2. Transformada de Laplace

2.1 Motivação

Logaritmos: no curso colegial vimos que, com seu uso, é possível transformar operações aritméticas "complicadas" em outras mais simples. Por exemplo: produtos em somas; divisões em subtrações; exponenciações em produtos; radiciações em divisões.

Mecanismo:

1. Tomar o logaritmo da expressão "complicada";
2. Efetuar as operações "mais simples";
3. Obter o resultado desejado aplicando a transformação inversa (antilogaritmo).

Nota: esse processo funciona porque a transformação é biunívoca.

A utilidade da Transformada de Laplace reside no fato de que equações "complicadas" (equações diferenciais lineares a coeficientes constantes) podem ser transformadas em equações mais simples (equações algébricas). Além disso, **funções usuais** em controle como degraus, senóides, exponenciais, senóides amortecidas, podem ser transformadas em **funções racionais**; operações como **diferenciação** e **integração** também podem ser substituídas por **operações algébricas**.

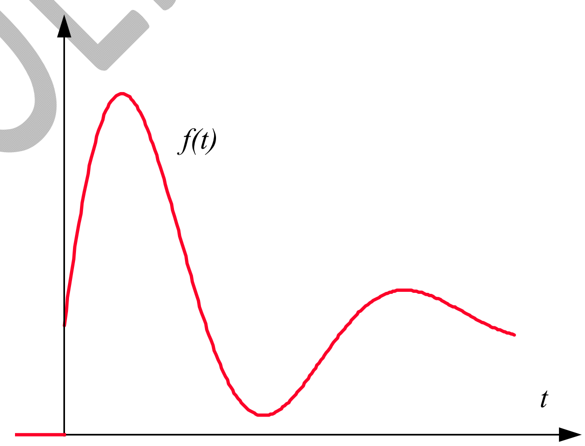
Quando se resolvem equações diferenciais através da Transformada de Laplace, as **condições iniciais** são consideradas automaticamente.

Por fim, através da Transformada de Laplace é possível prever o desempenho de sistemas dinâmicos utilizando-se **técnicas gráficas**, sem a necessidade de se resolver as equações diferenciais.

2.2 Definição

Dada uma função ***f(t)***, define-se:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \overset{\Delta}{=} \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$



onde: $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ transformação de Laplace de *f(t)*

$F(s)$ função de Laplace

2.3 Propriedades

Sejam:

$f(t)$	com	$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$
$f_1(t)$	com	$\mathcal{L}\left[f_1(t)\right] = F_1(s)$
$f_2(t)$	com	$\mathcal{L}\left[f_2(t)\right] = F_2(s)$

Verificam-se as seguintes propriedades da Transformada de Laplace;

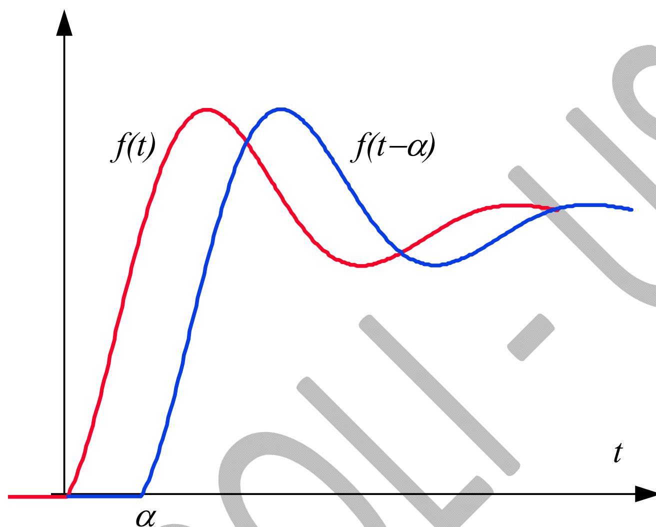
Linearidade

$$\mathcal{L}\left[\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t)\right] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} \cdot \left[\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t)\right] \cdot dt =$$

$$= \alpha \cdot \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} \cdot f_1(t) \cdot dt + \beta \cdot \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} \cdot f_2(t) \cdot dt =$$
$$= \alpha \cdot F_1(s) + \beta \cdot F_2(s)$$

Translação no Tempo

$$\mathcal{L}\left[f(t-\alpha)\right] = e^{-\alpha s} \cdot F(s)$$



Translação no Domínio da Frequência

$$F(s+\alpha) = \mathcal{L}\left[e^{-at} \cdot f(t)\right]$$

Mudança de Escala de Tempo

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha \cdot F(\alpha s)$$

Multiplicação por tempo

$$\mathcal{L}\left[t \cdot f(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Diferenciação

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = s \cdot F(s) - f(0^-)$$
$$\mathcal{L}\left[\ddot{f}(t)\right] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0^-) - \dot{f}(0^-) \quad \ldots$$

Integração

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\cdot d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)\cdot d\tau}{s}$$

Convolução

$$F_1(s)\cdot F_2(s) = \mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right]$$

Observação: a operação de convolução é definida como

$$f_1(t) * f_2(t) \overset{\Delta}{=} \int_{0}^{t} f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\cdot d\tau$$

Teorema do Valor Final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

Sempre que:

i. $\exists\,\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ e $\exists\,\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right]$

ii. $\exists \lim_{t\to\infty} f(t)$

iii. $s\cdot F(s)$ não tiver polos no semiplano direito (S.P.D.), incluindo-se aí o eixo imaginário (exceto, eventualmente, por um polo simples de *F(s)* na origem).

Teorema do Valor Inicial

$$\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) = f\left(0^+\right)$$

Sempre que:

i. $\exists\,\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ e $\exists\,\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right]$

ii. $\exists \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$

2.4 Transformadas de Funções Usuais

f(t)	***F(s)***
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$sen(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cdot cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Onde *δ(t)* representa o impulso unitário e *1(t)* representa o degrau unitário.

2.5 Transformação Inversa

A questão que se coloca é como voltar do campo complexo *s* para o domínio do tempo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$$

Analiticamente a Transformada Inversa de Laplace é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{j \cdot 2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds \quad (t > 0)$$

Onde *c* (abscissa de convergência) é um número real maior que todos os polos de *F(s)*, o que significa que a trajetória de integração é uma reta paralela ao eixo imaginário, situada à direita de todos os polos de *F(s)*.

Esse é um processo desconfortável e trabalhoso, em geral, de se inverter a Transformada de Laplace.

Uma maneira mais prática é utilizar uma tabela de transformadas de funções usuais em conjunto com as propriedades vistas. Além disso, a **decomposição em frações parciais** é um método que permite, muitas vezes, reduzir um problema aparentemente complexo a uma série de problemas mais simples em que a tabela e as propriedades mencionadas podem ser usadas.

Primeiro Caso: *F(s) tem polos distintos*

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s+z_1)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)\ldots(s+p_n)} = \frac{\alpha_1}{s+p_1} + \frac{\alpha_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

Onde $-p_i, 1 \le i \le n$ são os polos de *F(s)* e $\alpha_i, 1 \le i \le n$ são constantes chamadas de **resíduos** nos polos $s = -p_i$.

Para calcular α_i temos dois procedimentos:

1. fazer a soma de frações acima e identificar os coeficientes com os do numerador *B(s)* (procedimento mais trabalhoso);
2. aplicar o seguinte método **operacional**:

$$\left.\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_i)\right|_{s=-p_i} = \left[\frac{\alpha_1}{s+p_1}(s+p_i)+\ldots+\frac{\alpha_i}{s+p_i}(s+p_i)+\ldots+\frac{\alpha_n}{s+p_n}(s+p_i)\right]_{s=-p_i}$$

$$\alpha_i = \left.\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_i)\right|_{s=-p_i}$$

(este é o método mais simples).

Exemplo: obter a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$F(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+2}$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}(s+1)\right|_{s=-1} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

$$\alpha_2 = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}(s+2)\right|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

Portanto:

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right]$$

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

Nota: este método se aplica mesmo no caso em que há polos complexos conjugados.

Segundo Caso: *F(s) tem polos múltiplos*

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s+z_1)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\ldots(s+p_n)} =$$

$$= \frac{\alpha_{1r}}{(s+p_1)^r} + \frac{\alpha_{1r-1}}{(s+p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{11}}{(s+p_1)} + \frac{\alpha_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

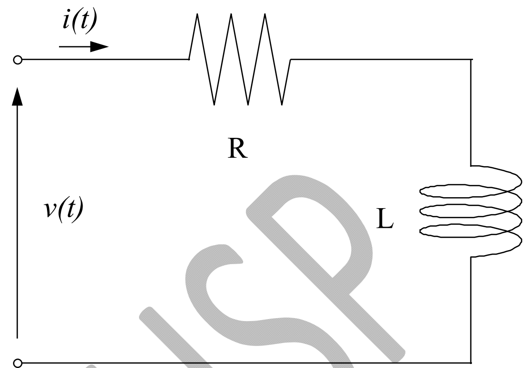
Também neste caso há dois procedimentos:

1. fazendo a soma das frações parciais e identificando os coeficientes dos polinômios dos numeradores;
2. utilizando-se um processo similar ao apresentado para o caso de polos simples; este, porém, é um pouco mais trabalhoso e pode ser visto em Ogata (1982).

2.6 Solução de Equações Diferenciais Lineares

Com o emprego da Trasformada de Laplace obtém-se a solução completa de equações diferenciais lineares.

Vejamos, através de um exemplo, como proceder.



$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = v(t)$$

com: $i(0) = i_0$ e $v(t) = 1(t)$

i) Tomamos a Transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial:

$$L \cdot \left[s \cdot I(s) - i_0 \right] + R \cdot I(s) = V(s) = \frac{1}{s}$$

ii) Isolamos a função a determinar (***I(s)***):

$$I(s) = \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}} + \frac{\frac{1}{L}}{s \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right)}$$

iii) Como o segundo termo não consta da tabela usual, expandimo-lo em frações parciais, obtendo:

$$I(s) = \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}} + \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right]$$

iv) Antitransformamos ***I(s)***:

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{1}{R} \cdot \left[1(t) - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right] \quad , \quad (t \geq 0)$$

Verificações: $i\left(t = 0^+\right) = i_0$ (ok!)

$i(t \to \infty) = \dfrac{1}{R}$ (ok!)