

Redes de Petri

1 Definições

1.1 Rede de Petri

Uma *Rede de Petri* é uma quádrupla $R = (P, T, I, O)$ onde:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ é um conjunto finito de m lugares, com $m > 0$,

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ é um conjunto de n transições, com $n > 0$,

O conjunto $P \cap T$ é vazio,

$I: T \rightarrow P$ é a função de entrada, identifica todos os lugares de entrada de uma transição,

$O: T \rightarrow P$ é a função saída, identifica todos os lugares de saída de uma transição.

Observações:

- Um lugar p_i é *lugar de entrada* de t_j se p_i pertence ao conjunto $I(t_j)$,
- Um lugar p_i é *lugar de saída* de t_j se p_i pertence ao conjunto $O(t_j)$.
- O ponto escuro dentro de alguns lugares é chamado de *marca*.

1.2 Marcação

Uma *marcação* M de uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ é uma função definida em P e com valores inteiros não negativos, sendo $M(p)$ o número de marcas no lugar p e $M: P \rightarrow \mathbb{N}$ onde \mathbb{N} é o conjunto dos inteiros incluindo o zero;

Uma *Rede de Petri Marcada* é uma dupla $RM = (R, M)$ onde R é uma rede de Petri e M é uma marcação;

No exemplo 1 a marcação da rede é a seguinte:

$M(p_1) = M(p_4) = M(p_5) = M(p_6) = 0$,

$M(p_2) = M(p_3) = M(p_7) = M(p_8) = M(p_9) = 1$.

Exemplo 1:

$R = (P, T, I, O)$,

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9\}$,

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$,

$I(t_1) = \text{vazio}$ $O(t_1) = \{p_1, p_2\}$

$I(t_2) = \{p_1, p_1, p_3\}$ $O(t_2) = \{p_4, p_5\}$

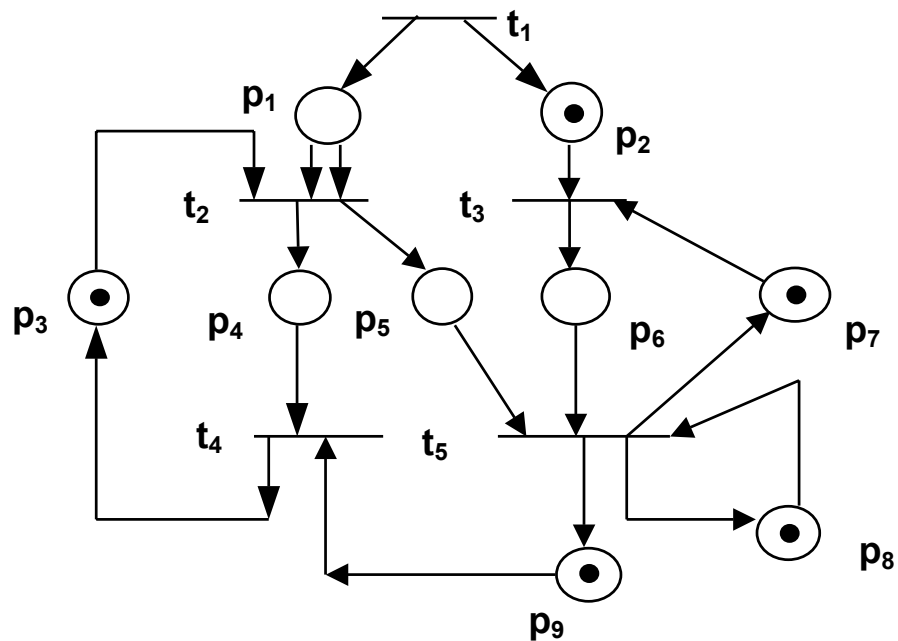
$I(t_3) = \{p_2, p_7\}$ $O(t_3) = \{p_6\}$

$I(t_4) = \{p_4, p_9\}$ $O(t_4) = \{p_3\}$

$I(t_5) = \{p_5, p_6, p_8\}$ $O(t_5) = \{p_7, p_8, p_9\}$

$RM(R, M)$ é a Rede de Petri Marcada onde $M = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$

Esta rede de Petri pode ser representada graficamente pela figura a seguir:



1.3 Multiplicidade

A *multiplicidade* de um lugar p_i como entrada da transição t_j é o número de ocorrências de p_i no multiconjunto $I(t_j)$, sendo representado por $\#(p_i, I(t_j))$.

1.4 Transição Habilitada

Uma transição t_j pertencente a T em uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com a marcação M está *habilitada*, se para todo p_i pertencente $I(t_j)$ tem-se $M(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))$.

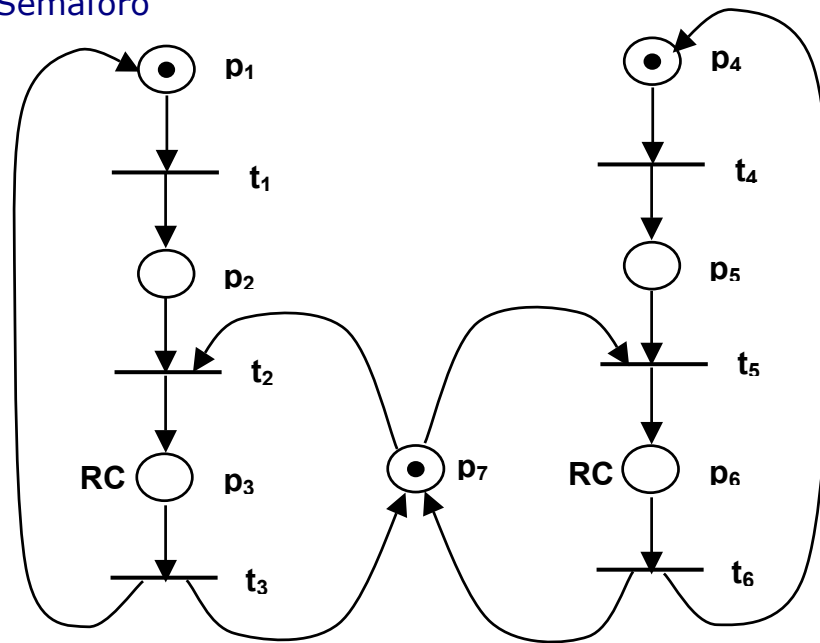
1.5 Disparo de Transição

Uma transição t_j de uma rede de Petri com a marcação M pode *disparar* somente se estiver habilitada. O disparo de uma transição habilitada resulta em uma nova marcação M' definida por

$$M'(p) = M(p) - \#(p, I(t_j)) + \#(p, O(t_j))$$

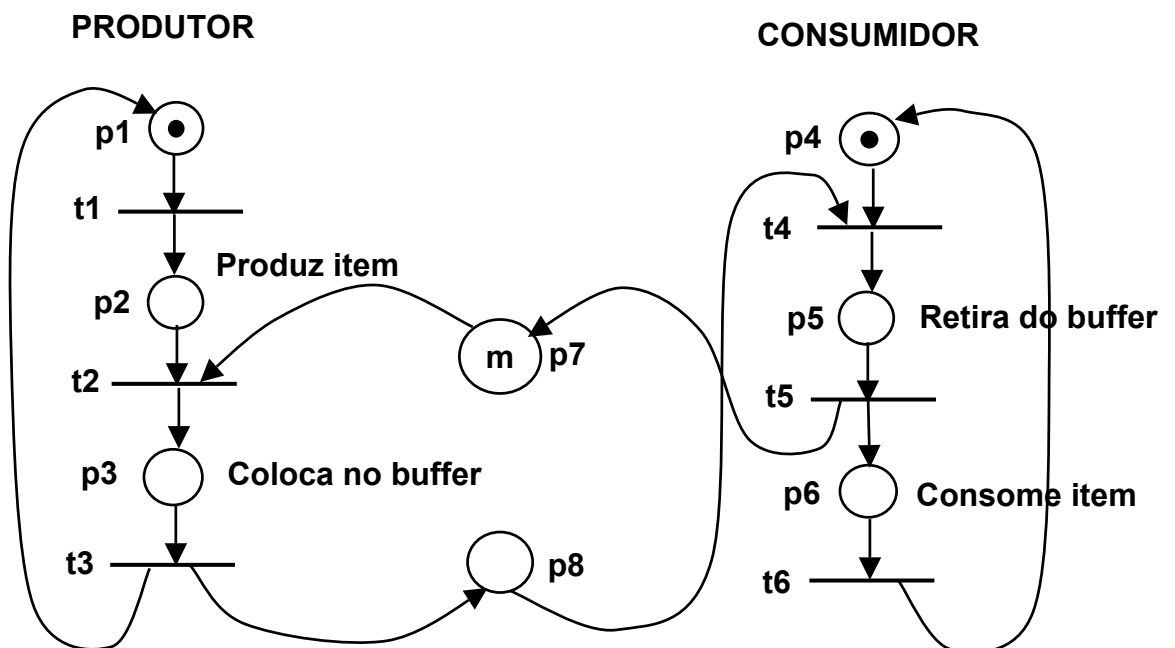
para todo p pertencente a P .

Exemplo 2: Semáforo



P7 - semáforo
 RC- região crítica

Exemplo 3: Produtor/Consumidor



m - posições no buffer

1.6 Estado de uma Rede de Petri

O estado de uma rede de Petri é definido por sua marcação atual M.

A mudança de estado causado pelo disparo de uma transição é definida pela função próximo estado.

1.7 Função Próximo Estado

A função próximo estado $\delta : N \times T \rightarrow N$ para uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com marcação M e uma transição t_j pertencente a T é definida, se e somente se t_j estiver habilitada. Neste caso seu valor é definido como $\delta(M, t_j) = M'$ onde M' é a marcação resultante do disparo de t_j , isto é :

$$M'(p) = M(p) - \#(p, I(t_j)) + \#(p, O(t_j)) \quad \text{para todo } p \text{ pertencente a } P.$$

Esta definição pode ser estendida para uma seqüência de disparos, aplicando a função δ recursivamente.

1.8 Execução de uma Rede de Petri

A execução de uma rede de Petri a partir de uma marcação inicial M_0 é definida pela seqüência de marcações (M_0, M_1, M_2, \dots) obtida através do disparo das transições $(t_{j_0}, t_{j_1}, t_{j_2}, \dots)$ tendo seus valores definidos pela função δ .

1.9 Conjunto de Alcançabilidade

O conjunto de alcançabilidade $A = (R, M)$ para uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com marcação M é o menor conjunto de marcações definido por:

- a) M pertence a $A = (R, M)$
- b) Se M' pertence a $A(R, M)$ e $M'' = \delta(M', t_j)$ para algum t_j pertencente a T , então M'' pertence a $A(R, M)$.

Este conjunto pode não ser finito!

1.10 Marcação Imediatamente Alcançável

Dada uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com uma marcação M , diz-se que a marcação M' é imediatamente alcançável a partir de M se existe uma transição t_j pertencente a T tal que $\delta(M, t_j) = M'$.

1.11 Marcação Alcançável

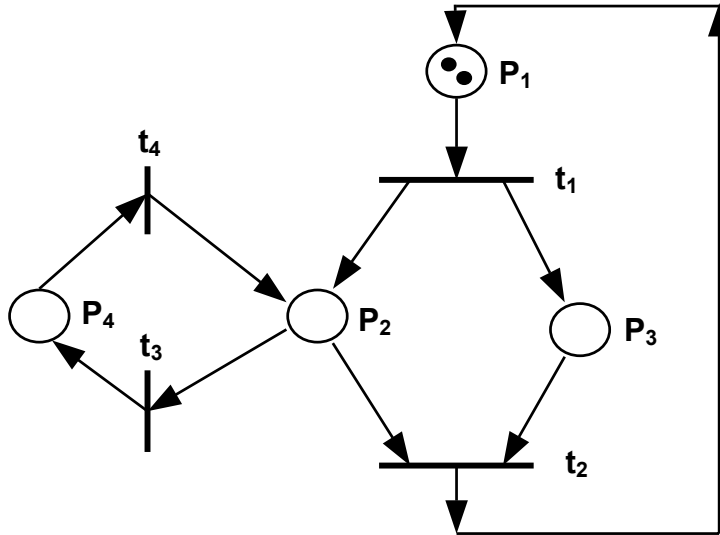
Dada uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com uma marcação M , diz-se que a marcação M' é alcançável a partir de M se M' pertence a $A(R, M)$.

1.12 Árvore de Alcançabilidade

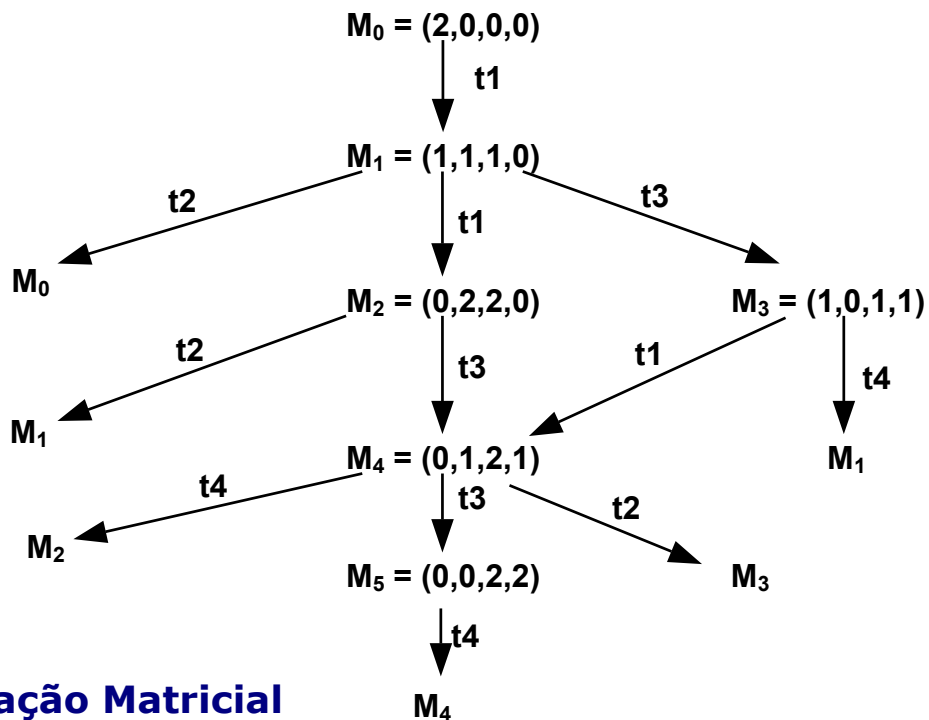
A árvore de alcançabilidade é construída tendo a marcação inicial como raiz e acrescentando todas as marcações alcançáveis a partir da raiz pelo disparo das transições.

Exemplo 4:

Dada a seguinte rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com uma marcação $M_0 = (2, 0, 0, 0)$:



A árvore de alcançabilidade correspondente é



2 Notação Matricial

A notação matricial de Redes de Petri favorece a análise de suas propriedades através de resultados algébricos.

As funções I e O são substituídas pelas matrizes E e S , ambas com n linhas e m colunas:

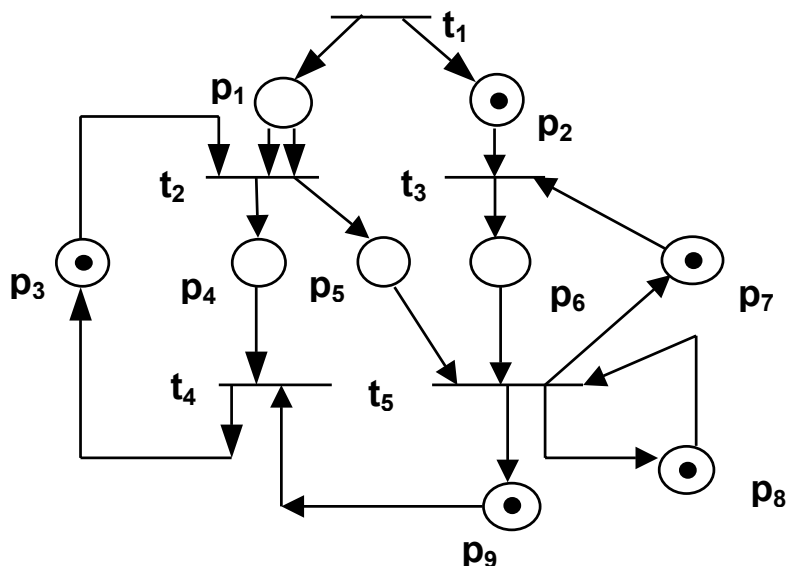
$$E[j, i] = \#(p_i, I(t_j)) \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ e}$$

$$S[j, i] = \#(p_i, O(t_j)) \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, n;$$

A rede de Petri é então definida por $R = (P, T, E, S)$.

Exemplo 5: Notação Matricial

Considerando a Rede de Petri do exemplo 1



A notação matricial da Rede de Petri é:

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sendo

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{E}: \text{Matriz de Entrada} \\ \mathbf{S}: \text{Matriz de Saída} \\ \mathbf{C} = \mathbf{S} - \mathbf{E}: \text{Matriz de Incidência} \end{array}$$

Nos tópicos a seguir serão apresentados os conceitos já vistos anteriormente na notação matricial.

2.1 Marcação e Transição

Uma marcação M é representada por um vetor de m componentes, onde cada elemento corresponde ao número de marcas num determinado lugar.

Uma transição t_j é representada por um vetor e_j de n componentes no qual o j -ésimo componente é igual a 1 e os demais componentes são iguais a zero:

$e_j = [0\ 0\ 0\ \dots\ 1\ \dots\ 0]$ vetor que representa uma transição.

2.2 Habilitação de uma transição

A transição t_j está habilitada na marcação M se $M \geq e_j * E$

Considera-se que $M' \leq M''$ se $M'[i] \leq M''[i]$ para $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

2.3 Função Próximo Estado

A função próximo estado passa a ter a seguinte formulação:

$$\delta(M, t_j) = M + e_j * S - e_j * E \quad \text{ou}$$

$$\delta(M, t_j) = M + e_j * C \quad \text{sendo } C = S - E;$$

A matriz $C = S - E$, é conhecida como matriz de incidência de uma Rede de Petri.

2.4 Sequência de disparos

Dada uma seqüência de disparos de transições $s = t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k}$, define-se o valor de $\delta(M, s)$ como:

$$\delta(M, s) = \delta(M, t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k})$$

$$\delta(M, s) = M + [e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_k}] * C$$

ou

$$\delta(M, s) = M + f_s * C$$

O vetor $f_s = [e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_k}]$ é denominado vetor de disparos sendo que a j -ésima componente de f_s indica o número de vezes que a transição t_j foi disparada.

3 Propriedades de Redes de Petri

3.1 Segurança

Um lugar p_i pertencente a P de uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com marcação M é seguro se para todo M' pertencente a $A(R, M)$, $M'[p_i] \leq 1$.

Uma rede de Petri é segura se todos os seus lugares forem seguros.

Um lugar p_i pertencente a P de uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com marcação inicial M é K-seguro se para todo M' pertencente a $A(R, M)$, $M'[p_i] \leq K$.

3.2 Limitação

Um lugar é limitado se é K -seguro para algum K .

Uma rede de Petri é limitada se todos os seus lugares são limitados.

Observação:

A viabilidade de implementação (em “hardware” ou em “software”) de uma rede de Petri está relacionada à ocorrência das propriedades de segurança e limitação.

3.3 Conservação

Uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ e com marcação inicial M é conservativa se para todo M' pertencente a $A(R, M)$

$$\sum M[p_i] = \sum M'[p_i] \quad , \quad \text{para todo } p_i \text{ pertencente a } P;$$

Esta propriedade indica que o número total de marcas na rede de Petri permanece constante em todas as marcações alcançáveis a partir da marcação inicial.

3.4 Vivacidade

Dada uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ e uma marcação M :

v0) A transição t_j pertencente a T está viva em nível 0 se nunca pode ser disparada, isto é, não existe M' tal que M pertence a $A(R, M)$ e t_j esta habilitada em M' . Neste caso diz-se que a transição está morta;

v1) A transição t_j esta viva em nível 1, ou simplesmente viva, se é potencialmente disparável, isto é, se existe M' pertencente a $A(R, M)$ tal que t_j está habilitada em M' .

v2) A transição t_j está viva em nível 2 se para cada inteiro $v \geq 0$ existe uma seqüência de transições s ($s = t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k}$) tal que $\delta(M, s)$ é definida e $f_s(t_j) \geq v$, isto é, t_j é disparada no mínimo v vezes.

v3) A transição t_j está viva em nível 3 se existe uma seqüência infinita s de disparos de transições tal que $\delta(M, s)$ está definida e t_j aparece com freqüência infinita em s .

3.5 Impasses (Deadlocks)

Dada uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ e uma marcação M' e seja T' um subconjunto de T , a rede R está em uma situação de Impasse na marcação M' em relação às transições de T' , se qualquer t_j pertencente a T' , t_j está morta.

Se $T' = T$ então a situação da rede é de impasse total e nenhuma transição poderá ser disparada.

Uma rede de Petri R é *livre de impasses* se, qualquer M' pertencente a $A(R,M)$, existe uma transição t_j viva.

4 Análise de Redes de Petri

É feita através da determinação de:

- Árvore de alcançabilidade
- Conjuntos invariantes

4.1 Condição necessária para Alcançabilidade

Seja uma rede de Petri $R = (P, T, E, S)$, sendo M_k a marcação atual, o disparo para se atingir a marcação M_{k+1} é representado pela equação:

$$M_{k+1} = M_k + e_j * C$$

sendo que $C = S - E$.

O disparo da seqüência de transições $s = t_{j1} t_{j2} \dots t_{jk}$ a partir da marcação M resulta na marcação M' definida como:

$$M' = M + (e_{j1} + e_{j2} + \dots + e_{jk}) * C$$

ou $M' = M + f_s * C$

sendo que f_s é o vetor de contagem de disparos onde a j -ésima componente indica o número de vezes que a transição t_j disparou.

Esta última equação pode ser transformada em:

$$f_s * C = M' - M$$

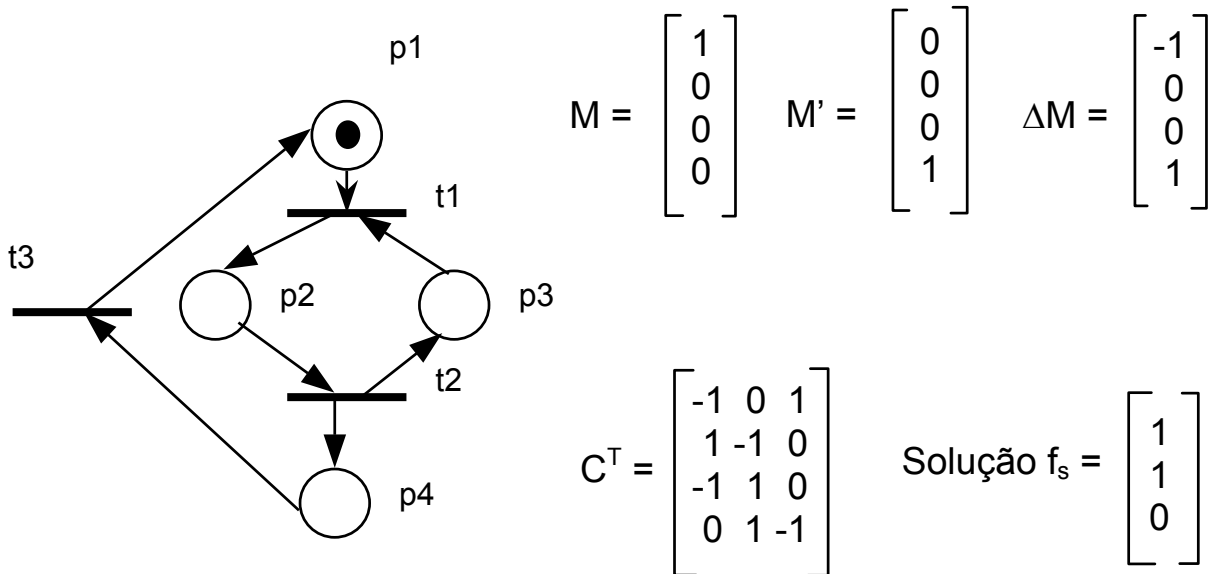
ou $f_s * C = \Delta M$ onde $\Delta M = M' - M$

ou $C^t * f_s = \Delta M$

A solução deste sistema de equações fornece o número de vezes que cada transição deve ser disparada para transformar a marcação M em M' . A existência de uma solução desta equação é uma condição *necessária mas não suficiente* para que a marcação M' seja alcançável a partir de M .

A condição necessária mas não suficiente para que uma marcação M' seja alcançável a partir de M é que $C^t * f_s = \Delta M$ onde $\Delta M = M' - M$.

Exemplo 6: Contra-exemplo



Embora o sistema admita uma solução inteira positiva f_s , M' não é alcançável, pois nenhuma transição pode ser disparada a partir de M .

4.2 Invariantes

Dada uma rede de Petri $R = (P, T, E, S)$ chama-se *invariante* de R a um vetor Z com elementos pertencentes ao conjunto $\{0, 1\}$ que satisfaz ao sistema de equações

$$C * Z = 0$$

O conjunto invariante Z é definido como:

$$Z = \{p_j \mid Z[j] = 1, j = 1, 2, \dots, m\}$$

A partir das equações anteriores conclui-se que quaisquer que sejam M e M' pertencentes a $A(R, M)$

$$M * Z = M' * Z$$

significando que a soma das marcas existentes nos lugares pertencentes à *invariante* Z é constante para qualquer M pertencente a $A(R, M)$.

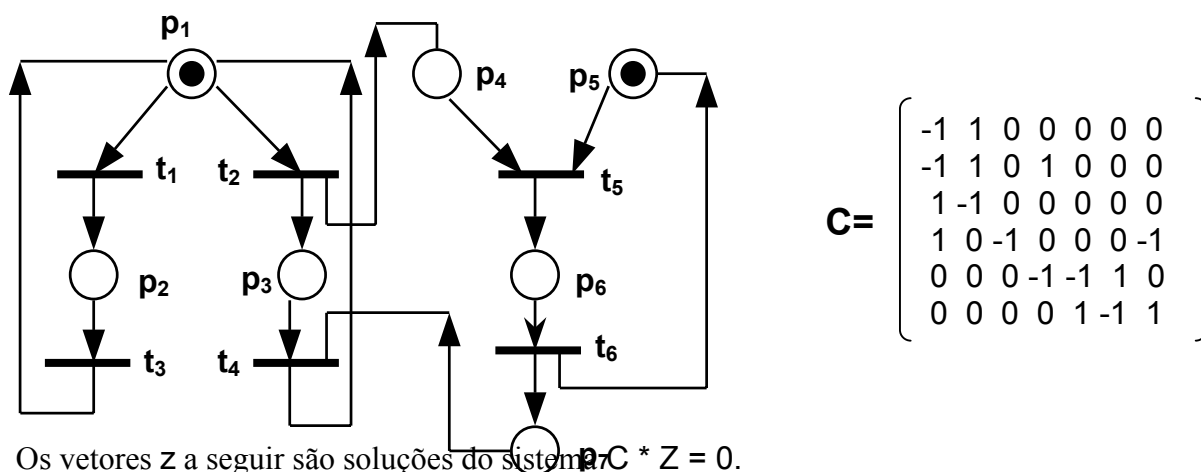
O conjunto de *Invariantes básicas* é constituído de invariantes inteiros e positivos linearmente independentes.

Seja p a característica da matriz C . Se $p = m$, isto é, coincide com o número de lugares da rede, então o sistema $C * Z = 0$ admite o vetor nulo como única solução indicando que não existe nenhum conjunto invariante.

Se $p < m$, então existirá um conjunto de $(m-p)$ soluções linearmente independentes.

Exemplo 7: Invariantes

Seja a seguinte Rede de Petri:



- $Z_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ==> Invariante $Z_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $Z_2 = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$ ==> Invariante $Z_2 = \{p_1, p_2, p_4, p_6, p_7\}$
- $Z_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$ ==> Invariante $Z_3 = \{p_5, p_6\}$
- $Z_4 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$ ==> Invariante $Z_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$

4.3 Propriedades dos invariantes

Se um lugar p_j pertence a um invariante Z então o número de marcas em p_j será limitado pois

$$M' * z = M * z$$

qualquer que seja a marcação M' alcançável a partir de M .

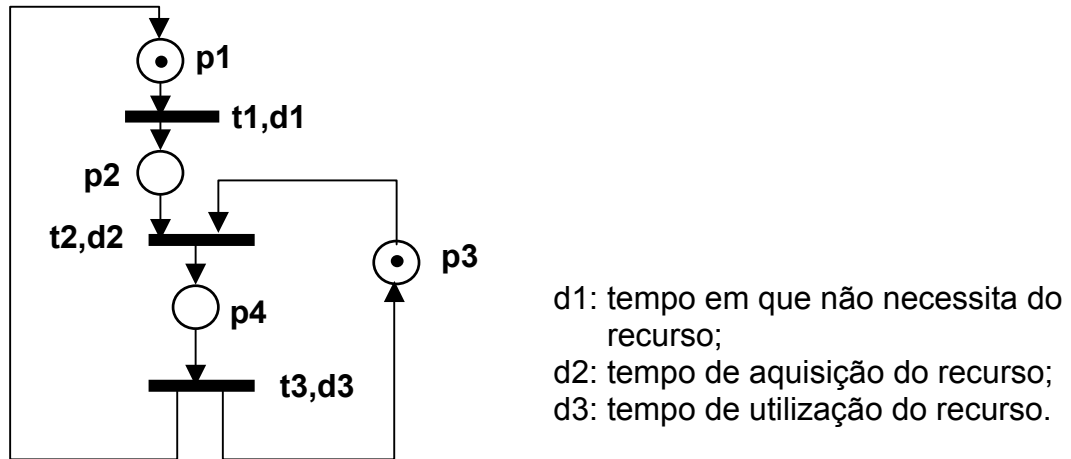
Se existe um conjunto de invariantes onde todos os lugares da rede estão envolvidos, então o número de marcas na rede permanece constante e igual a somatória de $M[j]$ para $j = 1, \dots, m$.

5 Redes de Petri Temporizadas

Uma rede de Petri temporizada é definida como $RT=(P,T,I,O,M_0,D)$ onde P,T,I,O e M_0 possuem a definição usual e $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ é um conjunto de atrasos associados às transições da rede de Petri.

Exemplo 7: Rede de Petri temporizada

Considere um processo que para fazer uma determinada ação necessita a posse de um recurso.



Neste exemplo, uma marca no lugar p3 significa que o recurso está disponível, e uma marca em p1 significa que a unidade de processamento não necessita dele.

A marcação $M_0 = \{1,0,1,0\}$ habilita somente t1 cujo atraso associado representa o intervalo de tempo em que o processo não necessita deste recurso.

O atraso d2 representa o tempo necessário para adquirir a posse do recurso, e o atraso d3 representa o tempo que o processo retém o recurso alocado.

Vantagens:

Além das vantagens naturais das redes de Petri, com a introdução da noção de tempo é possível modelar não só a lógica dos sistemas como também as suas relações de tempo;

Desvantagens:

Com a introdução de tempo associado às transições de uma rede de Petri, altera-se a definição de estado de uma rede de Petri, pois se deve agora considerar como parte do estado também a informação se uma determinada transição está em disparo ou não. Ou seja, se o atraso associado a ela já está sendo contado ou não.

5.1 Redes Temporizadas e Estocásticas

Uma rede de Petri temporizada e estocástica é definida como

$RTE = \{P, T, I, O, M_0, L\}$ onde P, T, I, O e M_0 possuem as definições habituais e $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ é um conjunto de taxas de disparo associadas às transições da rede de Petri que obedecem a uma distribuição exponencial.

Tais taxas de disparo podem ter o seu valor dependente do número de marcas nos lugares da rede.

Cadeia de Markov associada

Devido à natureza exponencial das taxas de disparo das transições pode-se demonstrar que associada a cada rede de Petri Temporizada e Estocástica existe uma cadeia de Markov isomórfica e com tempo contínuo.

Pode-se obter a cadeia de Markov isomórfica à rede de Petri Temporizada e Estocástica seguindo os seguintes passos:

1. O espaço de estado da cadeia de Markov associada corresponde ao conjunto de alcançabilidade da rede com marcação inicial M_0 ;
2. A taxa de mudança do estado i (associado à marcação M_i) para o estado j (M_j) é

$$q_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \in H_{ij}} l_k & \text{sendo } H_{ij} \text{ é o conjunto de todas as transições} \\ & \text{habilitadas pela marcação } M_i, \text{ cujo disparo gera a} \\ & \text{marcação } M_j. \\ -q_i & \end{cases}$$

onde

$$q_i = \sum_{k \in H_i} l_k \quad \text{sendo } H_i \text{ é o conjunto de todas as transições} \\ \text{habilitadas pela marcação } M_i.$$

Supondo que a cadeia seja ergódica, ou seja, a marcação inicial seja alcançável a partir de todas as outras marcações pertencentes a $A(R, M_0)$, então pode-se calcular o vetor de probabilidades de equilíbrio $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_s)$ da rede de Petri, onde s é o número de marcações em $A(R, M_0)$, através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\pi * Q = 0$$

com a restrição

$$\sum_i \pi_i = 1$$

onde $Q = [q_{ij}]$

π é o vetor das probabilidades de equilíbrio do sistema.

As probabilidades de equilíbrio também são chamadas de probabilidades de estado estacionário ou de estado estável.

A probabilidade de uma transição t_i habilitada em M disparar pode ser calculada como

$$P[t_i | M] = l_i / \sum_{t_k \in H} l_k$$

Sendo H o conjunto das transições habilitadas em M .

Propriedades derivadas de π

a) Probabilidade de uma condição particular:

Se no sub-conjunto A de $A(R, M_0)$ a condição é verificada então esta probabilidade pode ser calculada por:

$$P\{A\} = \sum_{i \in A} \pi_i$$

b) Valor médio do número de marcas num determinado lugar da rede:

Se $A(i, x)$ é o sub-conjunto de $A(R, M_0)$ para os quais o número de marcas no lugar i seja igual a x e este lugar é limitado por k, então:

$$E[m_i] = \sum_{n=1}^k [n * P\{A(i, n)\}]$$

c) Número médio de disparos de uma transição na unidade de tempo:

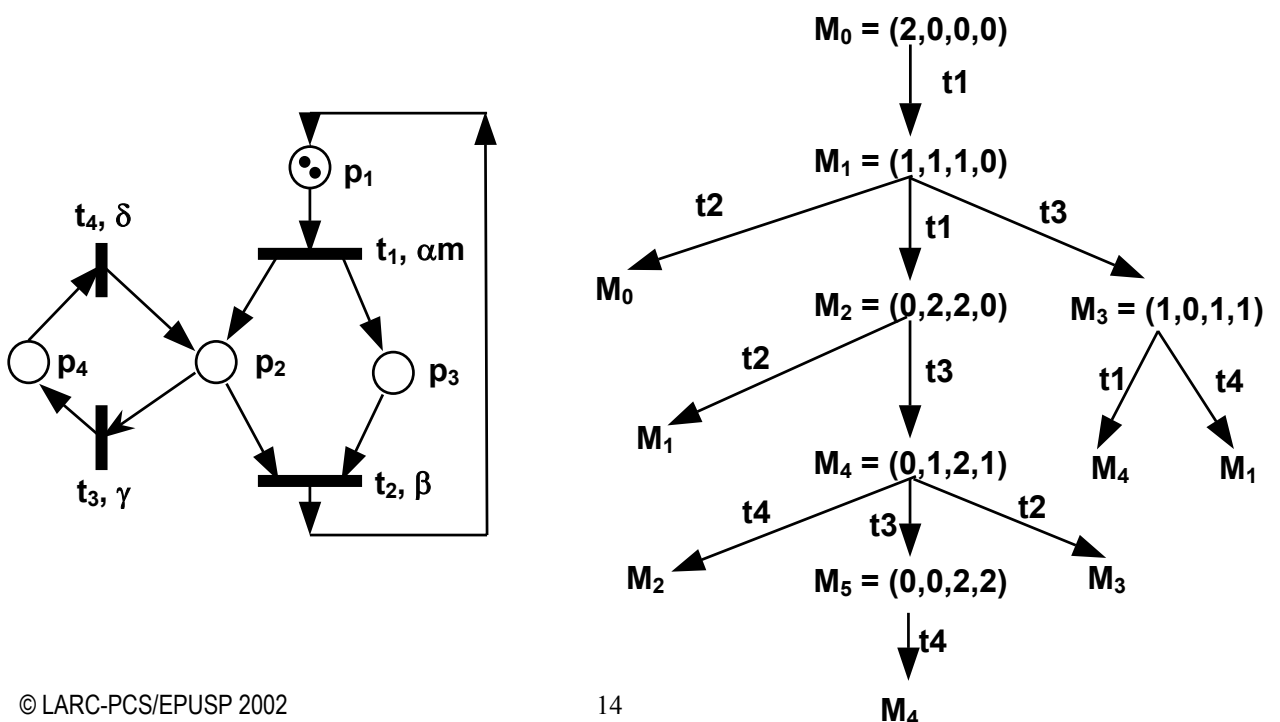
Se A_j é o sub-conjunto de $A(R, M_0)$ no qual uma dada transição t_j está habilitada, então o número médio de disparos de t_j é dado por:

$$f_j = \sum_{M_i \in A_j} \pi_i * \left(\frac{l_j}{\sum_{t_k \in H_i} l_k} \right)$$

sendo H_i o conjunto de transições habilitadas na marcação M_i .

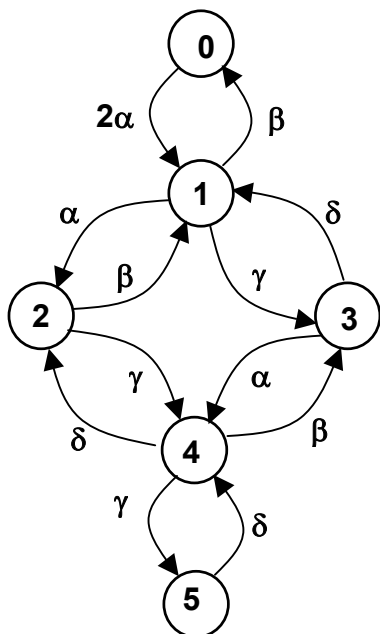
Exemplo 9: Rede de Petri Estocástica

Este é o mesmo exemplo já apresentado como exemplo 4 sendo que as transições foram substituídas por transições temporizadas e foram acrescentadas as frequências de disparos.



A árvore de alcançabilidade é a mesma apresentada anteriormente.

A árvore de alcançabilidade pode ser associada á seguinte cadeia de Markov onde os nós da árvore correspondem aos estados da cadeia de Markov.



O cálculo do vetor de probabilidades de equilíbrio $\pi = (\pi_0 \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5)$ é feito através de resolução do sistema de equações lineares $\pi * Q = 0$ sendo que $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$ e a matriz Q é:

$$Q = \begin{pmatrix} -2\alpha & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta+\alpha+\gamma) & \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\beta+\gamma) & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -(\delta+\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -(\delta+\beta+\gamma) & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -\delta \end{pmatrix}$$

Considerando $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ tem-se:

$$\pi * \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$$

Resolvendo o sistema de equações acima se obtém:

$$\pi_0 = 1/11, \quad \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 2/11$$

Como exemplo, calcula-se o número médio de marcas em p_1 :

$$E[m_1] = 2.\pi_0 + \pi_1 + \pi_3 = 6/11$$

A taxa de disparo da transição t_2 é:

$$f_2 = (1/3) \pi_1 + (1/2) \pi_2 + (1/3) \pi_4 = 7/33$$

pois t_2 está habilitada somente nas marcações M_1, M_2 e M_4 .

5.2 Redes de Petri Estocásticas Generalizadas(RPEG)

As redes estocásticas e generalizadas são obtidas permitindo-se que as transições possam ter um atraso associado a elas de valor nulo. Ou seja, são definidos dois tipos de transições as *imediatas*, que possuem atraso nulo e as *temporizadas* que possuem um atraso exponencialmente distribuído associado a elas.

Uma rede de Petri Temporizada Estocástica Generalizada é definida como

$RTEG = \{P, T, I, O, M_0, W\}$ onde P, T, I, O e M_0 possuem as definições habituais e $W=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ é um conjunto onde

w_i é a taxa de disparo de t_i se t_i é temporizada

w_i é o peso da transição t_i se t_i é imediata.

Regras de disparo para RPEG

Seja H o conjunto das transições habilitadas em uma determinada marcação M .

1. Se todas as transições de H forem temporizadas, então a probabilidade de disparo da transição t_i pertencente a H será

$$P[t_i | M] = w_i / \sum_{t_k \in H} w_k$$

ou seja, dispara a transição com a maior taxa de disparo ou o menor tempo;

2. Se o conjunto H possui uma única transição imediata, então somente esta transição é que pode disparar com probabilidade 1.
3. Se o conjunto H possui uma ou mais transições imediatas, uma delas deve disparar. Neste caso deve ser definida uma probabilidade de disparo associado a cada uma das transições imediatas em conflito (habilitadas na mesma marcação). Estas probabilidades são chamadas de funções seletoras e são calculadas como:

$$P[t_i | M] = w_i / \sum_{t_k \in HI} w_k$$

onde HI é o conjunto das transições imediatas habilitadas em M .

A solução utilizando resultados de Cadeias de Markov deve ser adaptada considerando-se a existência de transições imediatas. Considerando a regra de disparo que dá prioridade às transições imediatas, aquelas marcações resultantes de disparo de uma transição temporizada quando existem transições imediatas habilitadas, não ocorrerão. Desta forma, a árvore de alcançabilidade será reduzida.

As marcações podem ser divididas em dois grupos:

1. Marcações tangíveis que são aquelas que possuem somente transições temporizadas habilitadas.

2. Marcações não tangíveis, as demais.

Constrói-se a matriz de probabilidades U como:

$$u_{ij} = \frac{\sum_{k \in H_{ij}} w_k}{\sum_{k \in H_i} w_k}$$

Sendo
 H_{ij} conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i , cujo disparo gera a marcação M_j .
 H_i conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i .

As marcações podem ser reorganizadas, para facilidade de cálculo, de forma que a matriz U resultante seja:

$$U = A + B = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & F \end{pmatrix}$$

As sub-matrizes C , D , E e F são obtidas da seguinte forma:

- C - probabilidades de mudança de estado de uma marcação não tangível para uma não tangível
- D - probabilidades de mudança de estado de uma marcação não tangível para uma tangível
- E - probabilidades de mudança de estado de uma marcação tangível para uma não tangível
- F - probabilidades de mudança de estado de uma marcação tangível para uma tangível

Supondo que a cadeia seja ergódica, ou seja, a marcação inicial seja alcançável a partir de todas as outras marcações pertencentes a $A(R, M_0)$, então pode-se calcular o vetor de probabilidades de equilíbrio $\pi = (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_s)$ da rede de Petri, onde s é o número de marcações em $A(R, M_0)$, através da resolução do seguinte sistema de equações:

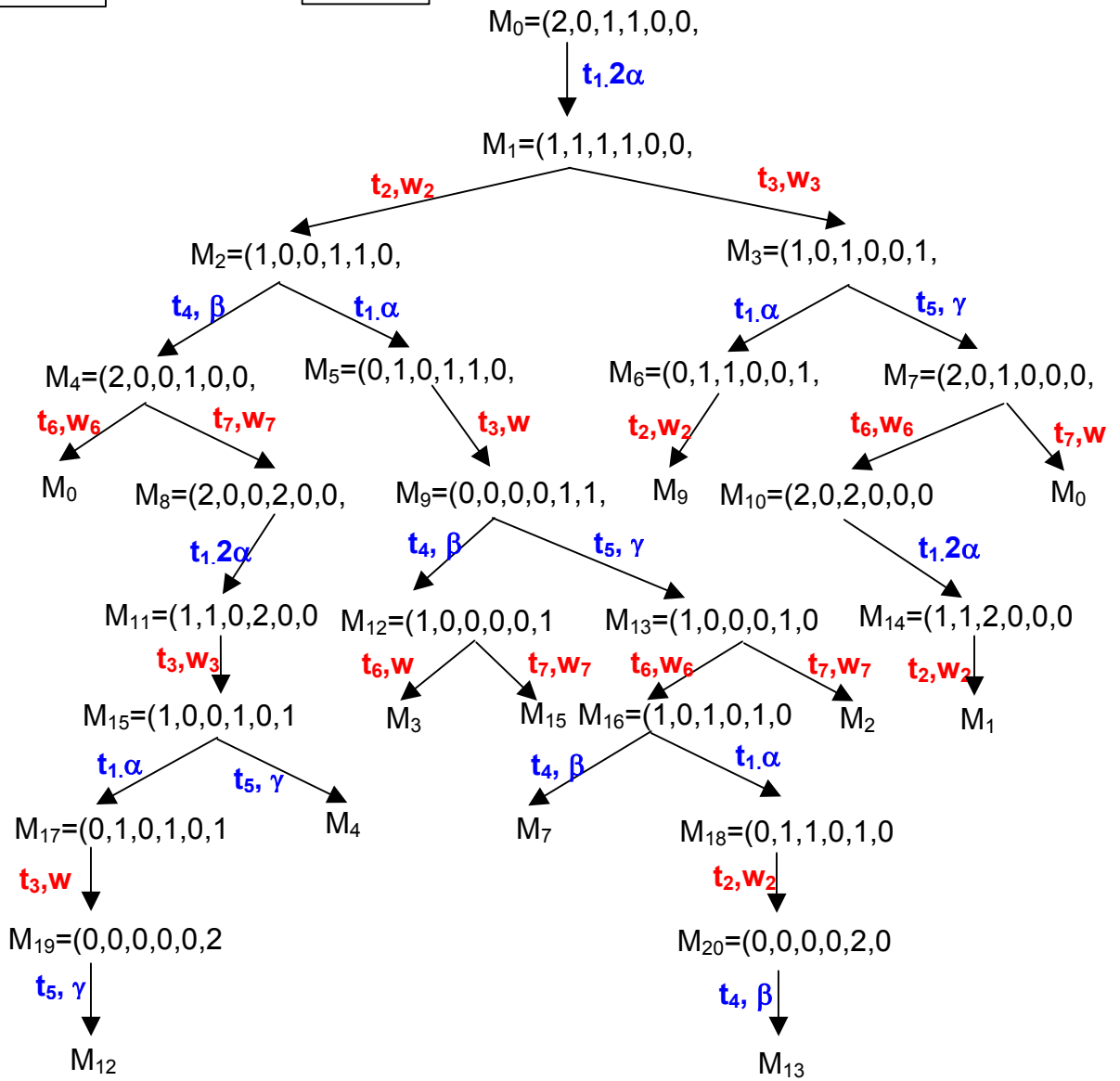
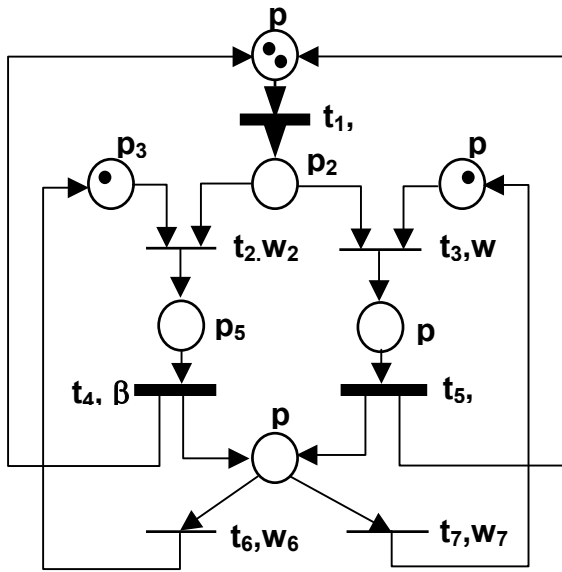
$$\pi = \pi * U$$

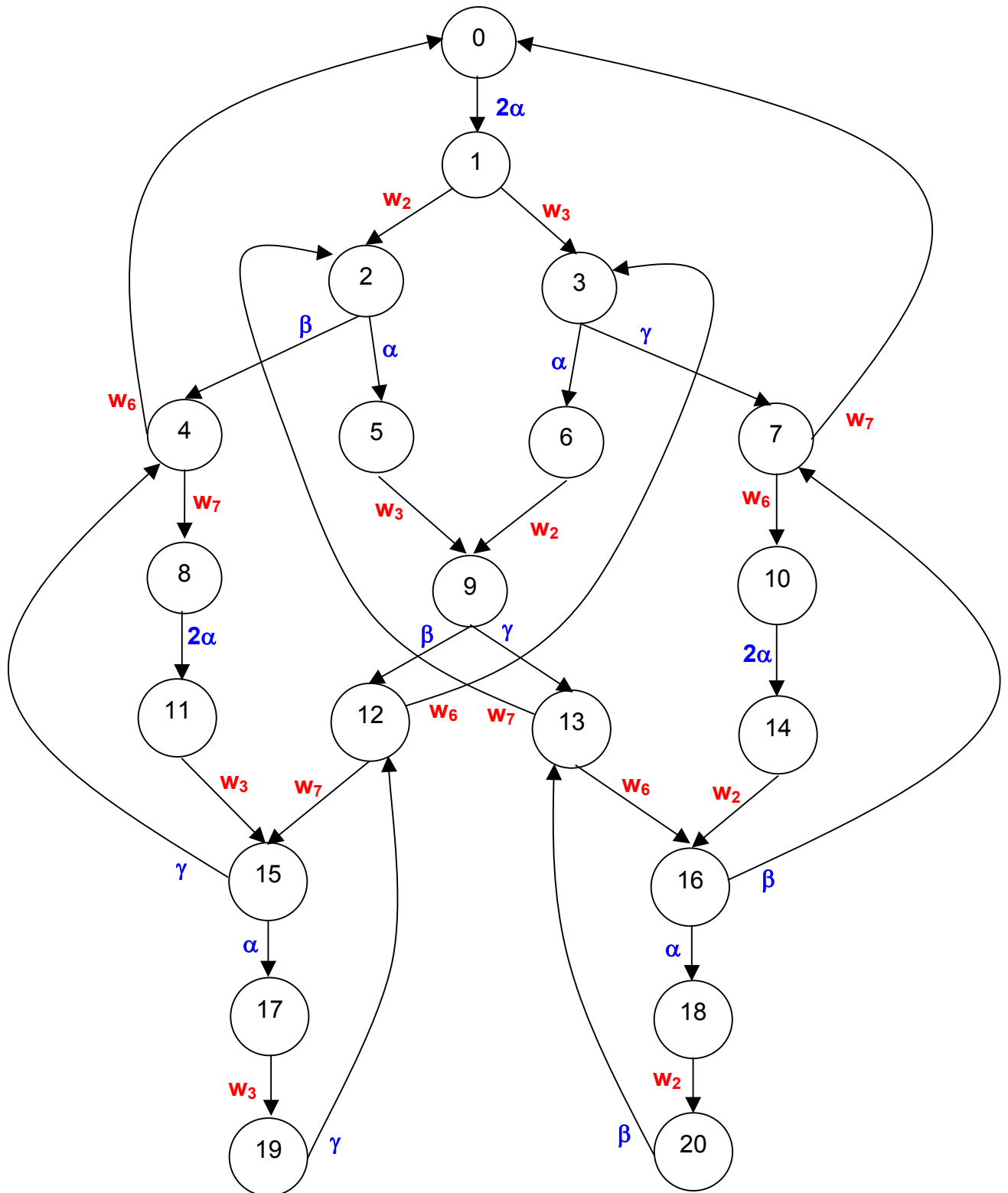
com a restrição

$$\sum_i \pi_i = 1$$

onde π é o vetor das probabilidades de equilíbrio do sistema.

Exemplo 9: Rede de Petri Estocástica e Generalizada:





Matriz U (considerando-se $\alpha, \beta, \gamma, w_2, w_3, w_6, w_7$ iguais a 1):

$$\begin{aligned}
 U_{0\ 1} &= 2\alpha/2\alpha = 1 & U_{1\ 3} &= w_3/(w_2+w_3) = 0,5 \\
 U_{1\ 2} &= w_2/(w_2+w_3) = 0,5 & U_{2\ 5} &= \alpha/(\beta+\alpha) = 0,5 \\
 U_{2\ 4} &= \beta/(\beta+\alpha) = 0,5 & U_{3\ 7} &= \gamma/(\alpha+\gamma) = 0,5 \\
 U_{3\ 6} &= \alpha/(\alpha+\gamma) = 0,5 & U_{6\ 9} &= w_2/w_2 = 1 \\
 U_{5\ 9} &= w_3/w_3 = 1 & U_{7\ 10} &= w_6/(w_7+w_6) = 0,5 \\
 U_{7\ 0} &= w_7/(w_7+w_6) = 0,5 & & \\
 U_{8\ 11} &= 2\alpha/2\alpha = 1 & U_{9\ 13} &= \gamma/(\beta+\gamma) = 0,5 \\
 U_{9\ 12} &= \beta/(\beta+\gamma) & U_{11\ 15} &= w_3/w_3 = 1 \\
 U_{10\ 14} &= 2\alpha/2\alpha = 1 & U_{12\ 15} &= w_7/(w_6+w_7) = 0,5 \\
 U_{12\ 3} &= w_6/(w_6+w_7) = 0,5 & U_{7\ 16} &= w_6/(w_7+w_6) = 0,5 \\
 U_{13\ 2} &= w_7/(w_7+w_6) = 0,5 & & \\
 U_{14\ 16} &= w_2/w_2 = 1 & U_{15\ 17} &= \alpha/(\alpha+\gamma) = 0,5 \\
 U_{15\ 4} &= \gamma/(\alpha+\gamma) = 0,5 & & \\
 U_{16\ 7} &= \beta/(\beta+\alpha) = 0,5 & U_{16\ 18} &= \alpha/(\beta+\alpha) = 0,5 \\
 U_{17\ 19} &= w_3/w_3 = 1 & U_{18\ 20} &= w_2/w_2 = 1 \\
 U_{19\ 12} &= \gamma/\gamma = 1 & U_{20\ 13} &= \beta/\beta = 1
 \end{aligned}$$

Matriz U resultante:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0		1																			
1			0,5	0,5																	
2					0,5	0,5															
3							0,5	0,5													
4	0,5								0,5												
5										1											
6										1											
7	0,5										0,5										
8											1										
9												0,5	0,5								
10														1							
11																1					
12				0,5												0,5					
13			0,5														0,5				
14																	1				
15				0,5														0,5			
16								0,5											0,5		
17																				1	
18																					1
19												1									
20														1							

A equação $\pi = \pi * U$ resulta em:

$$\pi_0 = 0,5\pi_4 + 0,5\pi_7$$

$$\pi_1 = \pi_0$$

$$\pi_2 = 0,5\pi_1 + 0,5\pi_{13}$$

$$\pi_3 = 0,5\pi_1 + 0,5\pi_{12}$$

$$\pi_4 = 0,5\pi_2 + 0,5\pi_{15}$$

$$\pi_5 = 0,5\pi_2$$

$$\pi_6 = 0,5\pi_3$$

$$\pi_7 = 0,5\pi_3 + 0,5\pi_{16}$$

$$\pi_8 = 0,5\pi_2 + 0,5\pi_{15}$$

$$\pi_9 = \pi_5 + \pi_6$$

$$\pi_{10} = \pi_7$$

$$\pi_{11} = \pi_8$$

$$\pi_{12} = 0,5\pi_9 + \pi_{19}$$

$$\pi_{13} = 0,5\pi_9 + \pi_{20}$$

$$\pi_{14} = \pi_{10}$$

$$\pi_{15} = \pi_{11} + 0,5\pi_{12}$$

$$\pi_{16} = 0,5\pi_{13} + \pi_{14}$$

$$\pi_{17} = 0,5\pi_{15}$$

$$\pi_{18} = 0,5\pi_{16}$$

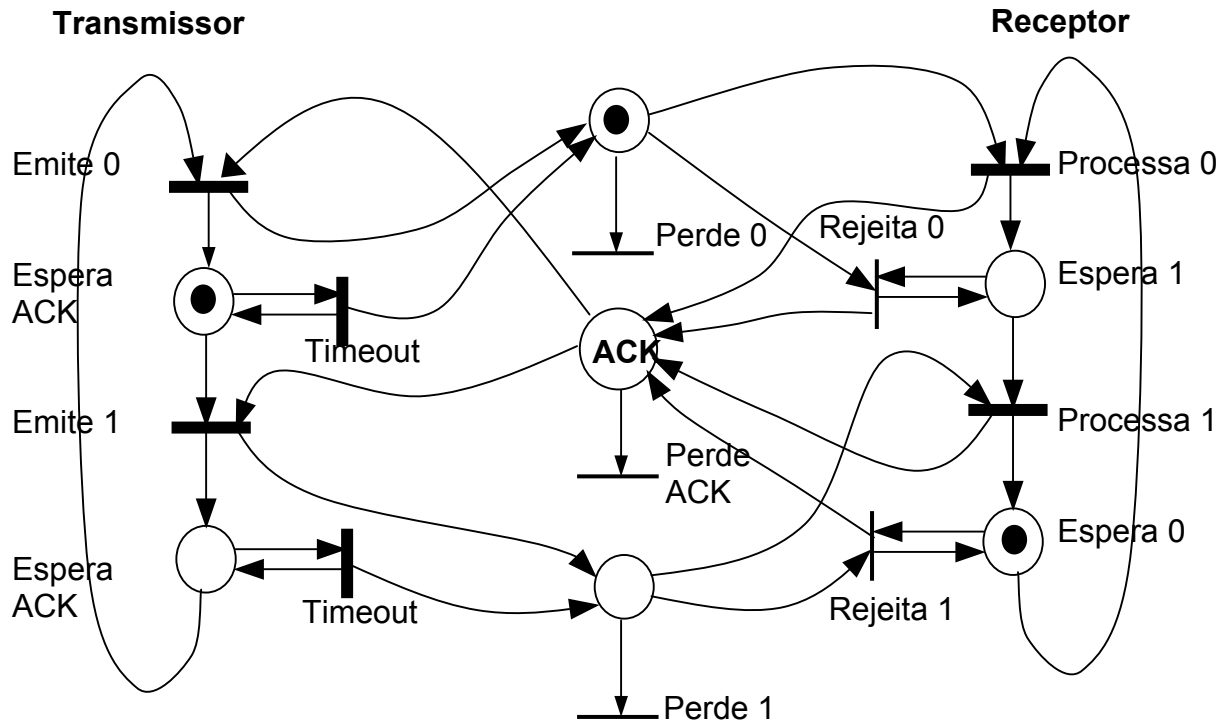
$$\pi_{19} = \pi_{17}$$

$$\pi_{20} = \pi_{18}$$

$$\sum \pi_i = 1$$

Estas equações permitem determinar os valores de π_i , $i=0, 1, \dots, 20$.

Exemplo 10: Protocolo Stop and Wait

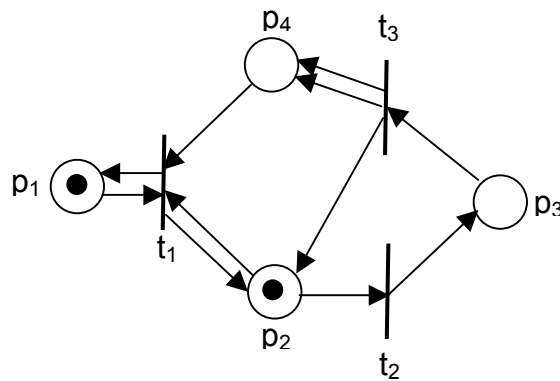


6 Bibliografia

- [1] Cassandras, C. G., "Discrete Event Systems: Modeling and Performance Analysis", Aksen Associates Incorporated Publishers, 1993, ISBN: 0-256-11212-6, 790p.
- [2] Marsan, M. A., Balbo, G., Conte, G., Donatelli, S., Franceschinis, G., "Modeling with Generalized Stochastic Petri Nets", John Wiley & Sons, ISBN: 0-471-93059-8, 1995, 301p.

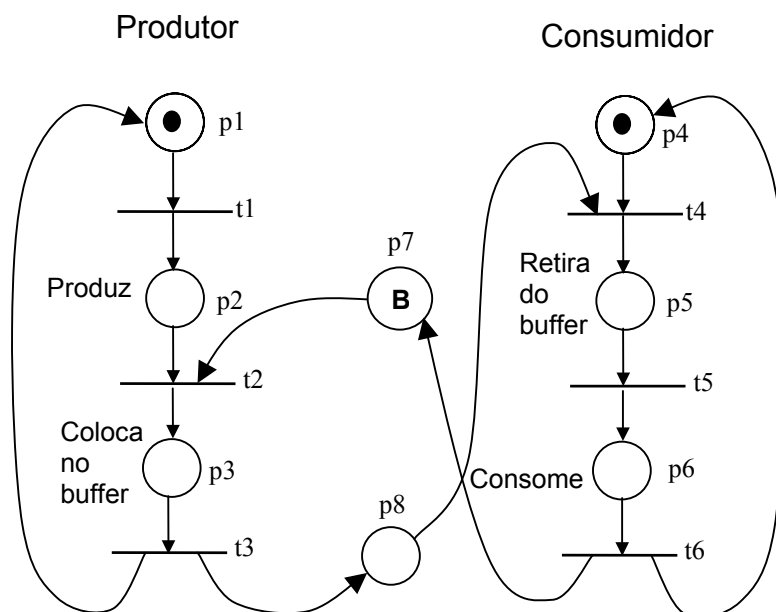
7 Exercícios

1) Dada a seguinte rede de Petri:

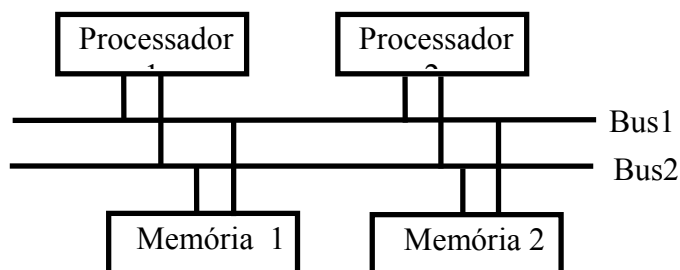


- a) Construa a árvore de alcançabilidade da rede de Petri.
- b) Verifique pela árvore de alcançabilidade se a marcação $(1,1,0,1)$ é alcançável a partir de $(1,1,0,0)$.
- c) Obtenha através de cálculo de matrizes, os invariantes da rede de Petri.
- d) Verifique se a marcação $(1,1,0,1)$ é alcançável a partir $(1,1,0,0)$ através da matriz B de invariantes.
- e) Verifique as propriedades de limitação e de conservação da rede de Petri.
- f) Existe alguma marcação que seja um deadlock alcançável nesta rede?

- 2) A rede de Petri a seguir apresenta a solução ao problema de um produtor e de um consumidor.

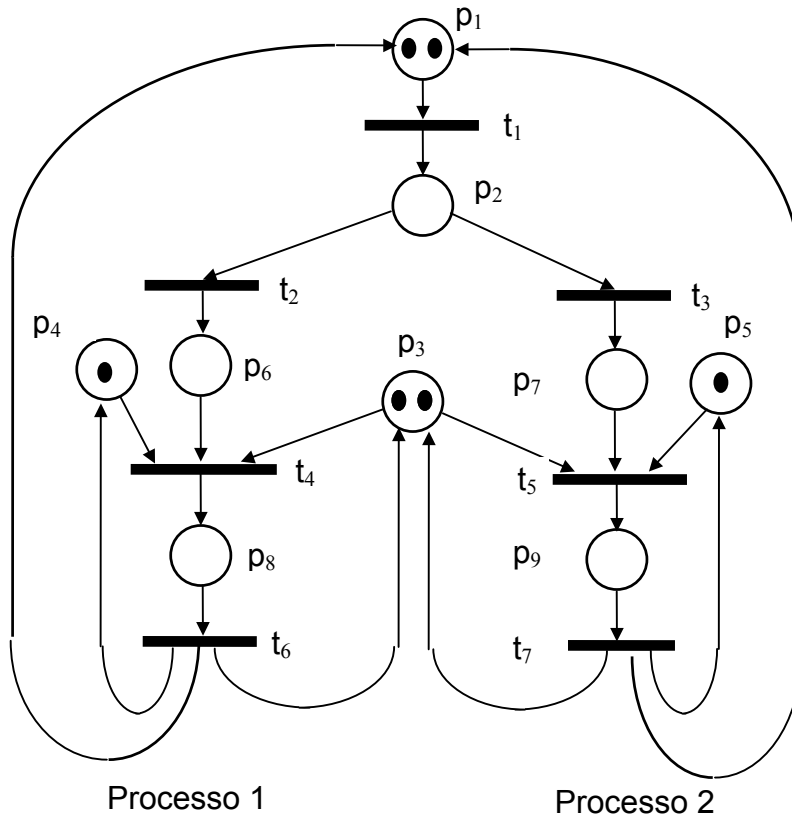


- Construa a árvore de alcançabilidade desta rede de Petri considerando $B=1$
 - Verifique quais propriedades esta rede satisfaz
 - Determine os invariantes da rede de Petri
 - Mostre que não ocorre “overflow” de buffer e “underflow” de buffer, isto é, em p_7 e p_8 nunca existem mais que B marcas.
 - Mostre que não existe “deadlock” (impasse) nesta rede de Petri.
- 3) Seja o seguinte sistema com 2 processadores, 2 buses e 2 módulos de memória:

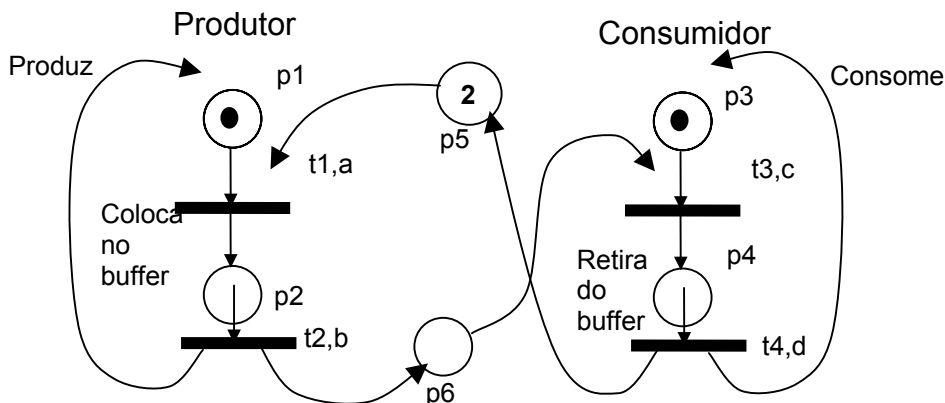


O sistema pode ser modelado pela Rede de Petri a seguir, onde as marcas em P_1 indicam os processadores, as marcas em P_3 indicam os buses e as marcas em p_4 e p_5 controlam o acesso às memórias.

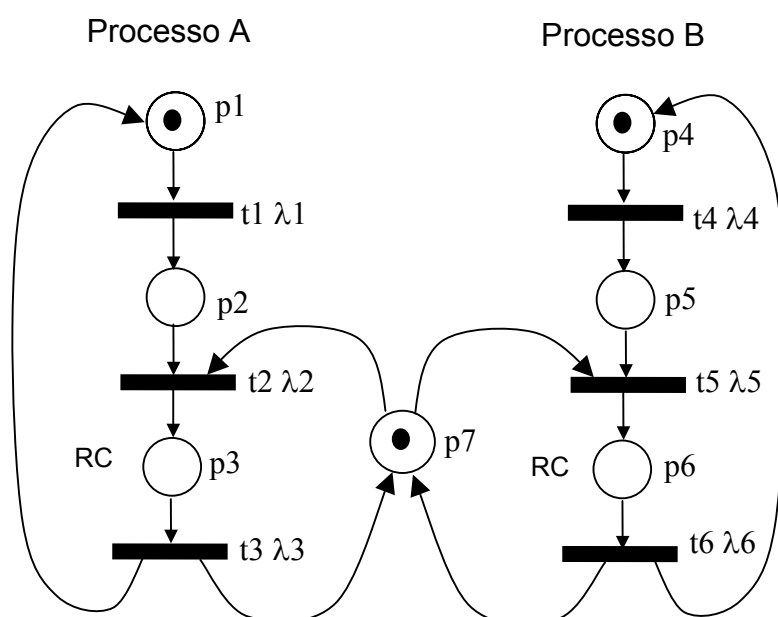
- Determine os invariantes desta rede.
- Mostre que não existe situação de travamento (Deadlock) em que nenhuma transição pode ser disparada.



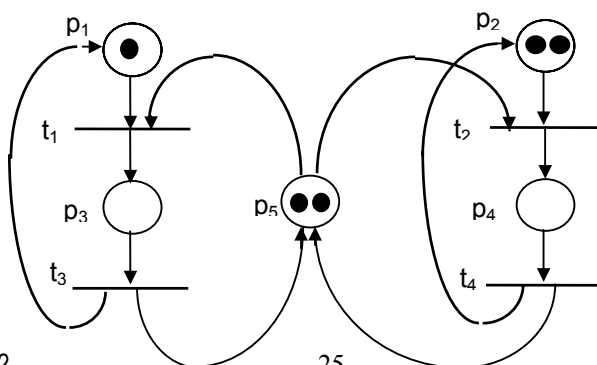
- 4) Um sistema possui dois processos produtores de mensagens, um processo consumidor e um buffer intermediário entre eles com tamanho de B mensagens. O acesso ao buffer é exclusivo, ou seja, quando um processo estiver acessando o buffer nenhum outro pode fazê-lo. O tempo de produção de uma mensagem é exponencialmente distribuído com média T_p . O tempo de inserção ou remoção de uma mensagem no buffer também é exponencialmente distribuído com média T_b . O tempo de arbitragem para uso do buffer é instantâneo.
- Modele o sistema utilizando redes de Petri temporizadas estocásticas.
 - Calcule os invariantes deste sistema.
 - Demonstre que não existe “Overflow” do buffer, “Underflow” do buffer e impasses no sistema.
- 5) A rede de Petri a seguir apresenta a solução simplificada ao problema de um produtor e de um consumidor.



- a) Construa a Cadeia de Markov correspondente.
 - b) Construa o sistema de equações para cálculo das probabilidades $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$ de cada estado.
 - c) Quais as propriedades da rede de Petri que permitem a resolução através de Cadeia de Markov.
- 6) A rede de Petri a seguir é a versão estocástica ao problema de acesso a um recurso compartilhado por dois processos. Nesta rede $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ e λ_6 são as taxas de disparo das transições t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6 respectivamente. Considere $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 100$ e $\lambda_6 = 10$.

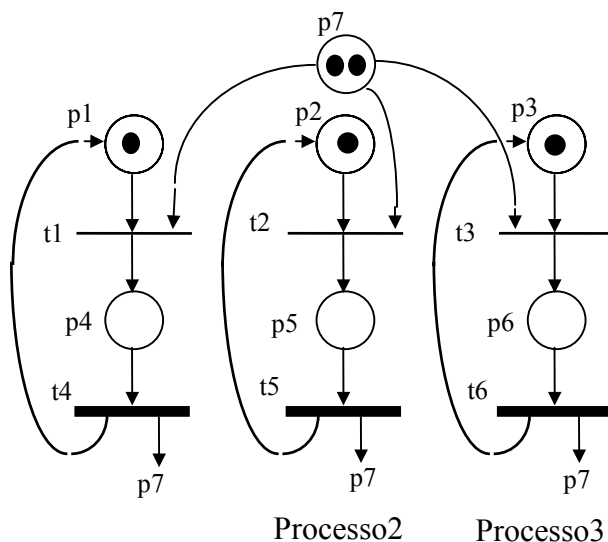


- a) Construa a árvore de alcançabilidade desta rede de Petri.
 - b) Construa a Cadeia de Markov correspondente à árvore de alcançabilidade.
 - c) Calcule as probabilidades $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ das marcações M_0, M_1, M_2, \dots
 - d) Calcule $E(m_7)$ que é a média de marcas em p_7 (é a porcentagem de tempo que o recurso fica livre).
 - e) Calcule U que é a taxa de utilização do recurso.
 - f) Calcule a frequência de disparo de t_2 e t_3 .
- 7) Seja a seguinte rede de Petri:



- Construa a árvore de alcançabilidade desta rede considerando a marcação inicial $M_0=(1,2,0,0,2)$
- Determine os conjuntos invariantes através do cálculo de $C \cdot z=0$.
- O que pode ser dito em relação à alcançabilidade da marcação $M=(0,1,2,0,1)$ a partir de M_0 , os invariantes.
- Prove que não existe *deadlock* nesta rede.

8) Seja a seguinte rede de Petri Temporizada Estocástica



Esta rede de Petri modela um sistema em que 3 processos compartilham dois recursos de mesmo tipo. O tempo que cada processo mantém os recursos tem distribuição exponencial com taxas $\lambda_4=30$, $\lambda_5=20$ e $\lambda_6=10$.

- Especifique as probabilidades de escolha de t_1 , t_2 e t_3 de forma que t_2 e t_3 tenham a mesma probabilidade e p_1 tenha o dobro da probabilidade de p_1 e p_2 .
- Determine a árvore de alcançabilidade da rede de Petri.
- Determine a Cadeia de Markov correspondente?
- Construa a matriz $Q=(q_{ij})$ que define as taxas de transição do estado i para o estado j .
- Calcule o vetor $\pi=(\pi_i)$ que define a probabilidade de estar no estado i .
- Determine a média do número de marcas em um lugar.
- Determine o número médio de disparo de cada transição por unidade de tempo,
- Determine a probabilidade de disparo de cada transição habilitada para cada marcação alcançável da rede de Petri.