ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2016.2)

Prova de Recuperação – Fevereiro/2017

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Nota 1: Duração da prova: **120** minutos.	**Nota 4:** A prova pode ser feita inteiramente a lápis/lapiseira.
Nota 2: Perguntas durante a prova são **proibidas**.	**Nota 5:** Os versos das folhas podem ser utilizados para a resolução.
Nota 3: É proibido o uso de calculadoras/computadores.	**Nota 6:** Havendo **indicação adequada**, pode-se continuar a resolução de uma questão em uma página de outra questão.

Formulário

Diagonalização	**Produto vetorial**	**Produto escalar**	**Retas**	**Planos**
$Mv = \lambda v$	"Regra da mão direita"	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$	$X = A + \lambda\vec{u}$	$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
$\det(M - \lambda I) = 0$	$\vec{u}\wedge\vec{v} = \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1\\ y = y_0 + \lambda u_2\\ z = z_0 + \lambda u_3\end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1\\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2\\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3\end{cases}$
$S^{-1}MS = \Lambda$	$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$			$ax + by + cz + d = 0$

1) [4,0 pontos] Determinar a equação da reta r, que passa pelo ponto $P(-4, 0, 2)$ e é ortogonal ao plano $\pi : x - 2y - 2z = 1$. Determinar, também, o ponto de intersecção $Q = P \cap R$ e a distância de P ao plano π.

---

1) A representação paramétrica do plano π pode ser dada por

$$\begin{cases} x &= 1 + 2\lambda + 2\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases},$$

que pode ser escrita como $\pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(2, 1, 0) + \mu(2, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, enquanto representação vetorial. Um vetor ortogonal $\vec{n}$ ao plano pode, então, ser encontrado através de

$$\vec{n} = \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} = (1, -2, -2)\,.$$

Logo,

$$r : X = P + \lambda\vec{n} = (-4, 0, 2) + \lambda(1, -2, -2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Como $r \cap \pi \neq \varnothing$, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Q(-4 + \alpha, 0 - 2\alpha, 2 - 2\alpha) \in r$ também pertence ao plano π. Logo, as coordenadas de Q devem satisfazer a equação do plano, donde se tem

$$-4 + \alpha - 2\,(0 - 2\alpha) - 2\,(2 - 2\alpha) = 1\,, \quad \text{ou} \quad \alpha = 1\,.$$

Logo, $Q(-3, -2, 0)$. A distância entre o ponto P e o plano π é dada por $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|(1, -2, -2)\| = 3$.

---

2) [3,0 pontos] Uma certa agência de viagens vendeu para um turista um pacote cujo valor é de 840 reais. Desprovido de cartão de crédito e dinheiro, o turista pagou, à vista, utilizando cédulas falsas de 12, 24 e 36 reais. Sabendo-se que foram utilizadas 40 cédulas para pagar o valor exato do pacote, o objetivo deste problema é determinar todas as combinações possíveis de cédulas para o pagamento. Para tal, descrever o problema como um sistema linear $Ax = b$ e determinar

a) A imagem de A, $\mathrm{Im}(A)$.
b) O *kernel* de A, $\ker(A)$.
c) A solução completa do problema.

---

2) Denotando por ξ, η e μ o número de cédulas de 12, 24 e 36 reais, respectivamente, o problema pode ser descrito pelo sistema linear

$$\begin{cases} \xi + \eta + \mu &= 40 \\ 12\xi + 24\eta + 36\mu &= 840 \end{cases},$$

ou $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 24 & 36 \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b := \begin{pmatrix} 40 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

2a) Sendo $\operatorname{Im}(A) = \{y \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : y = Ax\,, x \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\}$, e com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 24 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Os vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 24 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 36 \end{pmatrix}$ formam uma sequência de vetores linearmente dependente. Com efeito,

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 24 \\ 1 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 12 \\ 1 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 12 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde se nota que a imagem é gerada pelo conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (as passagens no escalonamento acima foram omitidas por serem evidentes). Finalmente, tem-se

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : \xi, \eta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2b) Sendo $\ker(A) = \{x \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : Ax = 0\}$, com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \lambda & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$0 = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 24 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Com o escalonamento (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 24 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

o sistema $Ax = 0$ é equivalente a resolver

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{lcl} \xi - \mu & = & 0 \\ \eta + 2\mu & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \xi & = & \mu \\ \eta & = & -2\mu \end{array} \right. .$$

Logo, como $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T = \mu \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$\ker(A) = \left\{ \xi \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

2c) Do sistema $Ax = b$, tem-se (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 12 & 24 & 36 & 840 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 2 & 3 & 70 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 2 & 30 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 30 \end{array} \right),$$

id est, após um escalonamento simples, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{lcl} \xi - \mu & = & 10 \\ \eta + 2\mu & = & 30 \end{array} \right. .$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $\mu = 0$ no sistema acima, implicando $x_p = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \end{pmatrix}^T$.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A $(Ax_k = 0)$. Logo, do item anterior (e fazendo as devidas mudanças), chega-se à solução geral do sistema $Ax = b$, que é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \xi \in \mathbb{R} .$$

Contudo, para obter soluções realísticas e que obedeçam às condições impostas pelo problema (número de cédulas como inteiros não-negativos), o valor de ξ deve percorrer um subconjunto da reta real, que é o intervalo dos inteiros entre 0 e 15, ou $[0, 15] \subset \mathbb{Z}$:

$$x = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \xi \in [0, 15] \subset \mathbb{Z} .$$

---

3) [3,0 pontos] Determinar a fórmula geral para $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$, sendo que $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$.

---

3) A relação de recorrência acima pode ser representada por

$$u_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = M u_{n-1} , \quad n \subset \mathbb{Z}, \quad \text{com} \quad u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-1} u_1$, deve-se obter M^{n-1}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ 1 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2) ,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 4$ satisfaz

$$0 = (M - \lambda_1 I) v_1 = \begin{pmatrix} 2 - (4) & 8 \\ 1 & 0 - (4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \; \xi_1 \;=\; 4\eta_1 \quad ,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\eta_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$ satisfaz

$$0 = (M - \lambda_2 I) v_2 = \begin{pmatrix} 2 - (-2) & 8 \\ 1 & 0 - (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \; \xi_2 \;=\; -2\eta_2 \quad ,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\eta_2 = -1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} ,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1/6 & 2/3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/6 & -2/3 \end{array} \right)$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1}MS$, tem-se $M = S\Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-1} = \overbrace{\big(S\Lambda S^{-1}\big)\big(S\Lambda S^{-1}\big)\cdots\big(S\Lambda S^{-1}\big)}^{n-1 \text{ termos}} = S\Lambda^{n-1}S^{-1}\,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = S\Lambda^{n-1}S^{-1}u_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{n-1} \left[\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5\cdot 4^n + 7\,(-2)^n \\ 5\cdot 4^{n-1} + 7\,(-2)^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{6}\left[5\cdot 4^n + 7\,(-2)^n\right]\,, \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z}\,.$$