5. Respostas Temporais

5.1 Introdução

Uma das **vantagens** da **realimentação** é permitir ajustar os desempenhos **transitório** e **estacionário** de sistemas de controle.

Para **projetar** e **analisar** sistemas de controle, é necessário **definir** e **medir** o **desempenho** dos sistemas. Então, com base no desempenho desejado, os parâmetros do controlador podem ser ajustados para se atingir esse objetivo.

É necessário estabelecer uma **base** que permita ao analista/projetista **comparar** os desempenhos de diferentes opções de sistemas de controle. Isto pode ser feito escolhendo-se sinais de **entrada particulares** e **comparando-se os desempenhos** obtidos em cada caso.

Um bom número de **critérios de projeto** baseia-se nesses **sinais particulares** ou na resposta do sistema a **condições iniciais**.

As **especificações** de projeto de sistemas de controle normalmente incluem vários **índices de resposta temporal** para um sinal de **entrada determinado**, além de uma **precisão** especificada para a resposta **estacionária**.

Muitas vezes, na prática, o sinal de **referência** de um sistema de controle **não é conhecido a priori** (por exemplo, o controle de trajetória de robôs móveis). Pode ocorrer, inclusive, que o sinal de referência seja de natureza aleatória. Há, naturalmente, exceções, como o caso de máquinas de corte, foguetes lançadores de satélites, etc.

Os sinais de referência mais utilizados são o degrau, a rampa, a parábola (menos comum), o impulso e a senóide.

O tipo de sinal mais apropriado para uma dada aplicação depende das características desta. Assim, por exemplo, quando se altera o valor desejado para a **temperatura** ambiente controlada através de um sistema do tipo ar condicionado + calefação, o degrau é um sinal apropriado. O mesmo ocorre, por exemplo, no caso de um **piloto automático** de navio quando se **altera bruscamente** o **rumo** desejado.

Por outro lado, imagine-se um sistema de posicionamento para uma **antena rastreadora** de satélites. Neste caso, uma boa escolha para o sinal de referência é a **rampa**.

Por fim, considere-se um sistema de controle de uma **suspensão ativa** de automóvel. Se o objetivo for estudar o comportamento do sistema quando o carro passar, em alta velocidade, por um buraco, o **impulso** será uma escolha adequada para o sinal de **distúrbio**.

5.2 Resposta a Impulso

Para um sistema linear invariante no tempo (S.L.I.T.) com **condições iniciais nulas**:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

Supondo que a entrada seja um impulso unitário:

$$x(t) = \delta(t) \qquad \Rightarrow X(s) = 1$$

Portanto:

$$Y(s) = G(s)$$

Assim, a resposta impulsiva *y(t)* do sistema é dada por:

$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]$$

Em vista disso, a resposta impulsiva e a Função de Transferência são formas **equivalentes** de representar o comportamento dinâmico em termos de entrada/saída.

Note que a relação:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

permite obter a resposta do sistema a uma entrada qualquer através do seguinte caminho:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \xrightarrow{G(s)} Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

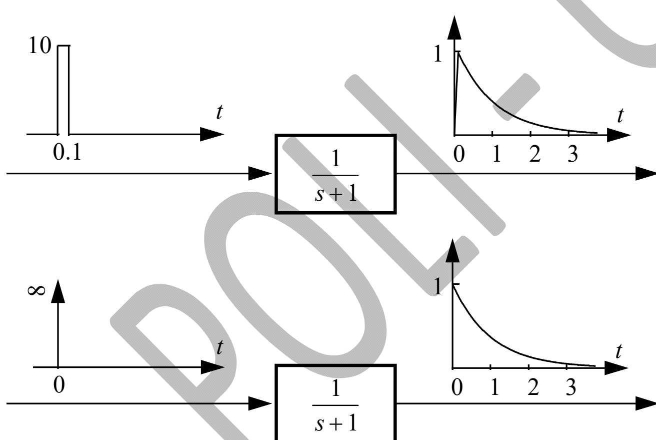
Por outro lado, uma das propriedades vistas de Transformada de Laplace (referente à convolução de funções) permite escrever:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\cdot x(\tau)\cdot d\tau = \int_0^t g(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau \qquad \text{(integral de convolução)}$$

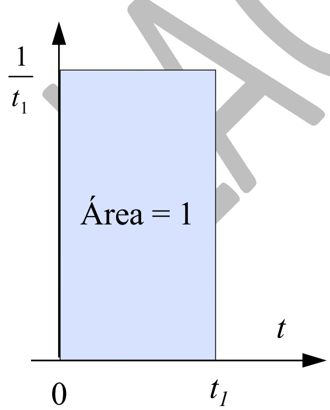
e, portanto, o conhecimento da resposta impulsiva permite obter a saída *y(t)* correspondente à função de entrada *x(t)*.

Na prática, uma entrada em forma de pulso, cuja duração é muito menor que as constantes de tempo significativas do sistema, pode ser considerada como impulsiva de intensidade igual à área sob o pulso.

Exemplo:



Note-se que esse resultado pode ser entendido através da integral de convolução. Para isso, considere um pulso de área unitária de duração t_1 (t_1<<T, onde T é a menor constante de tempo do sistema) e amplitude 1/ t_1:



$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1/t_1 & , \quad 0 \le t \le t_1 \\ 0 & , \quad t > t_1 \end{cases}$$

$$Y(s) = G(s)\cdot X(s) \Rightarrow y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\cdot x(\tau)\cdot d\tau$$

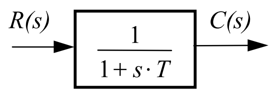
$$y(t) = \int_0^{t_1} g(t-\tau)\cdot \frac{1}{t_1}\cdot d\tau = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} g(t-\tau)\cdot d\tau \qquad (t \ge t_1)$$

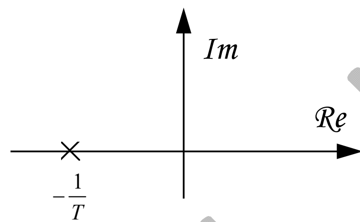
Como t_1 é suficientemente pequeno face às constantes de tempo do sistema, podemos considerar $g(\cdot)$ praticamente constante em qualquer intervalo de duração t_1 e, portanto:

$$y(t) \cong \frac{1}{t_1} \cdot \left[g(t) \cdot t_1 \right] = g(t)$$

5.3 Sistemas de 1ª Ordem

Seja um sistema de 1ª ordem com Função de Transferência:





e **condições iniciais nulas**: $$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+s\cdot T} = \frac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}}$$

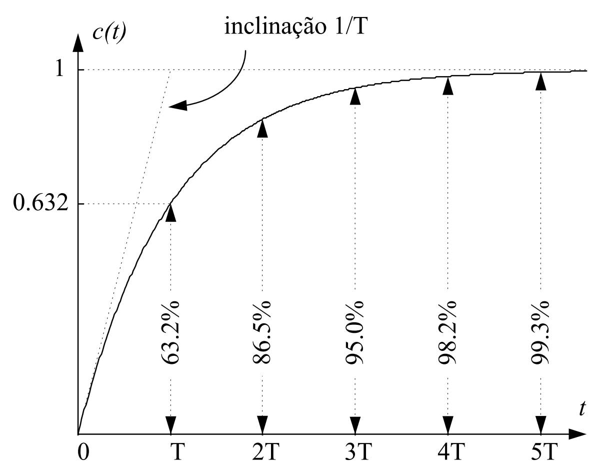
Resposta a degrau

$$r(t) = 1(t) \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{1+s\cdot T} \cdot \frac{1}{s}$$

Expandindo em frações parciais e tomando a transformada inversa:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{1+s\cdot T} \quad \Rightarrow \quad c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

- para $t = T \quad \Rightarrow \quad c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$
- para $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(0) = \frac{1}{T}$
- $\lim_{t \to \infty} c(t) = c(\infty) = 1$



No caso geral, em que o degrau tem amplitude A, como consequência da linearidade do sistema (condições iniciais nulas), tem-se:

$$c(t) = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (t \geq 0)$$

Portanto:

$$c(T) = A \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \cong 0.632\,A$$

$$\dot{c}(0) = \frac{A}{T}$$

$$c(\infty) = A$$

Podemos escrever *c(t)* como:

$$c(t) = c(\infty) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (t \geq 0)$$

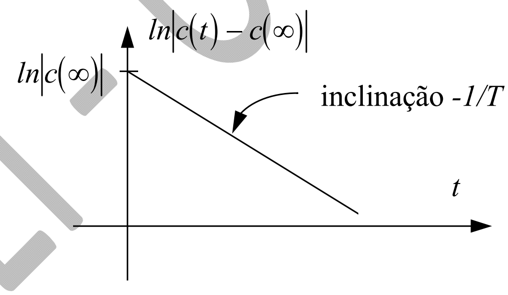
donde se obtem:

$$c(t) - c(\infty) = -c(\infty) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

Tomando o logaritmo do valor absoluto:

$$ln\left|c(t) - c(\infty)\right| = ln\left|c(\infty)\right| - \frac{t}{T} \quad (t \geq 0)$$

Portanto, o gráfico de $ln\left|c(t) - c(\infty)\right|$ em função de *t* é uma reta.



Sendo assim, quando conhecemos a saída de um S.L.I.T. com condições iniciais nulas, para sabermos se o mesmo é de 1ª ordem, basta traçarmos o gráfico da função $\left|c(t) - c(\infty)\right|$ em escala logarítmica e verificarmos se ele tem a forma de uma reta.

Resposta a Rampa

Para entrada rampa unitária:

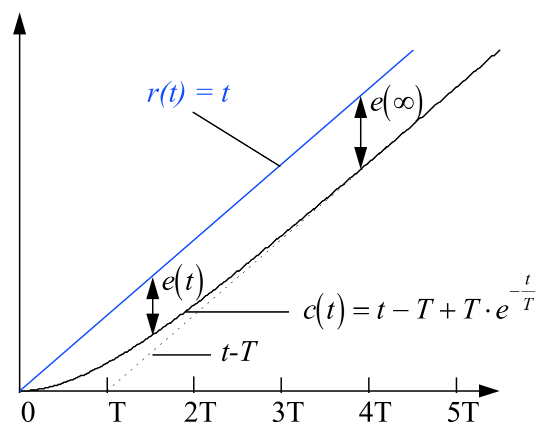
$$r(t) = t \cdot 1(t) \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

Portanto, após decompor em frações parciais:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}$$

Tomando a transformada inversa:

$$c(t) = t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$



Note que, para $t >> T$, podemos aproximar:

$$c(t) \cong t - T \quad (t >> T)$$

Note também, do diagrama de blocos, que:

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad \Leftrightarrow \quad e(t) = r(t) - c(t)$$

Portanto:

$$e(t) = t - \left[t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}}\right] = T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Para t suficientemente grande, $e^{-\frac{t}{T}} << 1$ e, portanto:

$$e(t) \cong T \quad (t >> T)$$

Em particular:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = e(\infty) = T$$

o que significa que há um **erro estacionário**.

Observando a figura e amparado pelas deduções acima, pode-se afirmar que:

i) quanto **menor** T, **mais rápido o transitório** a que está sujeita a saída *c(t)*;

ii) quanto **menor** T, **menor o erro estacionário** $e(\infty)$.

Resposta a impulso

A entrada é dada por:

$$r(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad R(s) = 1$$

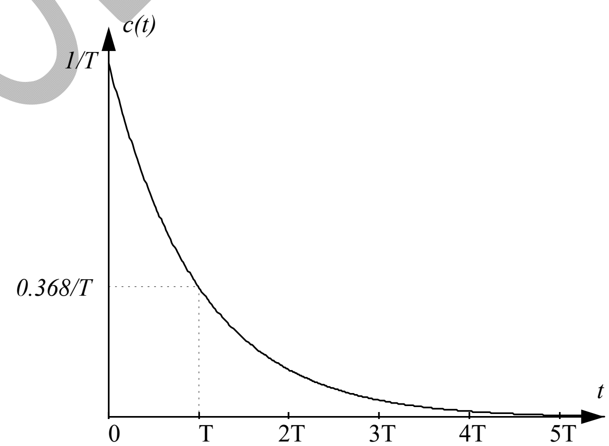
e, portanto, como já havíamos visto:

$$C(s) = \frac{1}{1 + s \cdot T} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

Logo:

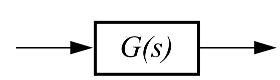
$$c(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

cujo gráfico pode ser visto ao lado.



Propriedade

Consideremos um S.L.I.T. com Função de Transferência *G(s)* e **condições iniciais nulas**. Quando a entrada é uma função *r(t)* dada, a saída *c(t)* é tal que:



$$C(s) = G(s) \cdot R(s)$$

Se tomarmos agora:

$$r_1(t) = \dot{r}(t)$$

como entrada e as condições iniciais forem nulas:

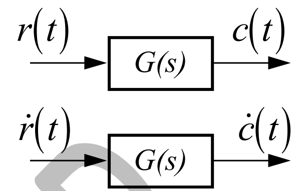
$$R_1(s) = s \cdot R(s)$$

e a saída $c_1(t)$ correspondente é tal que:

$$C_1(s) = G(s) \cdot R_1(s) = s \cdot G(s) \cdot R(s) = s \cdot C(s)$$

e, portanto:

$$c_1(t) = \dot{c}(t)$$



Assim, quando aplicamos na entrada do sistema a derivada de um sinal, a saída obtida corresponde à derivada da saída original.

O mesmo acontece com a integral. Seja:

$$r_2(t) = \int_0^t r(\tau) \cdot d\tau$$

que tem como Transformada de Laplace:

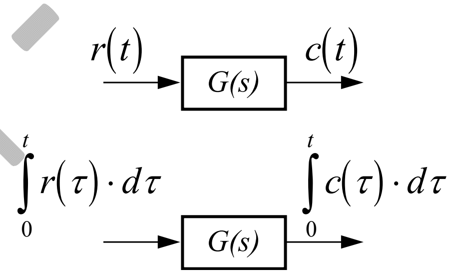
$$R_2(s) = \frac{R(s)}{s}$$

A saída $c_2(t)$ correspondente é tal que (condições iniciais nulas):

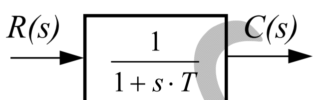
$$C_2(s) = G(s) \cdot R_2(s) = G(s) \cdot \frac{R(s)}{s} = \frac{C(s)}{s}$$

o que acarreta que:

$$c_2(t) = \int_0^t c(\tau) \cdot d\tau$$



Exemplo: consideremos o sistema de 1ª ordem visto e seja $r(t)$ a rampa unitária. Conforme vimos, neste caso:



$$c(t) = t - T + T \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

Como o degrau unitário é igual à derivada da rampa unitária, a resposta a degrau $c_1(t)$ do sistema é:

$$c_1(t) = \dot{c}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

Para obtermos a resposta impulsiva, basta considerarmos que o impulso unitário pode ser visto como a derivada do degrau unitário e, portanto, a resposta impulsiva do sistema $c_\delta(t)$ resulta de imediato como sendo:

$$c_\delta(t) = \dot{c}_1(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

A título de **verificação**, constata-se que esta função é igual a L^{-1} [$G(s)$], como já havíamos visto anteriormente.

Observação: poderíamos ter tomado o caminho inverso, isto é, partindo da resposta impulsiva e, através de integrações sucessivas, obtido as respostas a degrau e rampa.

5.4 Sistemas de 2ª ordem

Resposta a degrau

Consideremos o sistema de 2ª ordem genérico com Função de Transferência:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \qquad (\omega_n > 0)$$

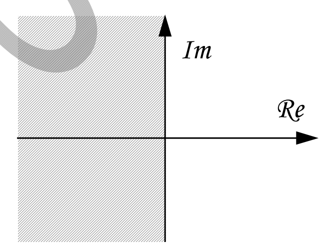
Os polos deste sistema são as raízes de:

$$s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0 .$$

Analisemos a localização dos polos em função dos parâmetros do sistema. Temos:

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n \cdot \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right).$$

Em todos os problemas de controle, o requisito **fundamental** a ser atendido é a estabilidade do sistema, o que se traduz pela necessidade de que os polos do sistema se situem no semi-plano esquerdo (S.P.E.).



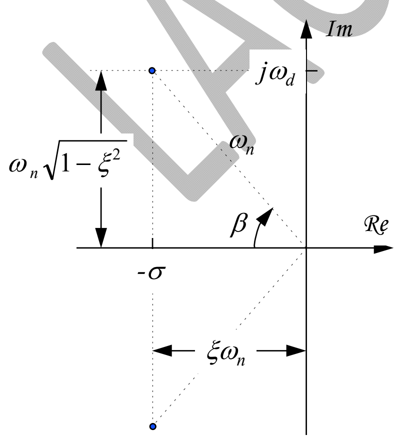
Tendo em vista este fato, há três casos a considerar:

- $0 < \xi < 1 \quad \Rightarrow \quad s_1, s_2$ são complexos conjugados (subamortecimento)
- $\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad s_1 = s_2$ são reais (amortecimento crítico)
- $\xi > 1 \quad \Rightarrow \quad s_1 \neq s_2$ são reais (superamortecimento ou sobreamortecimento)

Às demais possibilidades quanto aos valores de ξ corresponde sempre a existência de dois polos no semi-plano direito (S.P.D.) – quando $\xi < 0$ - ou dois polos sobre o eixo imaginário – quando $\xi = 0$. No primeiro caso o sistema é instável e, no segundo, sem amortecimento.

Estudemos, então, cada um dos três casos anteriores quando a entrada é um **degrau unitário**.

1º Caso: *0 < ξ < 1* - Subamortecimento



Neste caso, os polos do sistema são:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j \cdot \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \overset{\Delta}{=} -\sigma \pm j \cdot \omega_d$$

A figura ao lado mostra a representação desses polos no plano complexo.

Note que:

$$\xi = cos(\beta) \quad \text{e} \quad \sqrt{1-\xi^2} = sen(\beta)$$

Nomenclatura:

ω_n = frequência natural não amortecida
ω_d = frequência natural amortecida
ξ = coeficiente de amortecimento

Vamos ver em seguida as razões dessas designações.

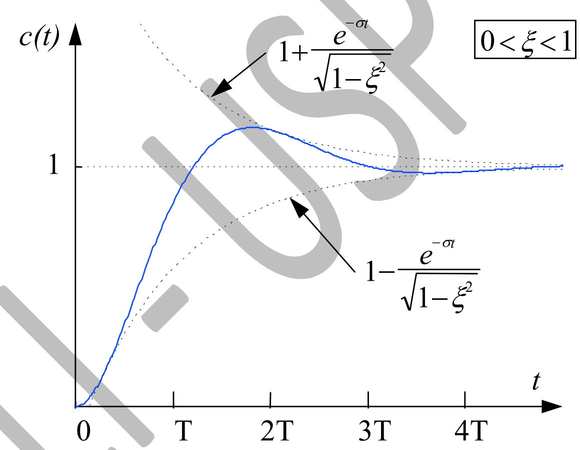
Aplicando um degrau unitário na entrada do sistema $\left(R(s)=\dfrac{1}{s}\right)$ e considerando condições iniciais nulas, a saída será:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s\cdot\left(s+\sigma+j\omega_d\right)\cdot\left(s+\sigma-j\omega_d\right)}$$

Expandindo em frações parciais e antitransformando cada parcela (ou consultando uma tabela), obtém-se:

$$\boxed{c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\sigma t}\cdot sen\left(\omega_d t+\beta\right)\quad\left(t\geq 0\right)}$$

O gráfico de *c(t)* tem o aspecto mostrado na figura ao lado.



Nota-se que:

i) a resposta *c(t)* é uma oscilação amortecida;

ii) a frequência de oscilação é ω_d (daí a designação frequência natural amortecida) e, portanto, depende tanto de ω_n quanto de ξ, sendo sempre $\omega_d < \omega_n$ e, à medida que ξ aumenta, ω_d diminui;

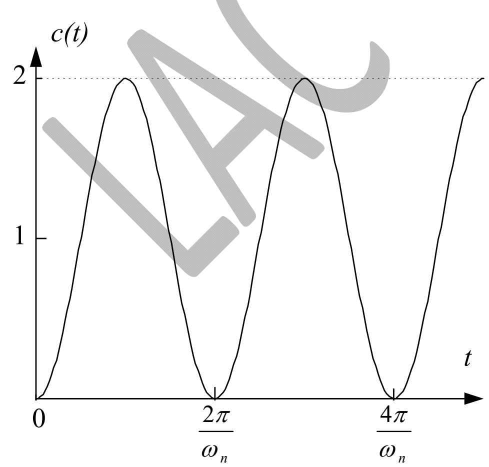
iii) a envoltória das oscilações é uma exponencial amortecida com constante de tempo $T = 1/\sigma$, que também depende de ω_n e ξ, e, à medida que ω_n ou ξ aumentam, σ aumenta e T diminui;

iv) o valor estacionário da resposta é $c(\infty)=1$ e, portanto, a **saída é igual à entrada**;

v) apenas como verificação, nota-se que:

$$c(0)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot sen(\beta)=0$$

Observação: no caso em que o coeficiente de amortecimento é nulo (ξ=0), pode-se mostrar que:

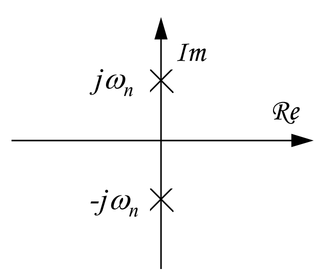


$$c(t)=1-cos\left(\omega_n t\right)\quad\left(t\geq 0\right)$$

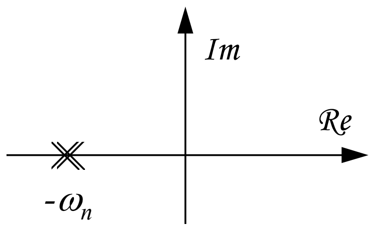
e a saída tem o aspecto indicado na figura ao lado. Portanto:

i) *c(t)* **não** é amortecida;

ii) a freqüência de oscilação é ω_n (daí a designação freqüência natural não amortecida);



<u>**2º Caso**: $\xi = 1$ - Amortecimento crítico</u>



Neste caso, o sistema tem dois polos reais, negativos e iguais:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n < 0,$$

pois

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}.$$

A figura ao lado mostra a representação desses polos no plano complexo.

Se a entrada é um degrau unitário $\left(R(s) = \frac{1}{s}\right)$, então:

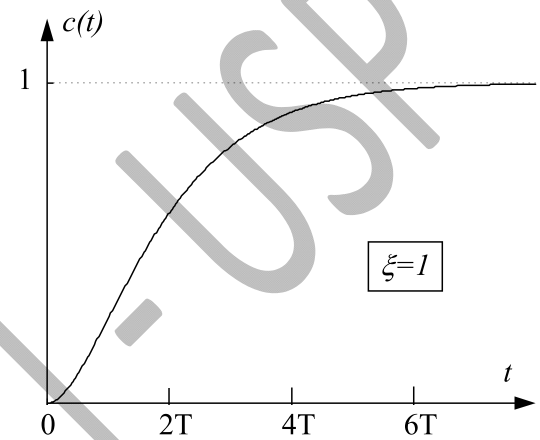
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s \cdot (s+\omega_n)^2}$$

Antitransformando:

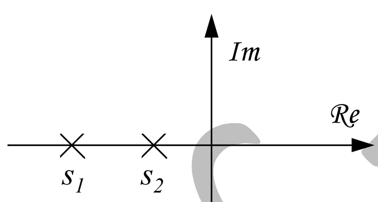
$$c(t) = 1 - (1 + \omega_n t) \cdot e^{-\omega_n t} \quad (t \geq 0)$$

O aspecto de *c(t)* é mostrado na figura ao lado.

Nota-se, portanto, que *c(t)* tende assintoticamente a 1, ou seja, a saída tende a tomar o valor da entrada para $t \to \infty$.



<u>**3º Caso**: $\xi > 1$ - Superamortecimento</u>



Neste caso, os polos do sistema são reais, negativos e distintos:

$$s_1 = \omega_n \cdot \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) < 0$$

$$s_2 = \omega_n \cdot \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) < 0$$

Fazendo $R(s) = \frac{1}{s}$, vem:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s \cdot (s - s_1) \cdot (s - s_2)},$$

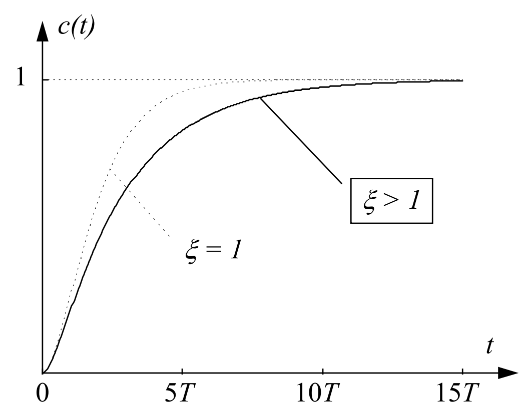
cuja antitransformada é:

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(\frac{e^{s_2 t}}{s_2} - \frac{e^{s_1 t}}{s_1}\right) \quad (t \geq 0)$$

Assim, a resposta é uma soma algébrica de duas exponenciais decrescentes.

Também neste caso:

$$c(\infty) = 1$$



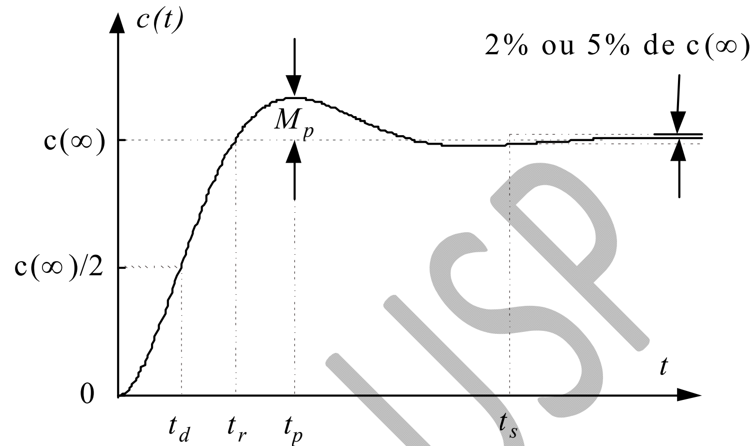
Especificações da Resposta Transitória

É grande o número de casos práticos em que as especificações de desempenho do sistema de controle são estabelecidas com base em grandezas relacionadas à sua **resposta temporal**. A resposta a **degrau** é, com frequência, usada como referência para essas especificações. Além de ser **simples de testar**, ela representa uma excitação bastante **severa** sobre o sistema, dado que a entrada **muda bruscamente** de nível no instante da aplicação do degrau. Sua importância reside tanto no estudo da resposta transitória como da resposta em regime estacionário.

As variáveis associadas à resposta temporal são definidas para a entrada degrau unitário no caso **oscilatório** por razões que serão discutidas a seguir.

São elas (vide figura):

a) tempo de atraso (*delay time*) (t_d);
b) tempo de subida (*rise time*) (t_r);
c) intante de pico (*peak time*) (t_p);
d) tempo de acomodação (*settling time*) (t_s);
e) sobressinal máximo (*maximum peak*) (M_p);



O sobressinal é uma medida relativa de quanto (no máximo) a resposta transitória ultrapassa o seu valor estacionário, sendo definido como:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} .$$

É importante observar que no caso em que $c(\infty) = 1$, $M_p = c(t_p) - 1$.[1]

Nos casos de **superamortecimento** ou **amortecimento crítico**, define-se **tempo de subida** como o intervalo necessário para a resposta ir de 10% a 90% do valor estacionário.

O **tempo de acomodação** depende diretamente da **constante de tempo mais lenta** do sistema.

A razão para se definir os parâmetros da resposta transitória tomando por base o caso **oscilatório** é que, em geral, deseja-se que a resposta a degrau seja rápida (**t_r pequeno**) e com pouco sobressinal (**M_p pequeno**). No entanto, esses dois requisitos são **conflitantes**. Por um lado, a resposta não oscilatória seria interessante, pois M_p seria nulo; no entanto, neste caso, a resposta seria, em muitos casos práticos, proibitivamente lenta. Em geral, tempos de subida aceitáveis são obtidos apenas às custas de uma resposta de caráter oscilatório, o que significa existência de sobressinal.

Nesta seção a discussão até este ponto se deu sobre um sistema genérico, de ordem qualquer. Daqui em diante, contudo, restringiremos nossa atenção aos sistemas de 2ª ordem. A razão para isso é que, para fins de projeto, muitas vezes se pode aproximar um sistema de ordem elevada por um de 2ª ordem. Vamos expressar cada uma das variáveis t_r, t_p, M_p e t_s como função dos parâmetros ω_n e ξ do sistema de 2ª ordem, a saber,

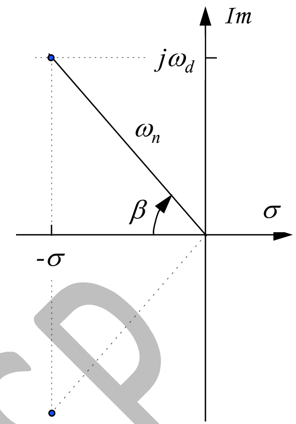
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

e considerando como sinal de entrada o degrau unitário.

[1] Este é o caso quando o degrau de referência é unitário e o erro estacionário é nulo (portanto, em regime estacionário a saída também tem valor unitário).

a) **Tempo de Subida** (t_r):

Da definição, t_r é o primeiro instante tal que:



$$c(t_r) = 1.$$

Ou seja:

$$1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\sigma t_r} \cdot sen(\omega_d t_r + \beta)$$

$$\Rightarrow \quad sen(\omega_d t_r + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_d t_r + \beta = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}}$$

Portanto:

- quando β está fixo, para que t_r seja "pequeno" é necessário que ω_d (e, por conseguinte, ω_n) seja "grande";
- quando ω_d está fixo, t_r "pequeno" requer β "grande" (e, portanto, o sistema se torna muito oscilatório, pois os polos tendem a se aproximar do eixo imaginário).

b) **Instante de Pico** (t_p):

Para que $t = t_p$ seja instante de pico, é necessário que:

$$\dot{c}(t_p) = 0$$

Derivando $c(t)$, vem:

$$\dot{c}(t) = -\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left[\omega_d \cdot cos(\omega_d t + \beta) - \sigma \cdot sen(\omega_d t + \beta)\right],$$

de onde resulta que:

$$\omega_d \cdot cos(\omega_d t_p + \beta) - \sigma \cdot sen(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

Mas:

$$\omega_d = \omega_n \cdot sen(\beta) \quad \text{e} \quad \sigma = \omega_n \cdot cos(\beta)$$

E, portanto:

$$\omega_n \cdot \left[sen(\beta) \cdot cos(\omega_d t_p + \beta) - cos(\beta) \cdot sen(\omega_d t_p + \beta)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad sen(\beta - \omega_d t_p - \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad sen(-\omega_d t_p) = -sen(\omega_d t_p) = 0$$

Assim, o primeiro pico corresponde a:

$$\omega_d t_p = \pi$$

Isto é:

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

Note-se que o período de oscilação que corresponde à freqüência amortecida ω_d é de $\dfrac{2\pi}{\omega_d}$ e, portanto, t_p corresponde à **metade** desse período.

c) **<u>Sobressinal máximo</u>** (M_p):

Para calcular M_p, basta notar que, para o caso de degrau unitário, da definição tem-se:

$$M_p = c(t_p) - 1$$

Portanto:

$$M_p = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\sigma t_p} \cdot sen(\omega_d t_p + \beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\sigma t_p} \cdot sen(\beta) = e^{-\sigma t_p}$$

Mas:

$$\sigma \cdot t_p = \sigma \cdot \frac{\pi}{\omega_d} = \omega_n \cdot cos(\beta) \cdot \frac{\pi}{\omega_n \cdot sen(\beta)} = \pi \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

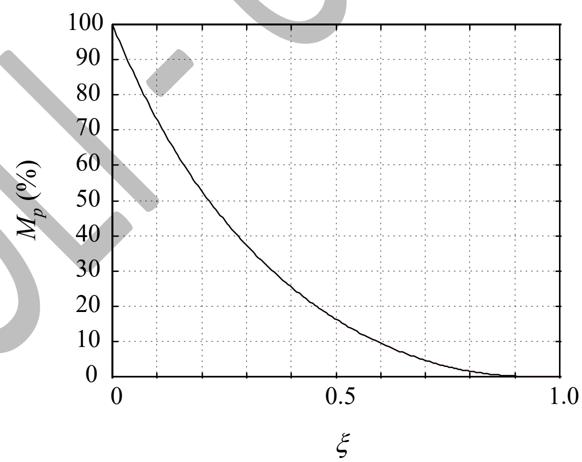
Portanto:

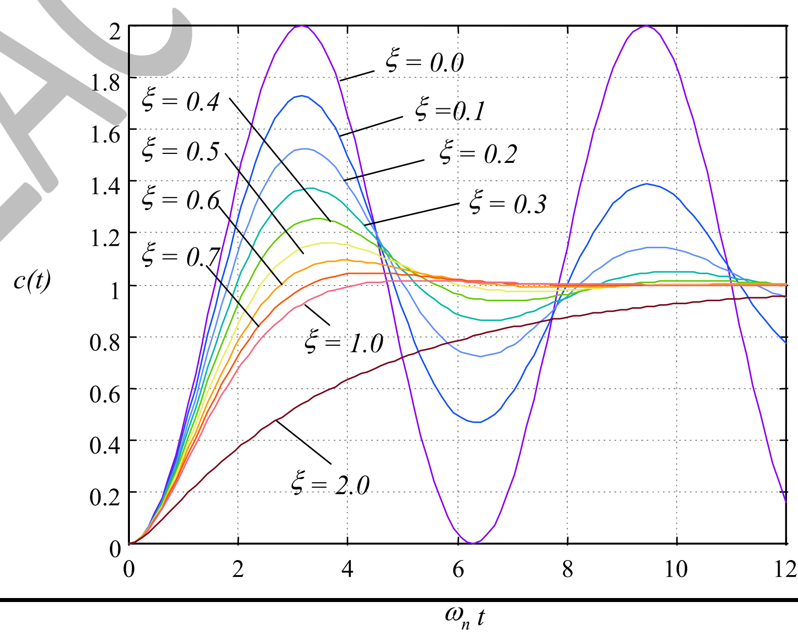
$$\boxed{M_p = e^{-\pi \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

Assim, o sobressinal M_p é determinado apenas pelo coeficiente ξ.

O gráfico de M_p x ξ tem o aspecto indicado na figura ao lado.

Para melhor visualizar o significado desse comportamento, a figura abaixo ilustra a resposta a degrau do sistema de 2ª ordem parametrizado em ξ.





d) **Tempo de acomodação** (t_s):

Conforme vimos, para um sistema subamortecido:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\sigma t} \cdot sen(\omega_d t + \beta) \quad (t \geq 0)$$

Ou seja, a resposta *c(t)* tem como envoltórias as funções:

$$f_1(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\sigma t}$$

$$f_2(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\sigma t}$$

Tanto $f_1(t)$ como $f_2(t)$ têm como constante de tempo:

$$T = \frac{1}{\sigma}$$

Esta constante de tempo define a velocidade com que a faixa da envoltória de *c(t)* se reduz.

Adotando a faixa de 2% em torno do valor estacionário para definir t_s, pode-se mostrar que:

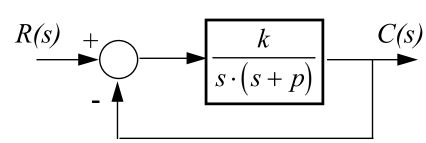
$$\boxed{t_s(2\%) \cong 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (0 < \xi < 0.9)}$$

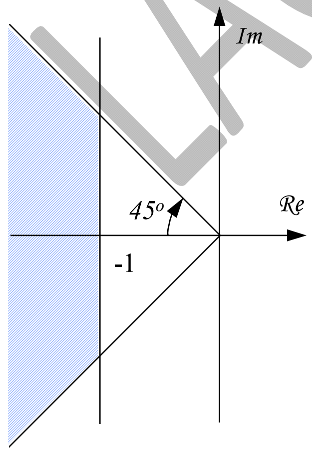
Para a faixa de 5%, por outro lado:

$$\boxed{t_s(5\%) \cong 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (0 < \xi < 0.9)}$$

Note que é possível reduzir o tempo de acomodação (que é uma medida do tempo de duração do transitório) aumentando ω_n, mesmo que ξ esteja fixo pela especificação do sobressinal.

Exemplo: Considere o sistema representado na figura. Deseja-se selecionar os parâmetros p e k de maneira que $M_p \leq 0.05$ e $t_s(2\%) \leq 4s$.





Para:

$$\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad M_p \leq 0.043 < 0.05$$

Por outro lado:

$$t_s(2\%) \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n \geq 1$$

Essas duas condições definem a região admissível para a localização dos polos de malha fechada como sendo aquela hachurada na figura ao lado. Podemos escolher, por exemplo, $-1 \pm j$. Tendo em vista que a função de transferência de malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + ps + k}$$

e identificando os polinômios

$(s+1-j)(s+1+j) \equiv s^2 + ps + k$

resultam os valores $p = 2$ e $k = 2$.

5.5 Estabilidade

O requisito mais importante dos sistemas de controle é a sua estabilidade. Ele deve ser garantido antes do atendimento de qualquer outra especificação relativa ao comportamento do sistema.

É imediato concluir que uma condição necessária e suficiente (C.N.S.) para a estabilidade dos S.L.I.T. é que **todos** os seus **polos** tenham **parte real negativa** (isto é, se situem no S.P.E.). **Se não fosse assim**, os termos da expansão em frações parciais associados aos polos do S.P.D. forneceriam contribuições à saída do tipo **exponencial crescente** e o sistema seria instável.

Sistemas com polos sobre o eixo imaginário, inclusive na origem, não são assintoticamente estáveis. Quando os polos são imaginários puros, o sistema apresenta uma resposta na forma de oscilações não amortecidas quando a condições inicial é não nula; quando há pelo menos um polo na origem, a resposta a degrau é ilimitada e, portanto, o sistema não é BIBO-estável.

Critério de Routh

O Critério de Routh permite determinar o **número de polos** de um sistema situados **no S.P.D.** de maneira simples, isto é, sem ter que calcular as raízes do polinômio do denominador da Função de Transferência.

Considere-se, então, o sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0' s^m + b_1' s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}' s + b_m'}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

sendo o problema saber se *A(s)* tem raízes no S.P.D.

O procedimento é o seguinte:

a) escreva *A(s)* na forma $A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$. Admite-se que $a_n \neq 0$, isto é, que eventuais raízes nulas de *A(s)* já tenham sido removidas.

b) arranje, então, os coeficientes do polinômio numa tabela da seguinte forma:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	…	0	Dados
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	…	0	
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	…		
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	…		
$\vdots$	$\vdots$						Calculados
s^1	f_1						
s^0	g_1						

onde:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$\vdots$ $\vdots$

Note que a tabela assim construída tem formato triangular.

O **<u>Critério de Routh</u>** garante que o número de raízes de $A(s)$ com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da primeira coluna da tabela acima.

O Critério de Routh estabelece uma C.N.S. de estabilidade para o polinômio $A(s)$.

<u>Teste de Hurwitz</u>

O **Teste de Hurwitz** fornece uma maneira simples e imediata de verificar se um polinômio **não é estável**. Basta que uma das condições abaixo seja verdadeira para que o sistema seja **instável**:

a) nem **todos** os coeficientes de *A(s)* **estão presentes** (isto é, pelo menos um dos coeficientes é nulo);

b) nem **todos** os coeficientes de *A(s)* têm o **mesmo sinal**, (isto é, há pelo menos dois coeficientes com sinais opostos).

Portanto, se todos os coeficientes estão presentes no polinômio característico e todos têm o mesmo sinal, **nada** se pode afirmar a respeito da estabilidade.

Às vezes, em vista de sua simplicidade, aplica-se em primeiro lugar o Teste de Hurwitz - este pode apenas indicar se o sistema **não** é estável, mas nunca permite concluir que ele é estável. Se o sistema passar pelo teste, então aplica-se o Critério de Routh. Como alternativa, pode-se aplicar diretamente o Critério de Routh, já que este é conclusivo a respeito da estabilidade/instabilidade. No entanto, a construção da tabela de Routh pode ser um pouco trabalhosa.

<u>Exemplo</u>: $A(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$

s^4	1	3	5
s^3	2	4	
s^2	1	5	
s^1	-6		
s^0	5		

Critério de Routh - Há duas mudanças de sinal entre os coeficientes da primeira coluna e, portanto, duas raízes com parte real positiva $(0.2878 \pm \mathrm{j} \cdot 1.4161)$.

<u>Observação</u>: uma linha inteira da tabela pode ser dividida ou multiplicada por um número positivo visando simplificar os cálculos subsequentes sem alterar a conclusão sobre a estabilidade.

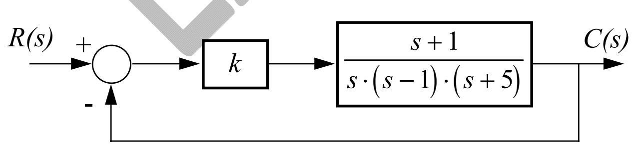
Note que o Teste de Hurwitz é inconclusivo neste caso, pois todos os coeficientes do polinômio estão presentes e têm o mesmo sinal.

<u>Exemplo</u>: $A(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

s^3	1	11
s^2	6	6
s^1	10	
s^0	6	

Critério de Routh - Todos os coeficientes da primeira coluna são positivos e, portanto, o sistema é estável.

Também neste exemplo o Teste de Hurwitz é inconclusivo.



<u>Exemplo</u>: Considere o sistema de controle em malha fechada da figura ao lado. A questão que se coloca é: será possível escolher *k* adequadamente, de forma que o sistema em malha fechada seja estável (note que o sistema em malha aberta é instável, pois tem um polo em $s = +1$).

A Função de Transferência de malha fechada do sistema é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k \cdot (s+1)}{s^3 + 4s^2 + (k-5) \cdot s + k} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Neste problema, podemos aplicar diretamente o Critério de Routh, pois o Teste de Hurwitz não permite resolvê-lo, conforme se vê a seguir (o Teste de Hurwitz só permite determinar condições em que o sistema não é estável!).

Critério de Routh:

Tabela de Routh: veja ao lado.

s^3	1	$k-5$
s^2	4	k
s^1	$\dfrac{3k-20}{4}$	
s^0	k	

Para a estabilidade devemos ter:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-20}{4} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \boxed{k > \dfrac{20}{3}}$$

Conclusão: O sistema é estável se e apenas se

$$\boxed{k > \dfrac{20}{3}}.$$

Nota-se aqui um benefício da realimentação: um sistema instável em malha aberta pode ser estabilizado utilizando-se um esquema de realimentação.

Teste de Hurwitz:

Para que todos os coeficientes de *A(s)* estejam presentes e tenham o mesmo sinal (isto é, sejam positivos):

$$\begin{cases} k-5 > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \boxed{k > 5}$$

Portanto, se $k > 5$ nada se pode concluir a respeito da estabilidade; por outro lado, se $k \leq 5$, o sistema é **instável**.

Observação: Note que a conclusão que decorre da aplicação do Teste de Hurwitz está contida naquela resultante do Critério de Routh.

Resumo - Importante!

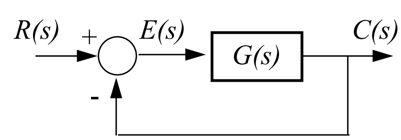
Note que o Critério de Hurwitz **não** permite concluir que um sistema é **estável**. Por outro lado, o Critério de Routh é uma condição necessária e suficiente de estabilidade. Em outras palavras, dele **sempre** se pode concluir se o sistema é estável ou instável.

Em resumo, como o Critério de Hurwitz é muito simples de aplicar, pode-se eventualmente concluir que o sistema não é estável rapidamente; quando nada se conclui, então deve-se aplicar o Critério de Routh. Por outro lado, o Critério de Routh é sempre conclusivo, mas é mais trabalhoso de aplicar.

5.6 Erro estacionário

O desempenho de muitos sistemas de controle pode ser especificado não apenas com base na sua resposta transitória, mas também pelo erro estacionário em relação a certos sinais de referência, tais como degraus, rampas e parábolas. A este respeito, um conceito útil em teoria de controle é o de **tipo do sistema**, que está associado a uma medida qualitativa da precisão com que o sistema é capaz de acompanhar, em regime estacionário, as entradas acima.

Consideremos o sistema em malha fechada com **realimentação unitária** representado na figura ao lado. Seja *G(s)* escrita na forma[2]:



$$G(s) = \frac{K_0 \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_m s+1)}{s^N \cdot (T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(T_p s+1)} \quad ,$$

onde os polos na origem em malha aberta foram explicitados através do termo s^N. Esta forma de escrever a função de transferência será chamada aqui de **forma de constantes de tempo.**

[2] Apesar de esta forma implicitamente considerar apenas polos e zeros reais, as conclusões desta seção são válidas também para o caso em que há pares de polos ou zeros complexos conjugados (escritos na forma normalizada).

O valor de N define o **tipo** do sistema. Usualmente, fala-se em sistemas tipo 0, 1 ou 2, respectivamente, para $N = 0$, 1 ou 2.

À medida que cresce o tipo do sistema, aumenta sua capacidade de seguir entradas, no sentido: degrau $\mapsto$ rampa $\mapsto$ parábola. Em compensação, sistemas de tipos mais altos requerem compensadores mais complexos para sua estabilização.

Para o sistema representado pelo diagrama de blocos acima, obtém-se facilmente a Função de Transferência que relaciona *E(s)* a *R(s)*:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$$

Admitindo que o sistema em malha fechada seja estável, o Teorema do Valor Final fornece:

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot R(s)}{1+G(s)}$$

Na verdade, a aplicação direta do Teorema do Valor Final permite resolver qualquer problema relativo a erro estacionário.

Os coeficientes de erro estacionário definidos a seguir são figuras de mérito de sistemas de controle no sentido de que, quanto maiores esses coeficientes, tanto menores os erros estacionários.

Entrada Degrau Unitário

Quando $R(s) = \frac{1}{s}$:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)}$$

Define-se **coeficiente de erro de posição estacionário** K_p como

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)\,,$$

de maneira que

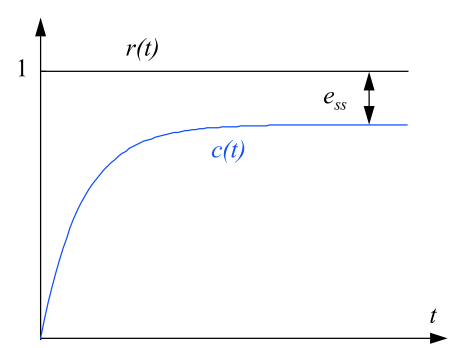
$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p}\,.$$

No caso de sistemas do **tipo 0**:

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K_0 \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(T_p s+1)} = K_0$$

E, portanto:

$$\boxed{e(\infty) = \frac{1}{1+K_0}} \quad \text{(tipo 0)}$$



Quando se trata de sistemas do **tipo 1**:

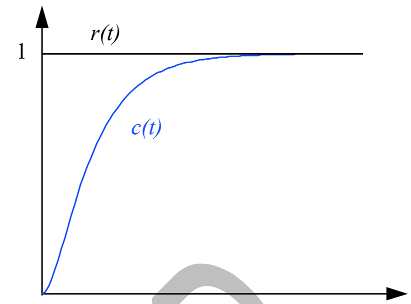
$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K_0 \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_m s+1)}{s\cdot(T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(T_p s+1)} = \infty$$

e, da mesma forma, para sistemas do **tipo 2**:

$$K_p = \infty$$

Nestes dois casos:

$$\boxed{e(\infty) = 0} \qquad \text{(tipo 1, 2 ou maior)}$$



Entrada Rampa Unitária

Neste caso,

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

e, por conseqüência,

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s \cdot [1 + G(s)]} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s \cdot G(s)}.$$

O **coeficiente de erro de velocidade estacionário** é definido como

$$K_v = \lim_{s \to 0} [s \cdot G(s)].$$

Assim, o erro estacionário para a entrada rampa unitária é dado por

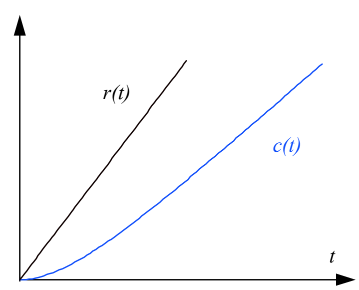
$$e(\infty) = \frac{1}{K_v}.$$

Para sistemas do **tipo 0**,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK_0 \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot (\tau_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (T_p s + 1)} = 0$$

e, portanto,

$$\boxed{e(\infty) = \infty} \qquad \text{(tipo 0).}$$



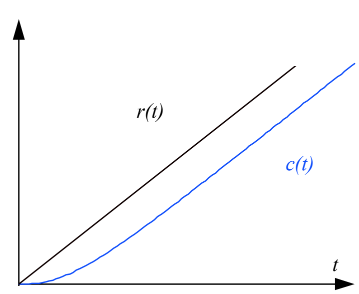
A rigor, isto significa que, de fato, o regime estacionário não é atingido.

Se o sistema é do **tipo 1**, então

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK_0 \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot (\tau_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (\tau_m s + 1)}{s \cdot (T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (T_p s + 1)} = K_0,$$

de onde resulta que

$$\boxed{e(\infty) = \frac{1}{K_0}} \qquad \text{(tipo 1).}$$

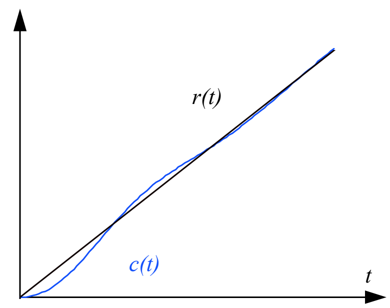


Por fim, no caso de sistemas do **tipo 2**,

$$K_v = \lim_{s\to 0} \frac{sK_0 \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_m s+1)}{s^2\cdot(T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(T_p s+1)} = \infty$$

e, dessa forma,

$\boxed{e(\infty)=0}$ (tipo 2 ou maior).



Entrada Parábola Unitária

Para uma entrada do tipo

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \quad (t \geq 0) \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s^3}.$$

Neste caso,

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2\cdot[1+G(s)]} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2\cdot G(s)}.$$

Define-se o **coeficiente de erro de aceleração estacionário** como

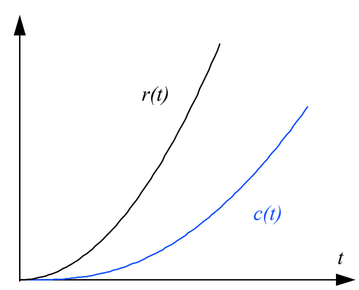
$$K_a = \lim_{s\to 0}\left[s^2\cdot G(s)\right],$$

de forma que

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a}.$$

Se o sistema é do **tipo 0**,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2\cdot K_0 \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(T_p s+1)} = 0$$



e, se o sistema é do **tipo 1**,

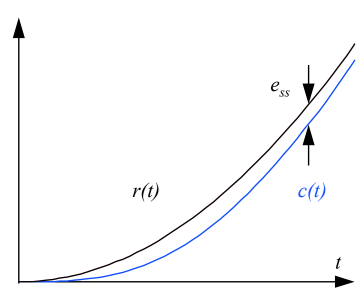
$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2\cdot K_0 \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_m s+1)}{s\cdot(T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(T_p s+1)} = 0.$$

Nestes dois casos,

$\boxed{e(\infty)=\infty}$ (tipo 0 ou 1).

Para sistemas do **tipo 2**,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2\cdot K_0 \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_m s+1)}{s^2\cdot(T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\cdot\ldots\cdot(T_p s+1)} = K_0$$



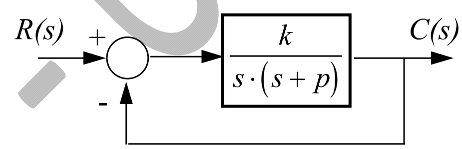
e, portanto,

$\boxed{e(\infty)=\frac{1}{K_0}}$ (tipo 2).

Resumo

	$r(t)\quad (t \geq 0)$		
Tipo do Sistema	1	t	$\frac{t^2}{2}$
0	$\frac{1}{1+K_0}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_0}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_0}$

<u>Exemplo</u>: Um servomecanismo utilizando um motor C.C. controlado pela armadura pode ser representado pelo diagrama de blocos ao lado. Neste caso, como se observa:



$$G(s) = \frac{k}{s\cdot(s+p)} = \frac{\frac{k}{p}}{s\cdot\left(\frac{1}{p}\cdot s+1\right)}$$

e, portanto, trata-se de um sistema do tipo 1, para o qual:

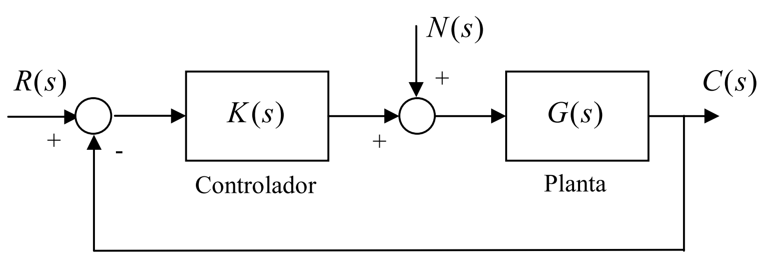
$$K_0 = \frac{k}{p}$$

Sendo assim:

- para entrada degrau unitário: $e(\infty) = 0$
- para entrada rampa unitária: $e(\infty) = \frac{1}{K_0}$
- para entrada parábola unitária: $e(\infty) = \infty$

5.7 Rejeição de Perturbações em Regime Estacionário

Considere-se o sistema de controle em malha fechada representado na figura abaixo, em que $N(s)$ representa uma perturbação que age **na entrada da planta**.



A questão que se coloca é determinar em que condições o sistema é capaz de rejeitar a perturbação $N(s)$ em regime estacionário. Ou seja, em que condições o efeito em regime estacionário da perturbação sobre a saída do sistema é nulo. Para isso serão considerados dois tipos de perturbações, a saber, degraus e rampas.

Admita-se o caso geral em que $G(s)$ é expresso por

$$G(s) = \frac{K_{0G}(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{N_G}(T_1 s+1)\cdots(T_p s+1)},$$

em que $N_G \geq 0$ representa o número de polos na origem de $G(s)$.

Definindo

$$G'(s) = \frac{K_{0G}(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)\cdots(T_p s+1)},$$

pode-se reescrever $G(s)$ como

$$G(s) = \frac{G'(s)}{s^{N_G}},$$

em que $G'(s)$ contém apenas os polos não nulos de $G(s)$ e

$$\lim_{s\to 0} G'(s) = K_{0G}.$$

É interessante notar que, quando $G(s)$ não tem polos na origem ($N_G = 0$), o fator s^{N_G} do denominador reduz-se a 1 e $G'(s) = G(s)$. Neste caso em que $N_G = 0$, sem qualquer crise de consciência, podemos escrever simbolicamente que $\lim_{s\to 0} s^{N_G} = 1$, apesar de 0^0 representar formalmente uma indeterminação.

De maneira inteiramente análoga, reescreve-se $K(s)$ na forma

$$K(s) = \frac{K'(s)}{s^{N_K}},$$

em que $N_K \geq 0$ representa o número de polos na origem de $K(s)$, $K'(s)$ contém apenas os polos não nulos de $K(s)$ e

$$\lim_{s\to 0} K'(s) = K_{0K}.$$

Tendo em vista a linearidade do sistema, a saída $C(s)$ é dada por duas parcelas: $C_R(s)$, que é produzida por $R(s)$, e $C_N(s)$, proveniente de $N(s)$, isto é,

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s).$$

Para se estudar o efeito da perturbação $N(s)$ sobre a saída, pode-se considerar $R(s) = 0$ e, portanto,

$$C(s) = C_N(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)K(s)} N(s) .$$

Supondo válidas as hipóteses do Teorema do Valor Final, sua aplicação neste caso leva a

$$c(\infty) = \lim_{s\to 0} s \frac{G(s)}{1+G(s)K(s)} N(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{s^{N_K} G'(s)}{s^{N_G} s^{N_K} + G'(s)K'(s)} N(s) .$$

- **Perturbação do tipo degrau unitário**

Neste caso,

$$N(s) = \frac{1}{s}$$

e, portanto,

$$c(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{N_K} G'(s)}{s^{N_G} s^{N_K} + G'(s)K'(s)} .$$

Conforme o valor de N_K, há duas situações distintas a considerar:

1. $N_K = 0$

   Neste caso, há duas possibilidades quanto ao valor de N_G, a saber:

   a) $N_G = 0$

   Nestas condições, a expressão anterior fornece:

   $$c(\infty) = \frac{K_{0G}}{1+K_{0G}K_{0K}} ,$$

   a qual mostra que são necessários valores elevados do ganho K_{0K} do controlador para que o efeito da perturbação em degrau sobre a saída seja pequeno em regime estacionário.

   b) $N_G \geq 1$

   Nestas condições,

   $$c(\infty) = \frac{1}{K_{0K}} ,$$

   a qual também mostra que são necessários valores elevados do ganho K_{0K} do controlador para que o efeito da perturbação em degrau sobre a saída seja pequeno em regime estacionário.

   Conclui-se assim que, se o **controlador não tem polo na origem**, é **impossível** fazer com que esse efeito seja **nulo**, independentemente do número de polos da planta na origem.

2. $N_K \geq 1$

Neste caso, independentemente do valor de $N_G \geq 0$, obtém-se

$$c(\infty) = 0\,.$$

Conclui-se assim que, se o **controlador tem pelo menos um polo na origem**, o efeito da perturbação em degrau sobre a saída em regime estacionário é **nulo**, independentemente do número de polos da planta na origem.

- **Perturbação do tipo rampa unitária**

Neste caso,

$$N(s) = \frac{1}{s^2}$$

e, portanto,

$$c(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^{N_K} G'(s)}{s\left[s^{N_G} s^{N_K} + G'(s)K'(s)\right]}\,.$$

Conforme o valor de N_K, há três situações distintas a considerar, independentemente do valor de $N_G \geq 0$, a saber:

1. $N_K = 0$

Neste caso, a expressão anterior fornece

$$c(\infty) = \infty\,,$$

o que significa que o efeito da perturbação do tipo rampa sobre a saída é ilimitado (na verdade, o regime estacionário não é atingido).

2. $N_K = 1$

Neste caso,

$$c(\infty) = \frac{1}{K_{0K}}\,,$$

o que mostra que o efeito estacionário da perturbação do tipo rampa sobre a saída pode ser reduzido aumentando-se o valor do ganho K_{0K} do controlador.

3. $N_K \geq 2$

Por fim, neste caso,

$$c(\infty) = 0\,,$$

e, portanto, o efeito da perturbação do tipo rampa sobre a saída é **nulo** em regime estacionário.

Conclusão

Para que um sistema de controle sujeito a uma perturbação do tipo **degrau** na entrada da planta a rejeite completamente em regime estacionário é preciso que o controlador tenha **pelo menos um polo na origem**.

Quando se deseja que o sistema de controle rejeite completamente em regime estacionário perturbações do tipo **rampa** é necessário que o compensador tenha **pelo menos dois polos na origem.**