4. Um Estudo de Caso de Realimentação

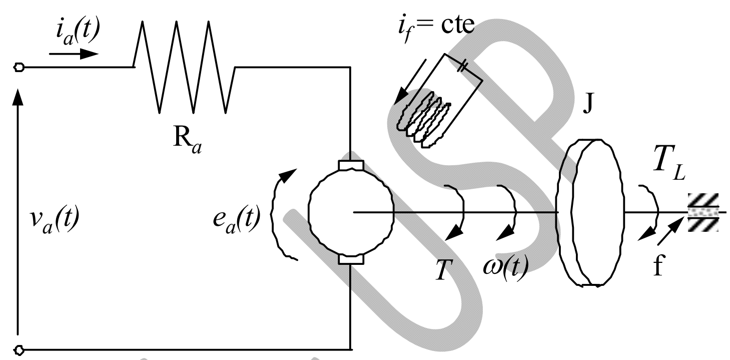
4.1 Introdução

O objetivo desta seção é mostrar algumas conseqüências importantes da **realimentação**, a saber:

- a redução da sensibilidade a variações na planta;
- a rejeição de perturbações;
- a melhora da resposta transitória.

É oportuno mencionar que estes **não** são os únicos efeitos da realimentação. Há outros igualmente importantes que não serão considerados nesta seção – um exemplo é a estabilização de sistemas instáveis.

Para isso, será utilizado um exemplo simples de um sistema de controle de velocidade, em que os sinais de entrada são "simples" (degraus) e o controlador é igualmente "simples" (controlador proporcional). Considere-se então a M.C.C. controlada pela armadura modelada anteriormente (veja Seção 3.3 da Apostila, Exemplo 3).



Desprezando o atrito viscoso (f=0) e levando em conta a existência de um torque de carga $T_L(t)$, que pode ser encarado como uma perturbação sobre o sistema, tem-se:

$$J\dot{\omega} + \frac{K_T K_b}{R_a}\omega = \frac{K_T}{R_a}v_a + T_L \,,$$

onde K_T e K_b são as constantes de torque e de força contra eletromotriz induzida, respectivamente.

Definindo

$$\tau = \frac{JR_a}{K_T K_b} \qquad K_0 = \frac{1}{K_b} \qquad K_1 = \frac{R_a}{K_T}\,,$$

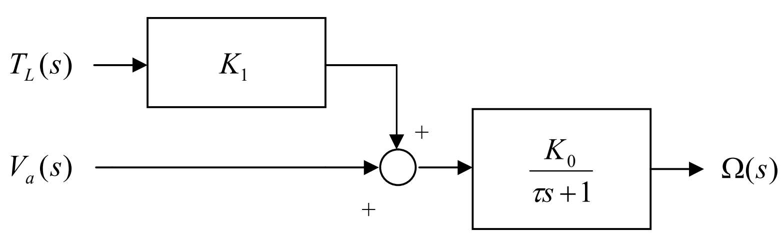
a equação acima pode ser reescrita como

$$\tau\dot{\omega} + \omega = K_0\left(v_a + K_1 T_L\right).$$

Transformando segundo Laplace, vem:

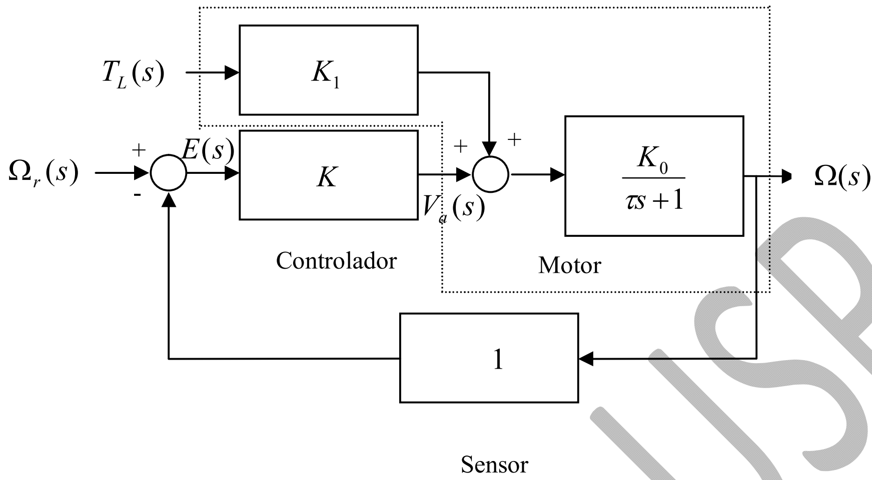
$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1}\left[V_a(s) + K_1 T_L(s)\right],$$

que, na forma de diagrama de blocos, pode ser representada por:



Note que tudo se passa como se o torque de carga fosse uma perturbação sobre a tensão de armadura do motor.

Considere-se um tacômetro de ganho unitário (isto é, que forneça 1 V. de tensão de saída para uma velocidade de rotação de 1 rad/s) sendo utilizado como sensor de velocidade angular. Com isso, podemos construir um sistema de controle de velocidade em malha fechada:



O controlador acima talvez seja o mais simples dentre todos, sendo chamado de **proporcional**, pois a variável de controle ($V_a(s)$) é proporcional ao erro ($E(s)$). Fisicamente ele pode ser representado por um amplificador de ganho K.

O objetivo do sistema de controle é fazer com que a velocidade do motor ($\Omega(s)$) acompanhe a velocidade de referência ($\Omega_r(s)$). Ou, em outras palavras, fazer com que o erro seja ou nulo ou suficientemente pequeno. Na realidade, na análise a seguir será considerado apenas o caso simples em que os sinais aplicados são degraus e será avaliada apenas a resposta do sistema em regime estacionário (exceto na Seção 4.5).

A seguir, o sistema em **malha fechada** é comparado com o sistema em **malha aberta** para observar alguns dos efeitos importantes da realimentação.

4.2 Modelo Exato e Sem Torque de Carga ($T_L = 0$)

- **Malha Aberta**

Neste caso,

$$V_a(s) = K\Omega_r(s)$$

e, portanto,

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s+1}K\Omega_r(s).$$

Supondo que a velocidade angular de referência seja um degrau de amplitude *A* e aplicando o Teorema do Valor Final, tem-se

$$\omega(\infty) = \lim_{t\to\infty}\omega(t) = \lim_{s\to 0} s\Omega(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K_0}{\tau s+1}K\frac{A}{s} = K_0KA$$

e, portanto, em regime estacionário o erro é dado por

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = (1-K_0K)A$$

Se escolhermos o ganho do controlador K como sendo

$$K = \frac{1}{K_0},$$

resulta

$$e(\infty) = 0,$$

o que significa que, em regime permanente, a velocidade do motor é igual à velocidade de referência.

- **Malha Fechada**

Neste caso, a função de transferência de malha fechada é

$$\frac{\Omega(s)}{\Omega_r(s)} = \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0}.$$

Se considerarmos novamente a velocidade de referência como sendo um degrau de amplitude dada A, o Teorema do Valor Final fornece:

$$\omega(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0} \frac{A}{s} = \frac{KK_0}{1 + KK_0} A.$$

Com isso, o erro estacionário resulta:

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = \frac{1}{1 + KK_0} A$$

e, portanto,

$$\left| \frac{e(\infty)}{A} \right| = \frac{1}{1 + KK_0}.$$

Se escolhermos o ganho do controlador K tal que

$$KK_0 >> 1,$$

então

$$\left| \frac{e(\infty)}{A} \right| << 1,$$

o que significa que, em regime estacionário, o erro de acompanhamento da velocidade de referência é muito menor que esta. Ou seja,

$$\omega(\infty) \cong A.$$

Neste ponto, parece não haver vantagem alguma do sistema em malha fechada com relação àquele em malha aberta. Pelo contrário, se antes o acompanhamento do sinal de referência era exato, agora passou a não sê-lo mais! Em outras palavras, se o modelo do sistema a controlar fosse conhecido **exatamente** (o que **nunca** ocorre na prática!) e se o sistema **não** estivesse sujeito a **perturbações externas** (o que também **nunca** ocorre na prática!), o controle poderia ser feito em malha aberta.

4.3 Incerteza em K_0 e Sem Torque de Carga ($T_L = 0$)

Suponhamos que o parâmetro K_0 não seja conhecido exatamente, mas se apresente afetado por uma incerteza ΔK_0, de maneira que seu valor real seja $K_0+\Delta K_0$.

- **Malha Aberta**

Neste caso, temos:

$$\Omega(s)=\frac{K_0+\Delta K_0}{\tau s+1}K\Omega_r(s)=\frac{K_0+\Delta K_0}{\tau s+1}\frac{1}{K_0}\Omega_r(s),$$

em que a última igualdade decorre da mesma escolha anterior de K, isto é,

$$K=\frac{1}{K_0}.$$

e, portanto, para o mesmo degrau de referência de amplitude A, em regime estacionário o Teorema do Valor Final fornece

$$\omega(\infty)=\left(1+\frac{\Delta K_0}{K_0}\right)A.$$

Logo, o erro estacionário é

$$e(\infty)=A-\omega(\infty)=\frac{-\Delta K_0}{K_0}A$$

e, portanto,

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right|=\left|\frac{\Delta K_0}{K_0}\right|,$$

o que significa que a incerteza em K_0 se reflete totalmente sobre o erro estacionário. Assim, por exemplo, um erro de 10% em K_0 produz um erro de 10% em $\omega(\infty)$.

- **Malha Fechada**

Neste caso, temos:

$$\frac{\Omega(s)}{\Omega_r(s)}=\frac{K(K_0+\Delta K_0)}{\tau s+1+K(K_0+\Delta K_0)}$$

e, portanto, em regime estacionário para o degrau de referência Ω_r de amplitude A,

$$\omega(\infty)=\left[\frac{K(K_0+\Delta K_0)}{1+K(K_0+\Delta K_0)}\right]A.$$

O erro estacionário é dado então por

$$e(\infty)=A-\omega(\infty)=\left[1-\frac{K(K_0+\Delta K_0)}{1+K(K_0+\Delta K_0)}\right]A=\frac{1}{1+K(K_0+\Delta K_0)}A.$$

Portanto,

$$\frac{e(\infty)}{A} = \frac{1}{1 + K(K_0 + \Delta K_0)} = \frac{1}{1 + KK_0\left(1 + \dfrac{\Delta K_0}{K_0}\right)}$$

Suponhamos que

$$\left|\frac{\Delta K_0}{K_0}\right| < 1,$$

o que é uma hipótese bastante razoável, pois significa que a incerteza em K_0 é inferior a 100%.

Resulta então que, se escolhermos o ganho do controlador K suficientemente grande, isto é, se ele for tal que

$$KK_0 >> 1,$$

então

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right| << 1.$$

Assim, por exemplo, se KK_0=100>>1 e $|\Delta K_0/K_0|$=0,1 (ou seja, 10%), então $|e(\infty)/A| \le 0{,}011$ (ou seja, 1,1%). Note que, de acordo, com a seção 4.2, em que K_0 é admitido conhecido exatamente, o erro estacionário para KK_0=100 é de $|e(\infty)/A|$=0,0099 (ou seja, 0,99%). Em resumo, o efeito que a incerteza em K_0 tem sobre a velocidade estacionária apresenta-se bastante reduzido quando comparado com aquele que existe em malha aberta.

- **Conclusão**

Se o ganho do controlador é suficientemente **alto**, a variação da velocidade estacionária decorrente de variações em K_0 é **pequena**. Em outras palavras, o erro estacionário na variável controlada em **malha fechada** é significativamente **menos sensível** a variações em K_0 do que em **malha aberta**. Por esta razão, não é necessário o conhecimento preciso dos valores dos parâmetros do sistema para se obter boa precisão no controle. Esta é uma das razões históricas do uso da realimentação que permanece válida até os dias atuais.

É oportuno observar que uma análise idêntica poderia ser feita considerando-se uma incerteza presente em K. Em razão da "simetria" entre K e K_0 existente nas expressões, é óbvio que se chegaria às mesmas conclusões, isto é, o efeito da incerteza em K sobre a saída pode ser reduzido fazendo-se o ganho K K_0 suficientemente grande. A importância prática desta observação é que o amplificador não necessita ser de ganho muito bem conhecido - basta que ele seja alto o suficiente. De maneira mais geral, isso significa que se pode obter um desempenho do sistema em malha fechada de alta qualidade mesmo utilizando componentes de baixa qualidade.

4.4 Perturbação na Carga (Sem Incerteza em K_0)

Até aqui **não** consideramos a presença do torque de carga T_L em nossa análise. Vejamos agora qual é seu efeito sobre a velocidade estacionária.

- **Malha Aberta**

Neste caso,

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1}\left[K\Omega_r(s) + K_1 T_L(s)\right].$$

Considerando o mesmo ganho escolhido em malha aberta no 1o. caso, isto é,

$$K = \frac{1}{K_0},$$

e considerando degraus em Ω_r e T_L de amplitudes A e T, respectivamente, ou seja,

$$\Omega_r(s) = A/s$$

$$T_L(s) = T/s,$$

resulta em regime estacionário:

$$\omega(\infty) = A + K_0 K_1 T.$$

Portanto, o erro estacionário é dado por

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = -K_0 K_1 T \quad ,$$

de onde resulta que

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right| = \left|\frac{K_0 K_1 T}{A}\right|,$$

sendo, pois, proporcional ao torque da carga T. É importante notar que K_0 e K_1 são **fixos** para um dado motor e, por isso, o projetista **não** tem meios de reduzir o erro estacionário.

- **Malha Fechada**

Neste caso,

$$\Omega(s) = \frac{\frac{KK_0}{\tau s + 1}}{1 + \frac{KK_0}{\tau s + 1}}\Omega_r(s) + \frac{\frac{K_0}{\tau s + 1}}{1 + \frac{KK_0}{\tau s + 1}}K_1 T_L(s),$$

ou seja,

$$\Omega(s) = \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0}\Omega_r(s) + \frac{K_0 K_1}{\tau s + 1 + KK_0}T_L(s).$$

Considerando os mesmos degraus em Ω_r e T_L:

$$\Omega_r(s) = A/s$$

$$T_L(s) = T/s,$$

em regime estacionário tem-se

$$\omega(\infty) = \frac{KK_0}{1 + KK_0}A + \frac{K_0 K_1}{1 + KK_0}T$$

e, portanto, o erro estacionário é dado por

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = \frac{1}{1+KK_0}A - \frac{K_0K_1}{1+KK_0}T\ .$$

Daí resulta que

$$\frac{e(\infty)}{A} = \frac{1}{1+KK_0}\left(1 - \frac{K_0K_1T}{A}\right)$$

e, portanto,

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right| \le \frac{1}{1+KK_0}\left(1 + \left|\frac{K_0K_1T}{A}\right|\right)$$

Sendo assim, se o ganho K do controlador for escolhido suficientemente grande de maneira que

$$KK_0 >> 1,$$

então, pode-se escrever aproximadamente:

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right| \le \frac{1}{KK_0}\left(1 + \left|\frac{K_0K_1T}{A}\right|\right).$$

Note que o termo

$$\left|\frac{K_0K_1T}{A}\right|$$

representa o erro estacionário em malha aberta e, portanto, o erro estacionário em malha fechada poderá ser feito pequeno se o ganho K do controlador for tomado suficientemente grande.

- **<u>Conclusão</u>**

Em **malha fechada** o erro estacionário é **menos sensível** a perturbações externas do que em **malha aberta**, desde que o ganho do controlador seja suficientemente **grande**.

4.5 Resposta Transitória

- **Malha Aberta**

Neste caso, como vimos,

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s+1}\left[K\Omega_r(s) + K_1T_L(s)\right].$$

Assim, a dinâmica de malha aberta é de 1a. ordem com constante de tempo

$$\tau = \frac{JR_a}{K_TK_b},$$

que não depende do ganho K do controlador e, portanto, **não** pode ser alterada por diferentes escolhas do valor deste ganho. Em outras palavras, é **impossível**, por exemplo, conseguir-se uma resposta mais rápida do sistema através do ajuste do ganho do controlador.

- **Malha Fechada**

Em malha fechada,

$$\Omega(s) = \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0}\Omega_r(s) + \frac{K_0K_1}{\tau s + 1 + KK_0}T_L(s)\,.$$

Neste caso, a dinâmica também é de 1a. ordem. No entanto, a constante de tempo é

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + KK_0}$$

e, portanto, a resposta do sistema se torna mais rápida à medida que o ganho K do controlador aumenta.

Obs: Em geral, é preciso ter cuidado com o uso de valores elevados de K, pois estes podem provocar a instabilidade do sistema em malha fechada.[1]

4.6 RESUMO

A Tabela a seguir resume o estudo dos efeitos da realimentação sobre o sistema de controle de velocidade analisado.

CASO	REGIME	MALHA ABERTA	MALHA FECHADA
Modelo Exato	Estacionário	$e(\infty) = 0$	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \frac{1}{1 + KK_0}$
Incerteza em K_0	Estacionário	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \left\lvert\frac{\Delta K_0}{K_0}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \frac{1}{\left\lvert 1 + KK_0\left(1 + \frac{\Delta K_0}{K_0}\right)\right\rvert}$
Perturbação de Torque	Estacionário	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \left\lvert\frac{K_0K_1T}{A}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert \le \frac{1}{KK_0}\left(1 + \left\lvert\frac{K_0K_1T}{A}\right\rvert\right)$
	Transitório	τ	$\tau' = \frac{\tau}{1 + KK_0}$

Por fim, para concluir esta seção, é oportuno mencionar que as propriedades discutidas acima para um exemplo particular podem ser generalizadas para sistemas com dinâmicas mais complexas e sinais de perturbação e de referência também mais gerais que o degrau.

[1] Esta observação só ficará evidente quando, mais adiante neste curso, estudarmos estabilidade.