Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 19

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2015
Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=5215

27/05/2015

Equação de Schrödinger

Geralmente estudaremos os casos que correspondem a situações de onda estacionária:

átomo de hidrogênio,
Partículas em uma caixa
Oscilador harmônico

independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

dependente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

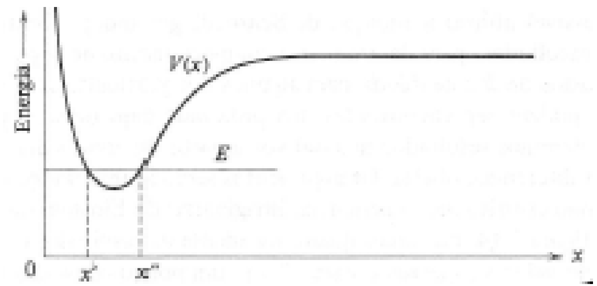
Para ter sentido físico, devemos impor algumas condições

- As funções de onda e sua primeira derivada, para serem soluções aceitáveis precisam:
  - **Ser finita (não podemos aceitar que** $\psi(x) = \infty; x \to 0$ **partícula tem que ter ser movimento em uma região do espaço**
  - **Ser unívoca (a função de onda não pode ter múltiplos valores)**
  - **Se contínua (pois se temos funções descontínuas as derivadas serão infinitas nos pontos de descontinuidade)**
- Essas condições são necessárias para que as funções de onda representem os observáveis de maneira adequada

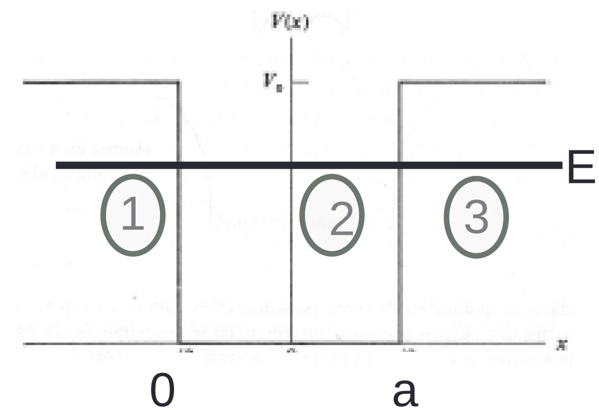
Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Partícula presa em um poço finito quadrado

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V_0\psi(x)=E\psi(x)$$



- Uma situação mais realista do que o poço infinito
- Potencial representaria uma partícula presa (chamado estado ligado:
  - nêutron em um estado ligado no núcleo
  - Elétron em um átomo e que pode se desprender (átomo ionizado)



$$V(x)=\begin{cases} \text{Vo} & x<0 & \text{região 1} \\ 0 & 0<x<a & \text{região 2} \\ \text{Vo} & x>a & \text{região 3} \end{cases}$$

Região 1 e 3

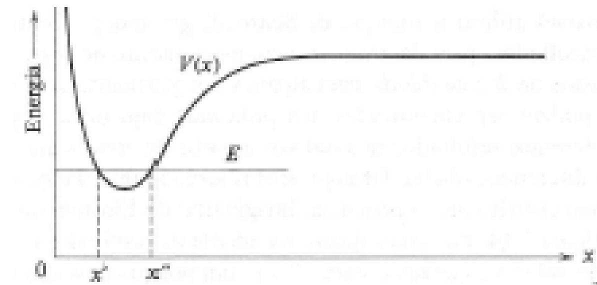
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=-\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi(x) \qquad k_1=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=k_1{}^2\psi(x) \qquad \psi_1(x)=Ae^{k_1x}+Be^{-k_1x} \qquad \psi_3(x)=Fe^{k_1x}+Ge^{-k_1x}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Partícula presa em um poço finito quadrado

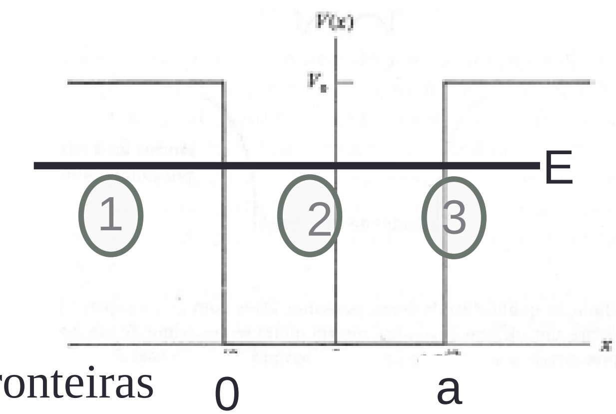
$$V(x) = \begin{cases} Vo & x<0 & \text{região 1} \\ 0 & 0<x<a & \text{região 2} \\ Vo & x>a & \text{região 3} \end{cases}$$



Região 2 – dentro do poço

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = C\,\mathrm{sen}\,k_2x + D\cos k_2x$$



Aqui não conseguimos exigir que a função de onda se anule nas fronteiras

$$\psi_1(x) = Ae^{k_1x} + Be^{-k_1x} \qquad \psi_3(x) = Fe^{k_1x} + Ge^{-k_1x}$$

1) Condição de finitude

$$x \to \infty, \psi(x) \to 0$$

$$x \to -\infty, \psi(x) \to 0$$

F=0

B=0

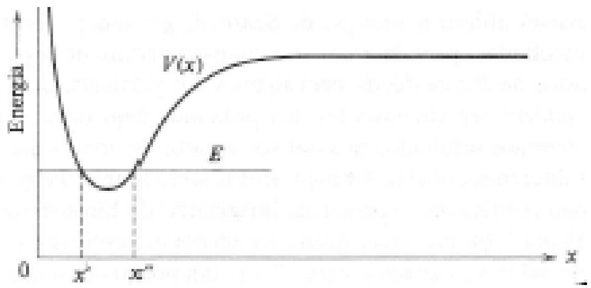
Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Partícula presa em um poço finito quadrado

$$\psi_1(x) = Ae^{k_1 x}$$ Região 1

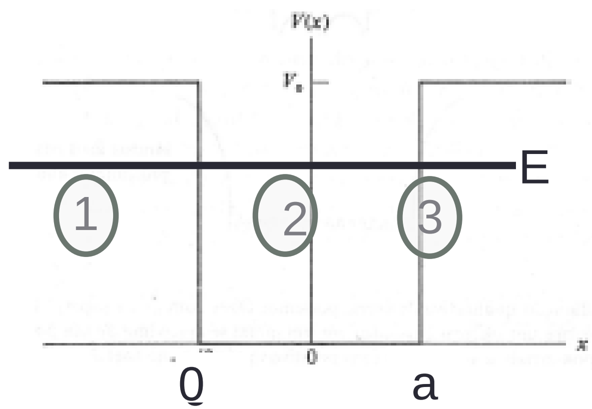
$$\psi_3(x) = Ge^{-k_1 x}$$ Região 3

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$



$$\psi_2(x) = C\,\mathrm{sen}\,k_2 x + D\cos k_2 x$$ Região 2

$$k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



2) Condição de continuidade a função e de sua derivada

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$\psi_{2(x=a)} = \psi_{3(x=a)}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx}\psi_{2(x=0)}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{2(x=a)} = \frac{d}{dx}\psi_{3(x=a)}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Partícula presa em um poço finito quadrado

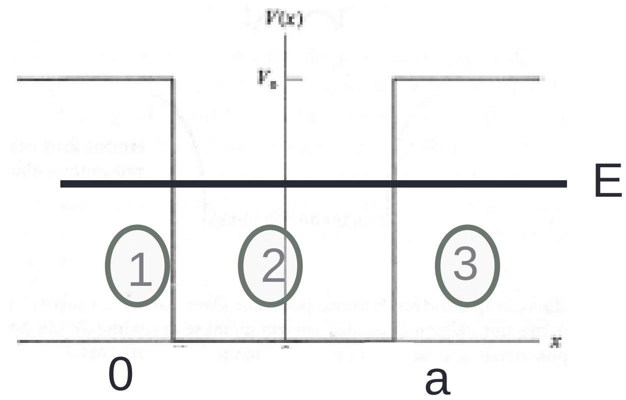
$$\psi_1(x) = Ae^{k_1 x}$$ Região 1

$$\psi_3(x) = Ge^{-k_1 x}$$ Região 3

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Csenk_2 x + D\cos k_2 x$$ Região 2

$$k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



$$\boxed{A = D}$$

$$\boxed{k_1 A = Ck_2}$$

$$Csenk_2 a + D\cos k_2 a = Ge^{-k_1 a}$$

$$Ck_2 \cos k_2 a - Dk_2 senk_2 a = -k_1 Ge^{-k_1 a}$$

$$\boxed{\frac{k_1}{k_2} = \frac{C}{D}}$$

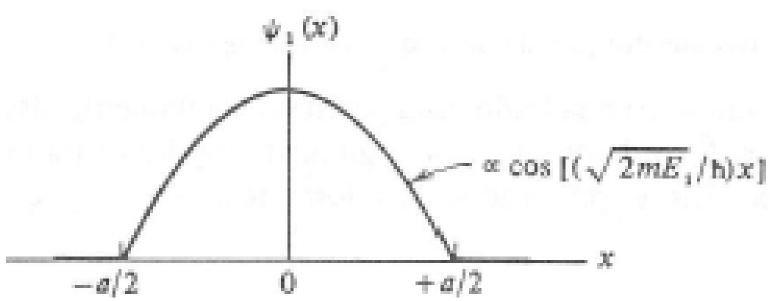
$$\frac{\frac{k_1}{k_2}\cos k_2 a - senk_2 a}{\frac{k_1}{k_2} senk_2 a + \cos k_2 a} = \boxed{-\frac{k_1}{k_2}}$$

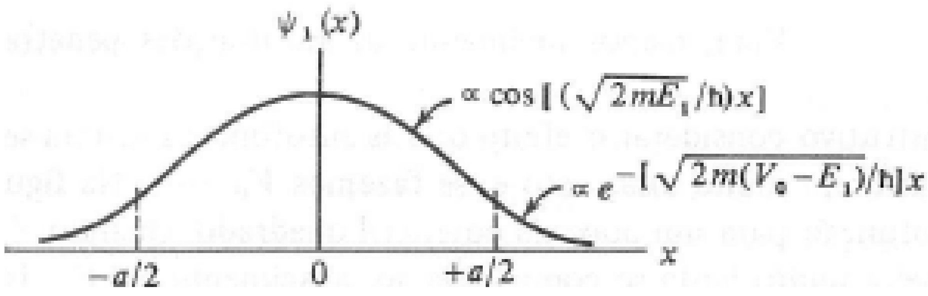
Isto esta relacionado a profundidade do poço (Vo) e com a largura do poço (a)
E esta relação só pode ser satisfeita para certos valores de E. A solução não pode ser resolvida explicitamente para E. Deve ser obtida pelo método geométrico.

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Partícula presa em um poço finito quadrado”

Comparando o primeiro estado do sistema do poço infinito com o poço finito





O fato da função de onda não ser zero nas paredes aumenta o comprimento de onda de de Broglie na parede (em comparação com o poço infinito), e isto torna menor a energia e o momento da partícula. Esta observação pode ser usada para aproximar as energias permitidas para a partícula ligada. A função de onda penetra na região exterior, numa escala de comprimento definido peça profundidade de penetração δ dado por:

$$\delta = \frac{1}{k_1} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

A função de e onda no exterior é essencialmente zero além da distância δ, em ambos os lados do poço de potencial

$$E_n \approx \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(L+2\delta)^2}$$

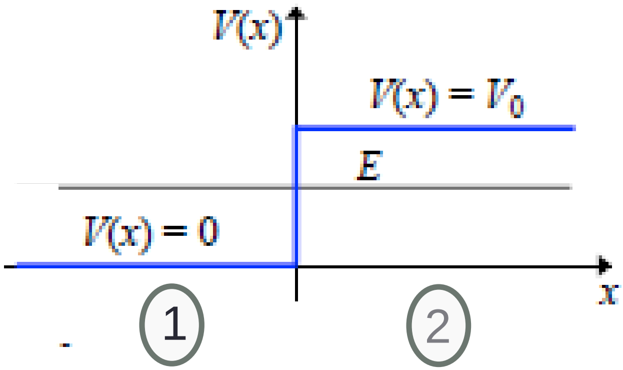
Energia da partícula ligada no poço finito

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

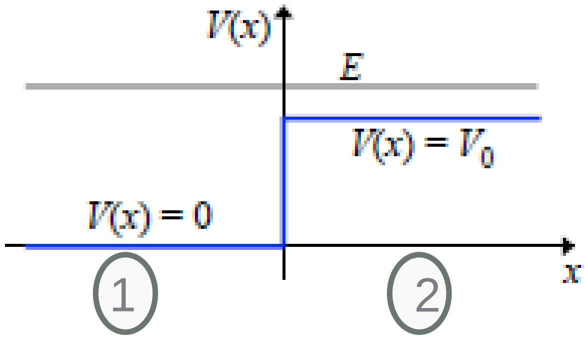
E < Vo

"Potencial Degrau"

E > Vo

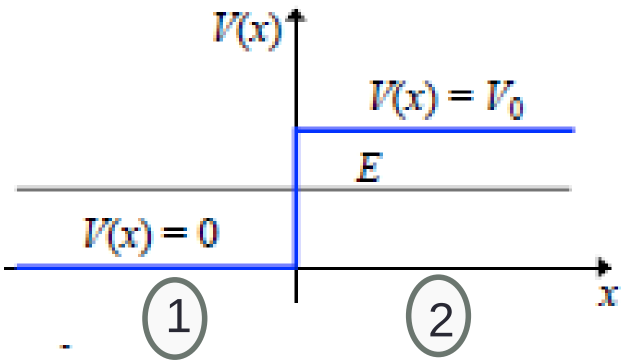


$$V(x) = \begin{cases} Vo & x > 0 \\ 0 & x <= 0 \end{cases}$$



1) Caso E< Vo

Região 1 x<0

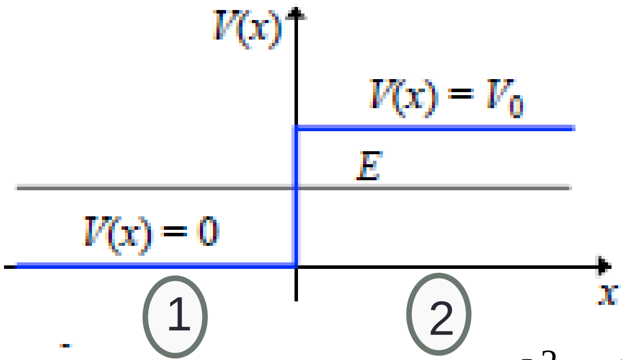


Classicamente a partícula seria refletida em x=0

E quanticamente o que acontecerá?

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

1) Caso E< Vo "Potencial Degrau"



$$V(x) = \begin{cases} V_o & x > 0 \\ 0 & x <= 0 \end{cases}$$

Região 1 x<0

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Solução da partícula livre

Região 2 x>0

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi(x) \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Região $x > 0$: nesse caso, $E < V_0 \Rightarrow$ solução oscilatória

Outra solução particular é a exponencial crescente: $\psi(x) = e^{k_2x}$

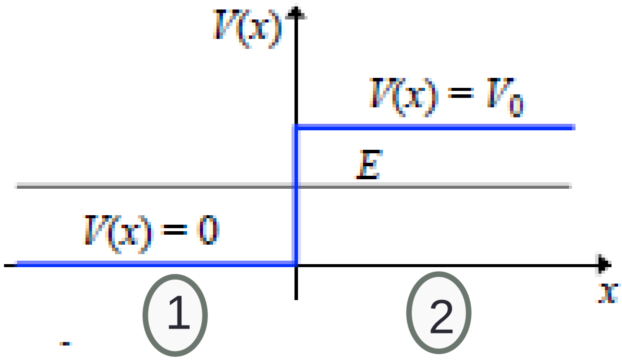
$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x}$$

Agora temos que determinar as constantes A,B,C e D que satisfaçam os requisitos de finita, unívoca e contínua para

$$\psi \ e. \ \frac{d\psi}{dx}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Potencial Degrau"



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1 $$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x}$$ Região 2 $$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

1) Condição de finitude

x > 0 região 2

$$x \to \infty, \psi(x) \to 0$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x}$$

D=0

2) Condição de continuidade a função e da derivada

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$Ae^0 + Be^0 = C$$

$$\boxed{A + B = C}$$

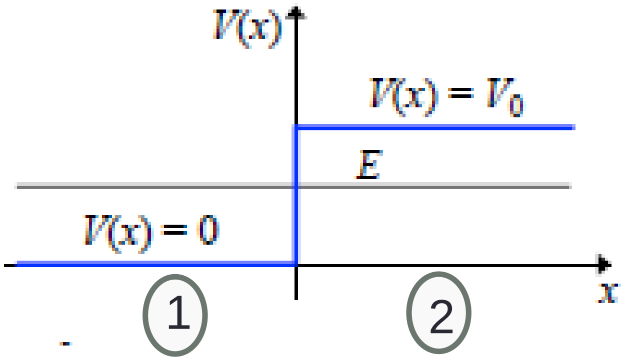
$$\frac{d}{dx}\psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx}\psi_{2(x=0)}$$

$$Aik_1e^0 - Bik_1e^0 = -Ck_2e^0$$

$$\boxed{A - B = i\frac{k_2}{k_1}C}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Potencial Degrau"



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1 $$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x}$$ Região 2 $$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$A + B = C \qquad (1)$$

$$A - B = i\frac{k_2}{k_1}C \qquad (2)$$

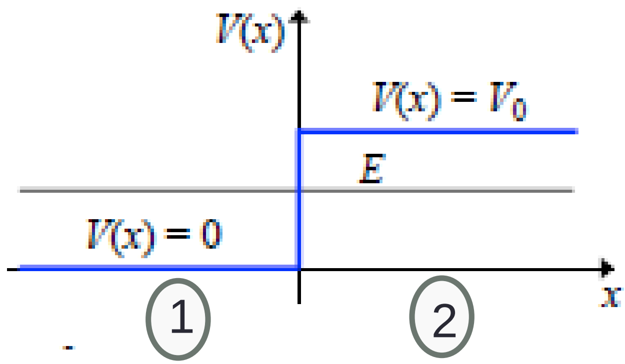
1 + 2 $$A = \frac{C}{2}\left(1 + i\frac{k_2}{k_1}\right)$$

2 - 1 $$B = \frac{C}{2}\left(1 - i\frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\left(1 + i\dfrac{k_2}{k_1}\right)e^{ik_1x} + \dfrac{C}{2}\left(1 - i\dfrac{k_2}{k_1}\right)e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : x< 0} \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : x> 0} \end{cases}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Potencial Degrau"



Coeficiente de Reflexão:

O fluxo de partículas na direção da onda, ou seja número de partículas que atravessam, uma certa posição por unidade de tempo é dado por

$\psi^*(x).\psi(x)$ Vezes a velocidade das partículas

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x}$$ Região 2

$$R = \frac{v_r \psi_r^* \psi_r}{v_i \psi_i^* \psi_i} \qquad R = \frac{B^* B}{A^* A} \qquad v_r = v_i$$

$$R = \frac{B^*B}{A^*A} = \frac{(1-ik_2/k_1)^*(1-ik_2/k_1)}{(1+ik_2/k_1)^*(1+ik_2/k_1)} = \frac{(1+ik_2/k_1)(1-ik_2/k_1)}{(1-ik_2/k_1)(1+ik_2/k_1)} = 1$$

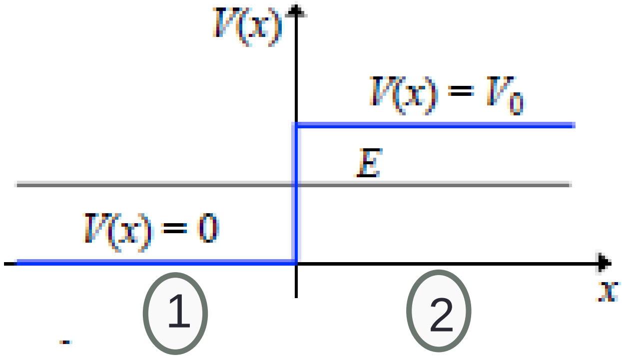
$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\left(1+i\dfrac{k_2}{k_1}\right)e^{ik_1x} + \dfrac{C}{2}\left(1-i\dfrac{k_2}{k_1}\right)e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : x< 0} \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : x> 0} \end{cases}$$

$$\boxed{R = 1}$$

De pleno acordo com a mecânica clássica para x<0

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Potencial Degrau"



Coeficiente de Reflexão:

O fluxo de partículas na direção da onda, ou seja número de partículas que atravessam, uma certa posição por unidade de tempo é dado por

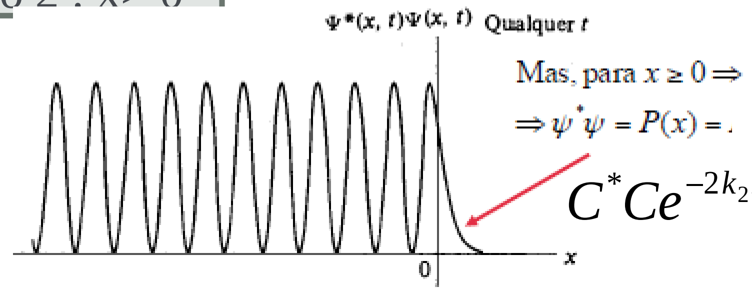
$$\psi^*(x).\psi(x)$$

$$\psi^*(x).\psi(x) = C^* C e^{-2k_2 x}$$

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \quad \text{Região 1}$$

Região 2 : x> 0

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2 x} \quad \text{Região 2}$$



$$C^* C e^{-2k_2 x} > 0$$

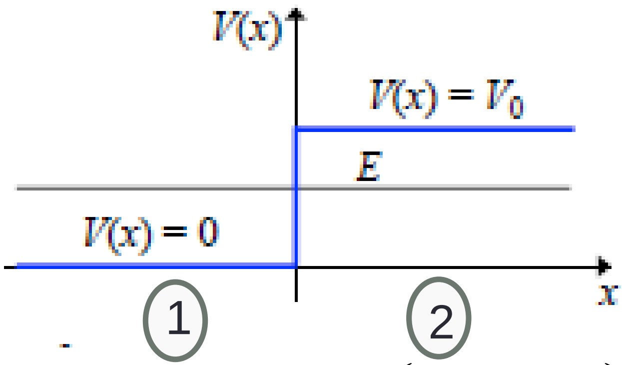
Nesta região temos E<Vo e portanto energia cinética seria negativa

- classicamente esta é uma região proibida para as partículas
- Quanticamente pode-se encontrar a partícula nesta região, sendo que cada vez menos provável encontrar a partícula com o aumento de x.
- A penetração da partícula na região proibida (por intervalo muitos pequenos) é possível devido ao princípio de incerteza
- A profundidade de penetração é pequena

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x}$$ Região 2

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{2}\left(1+i\frac{k_2}{k_1}\right)e^{ik_1x} + \frac{C}{2}\left(1-i\frac{k_2}{k_1}\right)e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : x< 0} \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : x> 0} \end{cases}$$

$$\frac{C}{2}\left(\alpha(\cos k_1x + i\,\mathrm{sen}\,k_1x) + \alpha^*(\cos k_1x - i\,\mathrm{sen}\,k_1x)\right)$$

$$C\left(\cos k_1x - \frac{k_2}{k_1}\mathrm{sen}\,k_1x\right)$$

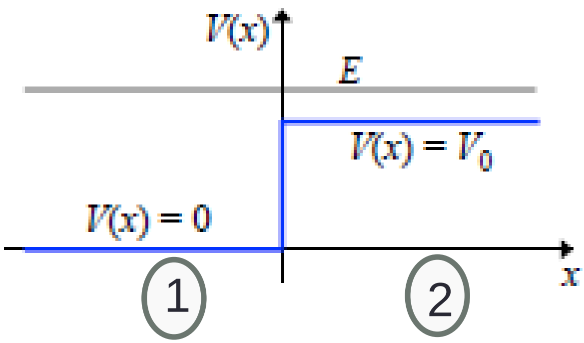
$$\boxed{\alpha = \left(1+i\frac{k_2}{k_1}\right)}$$

$$\boxed{e^{ik_1x} = \cos k_1x + i\,\mathrm{sen}\,k_1x}$$

$$\boxed{\psi(x) = \begin{cases} C\cos k_1x - C\frac{k_2}{k_1}\mathrm{sen}\,k_1x & \text{Região 1 : x< 0} \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : x> 0} \end{cases}}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

2) Caso E> Vo **"Potencial Degrau"**



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1 $$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$ Região 2 $$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

1) Condição de finitude
x > 0 região 2

$$x \to \infty, \psi(x) \to 0$$

D=0 A onda não volta

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x}$$

2) Condição de continuidade a função e da derivada

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$Ae^0 + Be^0 = C$$

$$\boxed{A + B = C}$$

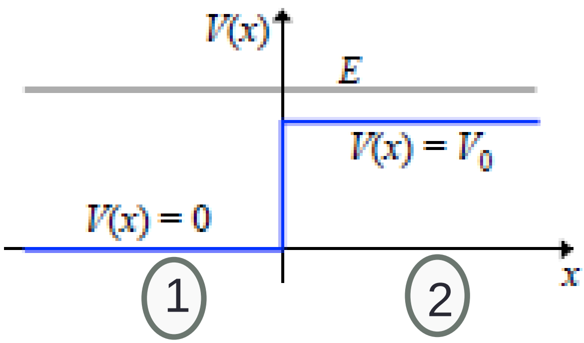
$$\frac{d}{dx}\psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx}\psi_{2(x=0)}$$

$$Aik_1e^0 - Bik_1e^0 = Cik_2e^0$$

$$\boxed{A - B = \frac{k_2}{k_1}C}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$A + B = C \quad (1)$$

$$A - B = \frac{k_2}{k_1}C \quad (2)$$

1 → 2

$$\frac{k_2}{k_1}(A+B) = A - B$$

$$k_2(A+B) = k_1(A-B)$$

$$(k_1 + k_2)B = (k_1 - k_2)A$$

$$\boxed{B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A}$$

Substituindo em 1

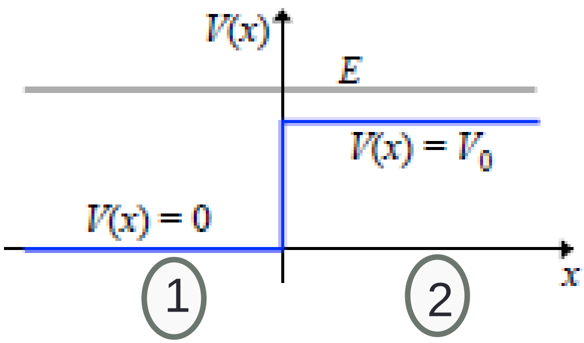
$$\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} + 1\right)A = C$$

$$\boxed{C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + A\left(\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : x< 0} \\ A\dfrac{2k_1}{k_1 + k_2}e^{ik_2x} & \text{Região 2 : x> 0} \end{cases}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Potencial Degrau"

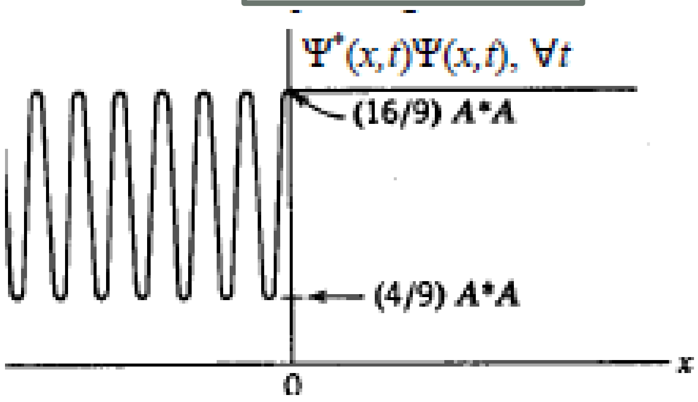


$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

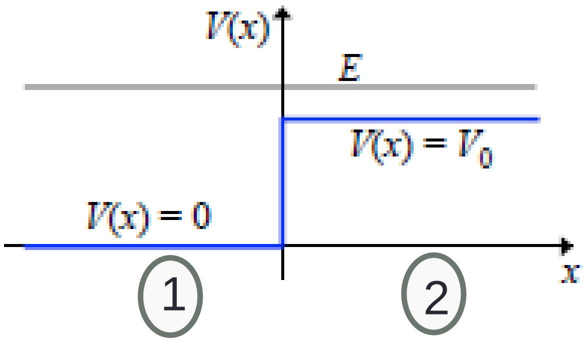
$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + A\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : x< 0} \\ A\frac{2k_1}{k_1 + k_2}e^{ik_2x} & \text{Região 2 : x> 0} \end{cases}$$

Caso de $k_1=2k_2$



Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Potencial Degrau"



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x}$$ Região 2

$$v_{inc} = \frac{p_{inc}}{m} = \frac{\hbar k_1}{m}$$

$$v_{ref} = \frac{p_{ref}}{m} = \frac{\hbar k_1}{m}$$

$$v_{trans} = \frac{p_{trans}}{m} = \frac{\hbar k_2}{m}$$

Vimos que

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$$

Coeficiente de Reflexão e Transmissão:

Vamos definir fluxo de probabilidade (j)

$$j_{incidente} = v_{inc} A^* A$$

$$j_{refletido} = v_{ref} B^* B$$

$$j_{transmitido} = v_{tran} C^* C$$

reflexão: $$R = \frac{j_{refletido}}{j_{incidente}} = \frac{v_{ref} B^* B}{v_{inc} A^* A}$$

transmissão: $$T = \frac{j_{transmitido}}{j_{incidente}} = \frac{v_{trans} C^* C}{v_{inc} A^* A}$$

$$\boxed{R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2}$$

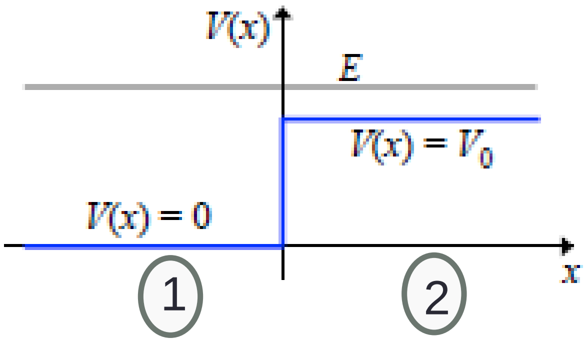
Vimos que

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

$$\boxed{T = \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)^2}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

"Potencial Degrau"



Coeficiente de Reflexão e Transmissão:

$$\boxed{R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2}$$

$$\boxed{T=\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right)^2}$$

reflexão: + transmissão:

$$R+T=\frac{4k_2k_1}{(k_1+k_2)^2}+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=1$$

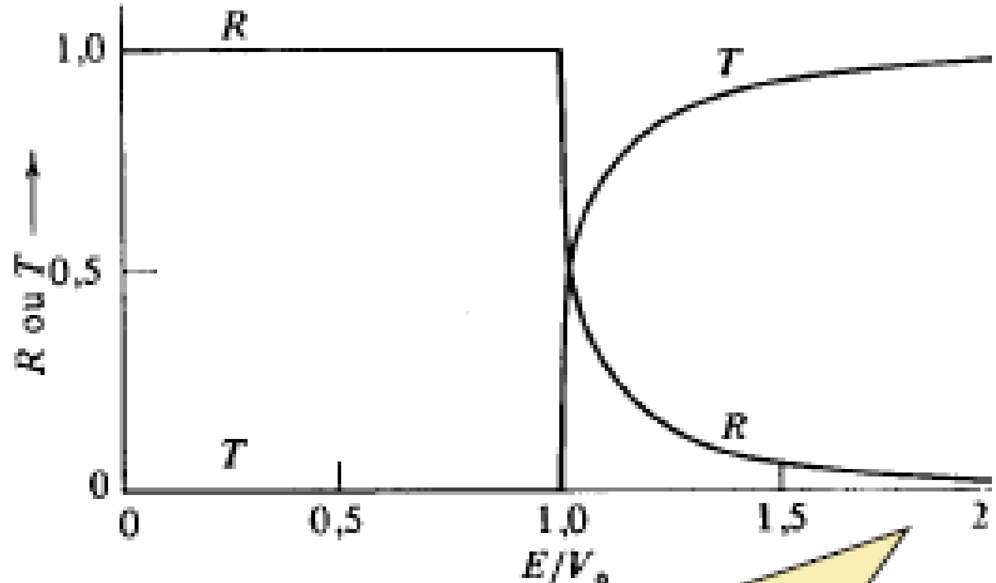
$$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

$$R=1-T=\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{V_0}{E}}}{1+\sqrt{1-\frac{V_0}{E}}}\right) \qquad \boxed{E>V_0}$$

$$R=1-T=1 \qquad \boxed{E<V_0}$$

Como $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$ e $T = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}$ temos que $R + T = 1$



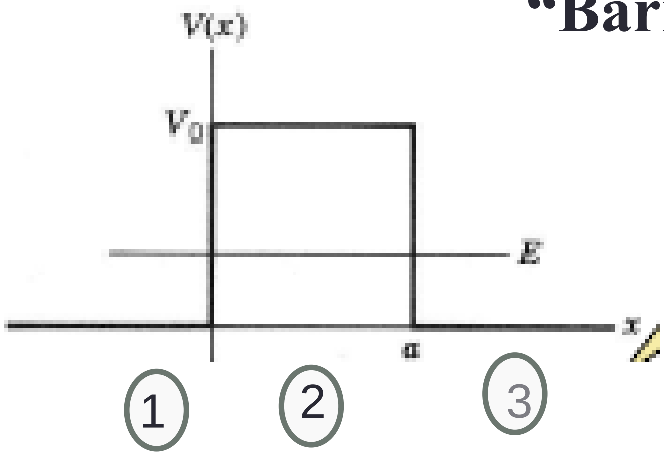
$$R = 1 - T = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}}\right)^2, \text{ se } \frac{E}{V_0} > 1$$

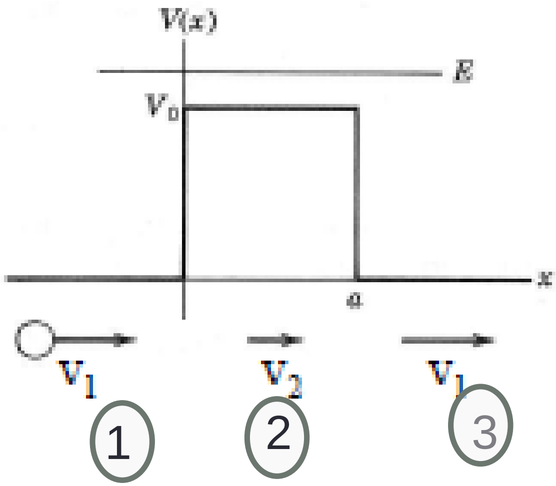
Fazer Ex. 6-3, pág. 257 (Eisberg)

R e T são simétricos pela troca $k_1 \leftrightarrow k_2$. Portanto, em termos de coeficientes de reflexão e transmissão, tanto faz se a partícula sobe ou desce o degrau.

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Barreira de potencial”





1) Caso E< Vo reflexão

2) Caso E> Vo transmissão

Região 1 x<0

Região 2 x>a

Região 3 0<x>a

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x}$$

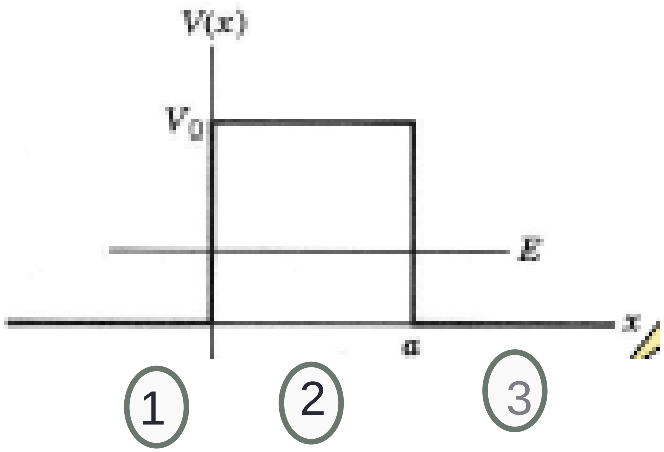
Solução da partícula livre

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi(x) \qquad \psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

’otencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1 $$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x}$$ Região 3

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x}$$ Região 2

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

1) Condição de finitude

Mas não podemos fazer D=0

Se a partícula incide da esquerda

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x}$$

B=0

G=0

2) Condição de continuidade da função e da derivada para x=0

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$Ae^0 + Be^0 = Ce^0 + De^0$$

$$\boxed{A + B = C + D}$$

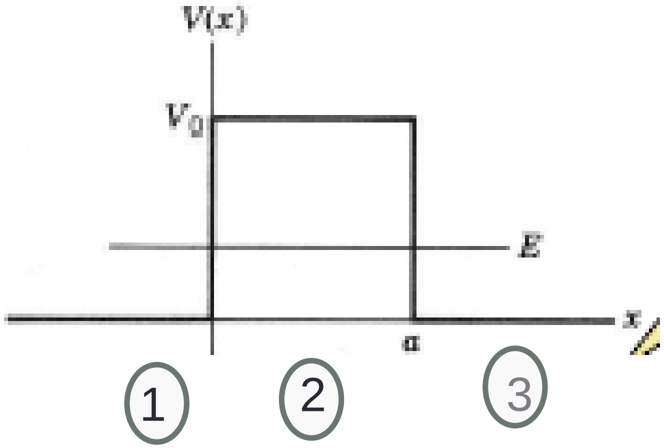
$$\frac{d}{dx}\psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx}\psi_{2(x=0)}$$

$$Aik_1e^0 - Bik_1e^0 = -Ck_2e^0 + Dk_2e^0$$

$$\boxed{ik_1(A - B) = -ik_2(C - D)}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

’otencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$ Região 1 $$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x}$$ Região 3

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x}$$ Região 2

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

3) Condição de continuidade da função e da derivada para x=a

$$\psi_{2(x=a)} = \psi_{3(x=a)}$$

$$\boxed{Ce^{-k_2a} + De^{k_2a} = Fe^{-ik_1a}}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{2(x=a)} = \frac{d}{dx}\psi_{3(x=a)}$$

$$\boxed{-k_2(Ce^{-k_2a} + De^{+k_2a}) = ik_1Fe^{-ik_1a}}$$