4320195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I - 1^a Prova - 12/04/2012

Nome:____ N^o USP: ________________

Professor:____ Turma: ________________

- A duração da prova é de 2 horas.
- Material: lápis, caneta, borracha, régua. O uso de calculadora é proibido
- Deixe indicada a raiz de números que não sejam quadrados perfeitos. Não é necessário fazer aproximações.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com o seu nome, número USP e o nome do seu professor, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha de respostas possuindo o mesmo número que o exercício, utilizando, se for necessário, o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários, sem esquecer as unidades das grandezas físicas pedidas.
- Deixe sobre a carteira documento de identificação (identidade ou carteira da USP)
- Revisão da prova e resultados serão anunciados no site da disciplina.

---

(1) O vetor posição de uma partícula que se move no plano XY é dado por:

$\overrightarrow{r}(t) = (20 + 20t)\hat{i} + (10t + \frac{5}{3}t^3)\hat{j}$

onde $\overrightarrow{r}$ é dado em metros e t em segundos. Determine:

(0,75) (a) o vetor velocidade instantânea da partícula, seu módulo e direção (ângulo θ em relação ao eixo X) para o instante $t = 1$ s;

(0,75) (b) o vetor aceleração instantânea da partícula, seu módulo e direção (ângulo θ em relação ao eixo X) para o instante $t = 2$ s;

(0,5) (c) o vetor deslocamento da partícula no intervalo de tempo $t = 0$ s até $t = 3$ s;

(0,5) (d) o vetor velocidade média da partícula no intervalo de tempo $t = 0$ s até $t = 3$ s.

Dado: $y(x) = ax^n \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = anx^{n-1}$

(a) O vetor velocidade instantânea pode ser obtido pela derivação do vetor posição em função do tempo, ou seja:

$$\overrightarrow{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = (20\hat{i} + (10 + 5t^2)\hat{j})m/s$$

Portanto o vetor velocidade instantânea para $t = 1$ s vale:

$$\overrightarrow{V}(1) = (20\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})m/s$$

e o módulo vale:

$$V = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25m/s$$

Direção:

$$tg\theta = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{3}{4}\right)$$

(b) O vetor aceleração instantânea pode ser obtido pela derivação do vetor velocidade em função do tempo, ou seja:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} = (10t\hat{\jmath})m/s^2$$

O módulo do vetor para $t = 2$ s vale:

$$a = 20 \text{ m/s}^2$$

Sua direção é $\hat{\jmath}$ (paralela ao eixo Y).

(c) As posições para os instantes $t = 0$ s e $t = 3$ s valem:

$$\overrightarrow{r}(0) = (20\hat{\imath})m$$

$$\overrightarrow{r}(3) = (80\hat{\imath} + 75\hat{\jmath})m$$

Portanto o deslocamento é igual a:

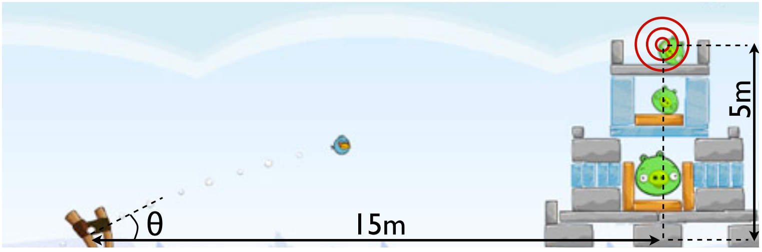
$$\triangle\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(3) - \overrightarrow{r}(0) = (60\hat{\imath} + 75\hat{\jmath})m$$

(d) A velocidade média entre os intervalos $t = 2$ s e $t = 4$ s é por definição igual a:

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\triangle\overrightarrow{r}}{\triangle t} = (20\hat{\imath} + 25\hat{\jmath})m/s$$

(2) Você tem um estilingue que arremessa projéteis a uma velocidade de 15 m/s , e pretende atingir alguns alvos com esse estilingue. Assuma que $g = 10\ m/s^2$.

(1.0) (a) Qual a distância horizontal máxima que você pode atingir com o seu projétil, assumindo que você atira o projétil desde o solo, e que o alvo também está no solo, na mesma altura do estilingue?



Questão 2, itens (b) e (c).

(1.0) (b) Você quer arremessar o seu projétil (digamos, um "angry bird") e atingir um alvo (digamos, um porquinho) que se encontra a uma distância de 15 m na horizontal, e a uma altura de 5 m na vertical, como indicado na Figura. Encontre a equação que determina o valor de $\tan\theta$ – a tangente do ângulo com o qual você deverá inclinar o seu estilingue. (Dica: lembre-se que $1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$.)

(0.5) (c) Agora, considere que entre o seu estilingue e o alvo existe um obstáculo que impede que você lance os projéteis com uma inclinação menor que 60°, ou seja, você só pode lançar projéteis com ângulos $\theta > 60^o$. Qual é o valor de $\tan\theta$ que permite que você atinja o seu alvo?

(a) As distâncias horizontal e vertical são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta\, t\ , \\ y &= v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2\ . \end{aligned}$$

Eliminando t através da primeira equação, temos que:

$$y = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2}(1+\tan^2\theta)$$

Como o alvo está no solo, $y = 0$, e a solução não-nula da equação acima é:

$$x = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Usando o máximo dessa função, que está em $\tan\theta = 1$ (ou seja, $\theta = 45^o$), temos que a distância máxima é:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} = 22,5\,\mathrm{m}\ .$$

(b) Do item acima, usando $y = 5m$, $x = 15m$, $v_0 = 15$ m/s e $g = 10$ m/s^2, temos:

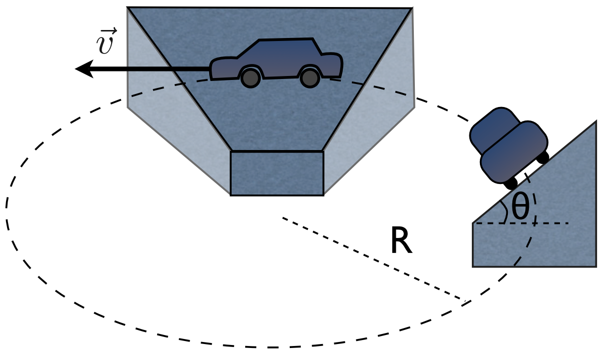
$$5 = 15\tan\theta - \frac{10\times 15^2}{2\times 15^2}(1+\tan^2\theta)\ ,$$

o que pode ser simplificado para:

$$\tan^2\theta - 3\tan\theta + 2 = 0 \; .$$

(c) As duas soluções da equação acima são $\tan\theta_1 = 1$ e $\tan\theta_2 = 2$. O ângulo da primeira solução é 45^o, portanto menor que o ângulo mínimo especificado na questão. O ângulo correspondente à segunda solução é maior do que 60^o, já que $\tan 60^o = \sqrt{3} < 2$ (de fato, $\theta \simeq 63,4^o$). Portanto, temos que $\tan\theta = 2$.

(3) Você está dirigindo um carro em uma pista circular de raio R, que é inclinada de um ângulo θ com a horizontal, como indicado na Figura. A velocidade do carro é v, constante em módulo.



(0.5) (a) Faça um diagrama de forças considerando que não existe nenhum tipo de atrito entre os pneus do carro e a pista.

(0.5) (b) Calcule a velocidade na ausência de atrito em função de R, θ e g.

(0.5) (c) Considerando que mesmo com o carro andando há uma força de atrito do tipo estático (de coeficiente μ_s) entre os pneus do carro e a pista, que evita que o carro deslize para baixo ou para cima. Faça o diagrama de forças nestes dois casos.

(1.0) (d) Com o atrito descrito no item (c) entre o pneu do carro e a pista, determine a velocidade mínima e máxima que o carro pode ter para que este não deslize.

(a) Veja a figura .

(b) No caso sem atrito, temos que a componente vertical da força normal compensa exatamente a força-peso, portanto $N\cos\theta = mg$. A resultante é a componente horizontal da normal:

$$F_{res} = N \operatorname{sen}\theta = mg\tan\theta \ .$$

Usando $F_{res} = ma_c$, e $a_c = v^2/R$, temos que $v = \sqrt{gR\tan\theta}$.

(c) Veja os diagramas de baixo da Fig. .

(d) A força de atrito estático será para cima da pista se $v < \sqrt{gR\tan\theta}$, ou para baixo da pista no caso de $v > \sqrt{gR\tan\theta}$. Vamos supor inicialmente o primeiro caso, de uma velocidade abaixo daquela na qual o atrito seria nulo. Temos então, pelo diagrama do lado esquerdo da Fig. , que as componentes na horizontal e na vertical são dadas por:

$$\begin{aligned} F_h &= N\operatorname{sen}\theta - F_s\cos\theta \qquad (1) \\ F_v &= N\cos\theta + F_s\operatorname{sen}\theta - mg = 0 \ . \end{aligned}$$

Usando que o valor *máximo* da força de atrito estático é $F_s = \mu_s N$, da segunda equação encontramos que o valor máximo da normal é $N = mg/(\cos\theta + \mu_s\operatorname{sen}\theta)$. Substituindo esse resultado na primeira equação, temos que:

$$F_h = mg\frac{\operatorname{sen}\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\operatorname{sen}\theta} \ .$$

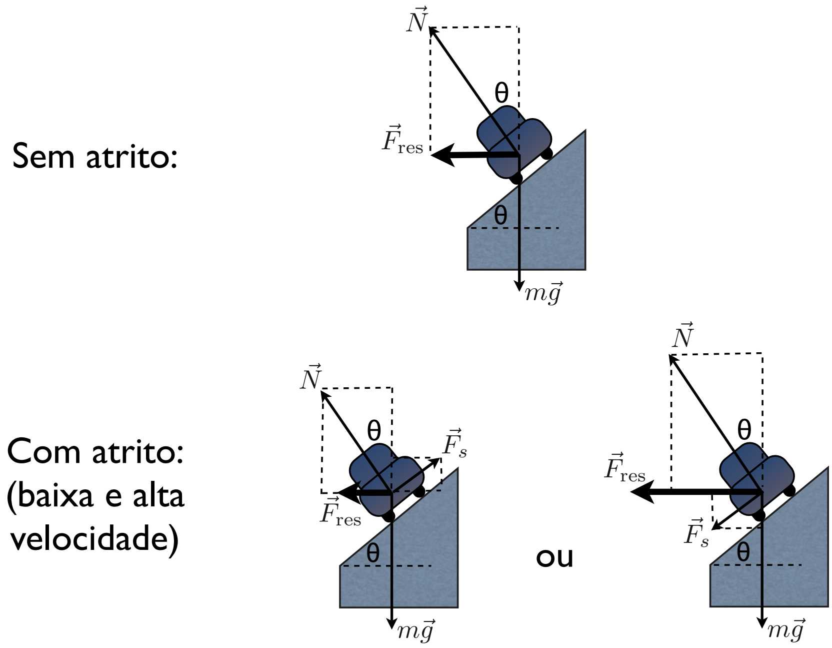


Figura 1: Questão 3, itens (a) e (c).

Como $F_h = ma_c = mv^2/R$, obtemos:

$$v_{min} = \sqrt{g\,R\,\frac{\operatorname{sen}\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\operatorname{sen}\theta}} \quad .$$

Se a velocidade for abaixo desse valor, a resultante das forças não será igual a ma_c, e o peso do carro fará com que ele deslize para baixo.

O caso em que $v > \sqrt{gR\tan\theta}$ é totalmente análogo ao anterior, bastando que se inverta o sentido da força de atrito F_s nas equações acima. O resultado é:

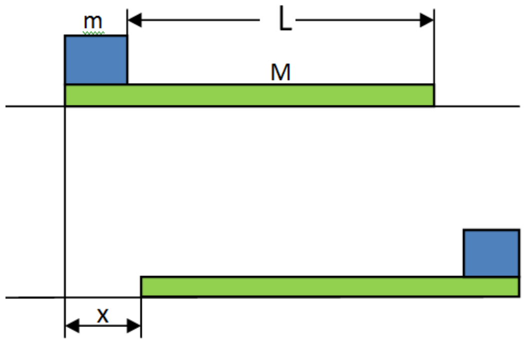
$$v_{max} = \sqrt{g\,R\,\frac{\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\operatorname{sen}\theta}} \quad .$$

Caso a velocidade seja acima desse valor, a aceleração não será suficiente para que o carro mantenha uma trajetória de movimento circular uniforme com raio R. Nesse caso, o carro vai começar a percorrer uma trajetória de menor curvatura, ou seja, ele vai começar a 'sair pela tangente'.

No caso de o carro ter uma velocidade $v_{min} < v < v_{max}$, a única variável que muda é o módulo da força normal, que pode assumir qualquer valor no intervalo:

$$\frac{mg}{\cos\theta + \mu_s\operatorname{sen}\theta} < N < \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\operatorname{sen}\theta} \; .$$

(4) Um bloco de massa $m = 2,0$ kg está apoiado sobre o lado esquerdo de um bloco de massa $M = 8,0$ kg. O coeficiente de atrito cinético entre os dois blocos é de $0,3$ e a superfície sobre a qual o bloco de $8,0$ kg está apoiado é sem atrito. Uma força horizontal constante de módulo $F = 10,0$ N é aplicada ao bloco de $2,0$ kg, colocando-o em movimento como mostrado na figura abaixo. Se a distância L que a superfície frontal do bloco menor percorre sobre o bloco maior é de $3,0$ m.



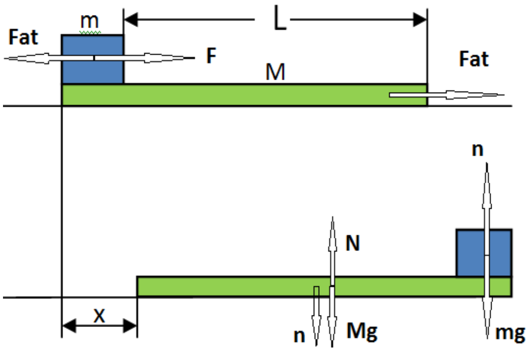
a) (0,5) desenhe todas as forças que atuam no sistema

b) (0,5) calcule a aceleração do bloco menor em relação ao solo

c) (0,5) calcule a aceleração do bloco maior em relação ao solo

d) (1,0) qual a distância x percorrida pelo bloco maior e quanto tempo o bloco menor levará até chegar ao lado direito do bloco maior?

a)



b) A aceleração do bloco menor pode ser calculada usando a segunda lei de Newton, ou seja

$$\overrightarrow{F} - \overrightarrow{F_{at}} = m\overrightarrow{a_m} \Rightarrow \overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{F} - \overrightarrow{F_{at}}}{m} = \frac{10 - 0,3.10.2}{2} = (2,0\hat{i})m/s^2$$

c) Da mesma forma obtemos que:

$$\overrightarrow{F_{at}} = Ma_M \Rightarrow \overrightarrow{a_M} = \frac{\overrightarrow{F_{at}}}{M} = \frac{0,3.10.2}{8} = (\frac{3}{4}\hat{i})m/s^2$$

d) Vamos escrever a equação de movimento para os dois blocos:

$$(x + L) = \frac{1}{2}a_m t^2$$

$$x = \frac{1}{2}a_M t^2$$

Dividindo uma equação pela outra obtemos:

$$\frac{x + L}{x} = \frac{a_m}{a_M} \Rightarrow x = \frac{9}{5}m$$

Substituindo o valor de x na segunda equação obtemos que:

$$\frac{9}{5} = \frac{1}{2}a_M t^2 \Rightarrow t = \sqrt{24/5}s$$