6. Método do Lugar das Raízes

6.1 Introdução

O Método do Lugar das Raízes (M.L.R.) é uma **técnica gráfica** que permite visualizar de que forma os **polos** de um sistema em **malha fechada** variam quando se altera o valor de um parâmetro específico (o **ganho**, em geral).

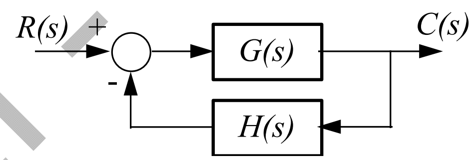
Originalmente, a técnica era utilizada para determinar o **valor numérico** dos polos de malha fechada de um sistema. Por essa razão era necessário efetuar a construção gráfica da forma mais **precisa** possível. Foi desenvolvido um instrumento auxiliar, chamado espírula, para esse fim.

Atualmente, porém, é possível obter os polos do sistema em malha fechada de maneira rápida e precisa usando **programas computacionais**. Apesar disso, o M.L.R. continua sendo uma ferramenta de grande utilidade no projeto de sistemas de controle por permitir ao projetista definir adequadamente a **estrutura do controlador** apropriado a cada problema.

6.2 O Lugar Geométrico das Raízes

O Lugar Geométrico das Raízes (L.G.R.) é um gráfico construído a partir do conhecimento dos polos e zeros do sistema em **malha aberta**. Tomando o ganho como parâmetro, o L.G.R. é o conjunto dos pontos no plano complexo que correspondem aos polos do sistema em **malha fechada**.

Consideremos então o sistema em malha fechada representado pelo diagrama de blocos ao lado. Conforme já vimos, sua Função de Transferência em malha fechada é dada por:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

e, portanto, os **polos** do sistema em **malha fechada** (que, naturalmente, determinam as características da resposta do sistema em malha fechada) são as raízes da equação:

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0$$

ou seja:

$$G(s) \cdot H(s) = -1 + j \cdot 0$$

A forma complexa foi usada para enfatizar que se trata de uma igualdade de números complexos. Por esta razão, a equação desdobra-se em uma **condição de fase**:

$$\underline{\left| G(s) \cdot H(s) \right.} = 180^o \pm i \cdot 360^o \qquad (i = 0,1,2,\ldots)$$

e uma **condição de módulo** (ou de **ganho**):

$$\left| G(s) \cdot H(s) \right| = 1$$

Consideremos o caso geral em que:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{k \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \ldots \cdot (s - p_n)} \qquad \textbf{(Forma de polos e zeros)}$$

onde z_1, z_2, ... , z_m são os zeros em malha aberta; p_1, p_2, ... , p_n são os polos em malha aberta e k é o ganho (ou, mais apropriadamente, o ganho aparente), que, por simplicidade, vamos supor positivo:

$$k > 0 \; .$$

Antes de prosseguir, note que os polos do sistema em malha fechada são as raízes de $1+G(s)\cdot H(s)=0$, isto é, as raízes do polinômio característico:

$$(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)+k\cdot(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot\ldots\cdot(s-z_m)=0$$

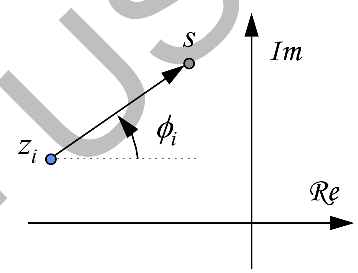
e que, em geral, é impossível calculá-las analiticamente para $n>5$.

Voltando ao problema, a condição de fase pode ser escrita como:

$$\boxed{\angle(s-z_1)+\angle(s-z_2)+\ldots+\angle(s-z_m)-\angle(s-p_1)-\angle(s-p_2)-\ldots-\angle(s-p_n)=180^o\pm i\cdot 360^o \quad (i=0,1,2,\ldots)}$$

O L.G.R. é definido como sendo o conjunto dos pontos s do plano complexo que satisfazem a esta condição.

Esta forma de escrever a condição de fase serve de base para a obtenção de regras que facilitam o traçado do L.G.R..



Note que s-z_i, por exemplo, é um número complexo que pode ser representado no plano complexo conforme ilustrado na figura ao lado, onde:

$$\phi_i=\angle(s-z_i)$$

é seu ângulo de fase, medido no sentido anti-horário a partir do eixo real.

Se representarmos por θ_i a fase de s-p_i, isto é,

$$\theta_i=\angle(s-p_i) \quad ,$$

a condição de fase pode ser reescrita como:

$$\phi_1+\phi_2+\ldots+\phi_m-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_n=180^o\pm i\cdot 360^o \qquad (i=0,1,2,\ldots).$$

Esta é, pois, a condição **geométrica** que permite determinar se um dado ponto do plano complexo pertence ou não ao L.G.R..

Observe que essa condição é **independente** do valor do ganho k, pois sendo k positivo, sua fase é **nula**.

Considere então um ponto s particular do plano complexo para o qual a condição de fase é satisfeita. A condição de ganho permite determinar o valor de k associado a este ponto s em particular, pois:

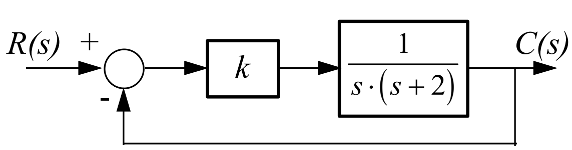
$$|G(s)\cdot H(s)|=k\cdot\frac{|s-z_1|\cdot|s-z_2|\cdot\ldots\cdot|s-z_m|}{|s-p_1|\cdot|s-p_2|\cdot\ldots\cdot|s-p_n|}=1$$

e, portanto:

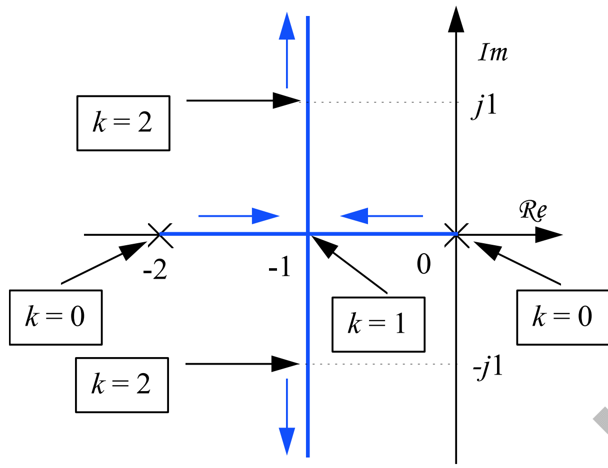
$$k=\frac{|s-p_1|\cdot|s-p_2|\cdot\ldots\cdot|s-p_n|}{|s-z_1|\cdot|s-z_2|\cdot\ldots\cdot|s-z_m|}$$

Em resumo, a condição de fase permite, em tese, traçar o L.G.R. e a condição de ganho, parametrizá-lo em termos do ganho k.

<u>**Exemplo**</u>: Seja o sistema:



O L.G.R. associado a este sistema é o seguinte:



Exercício: verifique que todos os pontos do diagrama acima de fato pertencem ao L.G.R., isto é, satisfazem a condição de fase. Verifique também que, conforme ilustra a figura:

- para k=1: os polos do sistema em malha fechada são reais e iguais a *-1*;
- para k=2: os polos em malha fechada são $-1 \pm j$;

6.3 Regras para o Traçado do L.G.R.

Uma vez definido o L.G.R., passemos a elaborar regras que permitam simplificar e sistematizar o seu traçado.

Continuidade do L.G.R.

Como as raízes dos polinômios são funções contínuas dos coeficientes, o L.G.R. é constituído por curvas contínuas no plano complexo.

Simetria do L.G.R.

Como o polinômio característico tem coeficientes reais, suas raízes podem ser de dois tipos apenas:

* raízes reais;
  * pares de raízes complexas conjugadas.

Sendo assim, é imediato concluir que o L.G.R. é **simétrico** em relação ao **eixo real** do plano complexo.

Número de ramos do L.G.R.

Como o polinômio característico de malha fechada

$$(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)+k(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)$$

tem grau n, ele tem n raízes e, portanto, o L.G.R. também tem n ramos, isto é, os polos de malha fechada descrevem n curvas.

Pontos de Início e Término do L.G.R.

O passo preliminar para se construir o L.G.R. consiste em marcar os polos e zeros de malha aberta no plano complexo. Utilizam-se para isso os símbolos "x" e "o", respectivamente.

O ganho k pode variar, em princípio, no intervalo:

$$0 < k < +\infty$$

Consideraremos como pontos de **início** (ou **partida**) do L.G.R. aqueles correspondentes a $k \to 0^+$ e, como de **término** (ou **chegada**), os associados a $k \to +\infty$.

Conforme vimos, os polos de malha fechada são as raízes da equação característica:

$$(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)+k\cdot(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot\ldots\cdot(s-z_m)=0$$

e, portanto, o L.G.R. tem **início** (k=0) nos **polos de malha aberta**.

Para determinar os pontos de **término** do L.G.R., é necessário analisar o ângulo de chegada nos zeros, o que será feito adiante. No entanto, apenas **como indicação** de que os zeros de malha aberta constituem pontos de término do LGR, note-se que a condição de módulo pode ser reescrita como:

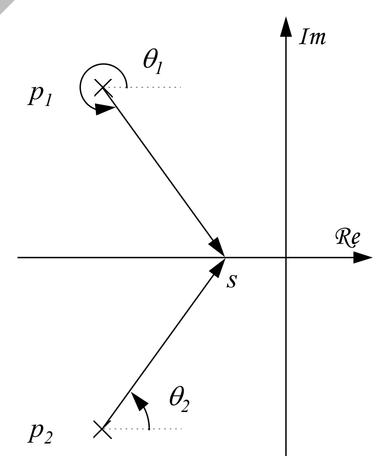
$$\frac{|s-z_1|\cdot|s-z_2|\cdot\ldots\cdot|s-z_m|}{|s-p_1|\cdot|s-p_2|\cdot\ldots\cdot|s-p_n|}=\frac{1}{k}.$$

Assim, quando $k \to +\infty$, o L.G.R. tende aos **zeros de malha aberta** do sistema.

Como o número de ramos do L.G.R. deve, obviamente, ser igual ao número de polos do sistema em malha fechada (n, no nosso caso) e como, em geral, $m \le n$, há $n-m$ ramos que tendem para **zeros no infinito** quando $k \to +\infty$. Estes ramos constituem as chamadas **assíntotas**. Discutiremos a sua determinação posteriormente.

L.G.R. Sobre o Eixo Real

Vejamos, inicialmente, qual é a contribuição de um par de polos complexos conjugados de malha aberta para a condição de fase sobre o eixo real.



Da figura, é imediato que $\theta_1+\theta_2=360^o$ e, portanto, o referido par de polos não contribui para a condição de fase.

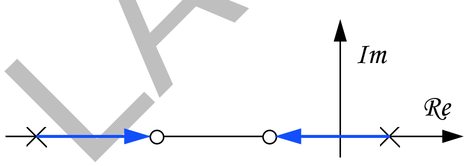
É evidente que o mesmo se verifica para pares de zeros complexos conjugados de malha aberta.

Sendo assim, para determinar quais os pontos do eixo real que pertencem ao L.G.R., é necessário considerar **unicamente** os polos e zeros **reais**.

Considere-se um ponto sobre o eixo real. Neste caso, as possíveis contribuições para a condição de fase são:

* $+\phi_i=+180^o$ para cada zero real de malha aberta z_i à direita de s;
* $-\theta_i=-180^o$ para cada polo real de malha aberta p_i à direita de s;
* $\phi_i=\theta_i=0^o$ para cada zero real z_i ou polo real p_i de malha aberta à esquerda de s;

Dessa maneira, para que o referido ponto s do eixo real pertença ao L.G.R., o número **total** de polos e zeros reais de malha aberta à **direita** de s deve ser **ímpar**.



<u>**Exemplo**</u>: Ilustração de L.G.R. sobre o eixo real.

Note-se que este exemplo está em concordância também com as regras anteriores vistas, a saber: continuidade do LGR, número de ramos do LGR, pontos de início e término do L.G.R. e simetria com respeito ao eixo real;

Assíntotas

Como vimos anteriormente, as assíntotas para $k \to +\infty$ são em número igual ao excesso de polos sobre zeros. Sendo assim, esta regra deve ser aplicada apenas no caso em que $n > m$.

O argumento que serve de base para a determinação das assíntotas é bastante simples. Imaginemos então um ponto s suficientemente afastado da origem do plano complexo, isto é, tal que seu módulo seja muito maior do que aqueles dos polos e zeros de malha aberta do sistema.

Nessas condições, são praticamente iguais os ângulos ϕ_i e θ_j, isto é:

$$\phi_i \cong \theta_j \cong \alpha \qquad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

onde α é o ângulo da assíntota com o eixo real. A condição para que o ponto s pertença ao L.G.R. reduz-se então a:

$$m\alpha - n\alpha = 180^o \pm i \cdot 360^o \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$

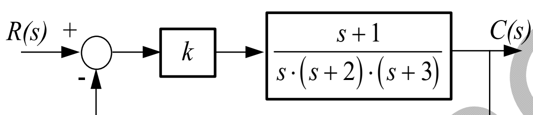
ou, equivalentemente:

$$\alpha = \frac{180^o}{n-m} \pm \frac{i}{n-m} \cdot 360^o \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$

A segunda parcela desta expressão mostra claramente a existência de n-m assíntotas. Dessa maneira, seria mais apropriado denotar os ângulos das assíntotas por α_i $(0 \le i \le n-m-1)$.

Pode-se mostrar que o ponto de cruzamento das assíntotas sobre o eixo real é dado por:

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

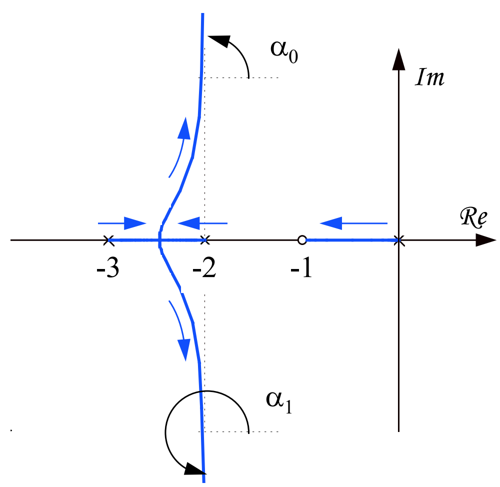


Exemplo: considere o sistema da figura ao lado. Em malha aberta, este sistema tem um zero (m=1) em z_1= -1 e três polos (n=3) em p_1= 0, p_2= -2 e p_3= -3. Há, portanto, um excesso de $n-m=2$ polos sobre zeros e o L.G.R. contém duas assíntotas. Seus ângulos são dados por:

$$\alpha_i = 90^o \pm i \cdot 180^o \qquad (i = 0,1)$$

isto é:

$$\alpha_0 = 90^o$$
$$\alpha_1 = 90^o \pm 180^o = -90^o \text{ (ou } 270^o\text{)}$$



Note que, para pontos **suficientemente afastados**, localizados sobre a assíntota de ângulo 90^0, as contribuições dos polos e zeros para a condição de ângulo são:

$$\phi_1 \cong 90^o$$
$$\theta_1 \cong 90^o ; \theta_2 \cong 90^o ; \theta_3 \cong 90^o$$

o que indica que tais pontos pertencem ao L.G.R..

Para a assíntota de ângulo -90^0 (ou 270^0):

$$\phi_1 \cong -90^o$$
$$\theta_1 \cong -90^o ; \theta_2 \cong -90^o ; \theta_3 \cong -90^o$$

e, portanto:

$$\phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \cong 180^o$$

de onde se conclui que, também neste caso, os pontos fazem parte do L.G.R..

O ponto de cruzamento das assíntotas é dado por:

$$s_0 = \frac{\left[(0)+(-2)+(-3)\right]-\left[-1\right]}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$$

Verifique, por fim, que as demais regras já discutidas são obedecidas pelo diagrama apresentado.

Pontos de Partida e de Chegada Sobre o Eixo Real

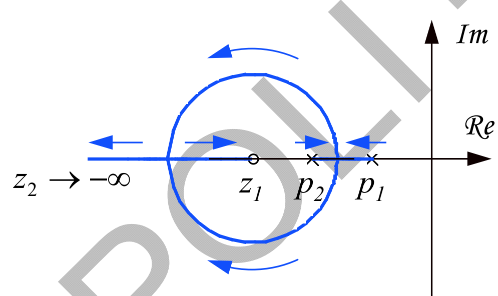
Se houver dois polos de malha aberta adjacentes sobre o eixo real e se o segmento entre eles for parte do L.G.R., então existirá pelo menos um ponto de **partida** nesse segmento.

De maneira análoga, se houver dois zeros adjacentes sobre o eixo real e se o segmento entre eles fizer parte do L.G.R., então haverá pelo menos um ponto de chegada pertencente a esse segmento. Esta regra se aplica também ao caso em que um dos zeros é infinito.

Se o segmento entre um polo e um zero reais pertencer ao L.G.R., então o número de pontos de partida sobre o segmento igualará o número de chegadas, **incluindo-se** aí o caso em que tal **número** é **nulo**.

Essas regras derivam diretamente da propriedade dos L.G.R.'s de terem início em polos e terminarem em zeros de malha aberta.

<u>**Exemplo**</u>:



Regra empírica

Zeros atraem o L.G.R. e polos repelem-no.

Outras Regras

As regras de construção do L.G.R. vistas até este ponto permitem **esboçar** o diagrama com relativa rapidez. Com base apenas nesse esboço, o projetista pode, muitas vezes, definir a **estrutura** do controlador mais adequada a um problema específico.

A escolha dos **valores numéricos dos parâmetros** do compensador, contudo, requer normalmente que se obtenha o L.G.R. de forma mais precisa. Atualmente esta tarefa se encontra grandemente facilitada pelo barateamento progressivo dos recursos computacionais.

As regras a serem vistas a seguir têm como característica permitir **detalhar** com **precisão** alguns pontos do L.G.R. e, pelas razões acima, perderam parte da importância original.

No entanto, em situações particulares, tais regras podem ser de utilidade.

<u>**Determinação dos pontos de partida e chegada sobre o eixo real**</u>:

Definindo os polinômios:

$$A(s) = (s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)$$

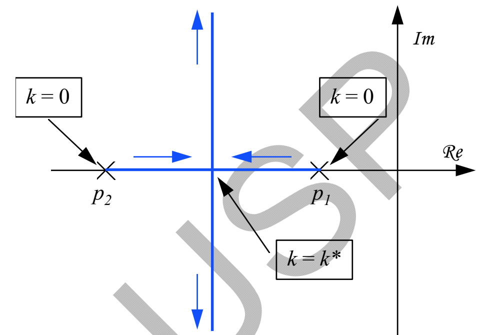
$$B(s) = (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdots (s - z_m)$$

a equação característica pode ser escrita como:

$$A(s) + k \cdot B(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{A(s)}{B(s)}$$

Para cada ponto s do L.G.R. podemos encarar essa equação como definindo k na forma de uma função implícita de s.

Consideremos, para fixar idéias, o caso de um trecho do L.G.R. entre dois polos adjacentes sobre o eixo real conforme ilustrado na figura ao lado. À medida que k cresce, os polos de malha fechada se distanciam de p_1 e p_2 até que, quando $k = k^*$, eles coincidem (se continuarmos aumentando k além de k^*, os polos se tornarão complexos conjugados). Neste ponto, evidentemente, k assume o valor máximo sobre o eixo real. Uma condição necessária para isso é que:



$$\frac{dk}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA(s)}{ds} \cdot B(s) - A(s) \cdot \frac{dB(s)}{ds} = 0$$

As raízes desta equação polinomial fornecem os possíveis candidatos a solução do problema. Note que, por hipótese, só nos interessam as soluções $s^* \in \Re$ tais que:

$$k^* = -\frac{A(s^*)}{B(s^*)} > 0$$

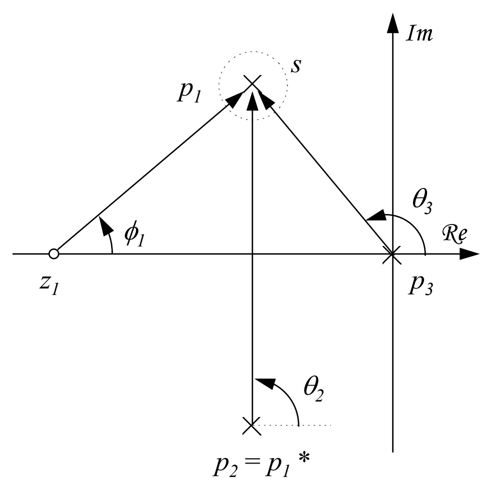
É importante observar que a obtenção das soluções da equação polinomial acima pode, muitas vezes, ser uma tarefa bastante trabalhosa (ou mesmo impossível analiticamente, dependendo dos graus dos polinômios envolvidos).

<u>Determinação dos ângulos de partida ou chegada</u>:

Neste tópico trataremos da questão de como determinar os ângulos de partida de polos e ângulos de chegada a zeros.

Para fixar idéias, consideremos o caso ilustrado na figura ao lado e suponhamos que o problema seja determinar o ângulo de partida do polo p_1. Se nos restringirmos a pontos s numa região do plano complexo suficientemente pequena em torno de p_1, poderemos considerar que as contribuições dos zeros e **demais** polos para a condição de ângulo são praticamente constantes e dadas por:

$$\phi_i = \angle\, p_1 - z_i \quad (i = 1, 2, \ldots , m)$$
$$\theta_i = \angle\, p_1 - p_i \quad (i = 2, 3, \ldots , n)$$



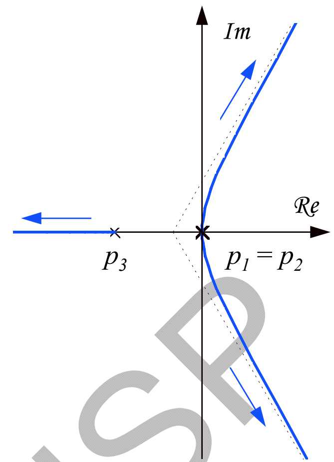
Por outro lado, a contribuição do polo p_1 pode variar entre 0° e 360°, dependendo da posição do ponto s:

$$\theta_1 = \angle\, s - p_i \quad , \quad 0° \le \theta_1 < 360°$$

A condição de fase permite determinar o ângulo de partida θ_1 como sendo a primeira determinação de:

$$\theta_1 = \sum_{j=1}^{m} \phi_j - \sum_{j=2}^{n} \theta_j - 180° \pm i \cdot 360° \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

A mesma argumentação se aplica à determinação dos ângulos de chegada em zeros.



Exemplo: no caso ilustrado na figura ao lado, para determinarmos o ângulo de partida do polo duplo na origem, notamos que a contribuição angular do polo p_3 para a condição de fase nas vizinhanças da origem é:

$$\theta_3 = \underline{|p_1 - p_3} = 0°$$

Por outro lado, para pontos s numa vizinhança suficientemente pequena da origem:

$$\theta_1 = \theta_2 = \underline{|s - p_1}$$

devem ser tais que a condição de fase se verifique:

$$-2\theta_1 - 0° = 180° \pm i \cdot 360° \quad (\, i = 0,\ 1,\ 2\ \mathbf{...}\,)$$

e, portanto:

$$\theta_1 = -90° \pm i \cdot 180° \quad (\, i = 0,\ 1,\ 2\ \mathbf{...}\,)$$

o que fornece duas soluções em primeira determinação:

$$\theta_1 = 90° \quad \text{e} \quad \theta_2 = 270°$$

<u>Determinação dos pontos de cruzamento com o eixo imaginário</u>:

Para sistemas de ordem superior a 4, esta etapa pode ser extremamente trabalhosa, sendo freqüentemente omitida quando se traça o L.G.R. manualmente.

A primeira maneira de calcular os pontos de intersecção com o eixo imaginário consiste em:

* utilizando o Critério de Routh, obtém-se os valores do ganho k correspondentes a cruzamentos do eixo imaginário (tanto no sentido S.P.E.↦S.P.D., quanto no sentido S.P.D.↦S.P.E.);
* substituem-se esses valores de k na equação característica, faz-se $s = j\omega$ e obtém-se os valores de ω procurados após igualar a zero as partes real e imaginária.

A outra forma de se obter os pontos de intersecção do L.G.R. com o eixo imaginário corresponde a considerar k como incógnita e substituir $s = j\omega$ na equação característica. Igualando as partes real e imaginária a zero, obtém-se duas equações que, em tese, permitem determinar k e ω.

<u>Exemplo</u>: Seja o sistema tal que

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{k}{s^3 + 8s^2 + 32s}$$

cuja equação característica em malha fechada é:

$$s^3 + 8s^2 + 32s + k = 0$$

Pelo primeiro procedimento apresentado, aplicamos o Critério de Routh e obtemos $\boldsymbol{k = 256}$ como sendo o valor de k correspondente à ocorrência de cruzamento do eixo imaginário. Fazendo $s = j\omega$ e substituindo $k = 256$ na equação característica, obtemos:

$$\left(-8\omega^2 + 256\right) + j \cdot \left(-\omega^3 + 32\omega\right) = 0$$

De onde resulta:

$$\omega = \pm\sqrt{32}$$

O segundo procedimento apresentado conduz diretamente a:

$$\left(-8\omega^2 + k\right) + j \cdot \left(-\omega^3 + 32\omega\right) = 0$$

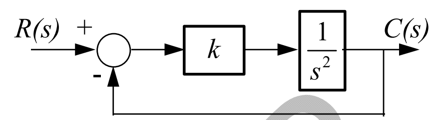
que tem como única solução de interesse:

$$\omega = \pm\sqrt{32} \quad \text{e} \quad k = 256$$

6.4 Exemplos de Aplicação

Além de servirem como exemplos de aplicação das regras vistas até aqui, os problemas que se seguem procuram ilustrar também o significado da regra heurística mencionada anteriormente.

Exemplo 1: Seja o sistema indicado na figura ao lado que pode, por exemplo, representar um sistema de controle de posição de uma inércia pura através de um controlador proporcional.[1]



1. **Pontos de início e término do L.G.R**: o L.G.R. parte da origem do plano complexo (polo duplo);

2. **L.G.R. sobre o eixo real**: não há;

3. **Assíntotas**: neste caso, $m = 0$ e $n = 2$, de maneira que existem duas assíntotas. Seus ângulos são:

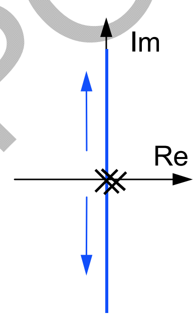
$$\alpha_1 = 90° \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 270° .$$

O cruzamento das assíntotas sobre o eixo real se dá no ponto de abscissa $s_0 = 0$, o que significa que as assíntotas coincidem com os semi-eixos imaginários positivo e negativo, respectivamente.

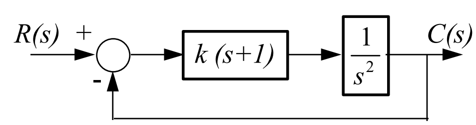
4. **Pontos de partida e de chegada sobre o eixo real**: não há, pois não existe parte do L.G.R. sobre o eixo real no caso presente.

5. **Ângulo de partida**: os ângulos de partida são $\pm 90°$ (já que a contribuição dos zeros para a condição de fase é nula, uma vez que o sistema não tem zeros).

6. **Esboço do L.G.R.**: é imediato concluir que, neste caso, o L.G.R. coincide com o eixo imaginário. O sistema resulta marginalmente estável para qualquer $k > 0$.

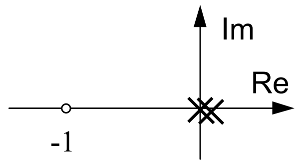


Exemplo 2: Consideremos agora o sistema indicado na figura ao lado. Podemos encarar este caso como sendo correspondente ao de controle de posição de uma inércia pura através de um controlador PD (proporcional + derivativo).

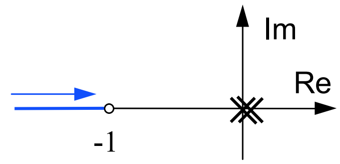


[1] Este, por sinal, talvez seja o modelo mais simples utilizado em problemas de controle de atitude de satélites artificiais.

1. **Pontos de início e témino do L.G.R**



2. **L.G.R. sobre o eixo real**



3. **Assíntotas**: como $m = 1$ e $n = 2$, existe apenas uma assíntota, cujo ângulo é

$$\alpha = 180° \pm i \cdot 360°$$

Neste caso, a assíntota coincide com a parte do semi-eixo real negativo situada à esquerda do ponto -1.

Note também que, em razão da simetria do L.G.R. com relação ao eixo real, a **única** possibilidade de existência de **uma só** assíntota corresponde a ela estar contida no eixo real.

4. **Pontos de partida e de chegada sobre o eixo real**: como o L.G.R. é simétrico em relação ao eixo e como ele se inicia nos polos e termina nos zeros, concluímos que existe um ponto de chegada do L.G.R. sobre o eixo real (podemos imaginar que existe um zero em $-\infty$).

Para obter os pontos de partida e chegada, escrevemos:

$$A(s) = s^2$$
$$B(s) = s + 1$$

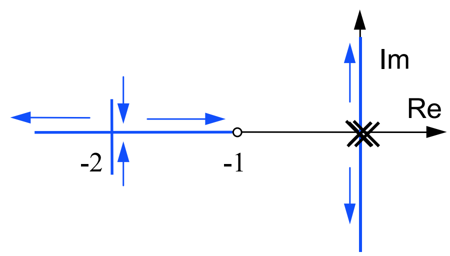
Daí:

$$\frac{dA(s)}{ds} \cdot B(s) - A(s) \cdot \frac{dB(s)}{ds} = 2s \cdot (s+1) - s^2 = s \cdot (s+2) = 0$$

Portanto o ponto de chegada sobre o eixo real se localiza em:

$$s = -2$$

5. **Ângulo de partida**: neste caso, o ângulo de partida é $\pm 90°$.



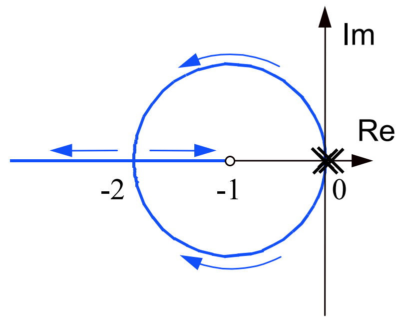
6. **Pontos de cruzamento com o eixo imaginário**: o polinômio característico em malha fechada é:

$$s^2 + ks + k = 0$$

A Tabela de Routh equivalente é mostrada ao lado. Como $k > 0$, podemos concluir que o sistema em malha fechada será sempre estável. Portanto, não haverá cruzamento do eixo imaginário.

s^2	1	k
s^1	k	
s^0	k	

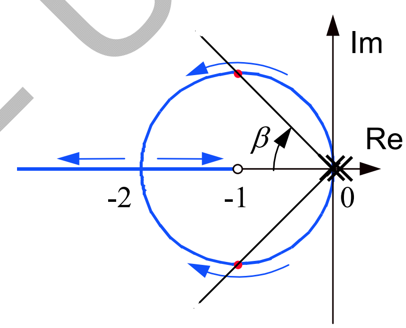
7. **Esboço do L.G.R.**: o L.G.R. pode ser esboçado conforme ilustrado abaixo, após aplicar a condição de fase a alguns pontos do plano s.



Comparando este diagrama com o do Exemplo 1, notamos que a presença do zero produziu uma "atração" do L.G.R. para próximo do ponto -1.

Neste caso, o sistema resultante é estável para qualquer valor do ganho k>0.

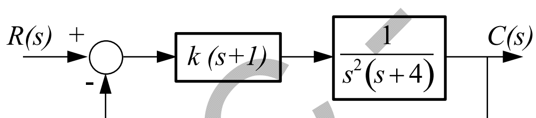
Se quisermos, por exemplo, determinar o valor de k que corresponde a $\xi = \sqrt{2}/2$, basta traçarmos as retas de amortecimento constante com ângulo $\beta = 45°$, obtermos os pontos de intersecção delas com o L.G.R. e, utilizando a condição de ganho, calcularmos o valor de k.



A condição de ganho, neste caso, fica:

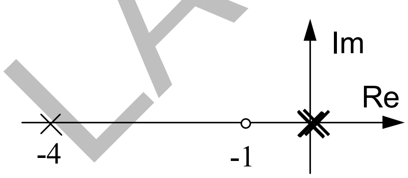
$$k = \left. \frac{|s-0| \cdot |s-0|}{|s+1|} \right|_{s=-1+j} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{1} = 2$$

Neste exemplo, a parte do L.G.R. fora do eixo real tem a forma de uma circunferência e, por isso, o valor de k acima pode ser obtido de imediato. No entanto, em casos mais gerais, é necessário desenhar o L.G.R. com uma precisão razoável e, no diagrama, **medir** os comprimentos dos segmentos $|s - p_1|$, $|s - p_2|$, ... , $|s - p_n|$, $|s - z_1|$, $|s - z_2|$, ..., $|s - z_m|$, para então calcular o valor de k através da condição de ganho.

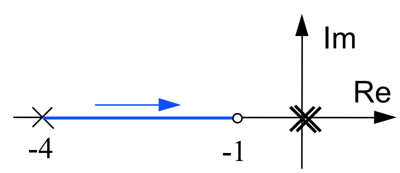


Exemplo 3: Seja agora o sistema indicado na figura ao lado. Podemos imaginar que o projetista, no Exemplo 2, tenha deixado de incluir no modelo o polo em s = -4.

1. **Pontos de início e témino do L.G.R**



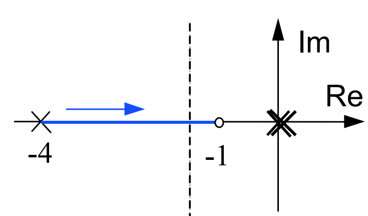
2. **L.G.R. sobre o eixo real**



3. **Assíntotas**: neste caso, n = 3 e m = 1, portanto há duas assíntotas, cujos ângulos são:

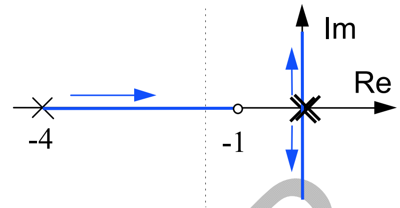
$$\alpha_1 = 90° \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 270°$$

O ponto de intersecção das assíntotas com o eixo real tem abscissa dada por:



$$s_0 = \frac{[0+0-4]-[-1]}{3-1} = -1.5$$

4. **Pontos de partida e de chegada sobre o eixo real**: no caso presente, o único trecho do eixo real onde **podem** ocorrer pontos de partida e de chegada é aquele situado entre o polo em s = -4 e o zero em s = -1. No entanto, o número de possíveis pontos de chegada deve ser igual ao de pontos de partida (eventualmente, ambos nulos).



5. **Ângulo de partida**: os ângulos de partida dos polos na origem são $\pm 90°$, já que as demais contribuições para a condição de fase nesse ponto são nulas.

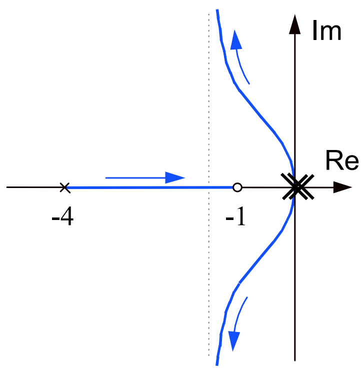
6. **Pontos de cruzamento com o eixo imaginário**: o polinômio característico em malha fechada é:

$$s^3 + 4s^2 + ks + k = 0$$

A Tabela de Routh equivalente é mostrada ao lado. Como k > 0, concluímos que o sistema será sempre estável. Ou seja, não haverá cruzamento entre o L.G.R. e o eixo imaginário.

s^3	1	k
s^2	4	k
s^1	$3k/4$	
s^0	k	

7. **Esboço do L.G.R.**: aplicando a condição de fase a alguns pontos do plano s e utilizando as considerações feitas até este ponto, podemos esboçar o L.G.R. (figura abaixo).



Comparando este diagrama com aquele obtido no Exemplo 2, notamos que a presença do polo adicional em s = -4 teve, dentre outros, o efeito de "repelir" o L.G.R. para longe de si.

Além disso, neste exemplo, a presença do referido polo fez com que se alterasse qualitativamente o comportamento do L.G.R. para valores elevados de ganho: enquanto no Exemplo 2 o sistema se tornava superamortecido (par de polos reais) para ganhos altos, neste caso, o sistema se torna oscilatório (par de polos complexos conjugados).