

3. Representação de Sistemas

3.1 Introdução

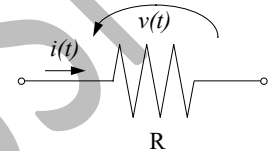
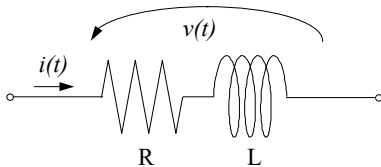
Os sistemas físicos que serão objeto de atenção neste curso são aqueles cujo comportamento pode ser descrito por meio de **equações diferenciais ordinárias** – em que o tempo (t) é a variável independente – lineares e a coeficientes constantes. Tratam-se, pois, de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT's) e essa descrição (ou sua equivalente na forma de função de transferência) é o que se chama aqui de **modelo matemático** do sistema.

A **construção** do modelo matemático normalmente é feita a partir das **leis físicas** que regem o comportamento do sistema em estudo – leis de Kirchhoff para sistemas elétricos, leis de Newton para sistemas mecânicos, etc.

É fundamental **não confundir** o modelo matemático com a **realidade**. O primeiro sempre tem associado a si um conjunto de **limitações** que condicionam sua **validade**.

Assim, por exemplo, quando adotamos o modelo matemático $v = R \cdot i$ para descrever o comportamento de um resistor real, estamos supondo que o calor produzido por **efeito Joule** não é suficiente para "queimar" o resistor; a relação entre tensão e corrente está sendo

idealizada como **linear**; em particular, está-se supondo que os sinais são suficientemente **lentos** para que efeitos indutivos ou capacitivos possam ser desprezados – se os sinais variarem rapidamente, um modelo como o à esquerda poderá ser mais fiel ao comportamento do resistor real.



Evidentemente, o engenheiro de controle – e não apenas ele! – deve procurar trabalhar sempre com o **modelo mais simples** que ainda seja útil à análise/projeto de cada problema específico. Aumentando-se a complexidade do modelo, pode-se melhorar a sua **precisão**; por outro lado, o manuseio do modelo se torna cada vez mais trabalhoso e complicado, o que caracteriza a existência de um **compromisso entre precisão e simplicidade**.

É comum, utilizando-se experiência e bom senso, partir-se de um modelo simples para resolver um problema prático e, posteriormente, para **validar as hipóteses** simplificadoras adotadas, utilizar-se então um modelo mais complexo.

A modelagem matemática é uma fase **crucial** de todo problema de análise ou projeto em engenharia de controle. É por ela que começa e é ela que determina o sucesso na solução do problema.

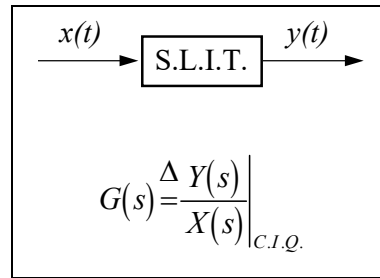
Neste curso, serão considerados exclusivamente com sistemas **lineares** – para os quais se aplica o princípio da superposição – e **invariantes no tempo**. Estes sistemas podem ter seu comportamento descrito por **equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes**.

Quando o comportamento do sistema for acentuadamente **não linear**, a teoria a ser aqui discutida ainda poderá ser aplicável ao problema referente à operação em uma “pequena” região **em torno** de um ponto (condição) **nominal**.

As ferramentas a serem desenvolvidas também poderão ser aplicadas a sistemas **variantes no tempo** quando essa variação for **lenta** em comparação com a velocidade dos sinais de interesse. Este é o caso, por exemplo, do **piloto automático** de aviões para operação em cruzeiro – embora a massa do sistema seja variante no tempo (em razão da queima de combustível), podemos considerá-la constante em face da rapidez das perturbações que tendem a desviar o avião de sua rota (como rajadas de vento transversais ou movimento de passageiros no interior do avião).

3.2 Funções de Transferência

As funções de transferência definem-se apenas para SLITs como sendo a relação entre as Transformadas de Laplace dos sinais de saída e de entrada do sistema, considerando-se condições iniciais nulas (quiescentes).



Seja o S.L.I.T. descrito pela seguinte equação diferencial:

$$a_0 \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \cdot \frac{dy}{dt} + a_n \cdot y = b_0 \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \cdot \frac{dx}{dt} + b_m \cdot x$$

Considerando as condições iniciais como sendo nulas e tomando a Transformada de Laplace de ambos os membros, resulta:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot s + b_m}{a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n}$$

Claramente, a **Função de Transferência** (F.T.) é uma descrição do sistema **equivalente** àquela expressa por meio da **equação diferencial** no sentido de que a primeira e a segunda estão relacionadas de maneira **biunívoca**. Fica claro também que **sistemas físicos diferentes** podem ter a **mesma F.T.**

As raízes da **equação característica**

$$a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n = 0$$

são os **polos** de $G(s)$.

As raízes da equação

$$b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot s + b_m = 0$$

são os **zeros** de $G(s)$.

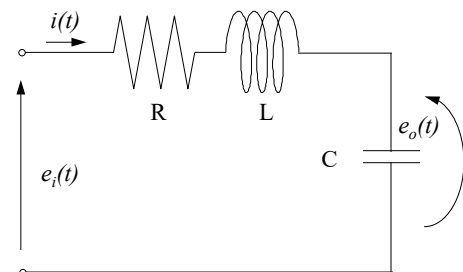
3.3 Exemplos

1. Sistema Elétrico

Entrada: $e_i(t)$

Saída: $e_o(t)$

Hipóteses: elementos ideais
frequência suficientemente baixa, para valer a lei de Kirchhoff



Lei de Kirchhoff, considerando condição inicial (tensão) nula no capacitor:

$$e_i(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt$$

$$e_o(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt$$

Transformando segundo Laplace, considerando adicionalmente condição inicial (corrente) nula no indutor:

$$E_i(s) = L \cdot s \cdot I(s) + R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s}$$

$$E_o(s) = \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s}$$

Daí:

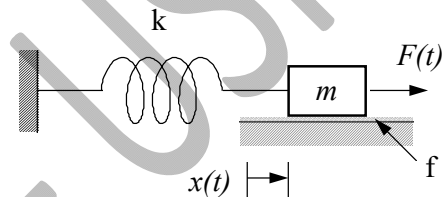
$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$$

2. Sistema Mecânico

Entrada: $F(t)$

Saída: $x(t)$

Hipóteses: atrito viscoso linear
mola linear com massa desprezível



Lei de Newton:

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(t) - k \cdot x(t) - f \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

Supondo condições iniciais nula e aplicando a Transformada de Laplace:

$$m \cdot s^2 \cdot X(s) = F(s) - k \cdot X(s) - f \cdot s \cdot X(s)$$

Daí:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + f \cdot s + k}$$

Nota: Observa-se, portanto, que a função de transferência tem a **mesma forma** daquela do sistema elétrico visto anteriormente.

Sistemas distintos que possuem mesma Função de Transferência – ou, equivalentemente, mesma equação diferencial – são ditos **análogos**.

Este fato permite estudar o comportamento de um sistema de uma determinada natureza com base em outro de natureza distinta. No exemplo acima, poderíamos utilizar o sistema elétrico – que é, em geral, mais simples de manipular em laboratório – para tirar conclusões a respeito do sistema mecânico. É precisamente esta a razão da utilidade (e do nome!) dos **computadores/simuladores analógicos**.

3. Sistema Eletromecânico - MCC controlado pela armadura

Entrada: $v_a(t)$

Saída: $\omega(t)$

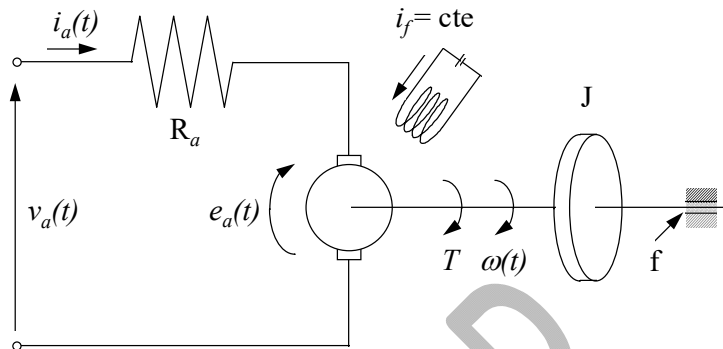
Hipóteses: L_a desprezível

MCC linear

eixo rígido

atrito viscoso linear

campo MCC constante



(L_a : indutância da armadura; MCC: motor de corrente contínua)

Lei de Kirchhoff:

$$v_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + e_a(t) \quad \Rightarrow \quad V_a(s) = R_a \cdot I_a(s) + E_a(s)$$

Equações do MCC controlado pela armadura:

$$e_a(t) = K_v \cdot \omega(t) \quad \Rightarrow \quad E_a(s) = K_v \cdot \Omega(s)$$

$$T(t) = K_T \cdot i_a(t) \quad \Rightarrow \quad T(s) = K_T \cdot I_a(s)$$

Lei de Newton supondo condições iniciais nulas:

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = T(t) - f \cdot \omega(t) \quad \Rightarrow \quad (J \cdot s + f) \cdot \Omega(s) = T(s)$$

Dessas quatro equações resulta:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T}{R_a J \cdot s + (R_a f + K_T K_v)}$$

Observação: Para o MCC controlado pelo campo:

Entrada: $e_f(t)$

Saída: $T(t)$

Lei de Kirchhoff:

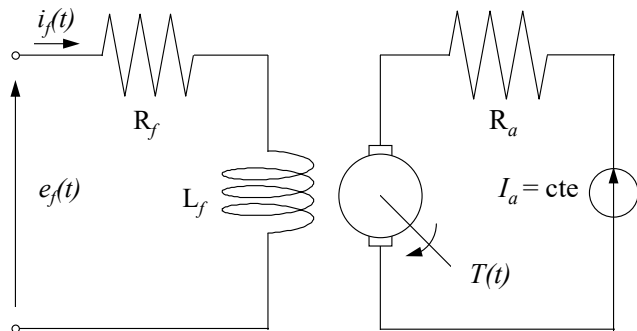
$$e_f(t) = R_f \cdot i_f(t) + L_f \cdot \frac{di_f(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow E_f(s) = (R_f + s \cdot L_f) \cdot I_f(s)$$

Motor controlado pelo campo (I_a constante):

$$T(t) = K \cdot i_f(t)$$

$$\Rightarrow T(s) = K \cdot I_f(s)$$



Portanto:

$$\frac{T(s)}{E_f(s)} = \frac{K}{R_f + s \cdot L_f}$$

4. Sistema Térmico

Entrada: $q_e(t)$

Saída: $\Delta T(t) = T_i(t) - T_e$

Hipóteses: temperatura externa constante e uniforme
 temperatura interna uniforme
 perda de calor apenas por condução (radiação e convecção desprezíveis)
 isolante térmico homogêneo e linear:

$$q_s(t) = K \cdot (T_i(t) - T_e) = K \cdot \Delta T(t)$$

onde K é a condutância térmica.

aquecimento do fluido regido por:

$$q_e(t) - q_s(t) = mc \cdot \frac{d[\Delta T(t)]}{dt}$$

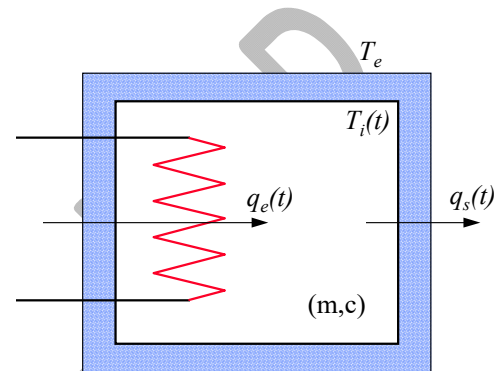
onde mc é a capacitância térmica.

Daí:

$$q_e(t) - K \cdot \Delta T(t) = mc \cdot \frac{d[\Delta T(t)]}{dt}$$

e portanto:

$$G(s) = \frac{\Delta T(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{mc \cdot s + K}$$



Note que este sistema é análogo ao MCC do exemplo 3.

Linearização: A linearização é um procedimento que se aplica a sistemas não lineares quando as variáveis do problema apresentam **pequenas flutuações** em torno de condições de operação nominais.

Mostra-se a seguir, por meio de um exemplo, como proceder num caso desses.

5. Sistema de Nível de Líquido

Condição estacionária: \bar{Q}, \bar{H}

Entrada: $q_e(t)$ [m³/s]

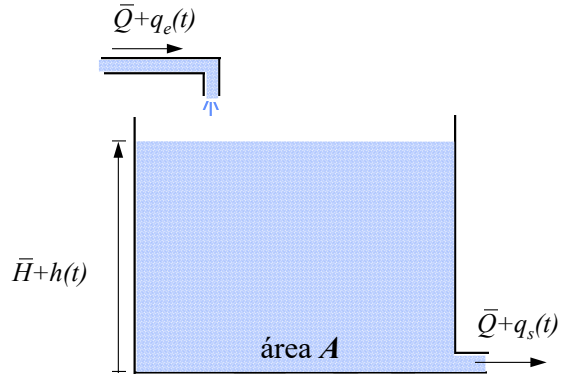
Saída: $h(t)$ [m]

Hipóteses: fluxo turbulento

fluido incompressível

dimensões do orifício desprezíveis (face a \bar{H})

superfície do fluido horizontal



Para fluxo turbulento, a vazão estacionária de saída é dada por:

$$\bar{Q} = k \cdot \sqrt{\bar{H}}$$

Suponhamos que a vazão de entrada \bar{Q} sofra uma pequena perturbação $q_e(t)$, passando a $\bar{Q} + q_e(t)$. Como consequência, também sofrerão pequenas perturbações a altura do líquido no tanque ($h(t)$) e a sua vazão de saída ($q_s(t)$), passando a ser, respectivamente, $\bar{H} + h(t)$ e $\bar{Q} + q_s(t)$.

Sendo h uma pequena perturbação ($h \ll \bar{H}$), a vazão de saída pode ser aproximada pelo termo linear da série de Taylor, isto é:

$$\bar{Q} + q_s = k \cdot \sqrt{\bar{H} + h} \quad \left(h \ll \bar{H} \right) \cong k \cdot \left(\sqrt{\bar{H}} + \frac{h}{2\sqrt{\bar{H}}} \right)$$

Daí:

$$q_s(t) \cong \frac{k}{2\sqrt{\bar{H}}} \cdot h(t)$$

Balço de volume de líquido no intervalo Δt :

$$\text{Volume que entra: } [\bar{Q} + q_e(t)] \cdot \Delta t$$

$$\text{Volume que sai: } [\bar{Q} + q_s(t)] \cdot \Delta t$$

Variação do volume no interior do reservatório (Lei de Conservação):

$$[\bar{H} + h(t + \Delta t)] \cdot A - [\bar{H} + h(t)] \cdot A = [\bar{Q} + q_e(t)] \cdot \Delta t - [\bar{Q} + q_s(t)] \cdot \Delta t$$

Daí:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} \cdot (q_e(t) - q_s(t)) = \frac{1}{A} \cdot \left(q_e(t) - \frac{k}{2\sqrt{\bar{H}}} \cdot h(t) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} + \frac{k}{2A\sqrt{\bar{H}}} \cdot h(t) = \frac{1}{A} \cdot q_e(t)$$

Considerando-se condições iniciais nulas:

$$\stackrel{C.I.Q.}{\Rightarrow} \left(s + \frac{k}{2A\sqrt{H}} \right) \cdot H(s) = \frac{1}{A} \cdot Q_e(s)$$

Obtendo-se:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{A \cdot \left(s + \frac{k}{2A\sqrt{H}} \right)}$$

Nota: este sistema é análogo ao sistema eletromecânico do exemplo 3 (MCC controlada pela armadura).

6. Transmissão por Engrenagens:

Sejam: T_m = torque no eixo motor;

T_l = torque no eixo da carga;

θ_m = ângulo de rotação do eixo motor;

θ_l = ângulo de rotação do eixo da carga;

ω_m = velocidade angular do eixo motor;

ω_l = velocidade angular do eixo da carga;

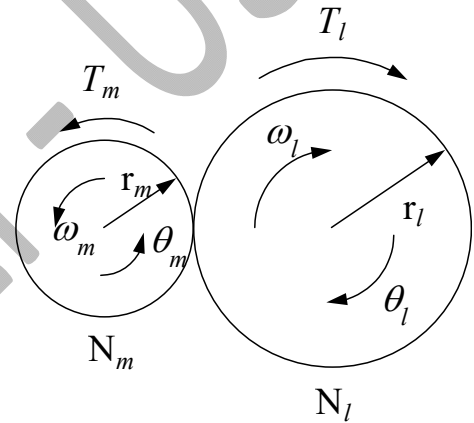
r_m = raio da engrenagem do eixo motor;

r_l = raio da engrenagem do eixo da carga;

N_m = número de dentes da engrenagem do eixo motor;

N_l = número de dentes da engrenagem do eixo da carga;

F = magnitude da força no dente (a mesma para as duas engrenagens)



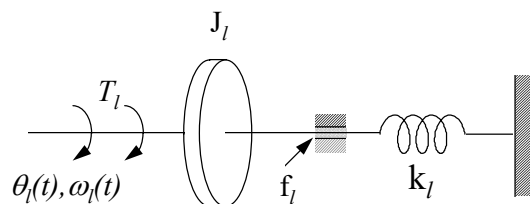
Equacionamento da força no dente (Lei de Conservação):

$$\frac{T_m}{T_l} = \frac{F \cdot r_m}{F \cdot r_l} = \frac{r_m}{r_l} = \frac{N_m}{N_l}$$

Compatibilidade de deslocamentos (sem escorregamento):

$$r_m \cdot \theta_m = r_l \cdot \theta_l \Rightarrow r_m \cdot \omega_m = r_l \cdot \omega_l \Rightarrow \frac{\theta_m}{\theta_l} = \frac{\omega_m}{\omega_l} = \frac{r_l}{r_m} = \frac{N_l}{N_m}$$

Suponhamos que, sobre o eixo da carga, se tenha:



Vejamos como o motor "enxerga" essa carga. Temos:

$$T_l = J_l \cdot \ddot{\theta}_l + f_l \cdot \dot{\theta}_l + k_l \cdot \theta_l$$

Utilizando as relações:

$$T_l = \frac{N_l}{N_m} \cdot T_m \quad \text{e} \quad \theta_l = \frac{N_m}{N_l} \cdot \theta_m ,$$

obtém-se:

$$\frac{N_l}{N_m} \cdot T_m = J_l \cdot \frac{N_m}{N_l} \cdot \ddot{\theta}_m + f_l \cdot \frac{N_m}{N_l} \cdot \dot{\theta}_m + k_l \cdot \frac{N_m}{N_l} \cdot \theta_m .$$

Daí:

$$T_m = \left[J_l \cdot \left(\frac{N_m}{N_l} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\theta}_m + \left[f_l \cdot \left(\frac{N_m}{N_l} \right)^2 \right] \cdot \dot{\theta}_m + \left[k_l \cdot \left(\frac{N_m}{N_l} \right)^2 \right] \cdot \theta_m ,$$

que pode ser escrita como:

$$T_m = J_i \cdot \ddot{\theta}_m + f_i \cdot \dot{\theta}_m + k_i \cdot \theta_m ,$$

onde:

$$J_i = \left[J_l \cdot \left(\frac{N_m}{N_l} \right)^2 \right] , \quad f_i = \left[f_l \cdot \left(\frac{N_m}{N_l} \right)^2 \right] , \quad k_i = \left[k_l \cdot \left(\frac{N_m}{N_l} \right)^2 \right] .$$

Assim, do ponto de vista do motor, tudo se passa como se sobre seu eixo houvesse uma carga J_i, f_i, k_i . Dizemos que esta é a carga **refletida** para o eixo do motor.

Note que, quando a transmissão é uma redução, isto é, $[N_m < N_l]$, então:

$$J_i < J_l , \quad f_i < f_l , \quad k_i < k_l$$

As potências na transmissão do lado do motor e do lado da carga são, respectivamente:

$$P_m = T_m \cdot \omega_m \quad \text{e} \quad P_l = T_l \cdot \omega_l$$

Portanto:

$$\frac{P_m}{P_l} = \frac{T_m}{T_l} \cdot \frac{\omega_m}{\omega_l} = \frac{N_m}{N_l} \cdot \frac{N_l}{N_m} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_m = P_l}$$

A transmissão por engrenagens é análoga aos transformadores ideais em circuitos elétricos.

3.4 Funções de Transferência de Elementos em Cascata

Considere a rede elétrica ao lado.

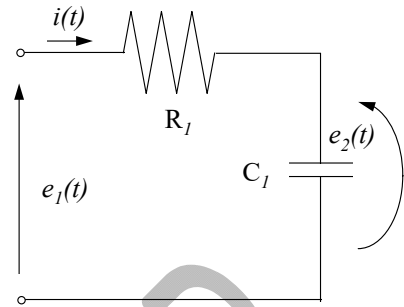
Entrada: $e_1(t)$

Saída: $e_2(t)$

Tem-se:

$$e_1(t) = R_1 \cdot i(t) + \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt$$

$$e_2(t) = \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt$$



Através da Transformada de Laplace chega-se a:

$$E_1(s) = R_1 \cdot I(s) + \frac{1}{C_1} \cdot \frac{I(s)}{s}$$

$$E_2(s) = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{I(s)}{s}$$

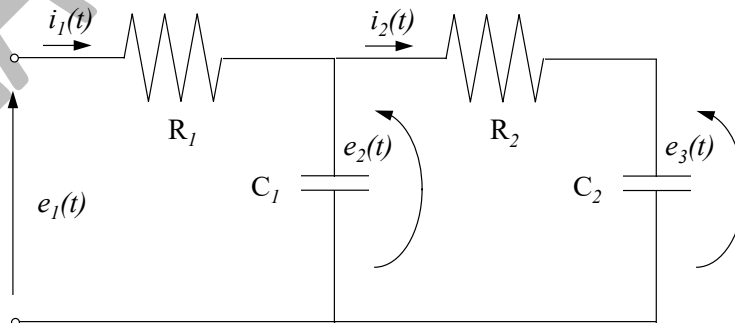
Eliminando $I(s)$:

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{\frac{1}{s \cdot C_1}}{R_1 + \frac{1}{s \cdot C_1}}$$

Portanto:

$$G(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{1}{R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1}$$

Consideremos agora a seguinte rede (entrada $e_1(t)$ e saída $e_3(t)$):



Conforme já visto:

$$\frac{E_3(s)}{E_2(s)} = \frac{1}{R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1}$$

Poderíamos pensar que:

$$G(s) = \frac{E_3(s)}{E_1(s)} = \frac{E_3(s)}{E_2(s)} \cdot \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{1}{R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1}$$

Mas isto não está correto !

Equacionando o 2º circuito, verifica-se que:

$$G(s) = \frac{E_3(s)}{E_1(s)} = \frac{1}{(R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1) \cdot (R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1) + R_1 \cdot C_2 \cdot s}$$

O erro está no fato de se ter considerado que o ramo (R_2, C_2) não carrega o ramo (R_1, C_1) .

Na verdade:

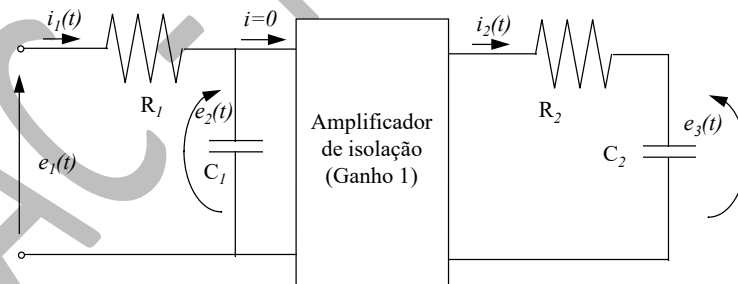
$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} \neq \frac{1}{R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1}$$

e sim:

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1}{(R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1) \cdot (R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1) + R_1 \cdot C_2 \cdot s}$$

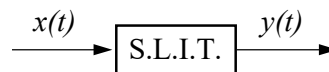
Exercício: verificar a validade desta expressão.

Conclusão: só é válido afirmar que a Função de Transferência de elementos em cascata é igual ao produto das Funções de Transferência individuais quando não há carregamento entre eles (isto é, os elementos que estão situados mais "à frente" não provocam alterações nas saídas dos anteriores). No caso do circuito elétrico visto acima, seria necessário introduzir um amplificador de isolamento de ganho unitário (impedância de entrada infinita e impedância de saída nula) entre os circuitos (R_1, C_1) e (R_2, C_2) :

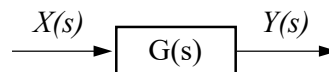


3.5 Diagramas de Blocos

Quando definimos Funções de Transferência, fizemos a seguinte figura:



Se, em lugar disso, representarmos o SLIT por meio de sua Função de Transferência – o que sabemos ser possível de forma biunívoca – teremos:



Esse é, pois, o diagrama de blocos do sistema em questão. Essa representação significa que os sinais de entrada e saída estão relacionados por:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

As setas representam o sentido em que se dá o fluxo dos sinais.

Uma das **vantagens** de se trabalhar com diagramas de blocos é que, para um sistema **complexo**, podemos simplesmente **interligar** os diagramas dos subsistemas que o constituem (desde que não haja carregamento).

Deve-se observar que um mesmo diagrama de blocos pode representar diferentes sistemas físicos (da mesma forma que ocorre com Funções de Transferência!).

Detector de Erro ou Comparador

$$E(s) = R(s) - C(s)$$



Somador

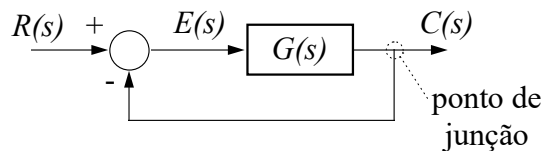
$$Z(s) = X(s) + Y(s)$$



Os sinais a serem adicionados ou subtraídos devem ter a **mesma natureza física** e as **mesmas unidades** para que a operação indicada faça sentido. Por exemplo: tensões elétricas em Volts, forças em kgf, etc.

Sistema em Malha Fechada

Na figura ao lado, o bloco $G(s)$ – que podemos encarar como representando a associação em cascata do controlador com o atuador, com a planta e com o sensor – tem $E(s)$ como entrada (que, como se vê, depende da saída $C(s)$), o que caracteriza um sistema com realimentação.



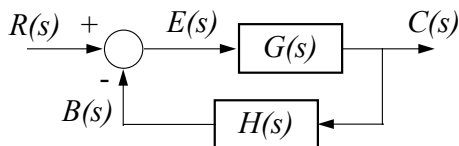
Notar que, no ponto de junção, a **saída** de um bloco pode ser conectada a **diversos** blocos ou pontos de soma do diagrama. No entanto, sempre a **entrada** de cada bloco é um **único** sinal.

$R(s)$: sinal de referência

$C(s)$: sinal de saída do sistema em malha fechada

$E(s)$: sinal de erro

No sistema em malha fechada representado acima, os sinais de referência e saída têm a **mesma natureza física**.



No entanto, muitas vezes isso pode requerer algum cuidado. Consideremos, por exemplo, um sistema de controle do tipo piloto automático de navio, cujo objetivo é controlar o rumo de navegação. Neste caso, o sinal de referência deve ser estabelecido pelo timoneiro que, acionando o timão, gera um sinal na forma de uma tensão elétrica ($R(s)$: Volts), enquanto que o sinal de saída do sistema é o ângulo de rumo da embarcação ($C(s)$: graus). É necessário, então, utilizar um bloco que **converta ângulo em tensão** elétrica para alimentar adequadamente o detector de erro. Essa conversão é representada pelo bloco $H(s)$ da figura acima.

Definem-se:

- Função de Transferência de Malha Aberta: $= \frac{B(s)}{E(s)} = G(s) \cdot H(s)$
- Função de Transferência do Ramo Direto: $= \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$
- Função de Transferência de Malha Fechada: $= \frac{C(s)}{R(s)}$

Vejam como a Função de Transferência de Malha Fechada se relaciona com $G(s)$ e $H(s)$. Do diagrama de blocos:

$$C(s) = G(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s) \cdot C(s)$$

Substituindo a última expressão na anterior, vem:

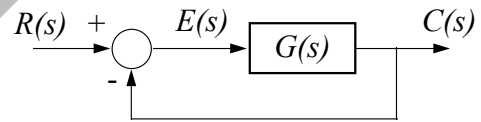
$$C(s) = G(s) \cdot R(s) - G(s) \cdot H(s) \cdot C(s)$$

e portanto:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

No caso de realimentação unitária ($H(s)=1$):

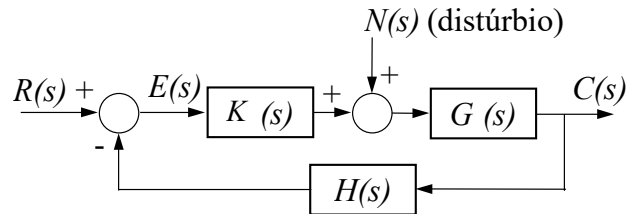
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$



Distúrbios em Sistemas em Malha Fechada

Distúrbios (ou perturbações externas) são sinais que agem no sistema e sobre os quais não se pode atuar diretamente.

No caso do piloto automático de navios, o bloco $K(s)$ poderia representar o controlador juntamente com os atuadores (máquina do leme e leme). O bloco $G(s)$ poderia representar o navio propriamente dito. O bloco $H(s)$ poderia representar o sensor de rumo. Nessas condições, o distúrbio $N(s)$ representaria os torques externos atuantes sobre a embarcação (provocados pela ação de ventos, correntes, ondas, etc.)



Como o sistema é linear, a propriedade de superposição permite concluir que a saída $C(s)$ pode ser escrita como a soma das contribuições $C_R(s)$ e $C_N(s)$, associadas respectivamente ao sinal de referência $R(s)$ e ao distúrbio $N(s)$:

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s)$$

Exercício: Mostre que (imediato!)

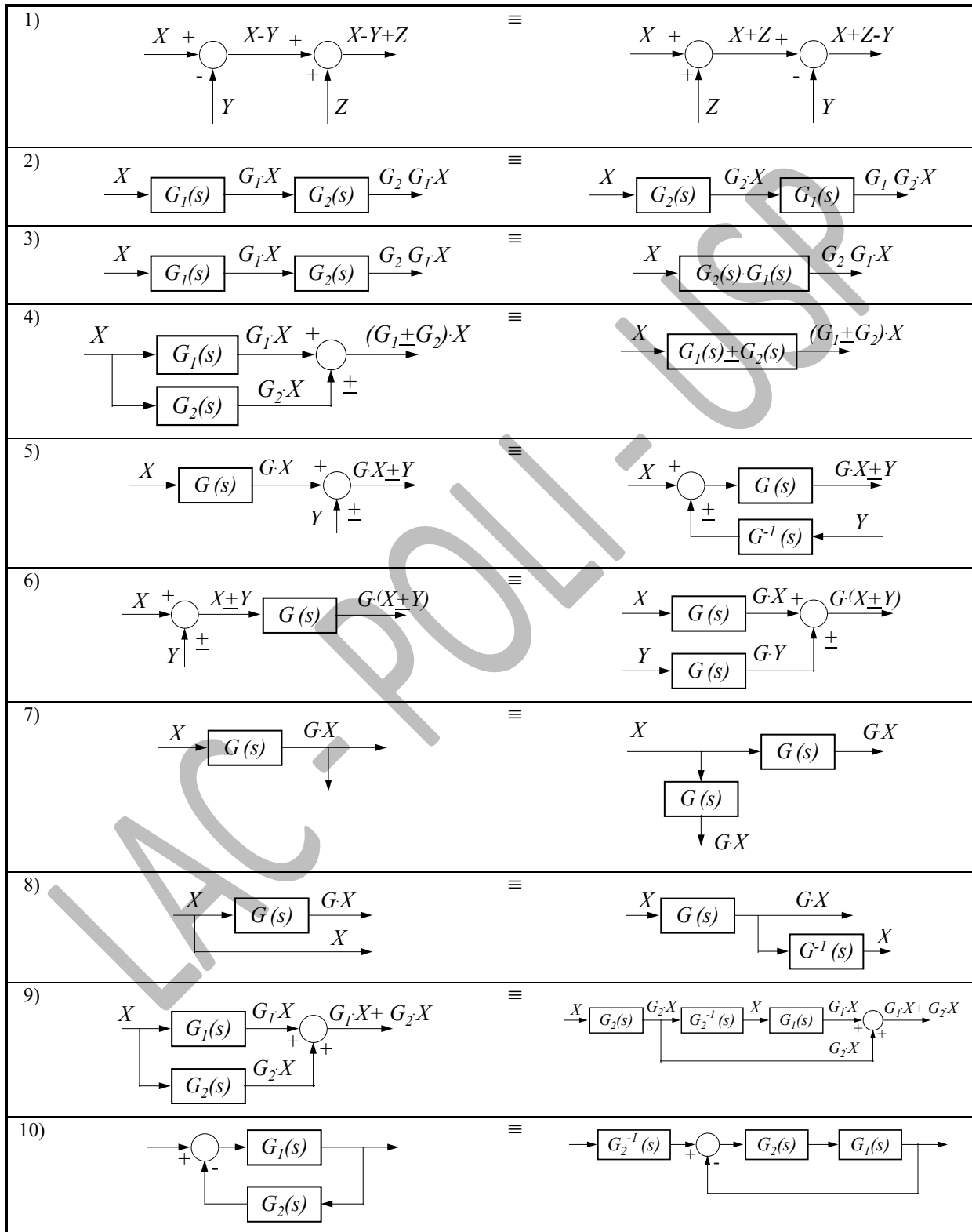
$$i) C_R(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} \cdot R(s)$$

$$\text{ii) } C_N(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} \cdot N(s).$$

LAC - POLI - USP

3.6 Redução de Diagramas de Blocos

Os diagramas de blocos podem ser redesenhados utilizando-se algumas regras simples, conforme discutido a seguir.





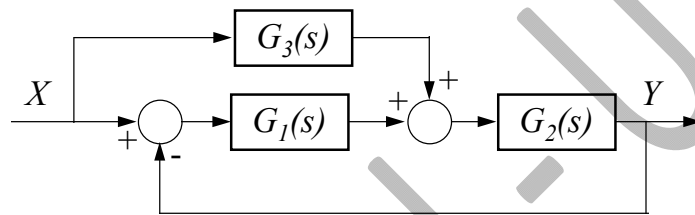
Observar que as regras 9 e 10 são particularmente importantes.

Usando essas regras, diagramas complexos podem ser reduzidos a outros equivalentes, de aspecto mais simples.

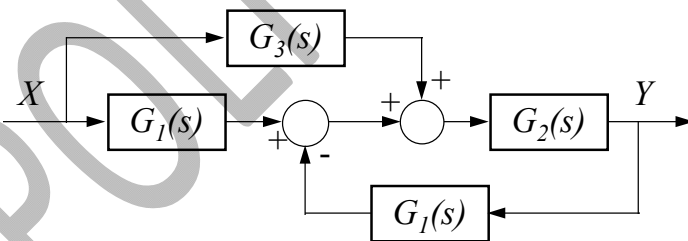
Dois regras básicas para a simplificação dos diagramas de blocos são as seguintes:

- o produto das Funções de Transferência no sentido direto, desde a entrada até a saída, não deve se alterar com as manipulações efetuadas;
- o produto das Funções de Transferência em cada malha fechada deve se manter constante.

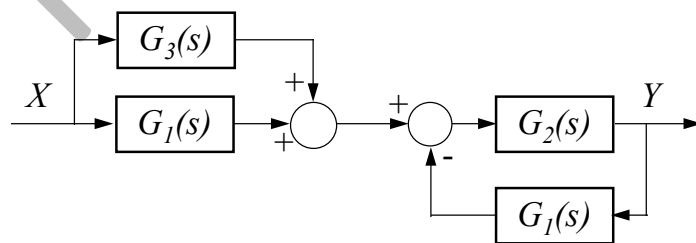
Exemplos: "Feedforward"



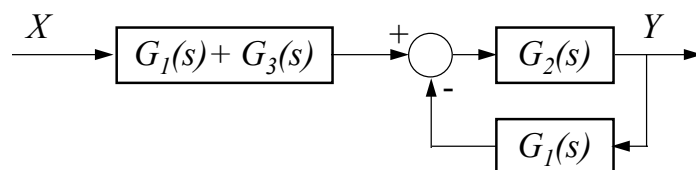
1º Passo: Deslocar G_1 para antes do comparador



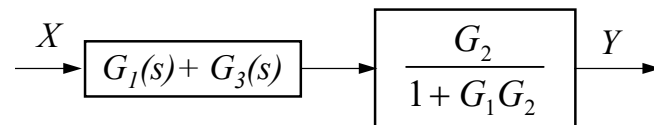
2º Passo: Intercambiar o comparador e o somador



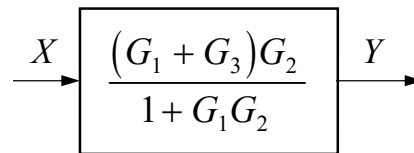
3º Passo: Juntar G_1 e G_3



4º Passo: Reduzir a malha fechada



5º Passo: Agrupar os blocos em cascata



Note que se

$$G_3(s) = 1/G_2(s),$$

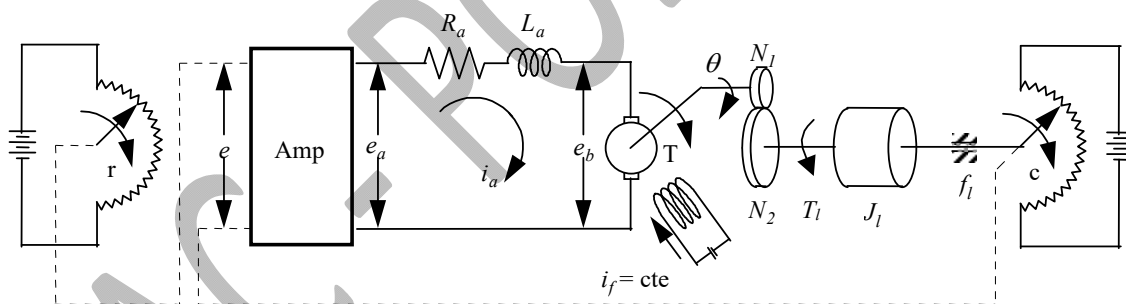
então

$$\frac{[G_1(s) + G_3(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\left[G_1(s) + \frac{1}{G_2(s)}\right]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = 1,$$

ou seja, $X(s) = Y(s)$.

Exercício: Calcular analiticamente a função de transferência $Y(s)/X(s)$ para verificar o resultado.

Exemplo: desenhar o diagrama de blocos e calcular a Função de Transferência de malha fechada do servomecanismo de posição da figura abaixo.



K_f = ganho do detector de erro potenciométrico (V/rad)

O servomecanismo utiliza um motor de corrente contínua controlado pela armadura que, através de um mecanismo de transmissão por engrenagens, aciona uma carga.

O sistema apresenta dois potenciômetros. O primeiro deles permite estabelecer um sinal de referência de posição r , que se pretende fazer a carga seguir. O segundo, montado diretamente sobre o eixo da carga, permite medir a posição angular c desta (sinal de saída).

O sinal de erro

$$e(t) = K_1 \cdot (r(t) - c(t))$$

é aplicado na entrada de um amplificador de potência de ganho K_p que alimenta a armadura do motor com uma tensão e_a . R_a e L_a representam, respectivamente, a resistência e a indutância do circuito da armadura (é usual desprezar-se L_a). O campo do motor é suposto constante, de maneira que a força contra-eletromotriz induzida na armadura e_b é proporcional à velocidade de rotação do eixo do motor:

$$e_b(t) = K_b \cdot \dot{\theta}(t)$$

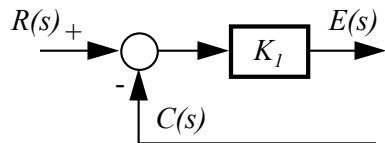
Além disso, o torque T desenvolvido no eixo do motor é admitido proporcional à corrente de armadura i_a :

$$T(t) = K_T \cdot i_a(t)$$

N_1 e N_2 representam os números de dentes das engrenagens acopladas aos eixos do motor e da carga, respectivamente.

A carga, cuja posição angular se deseja controlar, é constituída por uma inércia J_l e por uma parcela dissipativa de atrito viscoso, representada pelo coeficiente f_l .

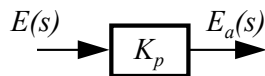
Detector de erro potenciométrico



$$E(s) = K_1 \cdot [R(s) - C(s)]$$

$$[K_1] = V/\text{rad}$$

Amplificador



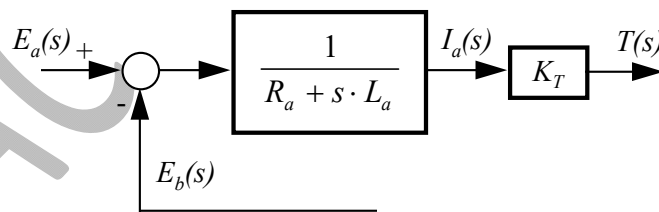
$$E_a(s) = K_p \cdot E(s)$$

Motor CC

$$e_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \dot{i}_a(t) + e_b(t) \Rightarrow E_a(s) = (R_a + s \cdot L_a) \cdot I_a(s) + E_b(s)$$

$$e_b(t) = K_b \cdot \dot{\theta}(t) \Rightarrow E_b(s) = K_b \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$T(t) = K_T \cdot i_a(t) \Rightarrow T(s) = K_T \cdot I_a(s)$$

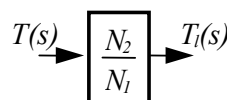
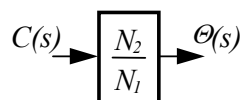


Trata-se de uma realimentação, pois $E_b(s)$ depende de um sinal $\Theta(s)$ que aparecerá mais adiante!

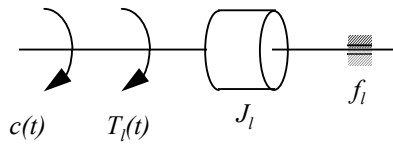
Transmissão

$$\Theta(s) = \frac{N_2}{N_1} \cdot C(s)$$

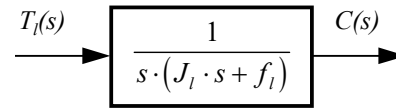
$$T_l(s) = \frac{N_2}{N_1} \cdot T(s)$$



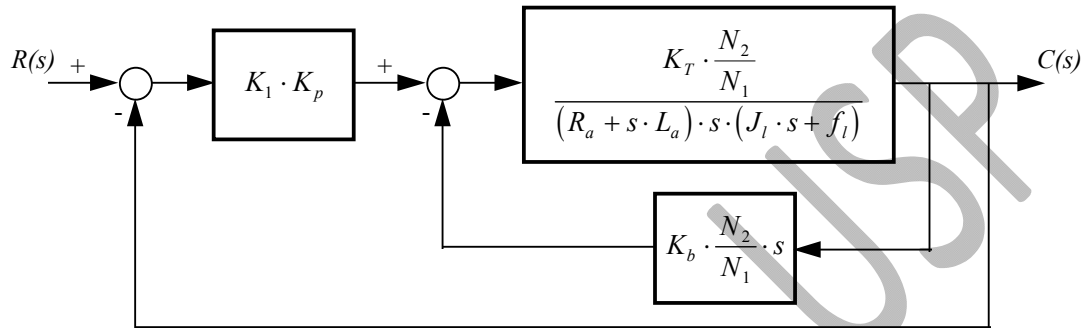
Carga Mecânica



$$T_l(t) = J_l \cdot \ddot{c}(t) + f_l \cdot \dot{c}(t) \Rightarrow T_l(s) = (J_l \cdot s^2 + f_l \cdot s) \cdot C(s)$$



Juntando todos esses blocos num mesmo diagrama, temos:

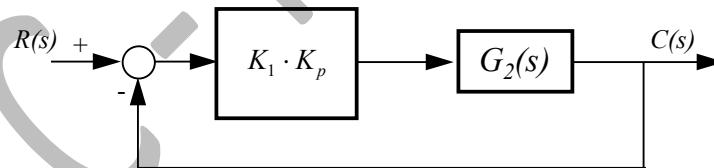


Definindo:

$$G_1(s) = \frac{K_T \cdot \frac{N_2}{N_1}}{(R_a + s \cdot L_a) \cdot s \cdot (J_l \cdot s + f_l)}$$

$$H(s) = K_b \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot s$$

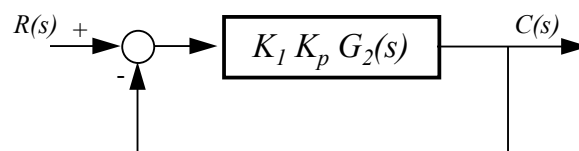
a malha de realimentação interna pode ser reduzida a um bloco equivalente $G_2(s)$:



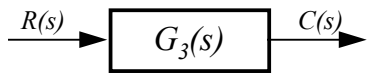
onde:

$$G_2(s) = \frac{K_T \cdot \frac{N_2}{N_1}}{s \cdot \left[L_a \cdot J_l \cdot s^2 + (L_a \cdot f_l + R_a \cdot J_l) \cdot s + R_a \cdot f_l + K_T \cdot K_b \cdot \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \right]}$$

Podemos, agora, agrupar os dois blocos do ramo direto em um único, obtendo:



Por fim, este diagrama pode ser reduzido a um único bloco:



onde:
$$G_3(s) = \frac{K_1 K_p G_2(s)}{1 + K_1 K_p G_2(s)}$$

LAC - POLI - USP