Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I
AULA 13

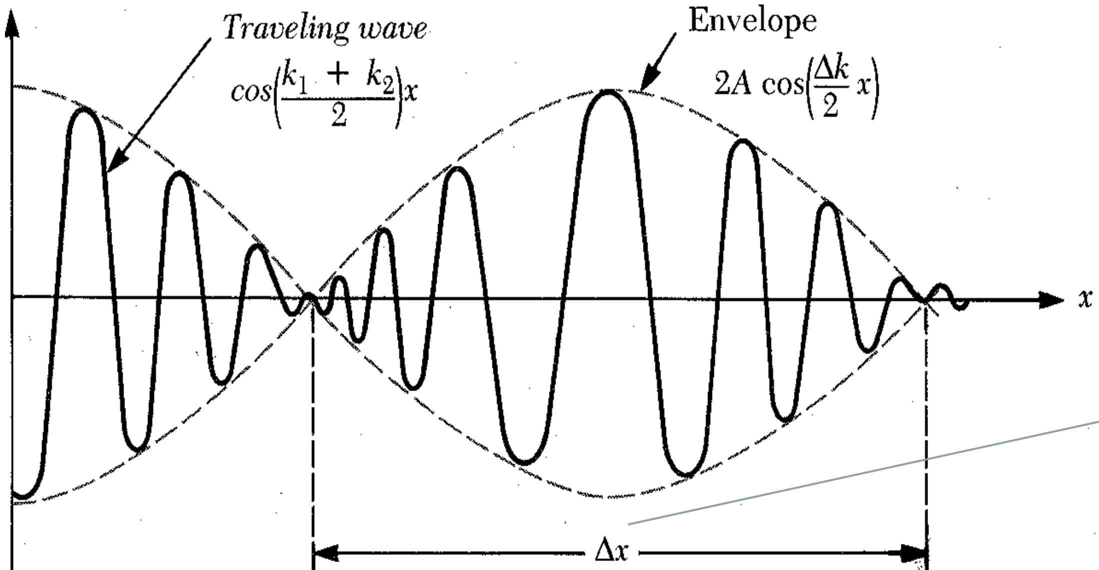
Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2015
Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=5215

23/04/2015

Superposição de duas Ondas



Podemos interpretar a onda soma como sendo um envelope que modula lentamente uma onda com k e w médios

Δx é a largura do envoltório e é inversamente proporcional ao número de onda

$$\Psi(x,t)=\Psi_1+\Psi_2=2A\cos\frac{1}{2}(\Delta kx-\Delta\omega t)\cos(\bar{k}x-\bar{\omega}t)$$

amplitude (envelope)

A velocidade de propagação das ondas individuais v_f=w/k

$$\frac{1}{2}(\Delta kx-\Delta\omega t)=\frac{1}{2}\Delta k\left(x-\frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)=\frac{1}{2}\Delta k(x-v_g t)$$

velocidade de grupo

A velocidade de propagação do grupo (que é a velocidade do envoltório)

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}$$

Em contraste com o pulso a combinação de ondas não é localizada no espaço

Ondas harmônicas que compõem um pacote de ondas. A velocidade é dada por:

$$v_f = \lambda f \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \omega = 2\pi f$$

Velocidade de fase

$$v_f = \left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$v_f = \left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$v_f . k = \omega$$

A velocidade de grupo esta relacionada a velocidade de fase por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

- A velocidade v_g pod ser > ou < que v_f

Meios não dispersivos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Se a velocidade de fase é a mesma para todas as frequências e para todas os comprimentos de onda $\frac{dv_f}{dk} = 0$ $\therefore v_g = v_f$

O meio pelo qual a v_f é a mesma para todas as frequências é dito ⟹ NÃO DISPERSIVO

Exemplos de meios não dispersivos:

- Corda perfeitamente flexível para ondas mecânicas
- Ar para as ondas sonoras
- Vácuo para ondas eletromagnéticas

Característica importante:

como todas as ondas harmônicas que formam um pacote de ondas que se movem com a mesma velocidade, o pacote se propaga sem mudar de forma

Meios dispersivos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Por outro lado quando a velocidade de fase é diferente para as diferentes frequências, temos que $\frac{dv_f}{dk} \neq 0$ $\therefore v_f \neq v_g$

Neste caso o meio é dito $\Longrightarrow$ DISPERSIVO

Exemplos de meios dispersivos:

- Água para as ondas do mar
- Corda que não é perfeitamente flexível para ondas mecânicas
- Meio transparente como o vidro ou água para as ondas luminosas
- Qualquer meio para as ondas da matéria

- Para o postulado de de Broglie

$$E = hf = \hbar\omega \qquad \mathrm{p} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar}\frac{\hbar}{p} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

- A velocidade de fase não corresponde a velocidade da partícula

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

- O pacote de onda se propaga com velocidade do elétron

Exercício:

1) Certas ondas de oceano viajam com velocidade de fase

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

onde g é a aceleração da gravidade. Determine a velocidade do grupo do "pacote de onda" destas ondas (expresse em termos da velocidade de fase).

Lembrando que a velocidade de grupo: $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

Sabemos que: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = 2\pi f$ e $v_f = \lambda f = \left(\dfrac{2\pi}{k}\right) . \left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right) = \left(\dfrac{\omega}{k}\right)$

então:

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \left(\frac{g}{2\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(\sqrt{gk})$$

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{\omega}{k} \qquad \omega = \sqrt{gk}$$

$$v_g = \frac{1}{2}k^{-1/2}\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \qquad v_g = \frac{1}{2}v_f$$

O princípio da incerteza

Vimos que o princípio de incerteza de Heisenberg, diz:

que é impossível determinar (fazer medidas) simultaneamente da posição e momento de uma partícula) (x e p_x, por exemplo) apresentam uma relação entre suas incertezas dada por

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos será necessário)

O princípio de incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo:

Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

$$\Delta \omega . \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

$$E = hf = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega$$

$$\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Exercício:

3) Um elétron se move na direção x com velocidade de $3{,}6 \times 10^6$ m/s

Podemos medir sua velocidade com precisão de 1%

a) Com que precisão podemos medir simultaneamente sua posição

b) o que podemos dizer sobre o movimento na direção y

Exercício:

3) Um elétron se move na direção x com velocidade de $3{,}6x10^6$m/s. Podemos medir sua velocidade com precisão de 1%

a) Com que precisão podemos medir simultaneamente sua posição

b) o que podemos dizer sobre o movimento na direção y

$$p_x = mv_x = 9{,}1x10^{-31}x3{,}6x10^6$$

$$p_x = 3{,}3x10^{-24}(kg.\frac{m}{s})$$

$$\Delta p_x = m\Delta v_x = 1\% p_x$$

$$\Delta p_x = 3{,}3x10^{-26}(kg.\frac{m}{s})$$

Do princípio de incerteza

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} \geq \frac{1{,}05x10^{-34}J.s}{2x3{,}3x10^{-26}kg/ms}$$

$$\Delta x \geq 0{,}16x10^{-8}m = 1{,}6nm = 16x10^{-10}m$$

O que é aproximadamente 16 distâncias atômicas (distância atômica λ ~1A ~10^{-10}m)

sobre o movimento na direção y:
Se o elétron se move na direção x temos que

$$\Delta p_y = 0$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2$$

$$\Delta y = \infty$$

Não sabemos nada sobre y

Exercício:

4) Qual a energia cinética que os nêutrons devem ter se forem difratados por cristais?

As difrações ocorrem se o comprimento de onda de de Broglie do nêutron for da mesma ordem de magnitude da distância interatômica. $\lambda \sim 1A \sim 10^{-10}m$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}63x10^{-34}\,J.s}{1x10^{-10}\,m} = 6{,}63x10^{-24}\,kgm/s$$

A energia cinética

$$E_c = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{(6{,}63x10^{-24})^2}{2x1{,}66x10^{-27}}\left(\frac{kg^2m^2}{s^2kg}\right)$$

$$E_c = 1{,}32x10^{-20}\,J = 0{,}0825eV$$

Note que são nêutrons não relativísticos, Energia menor que a massa de repouso do nêutron

$$E_c << m_n c^2 = 939{,}6MeV$$

A energia cinética da partícula a T_{amb}

Justifico o uso de $E_c=p^2/2m$

$$E_c = \frac{3}{2}kT = 0{,}0388eV$$

Exercício:

5) Determine o comprimento de onda de de Broglie para elétrons de 54eV?

$$E_c = \frac{p^2}{2m_e}$$

$$p^2 = 2m_e E$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{1240 eV.nm}{\sqrt{2mc^2 E}}$$

$$\lambda = \frac{1240 eV.nm}{\sqrt{2x0,511x10^6 x54}} = 0,167nm$$

Exercício:

6) Nós aprendemos inicialmente que a partícula (gás ideal) em equilíbrio térmico com o ar ao redor tem energia cinética de 3/2kT. Calcule o comprimento de de Broglie para:

a) Nêutron a temperatura ambiente (300K)

b) Nêutron frio a 77K (nitrogênio líquido)

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$p^2 = 2mE$$

$$m_n c^2 = 939{,}6MeV$$

$$p^2 = 2mE = 2m\frac{3}{2}kT$$

$$p = \sqrt{3mkT}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{1240eV.nm}{\sqrt{3mc^2kT}}$$

$$\lambda = \frac{1240eV.nm}{\sqrt{3x939{,}6x10^6x8{,}62x10^{-5}T}}$$

$$\lambda = \frac{2.52}{\sqrt{T}}nm$$

a) T=300K

$$\lambda = 0{,}145nm$$

a) T=77K

$$\lambda = 0{,}287nm$$

Probabilidade

Em 1925-1926 Max Born propôs como relacionar a Ψ (função de onda) com o comportamento das partículas que ela descreve:

A probabilidade que a partícula seja encontrada no instante t em uma coordenada entre x e x+dx é :

$$P(x)dx = \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx$$

$$P(x)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

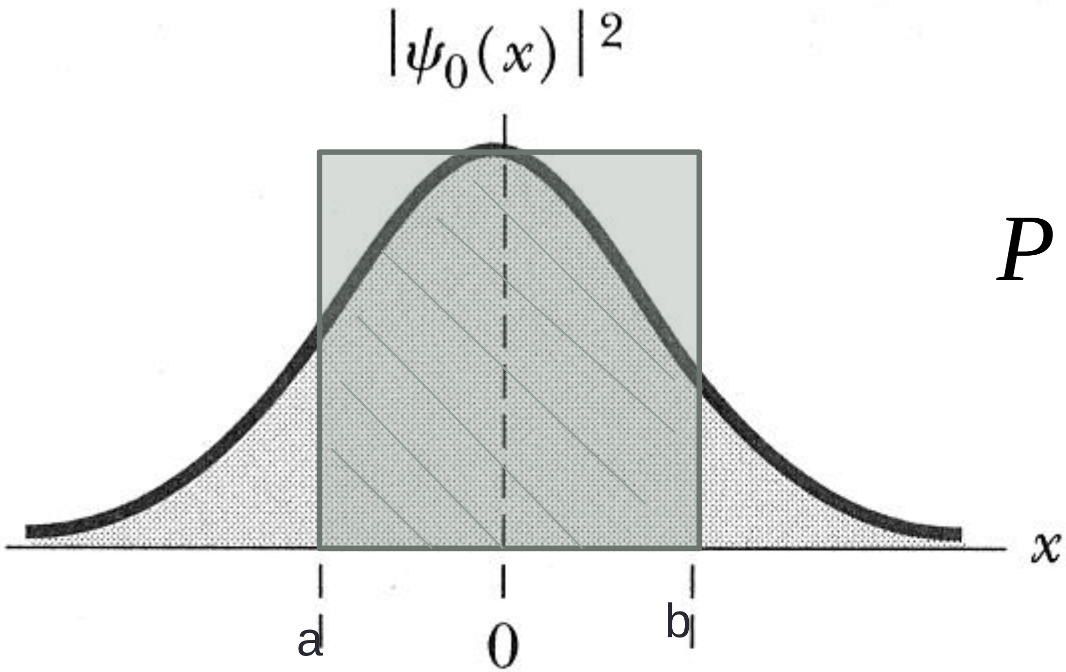
Ψ não é uma quantidade mensurável, mas o seu módulo ao quadrado é mensurável e é justamente a probabilidade por unidade de comprimento ou densidade de probabilidade P(x) para encontrar a partícula no ponto x no tempo t.

Já que a partícula deve ser encontrada em algum lugar ao longo do eixo x, a soma das probabilidade sobre todos os valores de x deve ser 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1$$

Qualquer função que satisfaz esta equação é dita normalizada

A probabilidade de uma partícula estar no intervalo a=<x<=b esta relacionado área embaixo da curva de a até b de uma função densidade de probabilidade $\left|\Psi(x,t)\right|^2$



$$P = \int_a^b \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx =$$

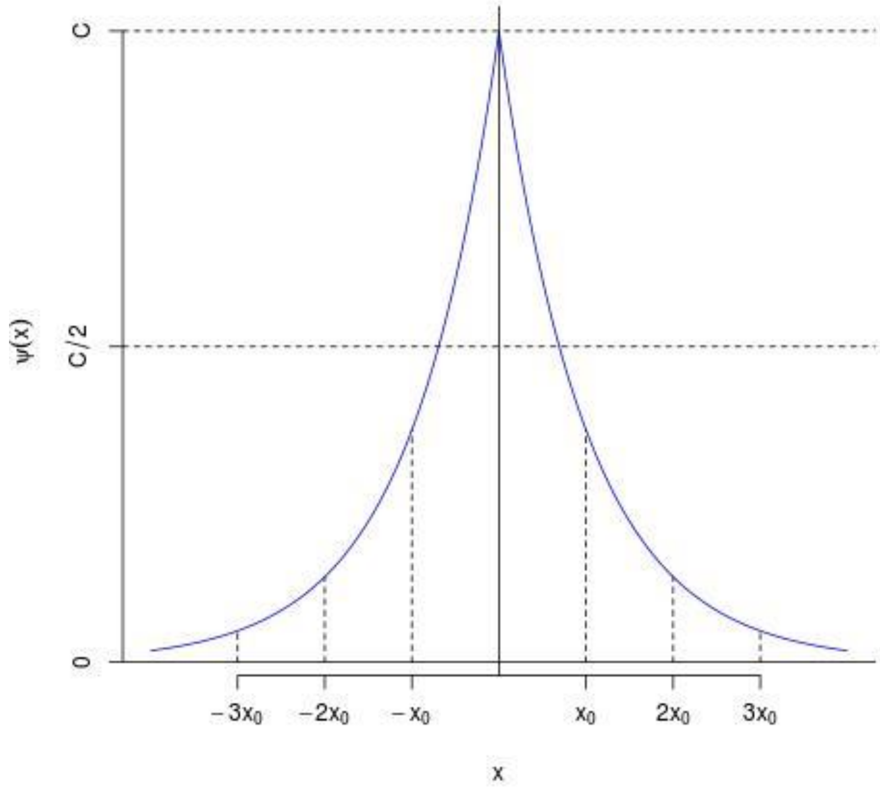
o área embaixo da curva entre a e b

Exercício:

2) A função de onda inicial de uma partícula é dada por:

$$\Psi(x,0) = Ce^{-|x|/x_0}$$ onde C e x_0 são constantes

a) Desenhe esta função



Exercício:

2) A função de onda inicial de uma partícula é dada por:

$$\Psi(x,0) = Ce^{-|x|/x_0}$$ onde C e x_0 são constantes.

b) Encontre C em termos de x_0 temos que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{-2|x|/x_0} dx = 1$$

$$2C^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-2|x|/x_0} dx = 2C^2 \left. \frac{e^{-|x|/x_0}}{-2/x_0} \right|_0^{\infty}$$

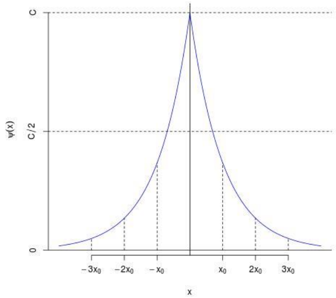
$$-C^2 x_0 (0-1) = C^2 x_0 = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

Exercício:

2) A função de onda inicial de uma partícula é dada por:

$$\Psi(x,0) = Ce^{-|x|/x_0}$$ onde C e x_0 são constantes.



c) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $-x_0 \leq x \leq x_0$.

$$P = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

$$P = \int_{-x_0}^{+x_0} C^2 e^{-2|x|/x_0} dx =$$

$$2C^2 \int_0^{+x_0} e^{-2|x|/x_0} dx = 2C^2 \left. \frac{e^{-2|x|/x_0}}{-2/x_0} \right|_0^{x_0}$$

$$-C^2 x_0 (e^{-2} - 1) = \frac{1}{x_0} x_0 (1 - e^{-2})$$

$$\boxed{P = (1 - e^{-2}) = 0.8647 = 86{,}5\%}$$

OBSERVÁVEIS:

Ψ não é uma quantidade mensurável

MAS como podemos relacionar a função de onda com grandezas observáveis????

COMO podemos obter a posição, o momento ou a energia de uma partícula a partir da função de onda (de maneira exata no mundo quântico)?????

VALORES ESPERADOS:

USANDO a interpretação probabilística de Bohr, podemos obter apenas os valores médios ou valores esperados das grandezas

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)dx$$

OBSERVÁVEIS: VALORES ESPERADOS:

Generalizando qualquer grandeza que depende da posição x:

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) f(x) \Psi(x,t) dx$$

E o valor esperado para o momento ou energia da partícula??

$$\bar{p} = < p > = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) p \Psi(x,t) dx$$

Dúvida: p(x)???

pelo princípio de incerteza não há como determinar precisamente (simultaneamente) as duas quantidades