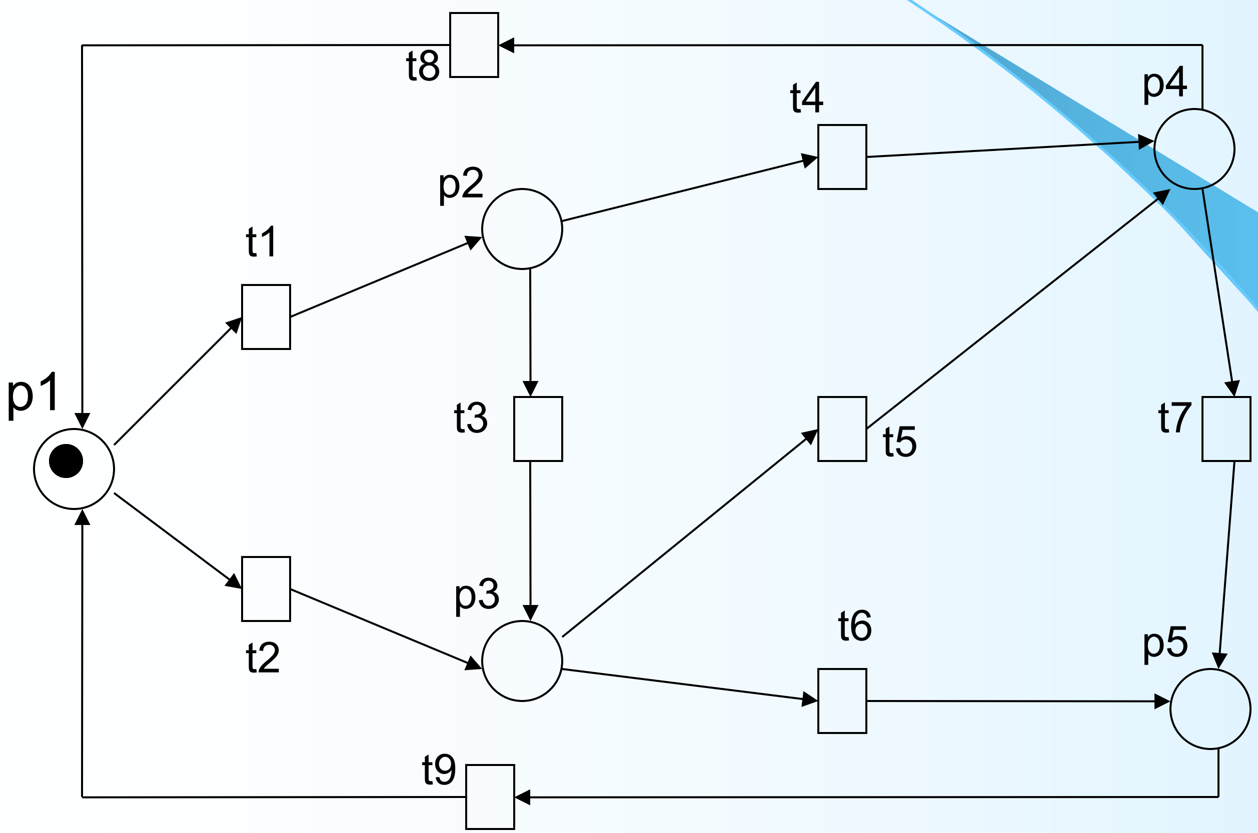
M2 = (0,0,1,0,0)

M3 = (0,0,0,1,0)

M4 = (0,0,0,0,1)

Marcação Inicial: M0

Alcançabilidade



M0 = (1,0,0,0,0)

M1 = (0,1,0,0,0)

M2 = (0,0,1,0,0)

M3 = (0,0,0,1,0)

M4 = (0,0,0,0,1)

Marcação Inicial:M0

$$M0 \xrightarrow{t1} M1 \xrightarrow{t3} M2 \xrightarrow{t5} M3 \xrightarrow{t8} M0 \xrightarrow{t2} M2 \xrightarrow{t6} M4$$

Alcançabilidade

Sequencia de disparos:

$$M0 \xrightarrow{t1} M1 \xrightarrow{t3} M2 \xrightarrow{t5} M3 \xrightarrow{t8} M0 \xrightarrow{t2} M2 \xrightarrow{t6} M4$$

- "M2 is *alcançavel* de M1 e M4 é *alcançavel* de M0."
- No exemplo de Máquina de Vendas, todos os estados são alcançaveis a partir de cada estado.

Limite

- Um Rede de Petri é dito ser *k-limitada* ou simplismente *limitada* se o número de tokens em cada lugar não excede um número limitado k para qualquer marcação alcancável a partir de M0.
- A Rede de Petri da Máquina de vendas é 1-limitada.
- Uma Rede 1-limitada é também dita *segura*.

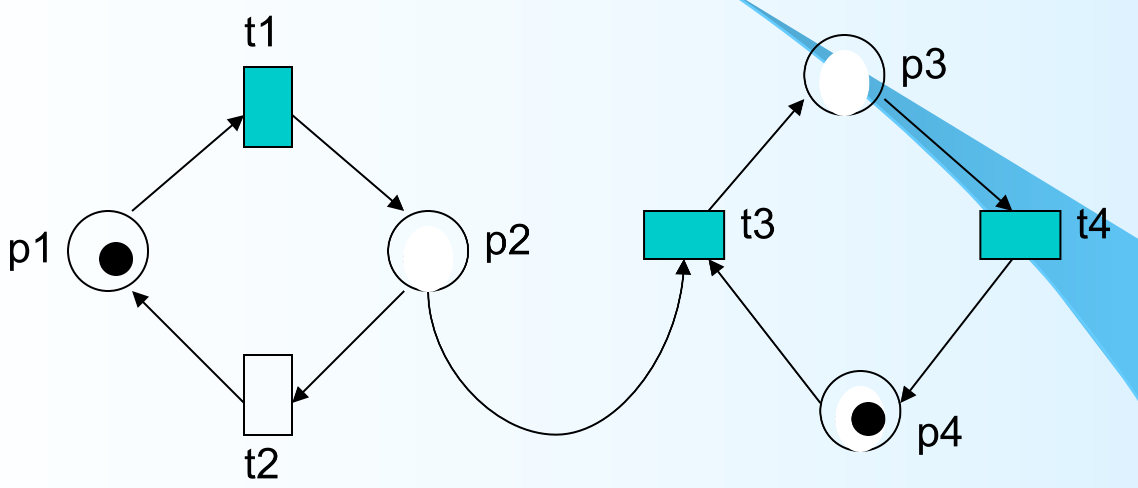
Vivacidade

- Uma Rede de Petri de marcação inicial M0 é *viva* se, não importa qual marcação tenha sido alcançada a partir de M0, é possível disparar alguma transição progredindo através de uma sequencia de disparos
- Uma Rede de Petri nesse caso é *livre-de-deadlock*, independente da sequencia de disparos escolhida.

Vivacidade

- A Máquina de Vendas é viva e produtor consumidor també é viva
- Uma transição está *morta* se ela nunca pode ser disparada em qualquer sequencia de disparos.

Exemplo



M0 = (1,0,0,1)

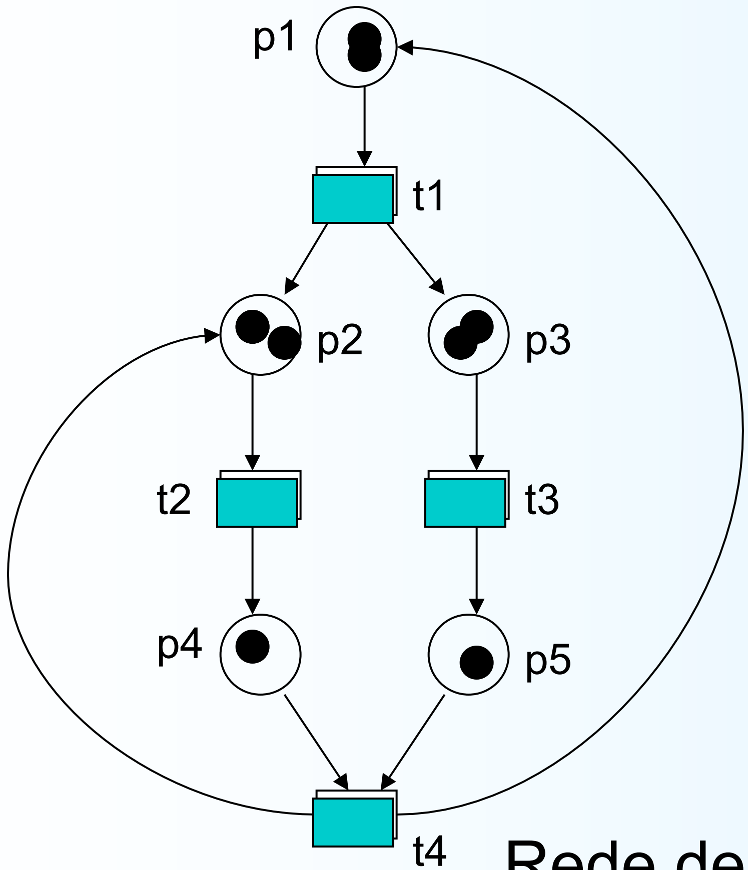
M1 = (0,1,0,1)

M2 = (0,0,1,0)

M3 = (0,0,0,1)

Rede de Petri Limitada mas não viva

Outro Exemplo



M0 = (1, 0, 0, 0, 0)

M1 = (0, 1, 1, 0, 0)

M2 = (0, 0, 0, 1, 1)

M3 = (1, 1, 0, 0, 0)

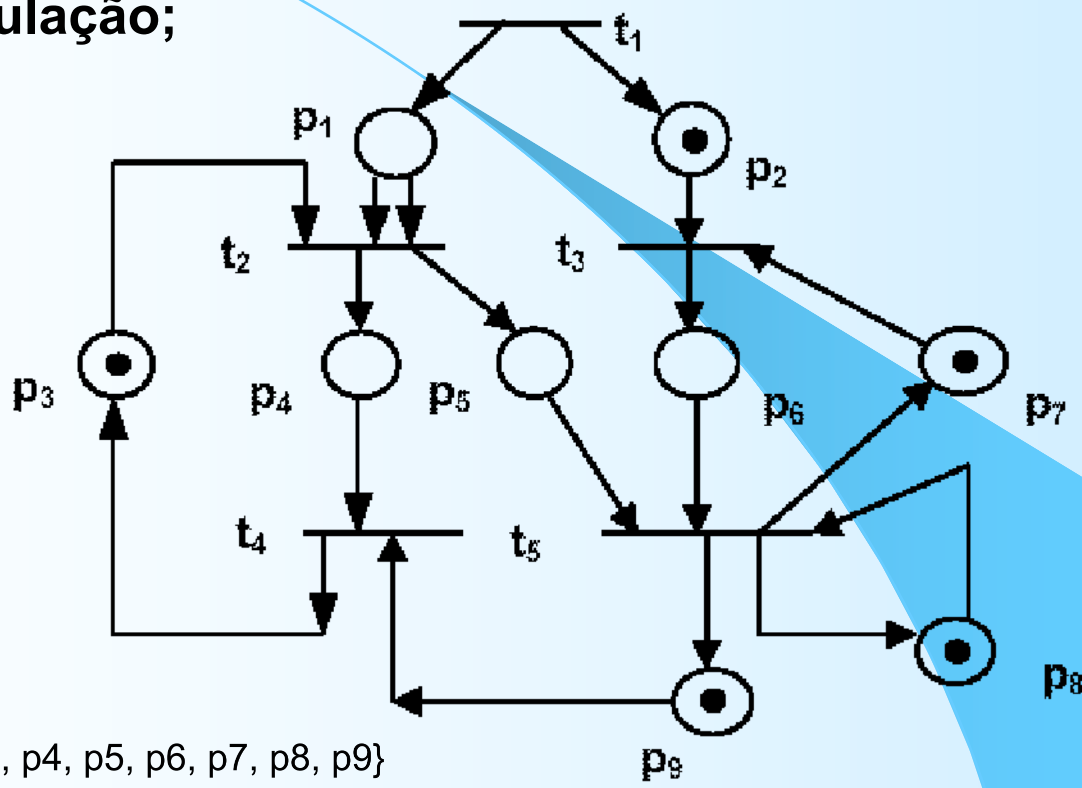
M4 = (0, 2, 1, 0, 0)

Rede de Petri Não limitada mas Viva

1 - Definições

Redes de Petri

- Uso em Simulação;
- Exemplo1:



Notação:

R = (P,T,I,O)

Lugares: **P** = {p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9}

Transições: **T** = {t1, t2, t3, t4, t5}

Entradas: I(t1) = vazio, I(t2) = {p1, p1, p3}, I(t3) = {p2, p7}, I(t4) = {p4, p9}, I(t5) = {p5, p6, p8}

Saídas: O(t1) = {p1, p2}, O(t2) = {p4, p5}, O(t3) = {p6}, O(t4) = {p3}, O(t5) = {p7, p8, p9}

Marcas: M(p1) = M(p4) = M(p5) = M(p6) = 0,
M(p2) = M(p3) = M(p7) = M(p8) = M(p9) = 1.

1 - Definições

Redes de Petri

- **<u>Multiplicidade de um lugar pi</u>: número de ocorrências de pi, na transição tj, enviao representada por:**

  #(pi, I(tj));

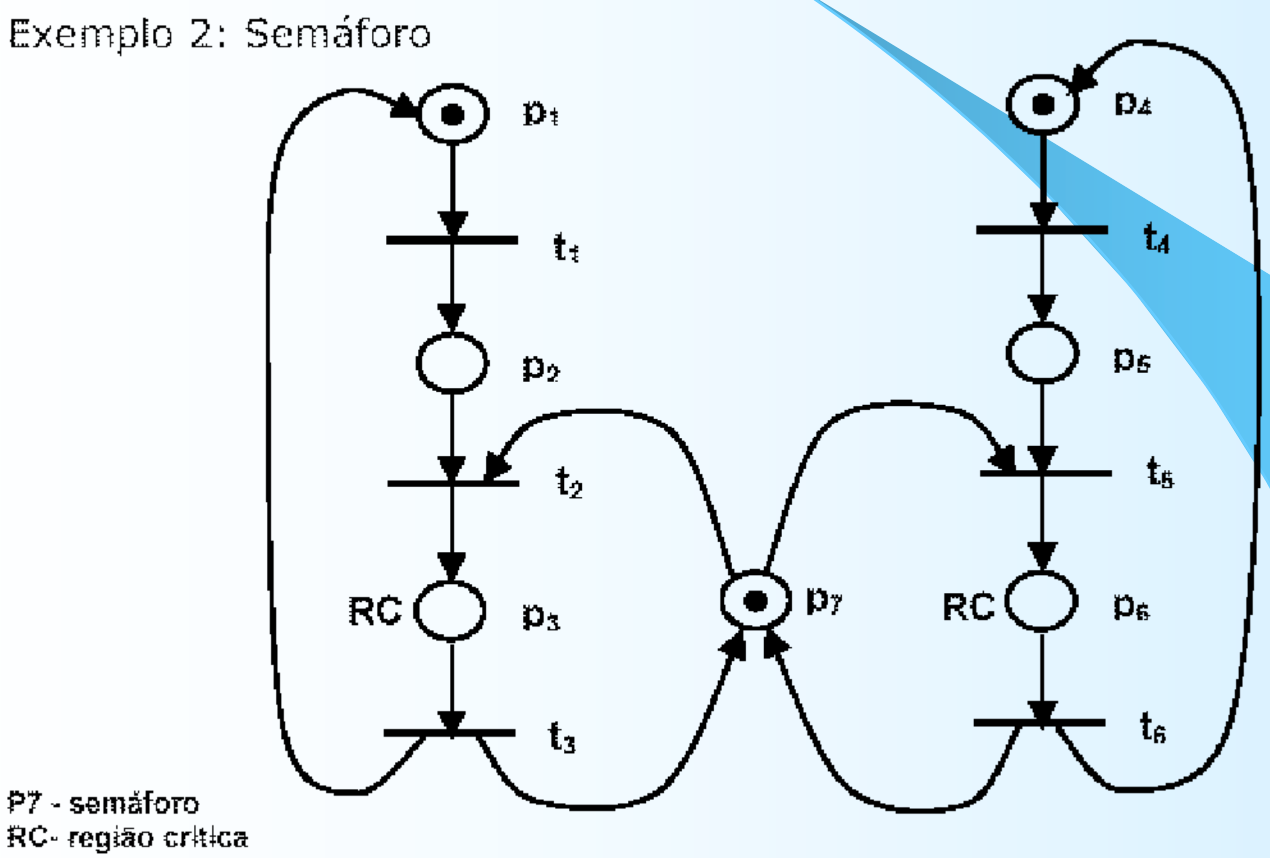
- **<u>Transição Habilitada</u>: uma transição está habilitada se para <u>todo</u> pi pertencente a I(tj) tem-se:**

  M(pi) >= #(pi, I(tj));

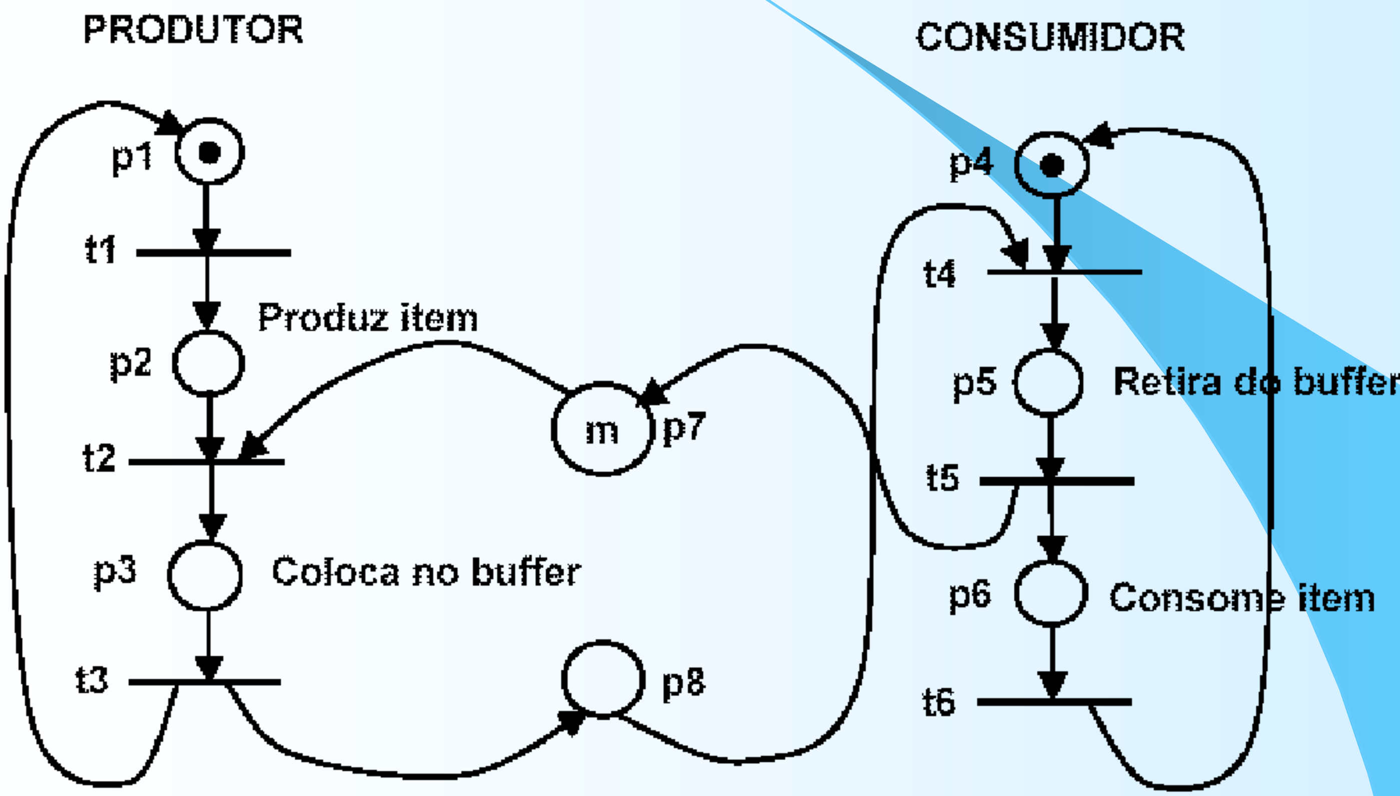
- **<u>Disparo das transição</u>:**

  M’ (p) = M(p) - #(p, I(tj)) + #(p, O(tj))

Exemplo2: Semáforo



Exemplo3: Produtor/Consumidor



1 - Definições

- Estado de uma Rede: marcação atual de uma rede.

- Função Próximo Estado: Função que define uma nova marcação de uma Rede F(M, Tj) = M´

  $M'(p) = M(p) - \#(p, I(tj)) + \#(p, O(tj))$

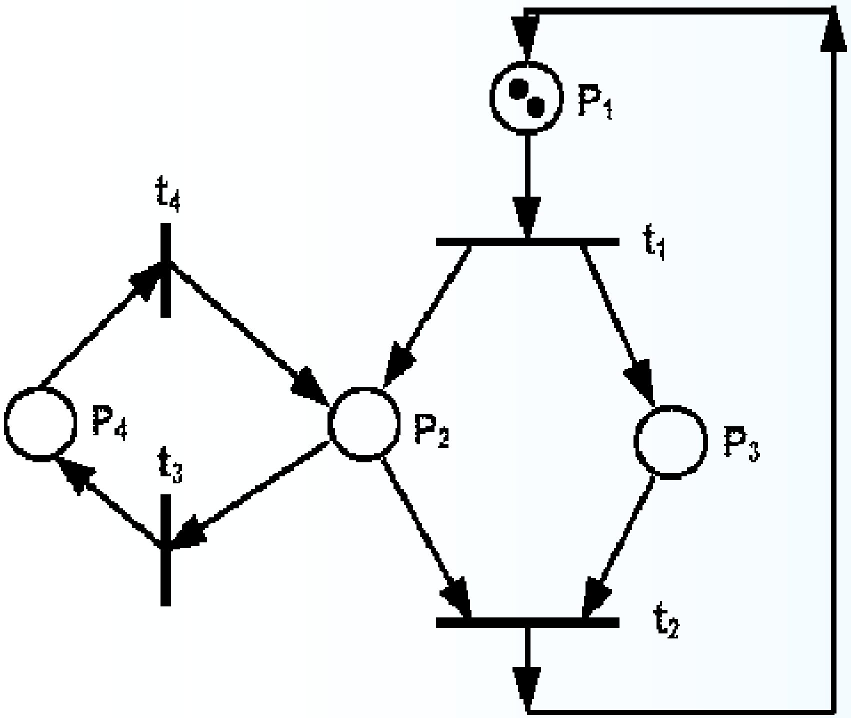
- Execução de uma Rede de Petri: Sequência de disparos de transições (t1, t2, t3, ...), definindo uma sequência de Marcas: (M0, M1, M2,...);
- Conjunto de Alcançabilidade: A = (R, M), para R = (P,T,I,O)

- Marcação Imediatamente Alcançável: M´ é imediatamente alcançável se F(M, tj) = M´

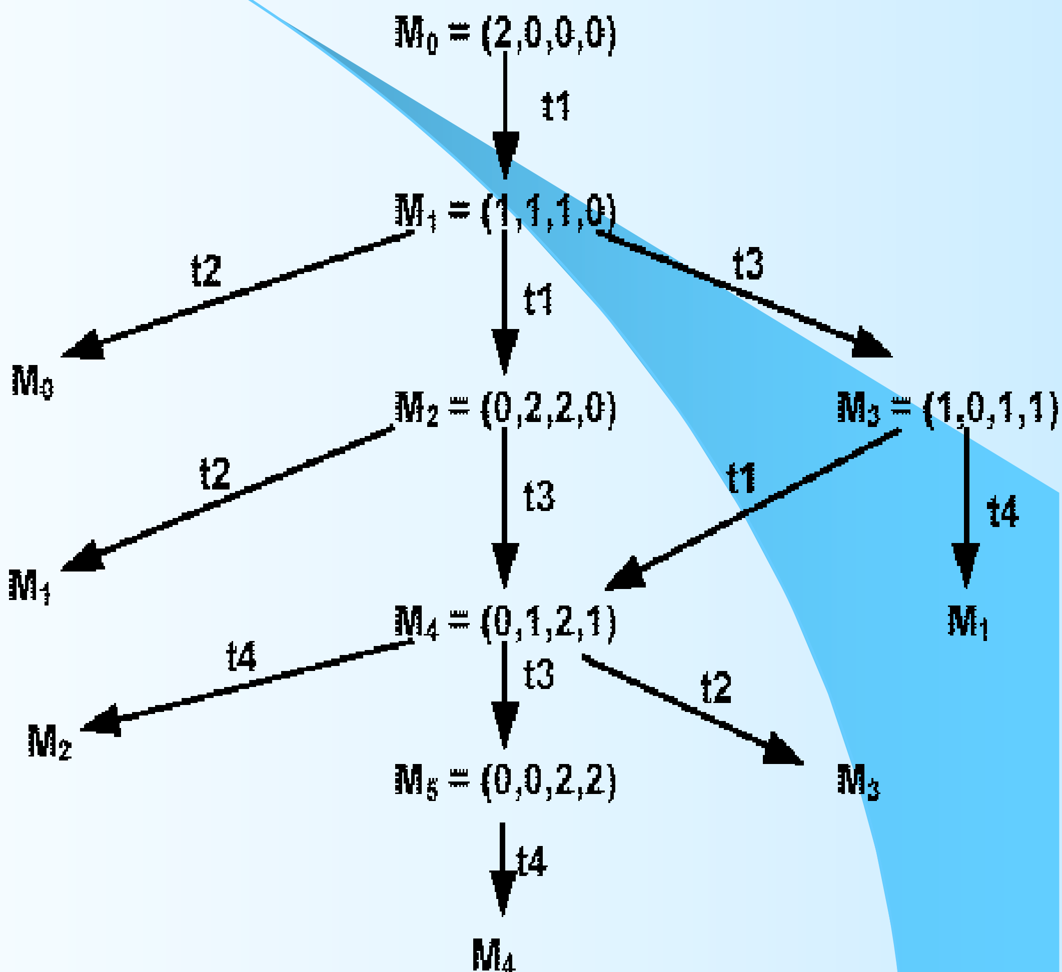
- Marcação Alcançável: M´ é alcançável a partir de M se M´ pertence a A(R,M).
- Árvore de Alcançabilidade: árvore com Marcação Inicial na raiz, seguida de todas as marcações alcançáveis.

❖ Exemplo 4:

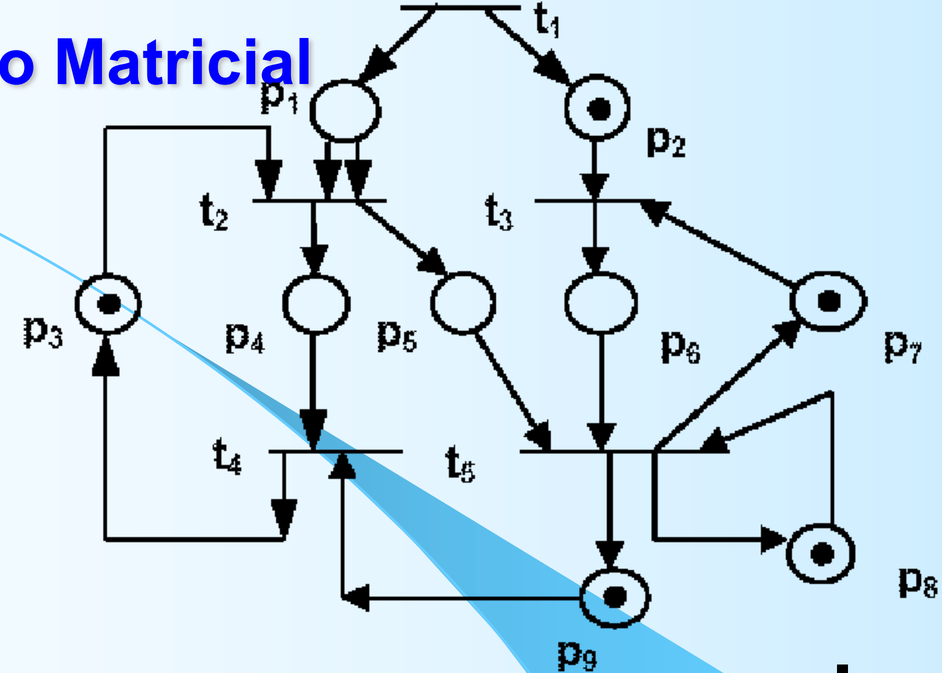
Rede de Petri:



Árvore de Alcançabilidade:



2 - Notação Matricial



❖ Exemplo 5:

Rede de Petri:

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sendo

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

E: Matriz de Entrada
S: Matriz de Saída
C=S-E: Matriz de Incidência

2 - Notação Matricial

- Habilitação de uma transição: se M >= ej*E,
  onde ej = [0,0,...,1,0...] vetor que representa uma transição
- Função Próximo Estado:

  F(M, tj) = M + ej*S - ej*E = M +ej*C, pois C = S - E.

- Sequência de Disparos:

F(M, s) = F(M, t1, t2, .., tk) = M + [e1+e2+..+ek]*C = M + fs*C, onde fs = [e1, e2, ..ek], vetor de disparos.

3 - Propriedades da Rede de Petri

- Lugar seguro: lugar onde o número de marcas de um determinado lugar é menor ou igual a 1.

  Para todo M' pertencente a A(R,M), M' [pi] <= 1

- Rede é Segura se todos os lugares forem seguros;
- Um lugar é K-ésimo seguro se o número de marcas desse lugar é menor ou igual a K;
- Limitação:
  - Um lugar é limitado se é k-ésimo seguro;
  - Uma rede é limitada se todos os seus lugares são limitados.
- Uma rede é Conservativa se para qualquer marcação alcançável, a soma das marcas é constante
- Vivacidade:
  - Nível 0: a transição está em nível 0 se nunca pode ser disparada;
  - Nível 1: se uma transição pode ser disparada;
  - Nível 2: se uma transição é disparada pelo menos k vezes.

3 - Propriedades da Rede de Petri

- **Deadlock:**

  - **Uma rede está <u>morta para uma determinada marcação</u>, se todas as transições existentes estão desabilitadas;**

  - **Se essa condição ocorrer para todas as transições, a situação da rede é de <u>Impasse Total</u>, ou seja nenhuma transição poderá ser dispara;**

  - **Uma rede é Livre de impasses se para qualquer marcação existe pelo menos uma transição habilitada.**

4- Análise de Rede de Petri

- **Análise de Condições de Alcançabilidade:**

  Seja Mk+1 = Mk + ej * C, onde C = S – E.
  Considerando uma seqüência de disparos s = t1, t2, ..., tk
  M´ = M + (e1 + e2 +...+ ek) * C
  Ou
  M´ = M + fs*C, onde fs é o vetor de contagem de disparos;

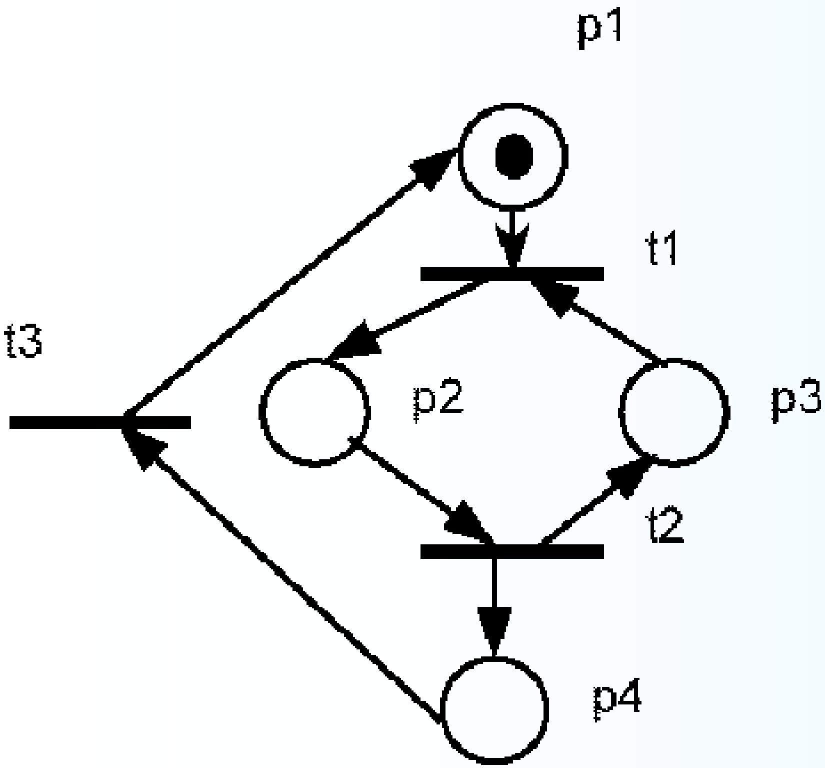
  Portanto:
  fs * C = M´- M = ΔM
  C^t * fs = ΔM

Assim a solução desse sistema de equações define o número de vezes que uma determinada transição deve ser ativada para atingir uma nova marcação.

A solução dessa equação não é uma condição suficiente para definir que uma determinada Marcação é Alcançável.

4- Análise de Rede de Petri

- **Exemplo 6:**



$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Delta M = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Solução } f_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Embora exista a solução M´ não é alcançável a partir de M.**

4- Análise de Rede de Petri

- ## Invariantes

Define que a soma das marcas nos lugares pertencentes a um conjunto de lugares pré-definidos é constante.

Seja C * Z = 0

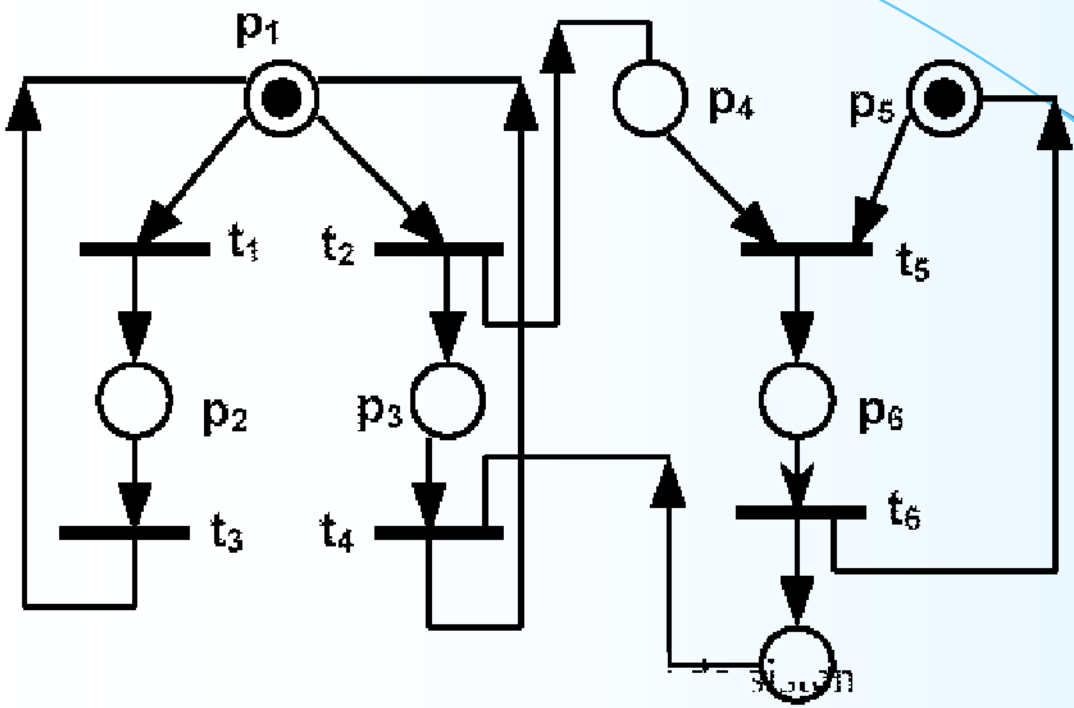
Onde Z = {pj | Z[j] = 1, j = 1,2,3..m} enviao pj = 0 ou 1.

Condição para não existência de Conjunto de Invariantes:

- Se a Matriz característica de C (P) for igual a M, isto é, P coincide com o número de lugares da Rede:

  C*Z = 0, admite como solução única o vetor nulo.
- Se P < M então existirá (m-p) soluções.

❖ **Exemplo 7: Invariantes:**



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores z obtidos de C * Z = 0

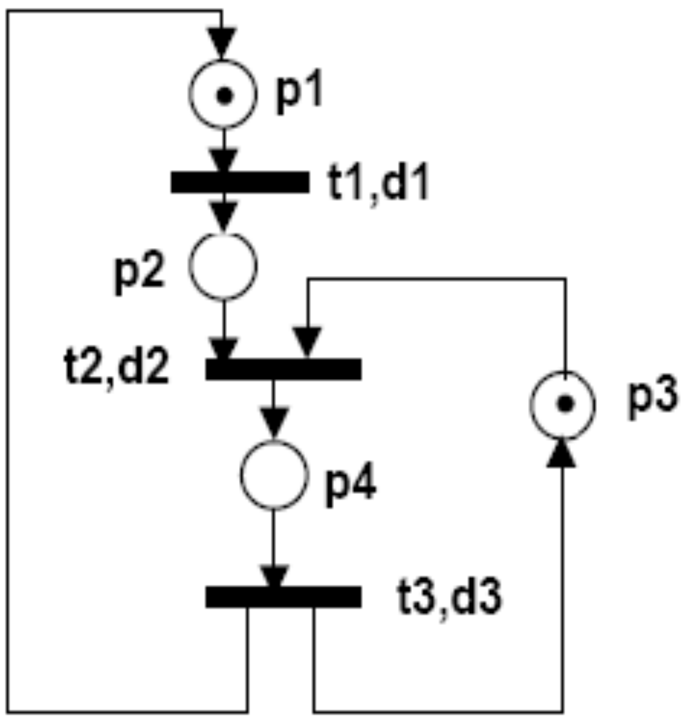
Z1 = [1 1 1 0 0 0 0] => Invariante Z1 = {p1, p2, p3}
Z2 = [1 1 0 1 0 1 1] => Invariante Z2 = {p1, p2, p4, p6, p7}
Z3 = [0 0 0 0 1 1 0] => Invariante Z3 = {p5, p6}
Z4 = [1 1 1 0 1 1 0] => Invariante Z4 = {p1, p2, p3, p5, p6}

4- Análise de Rede de Petri

- **Propriedades das Invariantes:**
  - **Se um lugar pertence a um invariante z, então o número de marcas do lugar será limitado;**
  - **Rede Limitada: Se existe um conjunto de invariantes onde todos os lugares da rede estão envolvidos, então o número de marcas na rede permanece constante.**

5- Redes de Petri Temporizadas

- **Modelagem de Sistemas considerando atrasos;**
- **Os atrasos estão associados a mudança de estados;**
- **Exemplo:**



d1: tempo em que não necessita do recurso;
d2: tempo de aquisição do recurso;
d3: tempo de utilização do recurso.

5- Redes de Petri Temporizadas

- **Vantagens:**
  - **Além da Modelagem da lógica do processo estabelece uma relação com o tempo;**

- **Desvantagem:**
  - **Como parte do estado, deve-se considerar o tempo de disparo de uma transição.**

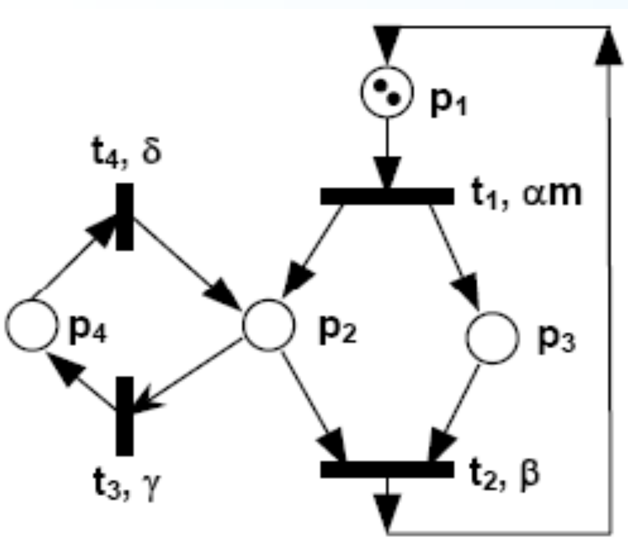
5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Característica:**
  - **Além do tempo de disparo, possuem taxas de disparos associadas as transições;**
  - **As taxas de disparo tem uma distribuição exponencial;**
  - **Permite associar uma cadeia de Markov**

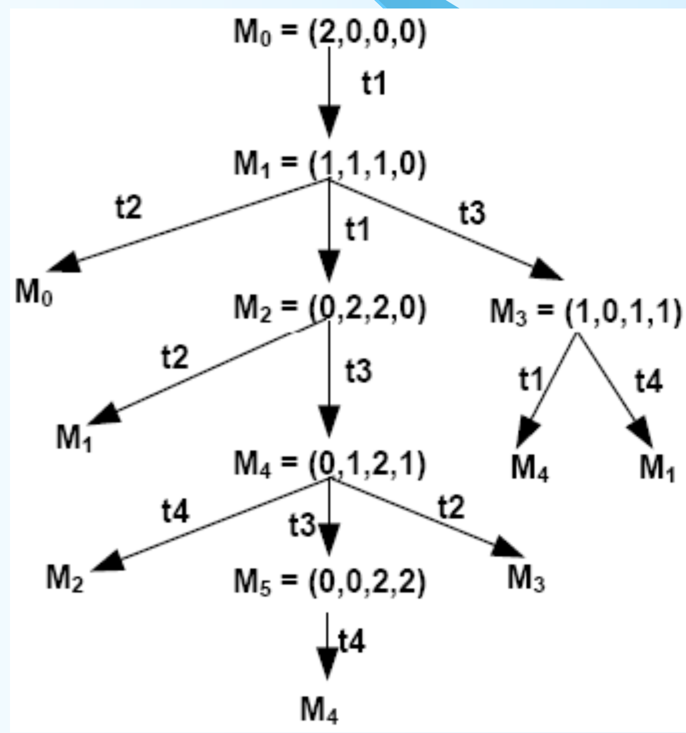
5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Exemplo:**

Rede de Petri



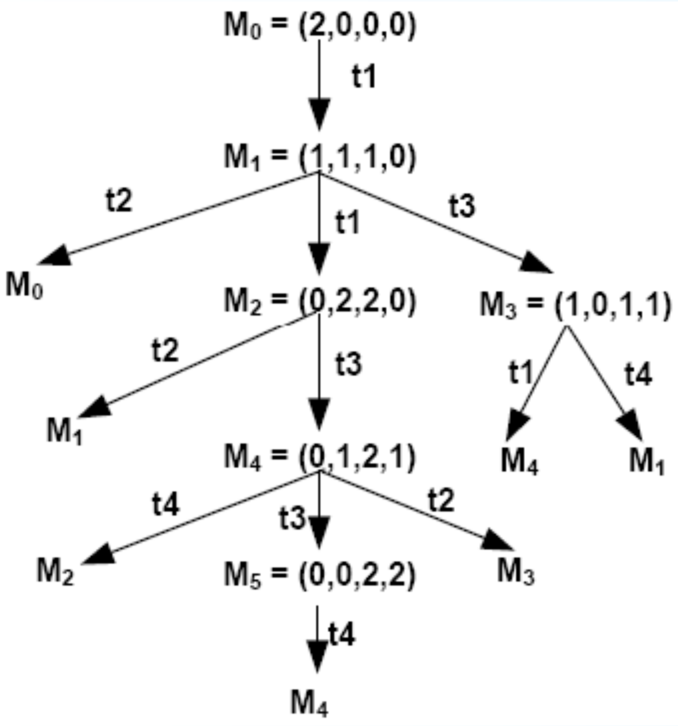
Árvore de Alcançabilidade



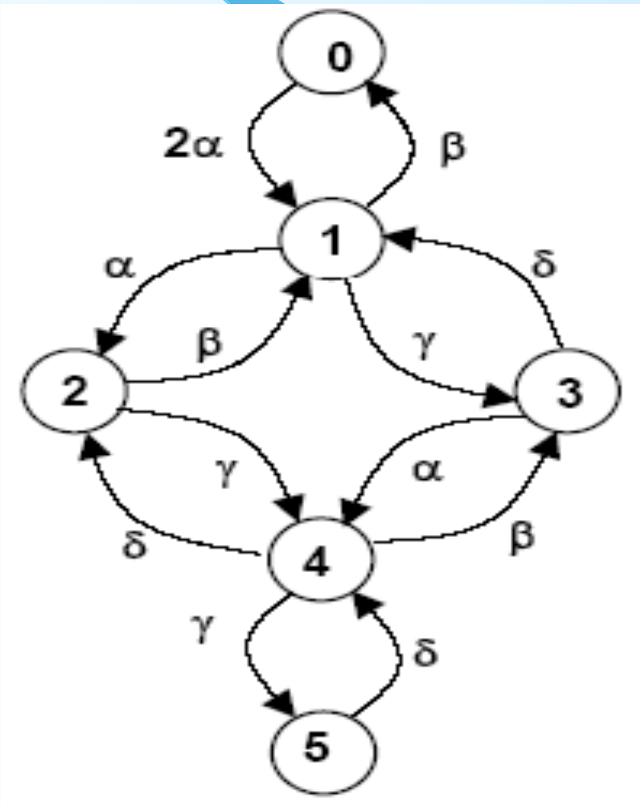
5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Exemplo:**

Árvore de Alcançabidade



Cadeia de Markov



5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Exemplo:**

Taxa de mudança do estado i (Marcação Mi) para o estado j (Mj):

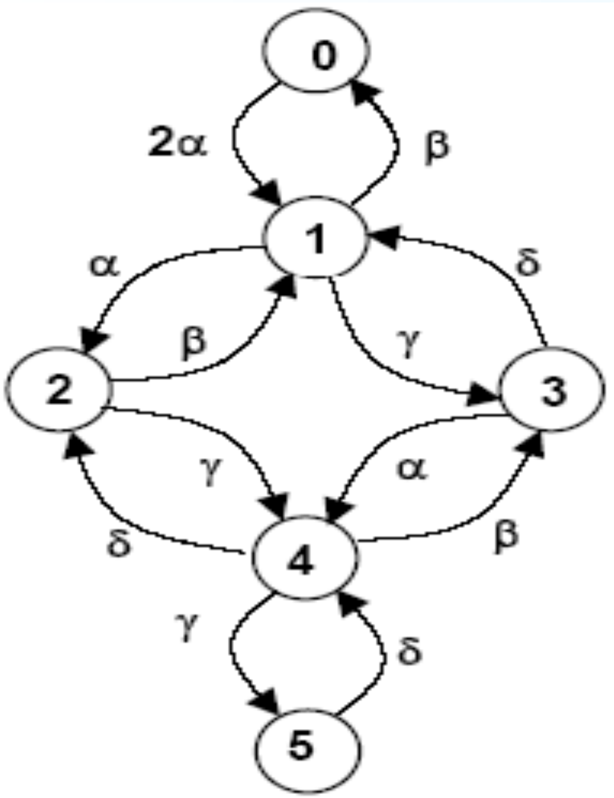
$$q_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \in H_{ij}} l_k & \text{sendo } H_{ij} \text{ é o conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação } M_i\text{, cujo disparo gera a marcação } M_j. \\ -q_i & \end{cases}$$

onde $q_i = \sum_{k \in H_i} l_k$ sendo H_i é o conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i.

5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Exemplo:**

Cadeia de Markov



Taxa de Mudança do Estado *i* para o estado *j*

$$Q=\begin{pmatrix} -2\alpha & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta+\alpha+\gamma) & \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\beta+\gamma) & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -(\delta+\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -(\delta+\beta+\gamma) & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -\delta \end{pmatrix}$$

5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Se a Marcação M0 for alcançável a partir de qualquer outra marcação (Cadeia Ergótica):**
  - **Pode-se calcular a probabilidade de estados estacionários ou estado estável:**

$$\pi \cdot Q = 0$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Exemplo:**

$$Q = \begin{pmatrix} -2\alpha & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta+\alpha+\gamma) & \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\beta+\gamma) & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -(\delta+\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -(\delta+\beta+\gamma) & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -\delta \end{pmatrix}$$

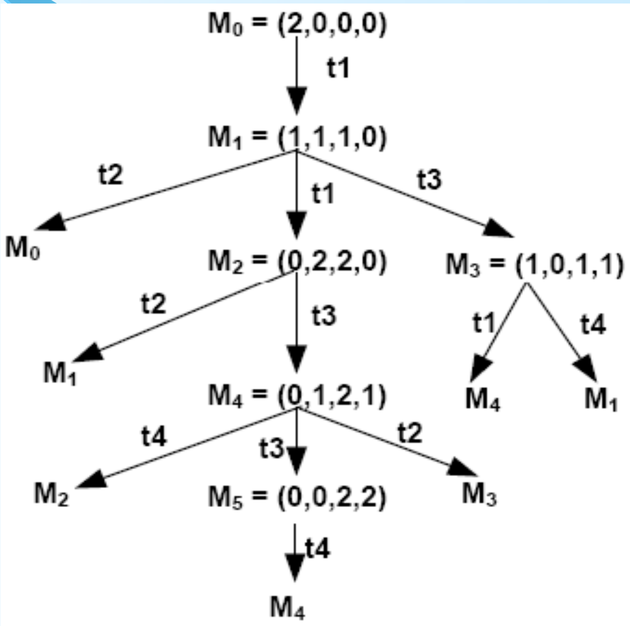
- **Para α = β = γ = δ = 1**

$$\pi * \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$$

5- Redes de Petri Temporizadas e Estocásticas

- **Exemplo:**

  $\P_0 = 1/11$ e $\P_1 = \P_2 = \P_3 = \P_4 = \P_5 = 2/11$



- **Número médio de marcas em P1:**

  $E[m1] = 2^* \P_0 + \P_1 + \P_3 = 6/11$

- **A taxa média de disparos de t2 é:**

  $f2 = (1/3)\P_1 + (1/2)\P_2 + (1/3)\P_4 = 7/33$

- **Obs: t2 só está habilitada nas marcações M1, M2 e M4**

5- Redes de Petri Generalizadas

- Características (transições):
  - Imediatas;
  - Temporizadas.

- Regras de Disparos:
  - Probabilidade de Disparo de uma transição Temporizada habilitada em M:

$$P[t_i \mid M] = w_i \Big/ \sum_{t_k \in I} w_k$$

  - Se só existe uma transição imediata, sua probabilidade de disparo é 1;
  - Quando houverem mais de uma transição imediata habilitada para uma mesma marcação, atribui-se <u>pesos</u>;

5- Redes de Petri Generalizadas

- **Matriz de probabilidades U:**

$$U_{ij} = \frac{\sum_{k \in H_{ij}} W_k}{\sum_{k \in H_i} W_k}$$

Sendo

H_{ij} conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i, cujo disparo gera a marcação M_j.

H_i conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i.

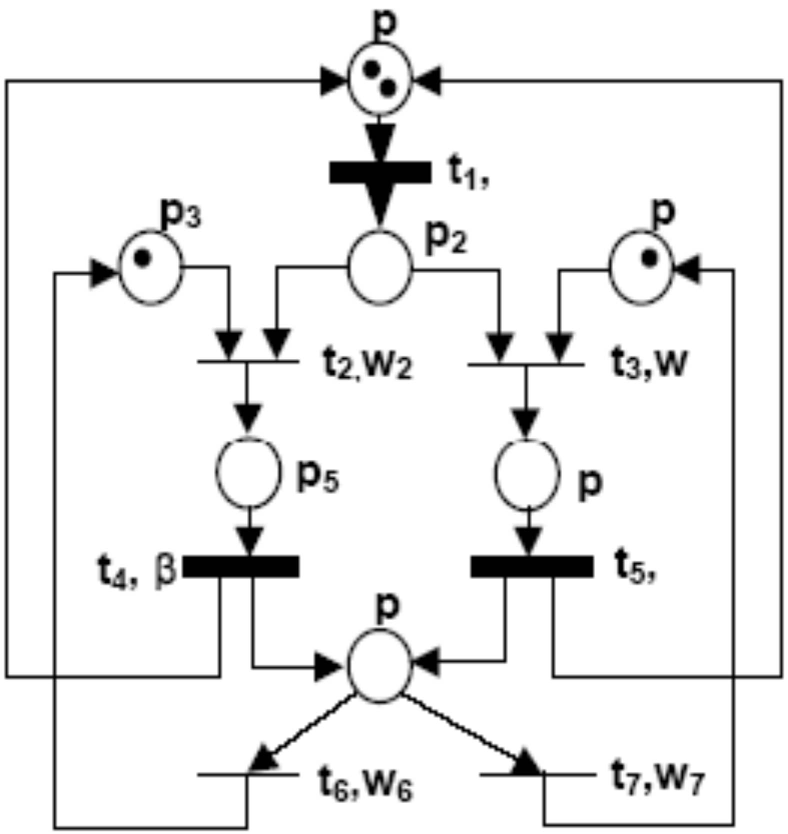
- **Cálculo das Probabilidades de Equilíbrio:**

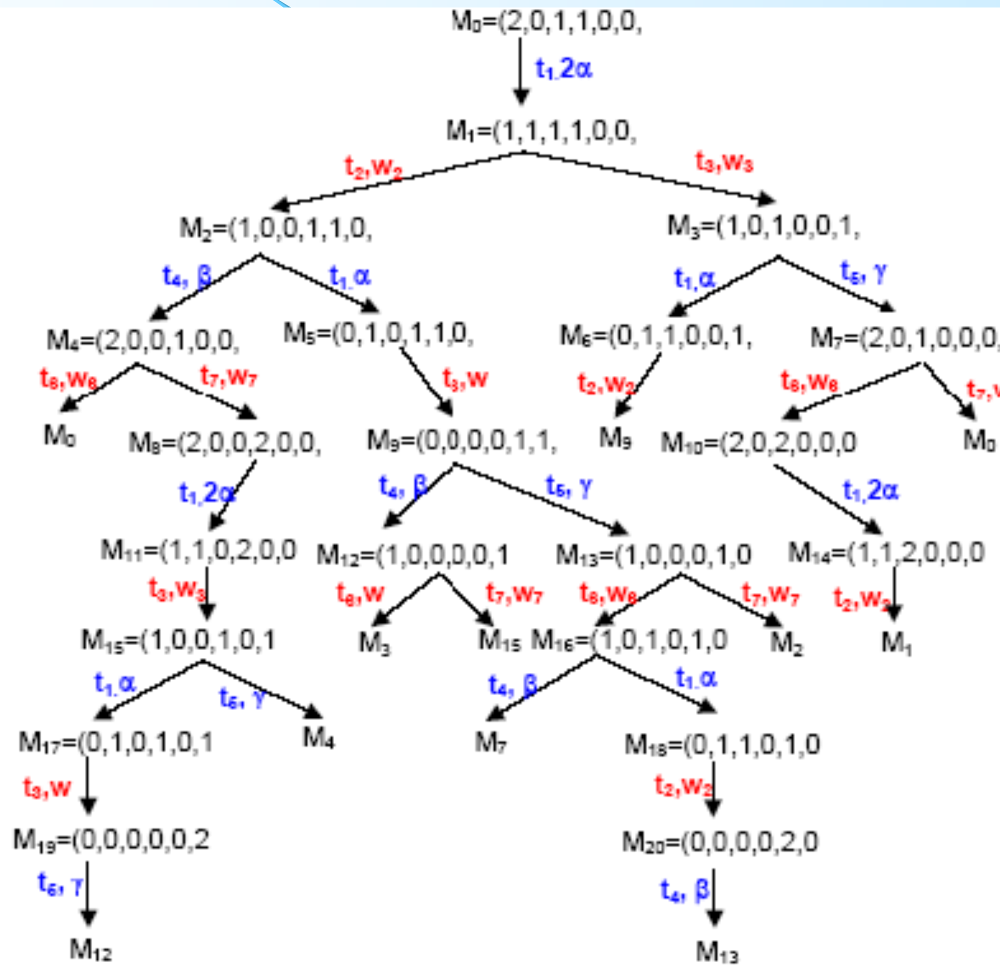
$$\pi = \pi \cdot U$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

- **Exemplo:**

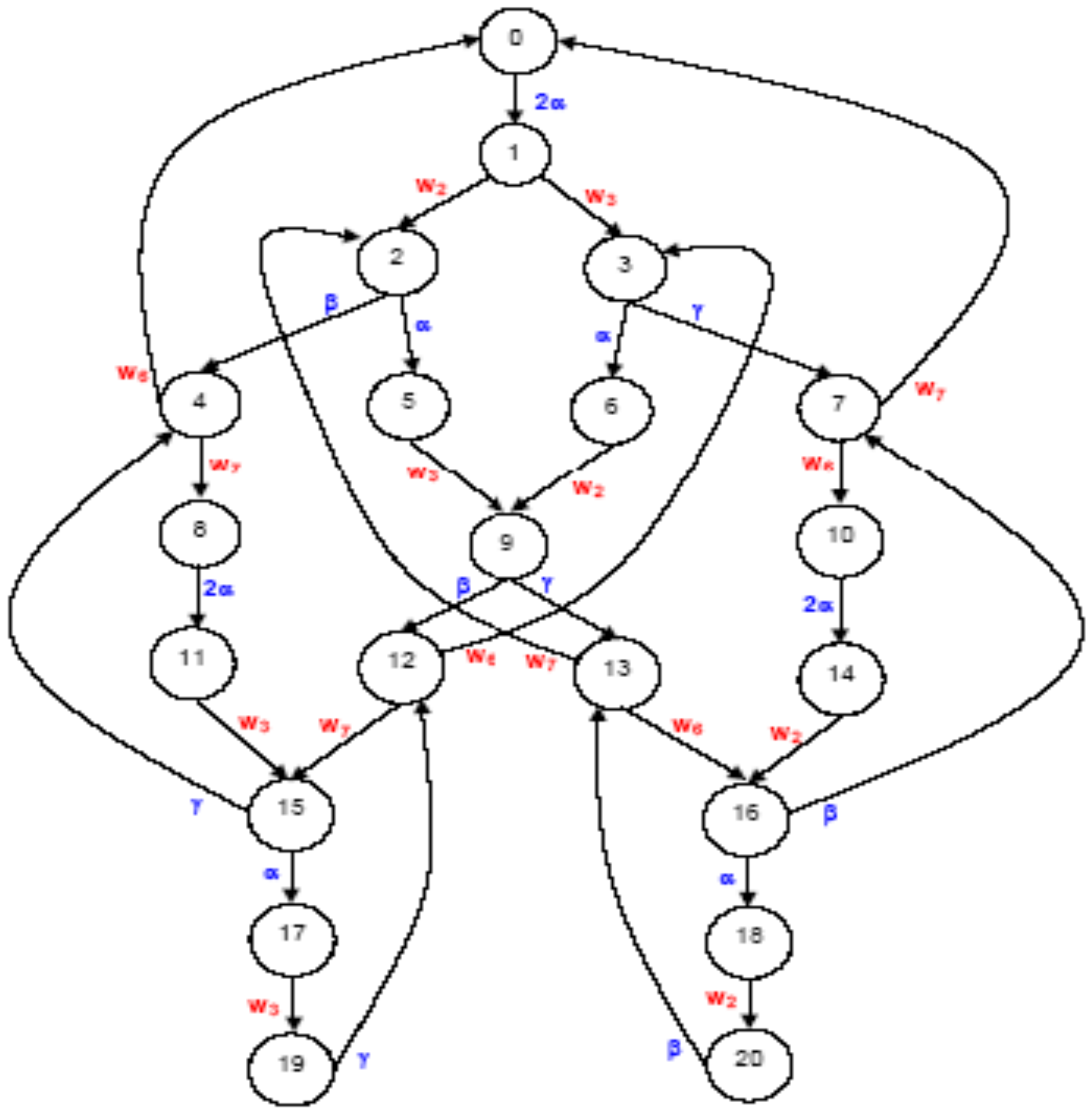
Rede de Petri Generalizada: **Árvore de Alcançabilidade:**





5- Redes de Petri Generalizadas

- **Exemplo:** **Estados da Cadeia de Markov:**



5- Redes de Petri Generalizadas

- **Exemplo:**

Matriz U (considerando-se α = β = γ = δ = w2 = w3 = w6 = w7 = 1):

$U_{0\,1} = 2\alpha/2\alpha = 1$

$U_{1\,2} = w_2/(w_2+w_3) = 0{,}5$

$U_{2\,4} = \beta/(\beta+\alpha) = 0{,}5$

$U_{3\,6} = \alpha/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$

$U_{5\,9} = w_3/w_3 = 1$

$U_{7\,8} = w_7/(w_7+w_6) = 0{,}5$

$U_{8\,11} = 2\alpha/2\alpha = 1$

$U_{9\,12} = \beta/(\beta+\gamma)$

$U_{10\,14} = 2\alpha/2\alpha = 1$

$U_{12\,3} = w_6/(w_6+w_7) = 0{,}5$

$U_{13\,2} = w_7/(w_7+w_6) = 0{,}5$

$U_{14\,16} = w_2/w_2 = 1$

$U_{15\,4} = \gamma/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$

$U_{16\,7} = \beta/(\beta+\alpha) = 0{,}5$

$U_{17\,19} = w_3/w_3 = 1$

$U_{19\,12} = \gamma/\gamma = 1$

$U_{1\,3} = w_3/(w_2+w_3) = 0{,}5$

$U_{2\,5} = \alpha/(\beta+\alpha) = 0{,}5$

$U_{3\,7} = \gamma/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$

$U_{6\,9} = w_2/w_2 = 1$

$U_{7\,10} = w_6/(w_7+w_6) = 0{,}5$

$U_{9\,13} = \gamma/(\beta+\gamma) = 0{,}5$

$U_{11\,15} = w_3/w_3 = 1$

$U_{12\,15} = w_7/(w_6+w_7) = 0{,}5$

$U_{7\,16} = w_6/(w_7+w_6) = 0{,}5$

$U_{15\,17} = \alpha/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$

$U_{16\,18} = \alpha/(\beta+\alpha) = 0{,}5$

$U_{18\,20} = w_2/w_2 = 1$

$U_{20\,13} = \beta/\beta = 1$

5- Redes de Petri Generalizadas

- **Exemplo:**

Matriz U resultante:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0		1																			
1			0,5	0,5																	
2					0,5	0,5															
3							0,5	0,5													
4	0,5								0,5												
5										1											
6										1											
7	0,5										0,5										
8												1									
9													0,5	0,5							
10															1						
11																1					
12				0,5												0,5					
13			0,5														0,5				
14																	1				
15					0,5													0,5			
16								0,5											0,5		
17																				1	
18																					1
19													1								
20														1							

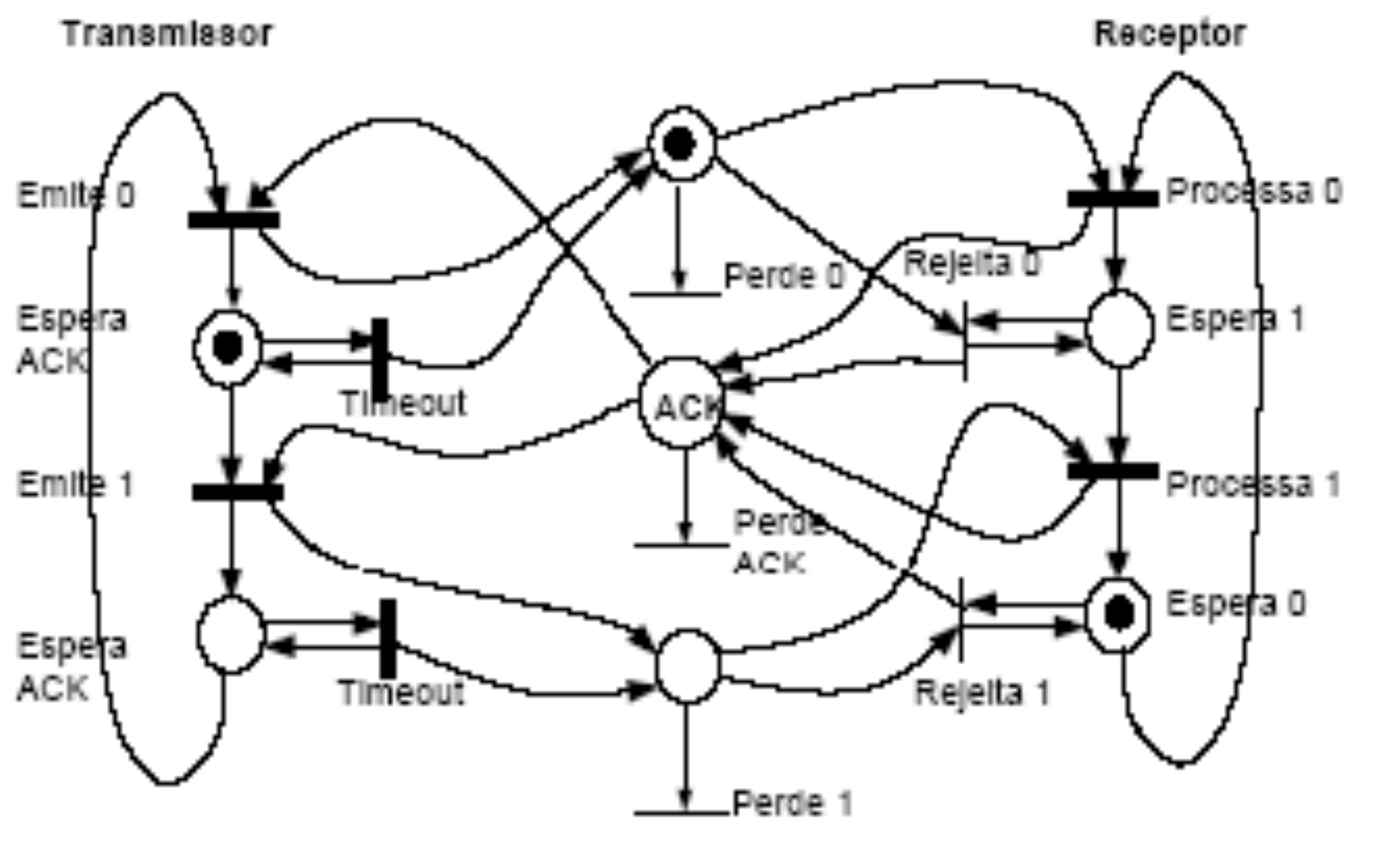
Cálculo das Probabilidades de Equilíbrio:

$$\pi = \pi \cdot U$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

5- Redes de Petri Generalizadas

- Exemplo - Protocolo Stop and espera:



Exercícios

1-) Discuta possíveis aplicações de Redes de Petri na modelagem e simulação de aplicações computacionais nas quais tenha participado. Discuta como poderia ser útil sua aplicação: vantagens e desvantagens.

2-) Responder os exercícios 1 e 2 da apostila.

3-) Responder os exercícios 5, 6 e 8 da apostila (entregar na aula de 20/02).

Bibliografia

- ✓ **Apostila 4.**
- ✓ **Notas de aula de: Dr Chris Ling - School of Computer Science & Software Engineering Monash University – Austrália.**