

Universidade de São Paulo Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 09

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2015

Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:

<http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=5215>

25/03/2015

Modelo de Rutherford

De acordo com o modelo de Rutherford o número de partículas espalhadas α por núcleo observadas na tela de um cintilômetro de área A será a uma distância r da folha espalhadora:

$$\Delta N = \text{Int} \left(\frac{A}{r^2} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{1}{\text{sen}^4 \theta / 2}$$

Intensidade do feixe α

é o número de núcleos por unidade de área (átomos/cm²)

partículas α

Partículas espalhadoras

Energia cinética das partículas

Fator devido a área do α antes do espalhamento
cintilômetro e a distância
deste da folha espalhadora

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Partículas α são produzidas pela desintegração do ^{226}Ra e 450 partículas por minuto são produzidas em um cintilômetro para um ângulo $\theta = 45^\circ$. Se as condições experimentais forem mantidas e o detector for deslocado de modo a observar as partículas no ângulo de 90° , qual será o número de partículas observadas por minuto?

$$\Delta N = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta/2} \left(\frac{A}{r^2} \right)$$

$$\Delta N = C \frac{1}{\text{sen}^4 \theta/2}$$

Quando deslocamos o detector para 90° ,

$$\Delta N = C \frac{1}{\text{sen}^4 90/2}$$

$$450 = C \frac{1}{\text{sen}^4 45/2}$$

$$\Delta N = 450 \frac{\text{sen}^4 45/2}{\text{sen}^4 90/2} = 450 \frac{0.021}{0.25}$$

$$C = 450 * \text{sen}^4 (45/2)$$

$$\Delta N = 37.8 \approx 38 \text{particulas/ min}$$

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Um feixe de partículas α com $E_k = 6,0\text{MeV}$ incide em uma folha de prata com $1,0\mu\text{m}$ de espessura. A corrente do feixe é de $1,0\text{nA}$. Quantas partículas α serão contadas por um pequeno cintilômetro com 5mm^2 de área situado a $2,0\text{cm}$ da folha com um ângulo de 75° ? (dados: Ag: $Z=47$, $\rho=10,5\text{g/cm}^3$, $M=108\text{g/mol}$)

$$\Delta N = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta / 2} \left(\frac{A}{r^2} \right)$$

1) Intensidade do feixe de α

$$I = \frac{i}{q} = \frac{1\text{nA}}{2e} = \frac{1 \times 10^{-9} (\text{C/s})}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{C}}$$

2) Número de núcleos (átomos por unidade de volume)

$$I = 0,312 \times 10^{10} = 3,12 \times 10^9 \frac{\text{alfas}}{\text{s}}$$

$$n = \frac{\rho (\text{g/cm}^3) \cdot N_A (\text{átomos/mol})}{M (\text{g/mol})}$$

$$n = \frac{10,5 (\text{g/cm}^3) \cdot 6,02 \times 10^{23} (\text{átomos/mol})}{108 (\text{g/mol})}$$

$$n = \frac{\rho N_A \text{ átomos}}{M \text{ cm}^3}$$

$$n = 5,85 \times 10^{22} \frac{\text{átomos}}{\text{cm}^3} = 5,85 \times 10^{28} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3}$$

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Um feixe de partículas α com $E_k = 6,0\text{MeV}$ incide em uma folha de prata com $1,0\mu\text{m}$ de espessura. A corrente do feixe é de $1,0\text{nA}$. Quantas partículas α serão contadas por um pequeno cintilômetro com 5mm^2 de área situado a $2,0\text{cm}$ da folha com um ângulo de 75° ? (dados: Ag: $Z=47$, $\rho=10,5\text{g/cm}^3$, $M=108\text{g/mol}$)

$$\Delta N = \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta / 2} * \left(\frac{A}{r^2} \right) * \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \right)^2 \left(\frac{Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2$$

3) Correção área do cintilômetro

$$\frac{A}{r^2} = \frac{5\text{mm}^2}{(2\text{cm})^2} = \frac{5 \times 10^{-6} \text{m}^2}{(2 \times 10^{-2})^2 \text{m}^2}$$

$$\Delta N = \frac{3,12 \times 10^9 \times 5,85 \times 10^{28} \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6}}{0,137 \times (2 \times 10^{-2})^2} \times \left(\frac{9 \times 10^9 \times 47 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{2 \times 6 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}} \right)^2$$

$$\Delta N = \frac{91,26 \times 10^{25}}{0,137 \times 4 \times 10^{-4}} \times (56,4)^2 \times (10^{-16})^2$$

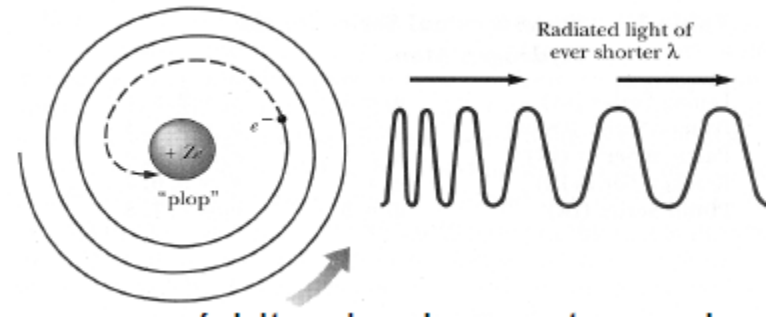
$$\Delta N = 529 \times 10^3 \times 10^{-3}$$

$$\Delta N = 529 \text{ alfas} / \text{s}$$

E a estabilidade do átomo proposto por Rutherford ?

- ❑ Este modelo proposto por Rutherford tinha um sério problema conceitual:
 - ❑ Como elétrons que estavam orbitando ao redor do núcleo poderia manter o sistema estável?
 - ❑ Elétron acelerado devido ao movimento circular em torno do núcleo.
 - ❑ Da teoria eletromagnética clássica temos que uma carga acelerada irradia energia continuamente (radiação eletromagnética).
 - ❑ Energia do sistema deve decrescer.
 - ❑ R decresce – órbitas irão diminuir o sistema deveria colapsar – elétron cair no núcleo

$$\Delta t \sim 10^{-12} \text{ s}$$



- ❑ Como resolvemos este problema?
- ❑ Além do mais havia a emissão de comprimentos de luz discretos por alguns gases, que não havia ainda sido explicado

O Modelo de Bohr

- ❑ Em 1913, Niels Bohr propõe um modelo baseado nas ideias de Rutherford – artigo “On the constitution of atoms and molecules”:
 - ❑ Considerou que o elétron se move em torno do núcleo (muito + massivo) e com carga positiva

POSTULADOS:

- ❑ O elétron em um átomo se move em uma órbita circular em torno do núcleo sob a influência da atração Coulombiana entre o elétron e o núcleo, obedecendo as leis da mecânica clássica.
- ❑ Em vez de infinitas orbitas que seriam possíveis segundo a mecânica clássica, o elétron só pode se mover em certas órbitas na qual seu momento angular orbital L é um múltiplo inteiro de \hbar ($h/2\pi$)

$$L=n\hbar \quad , \quad n=1,2,3....$$

O Modelo de Bohr

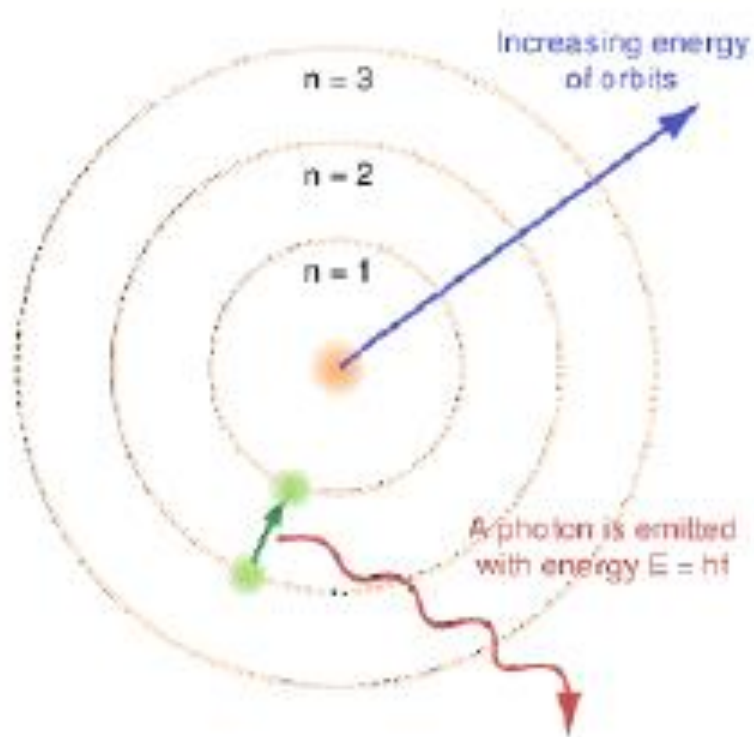
POSTULADOS:

- ❑ Apesar dos elétrons estarem acelerados, um elétron que se move em uma destas órbitas possíveis não emite radiação eletromagnética. Portanto a energia total E permanece constante. (não emissão contraria a eletromagnetismo clássico).
- ❑ É emitida radiação eletromagnética se um elétron se move inicialmente sobre uma órbita de energia E_i e depois muda seu movimento descontinuamente de forma a se mover em uma órbita E_f . A frequência da radiação emitida ν é igual a:

$$h\nu = E_i - E_f$$

o elétron pode transitar de uma órbita permitida para outra “num salto” emitindo um fóton e conservando energia do sistema

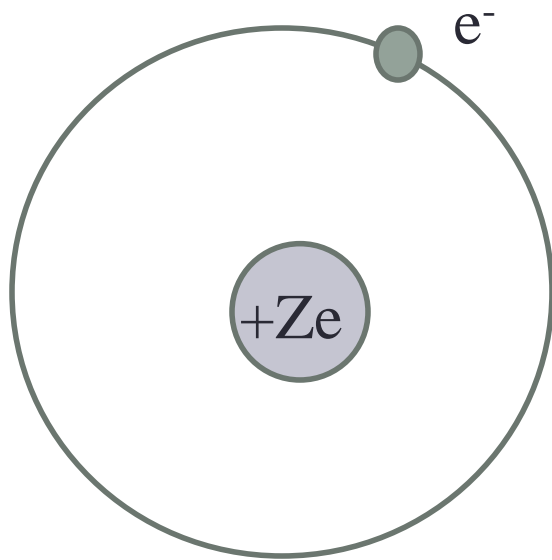
O Modelo de Bohr



- Orbita circular
- $L = n\hbar$
- Energia total constante

- $$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}$$

O Modelo de Bohr



- Átomo com núcleo de carga Ze e massa M e elétron com carga $-e$ e massa m_e
- m_e desprezível em relação a M
- Estabilidade mecânica
- Força centrípeta = Força Coulombiana

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Momento angular

$$\left. \begin{array}{l} L = n\hbar \\ L = mvr \end{array} \right\}$$

$$mvr = n\hbar$$

$$v = \frac{n\hbar}{mr}$$

O Modelo de Bohr – raio e velocidade

$$\left. \begin{aligned} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ v &= \frac{n\hbar}{mr} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Ze^2 &= 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{mv^2}{r} = 4\pi\epsilon_0 r m v^2 \\ Ze^2 &= 4\pi\epsilon_0 r m \left(\frac{n\hbar}{mr} \right)^2 \\ Ze^2 &= 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{mr} \end{aligned}$$

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 m} \rightarrow a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad \text{Raio de Bohr} = 0,529 \text{ \AA}$$

$$r_n = \frac{n^2 a_0}{Z}$$

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{n\hbar}{m} \frac{Ze^2 m}{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$$

H=1, Z=1, n=1
 $r_1 = 0,05 \text{ nm}$
 $v_1 \sim 2,2 \times 10^6 \text{ m/s}$

Raio atômico é quantizado

O Modelo de Bohr – Energia

- A energia de um elétron atômico se movendo em uma das órbitas possíveis
- A energia cinética do sistema é devido ao elétron
- $K = \frac{1}{2} mv^2$
- O núcleo é massivo comparado com o elétron ($m_{\text{proton}} = 1836m_e$) e o núcleo pode ser considerado em repouso.

- A energia potencial V é
$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- A energia mecânica total:
$$E = K + V = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Temos que
$$mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

O Modelo de Bohr – Energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para o H

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r_n = \frac{n^2 a_0}{Z}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{e^4 m}{\hbar^2}$$

$$E_0 = -13,6\text{eV}$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 n^2 a_0}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

$$E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

Energia
quantizada

O estado de energia mais baixo:

$$n=1 \quad E_1 = E_0$$

menor raio

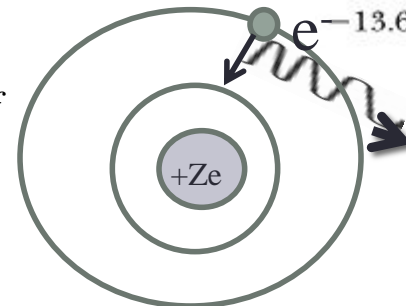
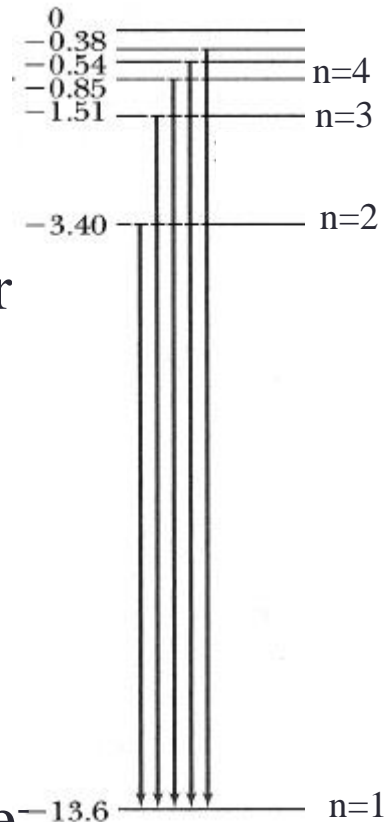
$$E_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{Z^2 e^4 m}{\hbar^2 n^2}$$

Postulados do Modelo de Bohr

- A quantização do momento angular orbital do elétron implica na quantização da energia
- $n=1$ estado fundamental – menor energia
- Hidrogênio
- Níveis discretos de energia
- Os elétrons se movem em certas órbitas sem irradiar energia
- átomo só pode existir em “estados estacionários” com energias quantizadas, E_n , definidas
- Átomos irradiam quando um elétron sofre uma transição de um estado estacionário para outro.
- A frequência da radiação emitida esta relacionadas às energias das órbitas:

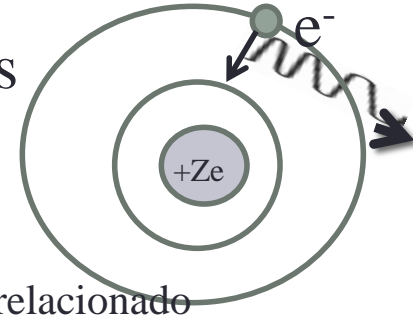
$$h\nu = E_{ni} - E_{nf}$$

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$



Modelo de Bohr

- A frequência da radiação emitida esta relacionada às energias das órbitas:



$$h\nu = E_{ni} - E_{nf} \quad E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

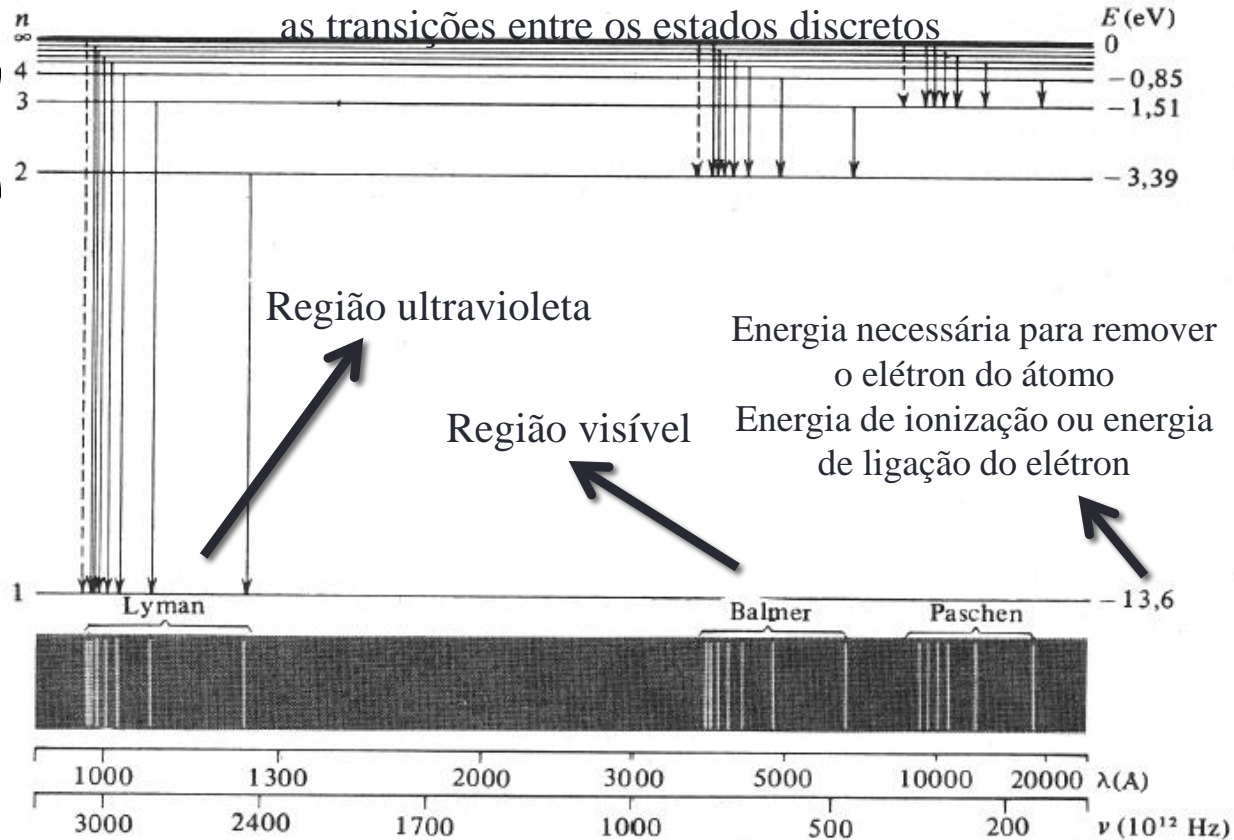
Para o átomo de H: espectro esta relacionado

$$h\nu = -E_0 \frac{Z^2}{n_i^2} - \left(-E_0 \frac{Z^2}{n_f^2} \right)$$

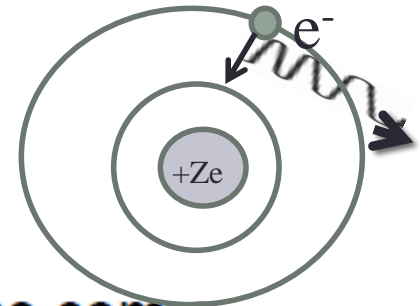
$$\nu = \frac{E_0 Z^2}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0 Z^2}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Valor teórico obtido por Bohr para a constante de Rydberg
Calculou $R=1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$



Modelo de Bohr



1. $n = 1 \Rightarrow$ estado fundamental (menor energia)
2. Excitação \Rightarrow transições para n maior ($n > 1$)
3. Volta para o estado fundamental: emissão de fótons com a diferença de energia entre os estados. Caso particular do H:
 $Z = 1$ e $n_f = 2$ ($n_i > n_f \Rightarrow$ desexcitação)

$$\kappa = R_\infty \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$R_n = \frac{E_0}{hc} = \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3}$$

Espectro de Balmer, se $R_H = R_\infty$. Bohr obteve valor bastante próximo.

Correção para massa nuclear finita \Rightarrow massa reduzida no lugar da massa do e^- .

$$m = m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

e

$$M = m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

Na suposição de Bohr o núcleo estava imóvel (significa que sua massa era considerada infinita)

O espectro de linhas

A análise espectroscópica da luz emitida pela descarga em gases e vapores nos revelou uma intrincada estrutura de linhas, cada uma possuindo um determinado comprimento de onda específico.

Hélio

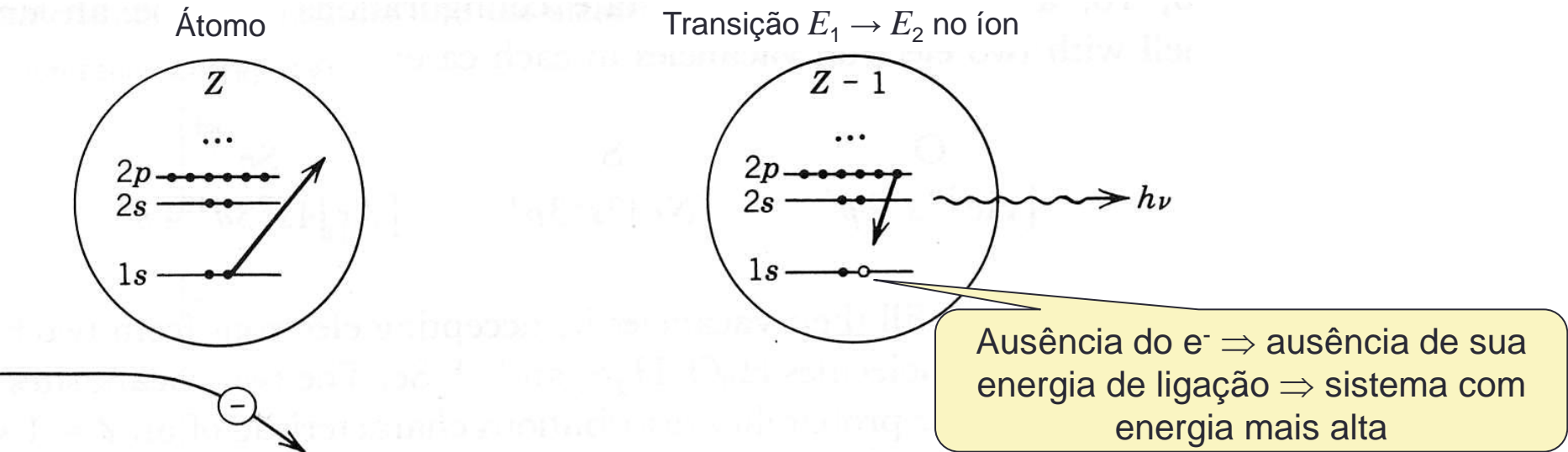
Xenônio

Oxigênio

Hidrogênio

Sódio

Emissão de Raio-X



Como resultado temos a excitação de um estado iônico com energia E_1 . Isso pode ser representado pela criação de uma vacância (ou buraco) em uma das camadas internas completas. Atenção: nesse caso, estamos assumindo que o e^- tenha sido expulso do átomo, mas ele poderia ir para um estado ligado desocupado, acima da última camada. O que não pode acontecer é dele ir para um estado já ocupado por outro e^- (Pauli). A desexcitação radioativa do sistema se dá quando um e^- de uma camada de energia mais elevada ocupa o buraco e emite um fóton de energia $h\nu = E_1 - E_2$, onde E_2 é a energia do estado final.