ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

CAPÍTULOS 8 a 11

HENRIQUE LINDENBERG NETO

2006

Agradecimentos

Apresento os meus agradecimentos aos alunos Alexandre Gross, Guilherme Radwanski Stuart, Danilo Luiz Iasi Moura e João Paulo Cecilio Leite Ribeiro pela execução das figuras e pela composição deste texto, feitas com muita competência, seriedade e esmero. O aluno Alexandre encarregou-se do Capítulo 8, o aluno Guilherme, do Capítulo 7, o aluno Danilo, dos Capítulos 6 e 9, e o aluno João Paulo, dos Capítulos 10 e 11.

O aluno Alexandre Gross, atualmente no terceiro ano do curso de engenharia ambiental da Escola Politécnica da USP, é aluno-monitor da disciplina PEF-2200 "Introdução à mecânica das estruturas" desde outubro de 2005; o aluno Guilherme Radwanski Stuart foi aluno-monitor da disciplina PEF-2200 "Introdução à mecânica das estruturas" em 2004 e 2005, o aluno Danilo Luiz Iasi Moura, em 2000 e 2001, e o aluno João Paulo Cecilio Leite Ribeiro foi aluno-monitor da disciplina PEF-124 "Introdução à mecânica das estruturas" em 1999. A elaboração das figuras e a composição deste texto fazem parte das atividades por eles desenvolvidas nas suas monitorias.

São Paulo, maio de 2006 Henrique Lindenberg Neto

8. Pórticos triarticulados

8.1 Introdução

Considerem-se as estruturas indicadas na Figura 8.1. Embora elas tenham a mesma forma e o mesmo carregamento, possuem comportamentos estruturais bastante distintos, em decorrência de suas diferentes condições de apoio. A estrutura da Figura 8.1 (a) tem como apoios uma articulação fixa e uma articulação móvel; a da Figura 8.1 (b), duas articulações fixas, indicadas por pequenos círculos, como usualmente se representam as articulações fixas deste tipo de estrutura.

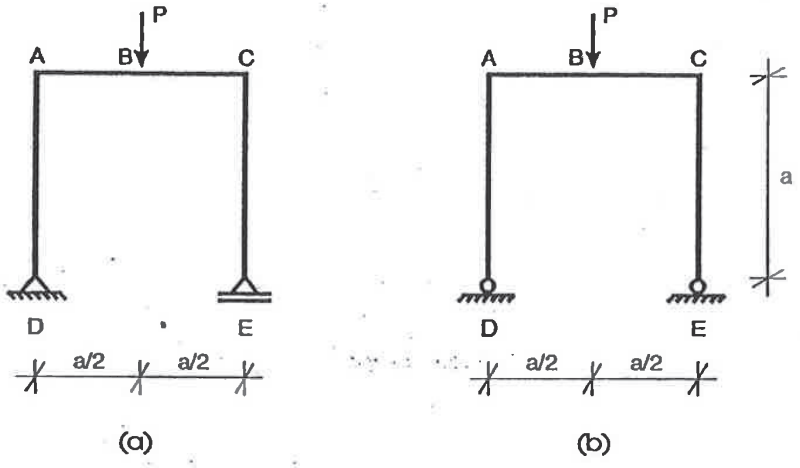


Figura 8.1

É muito fácil verificar que a estrutura da Figura 8.1 (a) é isostática, e que se tiver qualquer um de seus vínculos retirado se tornará hipostática. As reações de apoio e o diagrama de momentos fletores desta estrutura estão indicados na Figura 8.2, em que também se mostra a sua deformada.

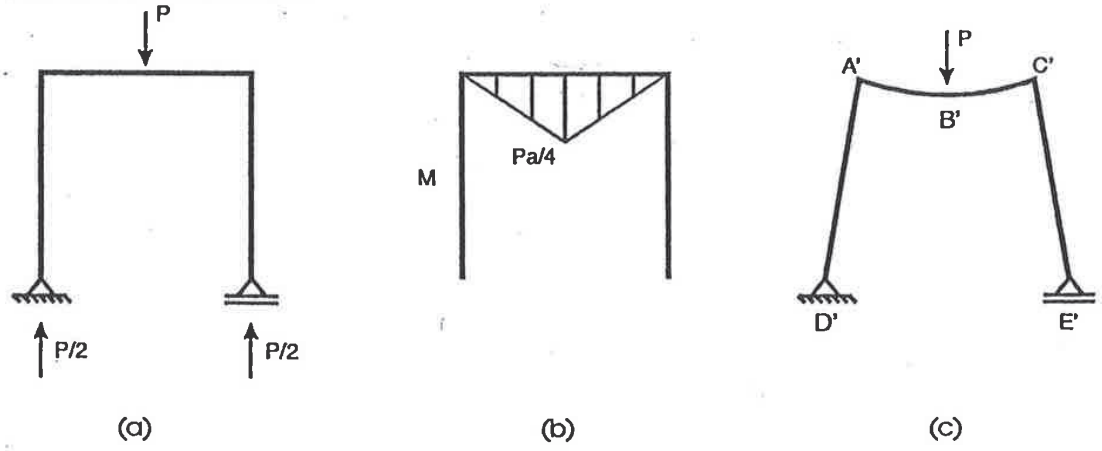


Figura 8.2

A deformada da estrutura está diretamente ligada ao diagrama de momentos fletores, pois estando uma barra solicitada por momentos fletores, ela se encurvará, isto é, ficará fletida, e sua concavidade será voltada para a região comprimida da barra, já que suas fibras longitudinais aumentam de comprimento no lado tracionado e diminuem de comprimento no lado comprimido, sendo exatamente estes alongamentos e encurtamentos que levam a barra a se encurvar.

No caso da estrutura da Figura 8.1 (a), verifica-se pelo diagrama de momentos fletores da Figura 8.2 (c) que os montantes AD e CE permanecem retos, já que neles não há momentos fletores, e que a trave AC se encurva com concavidade voltada para cima, por estar solicitada por momentos fletores que tracionam a face inferior e comprimem a face superior. Como o encurvamento desta trave leva as suas seções transversais de extremidade A e C a apresentarem rotação, os montantes deixam de ser verticais, inclinando-se, e o apoio articulado móvel E move-se para a direita.

Observa-se que, embora os montantes tenham se inclinado e a trave superior da estrutura tenha se encurvado, as barras da estrutura, que eram ortogonais entre si antes da aplicação da força P, continuam ortogonais entre si na estrutura deformada. Na Figura 8.3 (a) apresenta-se um detalhe do nó A da estrutura indeformada, e na Figura 8.3 (b), um detalhe do nó A' da estrutura deformada, verificando-se que as tangentes aos eixos das barras de ambas as estruturas são ortogonais no nó.

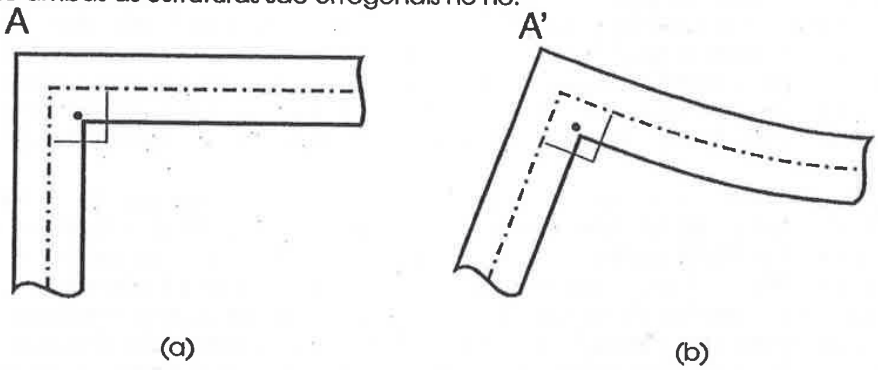


Figura 8.3

É conveniente repetir aqui uma observação que já foi sido feita na Nota 5.8 do Capítulo 5: na determinação dos esforços solicitantes desta estrutura, considerou-se a sua configuração indeformada, isto é, a configuração que ela possuía antes da aplicação da força P. É muito fácil verificar pela Figura 8.2 (c) que, se se considerar a estrutura na configuração deformada, os seus esforços solicitantes serão outros e que haverá momento fletor nos montantes, que não ficarão mais retos, encurvando-se. Como já se comentou no Capítulo 5, o modelo de cálculo que se está adotando, em que se despreza a deformação da estrutura na determinação dos esforços solicitantes, só poderá ser empregado quando os esforços solicitantes obtidos com a consideração da configuração indeformada forem muito próximos daqueles obtidos com a consideração da deformação da estrutura.

Dá-se o nome de efeitos de primeira ordem àqueles decorrentes dos esforços solicitantes obtidos considerando-se a estrutura indeformada e de efeitos de segunda ordem os efeitos adicionais decorrentes da consideração da deformação da estrutura. É claro que o modelo que leva em conta a deformação da estrutura representa melhor a estrutura

real. Ele é, entretanto, muitíssimo mais complexo que o modelo mais simples, pois nele os momentos fletores dependerão da deformação da estrutura, que, por sua vez, dependerá dos momentos fletores. Esta interdependência entre os momentos fletores e a deformação da estrutura levará a ter-se que integrar uma equação diferencial para obter o diagrama de momentos fletores, em suma, a um modelo muitíssimo mais complexo para a estrutura. Por esta razão, quando os efeitos de segunda ordem forem muito menores que os de primeira ordem, a estrutura ficará muito bem representada pelo modelo simples em que se considera a configuração indeformada para determinar os esforços solicitantes. Quando os efeitos de segunda ordem não forem desprezíveis, como, por exemplo, no caso dos pilares esbeltos – pilares longos com pequenas seções transversais –, será necessário utilizar a configuração deformada na obtenção dos esforços solicitantes. Este modelo mais complexo será visto mais adiante no curso, quando se estudarem a flexão composta das barras esbeltas e a estabilidade do equilíbrio.

É mais uma vez importante lembrar que o princípio de superposição dos efeitos só é válido quando se usa o modelo em que se utiliza a configuração indeformada da estrutura para obter os esforços solicitantes, não podendo ser aplicado quando os efeitos de segunda ordem são levados em consideração.

Examinando agora a estrutura da Figura 8.1 (b), não é difícil perceber que ela é hiperestática: se, por exemplo, o apoio fixo da direita for transformado em uma articulação móvel que permita o movimento horizontal do ponto E, a estrutura da Figura 8.1 (b) ficará exatamente igual à estrutura da Figura 8.1 (a), que, como se acaba de ver, é isostática. Como nenhum outro vínculo poderá ser retirado sem que ela venha a poder apresentar movimento de corpo rígido, a estrutura da Figura 8.1 (b) possui grau de hiperestaticidade igual a um, ou, como normalmente se diz, é uma vez hiperestática.

Na Figura 8.4 mostram-se as reações que os apoios podem introduzir na estrutura da Figura 8.1 (b). Pode-se imediatamente perceber que as equações de equilíbrio não são suficientes para a determinação das reações de apoio, já que se tem quatro reações de apoio a determinar e só três equações de equilíbrio linearmente independentes. O fato de se ter um maior número de reações de apoio que de equações de equilíbrio decorre do fato de a estrutura ser hiperestática, e o fato de se ter uma reação de apoio a mais que o número de equações de equilíbrio decorre do fato de a estrutura ser uma vez hiperestática.

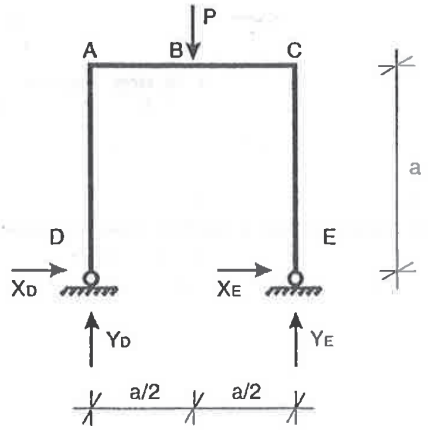


Figura 8.4

Apesar de as reações de apoio horizontais não poderem ser determinadas pelas equações de equilíbrio, as reações verticais podem sê-lo, como se mostra a seguir:

$$\sum X = 0 \qquad X_D + X_E = 0 \qquad (8.1)$$

$$\sum Y = 0 \qquad Y_D - P + Y_E = 0 \qquad (8.2)$$

$$\sum M_D = 0 \qquad -P \cdot \frac{a}{2} + Y_E \cdot a = 0 \;\Rightarrow\; Y_E = \frac{P}{2} \qquad (8.3)$$

Da equação (8.2), obtém-se que $Y_D = \frac{P}{2}$. Como já era de se esperar, em decorrência da simetria da estrutura e do seu carregamento, as duas reações verticais da estrutura são iguais.

As reações horizontais, como se havia mencionado, não podem ser determinadas, pois na equação (8.1) tem-se duas incógnitas. A informação que pode-se obter desta equação é que as reações horizontais da estrutura são iguais em intensidade e opostas em sentido, o que está de acordo com a simetria da estrutura e do carregamento.

Há várias formas de se determinar as reações horizontais desta estrutura, e aqui será apresentada uma destas alternativas, que é muito simples e de significado físico muito claro.

Comentou-se acima que a estrutura da Figura 8.1 (b) tornar-se-ia isostática se a articulação fixa em E fosse transformada em uma articulação móvel. É o que se faz na Figura 8.5 (a), verificando-se que a estrutura ficou exatamente igual à estrutura isostática da Figura 8.1 (a), cuja deformada, já mostrada na Figura 8.2 (c), é reapresentada na Figura 8.5 (b). Imagine-se agora que uma força horizontal X seja aplicada no ponto E' da estrutura da Figura 8.5 (b), como mostrado na Figura 8.5 (c). Sob a ação desta força, o apoio móvel se deslocará para a esquerda, e para cada valor de X apresentará um diferente deslocamento. Existe um particular valor H da força X que fará com que o ponto E' volte para posição original do ponto E, isto é, que anulará o deslocamento horizontal decorrente da liberação do impedimento ao movimento horizontal do ponto E. Comparando agora as Figuras 8.4 e 8.5 (c), verifica-se que a reação horizontal X_E da estrutura da Figura 8.4, que impede que o ponto E apresente deslocamento horizontal, deve ser igual à força H que impede que o ponto E da estrutura da Figura 8.5 (c) tenha deslocamento horizontal, já que se trata de duas estruturas com a mesma forma e o mesmo carregamento e seus apoios apresentam os mesmos deslocamentos. A diferença entre elas é que, no caso da estrutura da Figura 8.4, a força horizontal é um esforço externo reativo introduzido pelo apoio, e, no caso da estrutura da Figura 8.5 (c), ela é um esforço externo ativo aplicado na extremidade inferior do montante CE. Estas duas forças, entretanto, por produzirem exatamente os mesmos efeitos, são iguais. Em outras palavras, de forma bem informal, pode-se dizer que a estrutura não distingue a situação da Figura 8.4, em que a força horizontal é aplicada pelo apoio, da situação da Figura 8.5 (c), em que a força horizontal é uma força externa ativa aplicada na base do montante. Em ambos os casos, forças horizontais aplicadas no mesmo ponto levam o ponto E a não se deslocar, logo as duas forças são iguais.

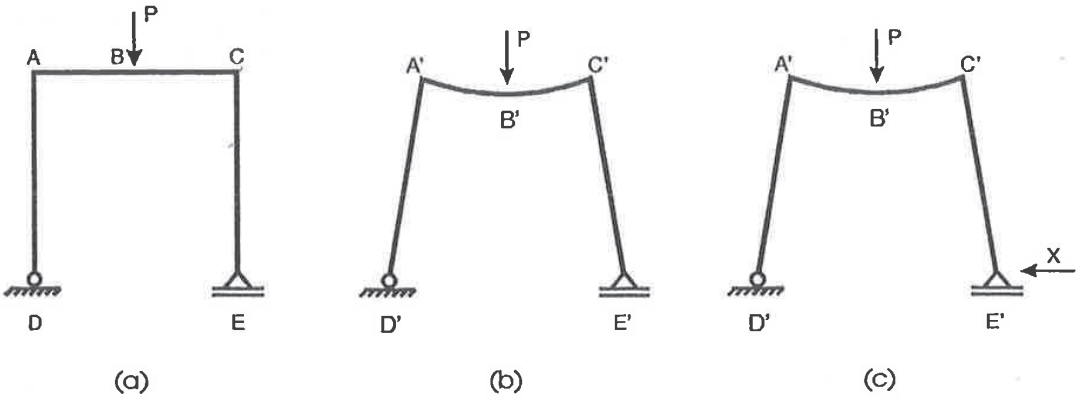


Figura 8.5

A reação horizontal em E pode então ser obtida transformando a estrutura em isostática e determinando o esforço que deve ser aplicado na estrutura isostática para anular o deslocamento decorrente da liberação da estrutura.

A força H recebe o nome de empuxo, e para sua determinação é necessário levar em conta as características de deformabilidade do material da estrutura e as características geométricas da estrutura. Por estar fora do escopo desta disciplina, a determinação do empuxo H não será aqui apresentada e será feita mais adiante no curso.

Deve-se observar que a existência de um empuxo horizontal orientado para o interior da estrutura já era de se esperar, pois, sob a ação da força P, a tendência da estrutura é de abrir-se, sendo então necessário que os apoios introduzam esforços que impeçam a abertura sua, isto é, forças horizontais orientadas para o seu interior.

Na Figura 8.6 apresentam-se as reações de apoio da estrutura da Figura 8.1 (b), o seu diagrama de momentos fletores e a sua deformada.

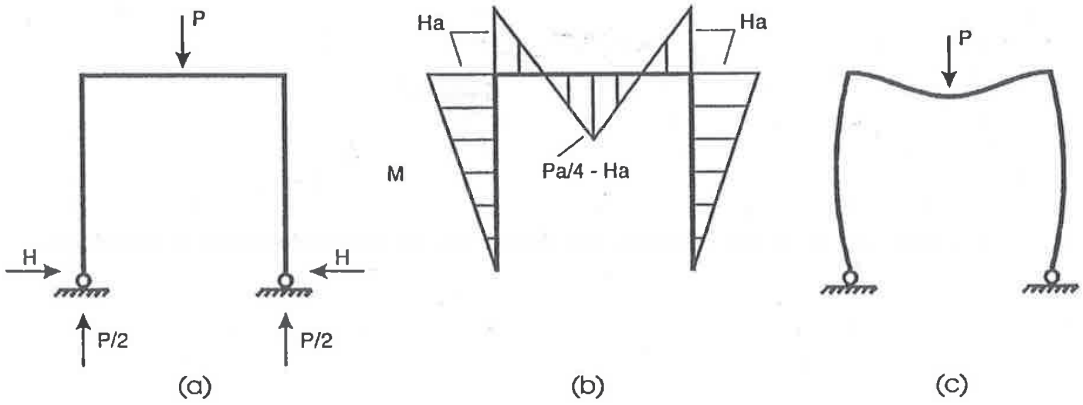


Figura 8.6

A estrutura da Figura 8.1 (a) recebe o nome de viga poligonal e a da Figura 8.1 (b), o nome de pórtico biarticulado. O que caracteriza a estrutura da Figura 8.1 (b) como sendo um pórtico é o fato de os seus apoios não poderem apresentar deslocamento horizontal, o que, como já se observou, leva ao aparecimento dos empuxos horizontais. O apoio direito da viga poligonal não impede o seu deslocamento horizontal, e não surgem reações horizontais na estrutura.

Pórticos biarticulados como o da Figura 8.1 (b), pórticos triarticulados como o da Figura 8.7 (a) e pórticos biengastados como o da Figura 8.7 (b) são muito utilizados como estruturas de galpões.

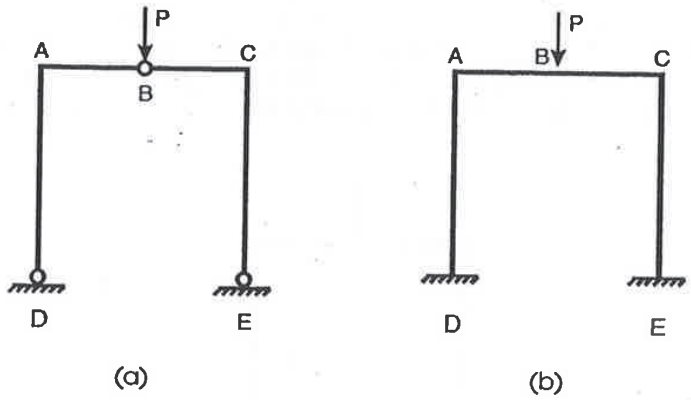


Figura 8.7

O que caracteriza estas três estruturas como pórticos é o fato de seus apoios não poderem apresentar deslocamento horizontal, o que os leva a introduzirem empuxos horizontais nestas três estruturas.

Os pórticos biarticulados, como se verificou, são estruturas uma vez hiperestáticas, e os biengastados são três vezes hiperestáticos, como se pode facilmente constatar. Já os pórticos triarticulados, objetos deste Capítulo, são isostáticos, pois a retirada de qualquer um de seus vínculos leva-os a poderem apresentar movimento de corpo rígido. Caso, por exemplo, a articulação fixa do apoio E do pórtico da Figura 8.7 (a) seja transformada em articulação móvel, este apoio irá se deslocar para a direita, e a estrutura só irá parar quando encostar no chão, como mostrado na Figura 8.8. As duas partes do pórtico mantiveram sua forma original, suas barras tendo permanecido retas: a parte esquerda do pórtico girou em torno do apoio esquerdo, e a parte direita apresentou translação horizontal e rotação em torno do apoio direito, todos movimentos de corpo rígido.

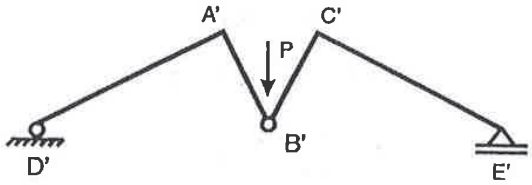


Figura 8.8

Estruturas isostáticas e estruturas hiperestáticas apresentam comportamentos estruturais bastante distintos, que merecem ser examinados com algum detalhe.

Na análise que acaba de ser feita do comportamento do pórtico biarticulado da Figura 8.1 (b) e da técnica apresentada para determinar seu empuxo, imaginou-se que seus apoios não apresentassem deslocamentos horizontais.

No caso de um pórtico real, entretanto, os apoios sempre apresentarão um deslocamento horizontal, mesmo que pequeno, como se pode constatar ao examinar o pórtico da Figura 8.9, apoiado em blocos de estacas. Os apoios introduzem um empuxo no pórtico (Figura 8.9 (a)), que, por sua vez, introduz esforços iguais e contrários nos blocos, como se mostra na Figura 8.9 (b). Sob a ação destes esforços, os apoios sempre irão apresentar um movimento horizontal, já que tanto as estacas como o solo são deformáveis. Observações semelhantes se aplicam às cargas verticais, que levarão os blocos a também apresentar deslocamentos verticais.

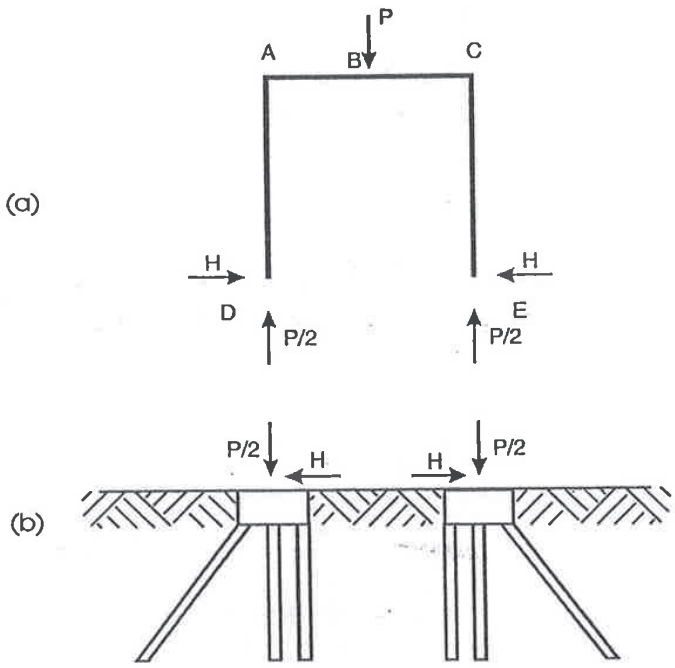
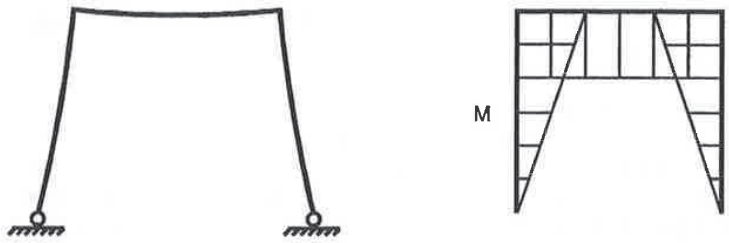


Figura 8.9

Estes deslocamentos dos apoios introduzem esforços na estrutura?

Embora a força vertical P aplicada no pórtico leve os blocos a apresentarem tanto deslocamentos horizontais como verticais, os efeitos destes deslocamentos podem ser estudados separadamente, e, para responder à pergunta que acaba de ser formulada, para simplificar a análise será examinado apenas o efeito dos deslocamentos horizontais sobre o pórtico.

Na Figura 8.10 (a) mostra-se a deformada do pórtico biarticulado da Figura 8.9, decorrente dos deslocamentos horizontais dos seus apoios, tendo-se omitido o desenho dos blocos para tornar a figura mais simples. Observa-se que as barras do pórtico deixaram de ser retas, encurvando-se, o que indica que nelas atuam momentos fletores; o aspecto do diagrama de momentos fletores deste pórtico é apresentado na Figura 8.10 (b).



(a) (b)

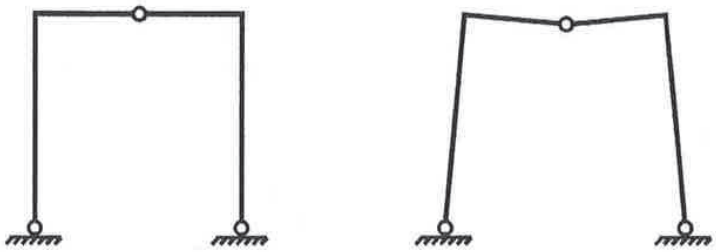
Figura 8.10

Verifica-se, portanto, que os deslocamentos horizontais dos apoios introduziram esforços no pórtico.

Se os esforços decorrentes dos deslocamentos horizontais dos apoios forem muito pequenos em comparação com os esforços obtidos com a hipótese de os apoios serem indeslocáveis, o efeito dos deslocamentos horizontais dos apoios poderá ser desprezado, e a estrutura poderá ser calculada supondo-se os apoios indeslocáveis, como se procedeu ao determinar o empuxo H por meio da estrutura isostática da Figura 8.5. Se os esforços decorrentes dos deslocamentos horizontais dos apoios forem grandes, eles terão que ser levados em conta no projeto da estrutura.

Como se mencionou há pouco, estruturas isostáticas e hiperestáticas apresentam comportamentos bastante distintos, o que poderá ser constatado ao examinar-se agora o efeito que os deslocamentos horizontais dos apoios têm sobre o pórtico triarticulado da Figura 8.7 (a).

Na Figura 8.11 (a), mostra-se o pórtico triarticulado antes dos deslocamentos dos apoios, e, na Figura 8.11 (b), depois destes deslocamentos.



(a) (b)

Figura 8.11

Verifica-se agora que todas as barras do pórtico triarticulado permaneceram retas, o que mostra que nelas não surgiram momentos fletores. A forma da estrutura, entretanto, modificou-se, em decorrência dos movimentos de corpo rígido das duas metades do pórtico, que apresentaram uma translação horizontal e uma rotação em torno dos seus apoios.

Os comportamentos destes dois pórticos face aos deslocamentos dos apoios são muito distintos: na estrutura biarticulada eles introduziram esforços e na estrutura isostática não introduziram esforços.

Quando, então, os deslocamentos dos apoios introduzem esforços na estrutura? A resposta a esta pergunta é simples: quando a estrutura opõe resistência à mudança de forma que eles introduzem. No caso do pórtico triarticulado, os deslocamentos dos apoios levam os montantes a inclinar-se, e a estrutura não oferece nenhuma resistência a esta mudança de forma, uma vez que as suas duas metades podem girar livremente em torno da articulação superior B. Já no caso do pórtico biarticulado, a trave horizontal oferece resistência à inclinação dos montantes, tendo que ser fletida para que eles possam inclinar-se, o que leva ao aparecimento dos momentos fletores na estrutura.

Esta diferença de comportamento entre as estruturas isostáticas e hiperestáticas também se manifesta em outras duas situações: quando ocorrem variações de temperatura e quando se tem defeitos de montagem. Em ambos os casos, as diferenças de comportamento entre as estruturas isostáticas e hiperestáticas decorrem do fato que acaba de ser analisado: a resistência oferecida pela estrutura à mudança de forma nela introduzida por estas ações.

Considere-se o pórtico triarticulado da Figura 8.12 (a). Um aumento uniforme da temperatura de sua trave superior leva-o a girar para fora em torno dos apoios, e o pórtico fica com a forma indicada na Figura 8.12 (b); como ele não oferece nenhuma resistência a este movimento, nele não surgem esforços e suas barras permanecem retas. Uma diminuição uniforme da temperatura da trave superior leva-o a girar para dentro em torno dos apoios, ficando com a forma apresentada na Figura 8.12 (c); novamente, não são introduzidos esforços na estrutura.

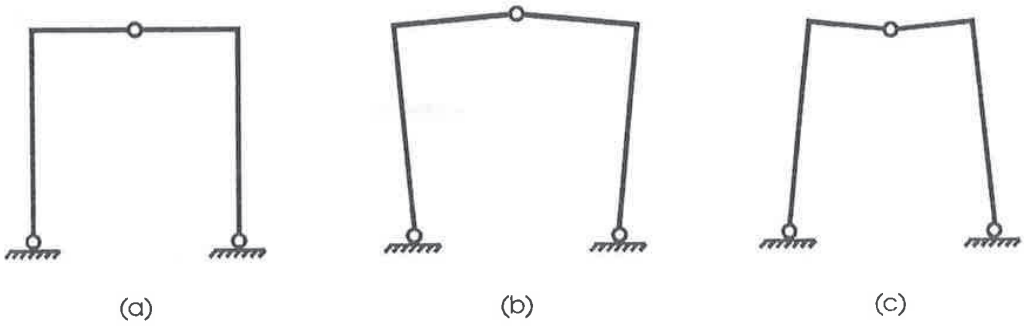


Figura 8.12

Na Figura 8.13 (b) mostra-se a deformação do pórtico biarticulado da Figura 8.13 (a) produzida por um aumento uniforme da temperatura da trave superior. Como a estrutura opõe resistência à mudança de forma decorrente da variação de temperatura, surgem momentos fletores em suas barras, que se encurvam. Na Figura 8.13 (c), apresenta-se o aspecto do diagrama de momentos fletores deste pórtico biarticulado.

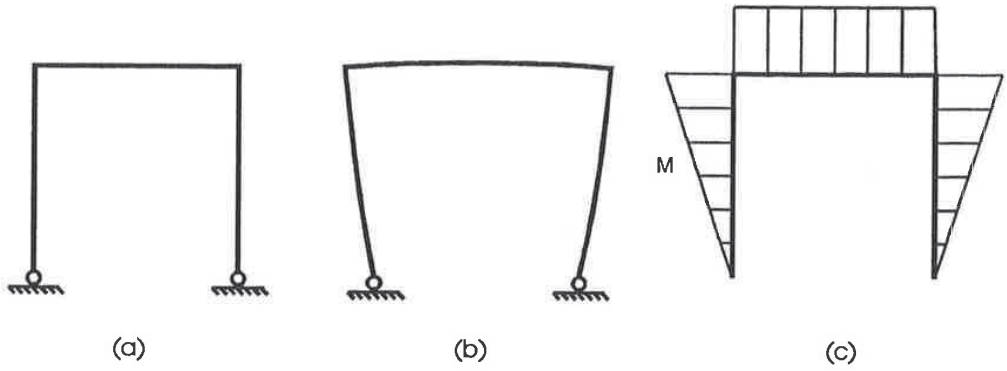


Figura 8.13

Dá-se o nome de defeitos de montagem aos efeitos decorrentes do fato de os diversos elementos que compõem a estrutura não terem ficado em sua fabricação exatamente com as dimensões previstas no projeto.

Imagine-se que os pórticos triarticulado e biarticulado que estão sendo examinados sejam metálicos, construídos em uma fábrica e levados à obra para serem montados. Quase que certamente as suas dimensões não serão as mesmas de seu projeto. Suponha-se, por exemplo, que a trave superior de ambos tenha ficado maior que o previsto. No caso do pórtico triarticulado, para unir suas duas partes será necessário girá-las em torno de suas bases e uni-las por meio do pino da articulação superior em B. O pórtico ficará então com um aspecto semelhante ao do pórtico da Figura 8.12 (b). A montagem não introduzirá esforços na estrutura, e suas barras permanecerão retas.

No caso do pórtico biarticulado, a situação será outra. Na Figura 8.14, mostra-se o pórtico com a base C do montante esquerdo já ligada ao apoio; como sua trave superior ficou mais longa que o previsto, sua base D não ficará mais exatamente sobre o apoio D*, e, para fixá-lo à base, será necessário aplicar uma força horizontal que leve a sua extremidade inferior D a coincidir com o apoio D*, e aí então colocar o pino. Para montar o pórtico é necessário deformá-lo, e, uma vez montado, ele terá aspecto semelhante ao do pórtico da Figura 8.13 (b). Suas barras ficarão encurvadas, denotando a presença de momentos fletores.

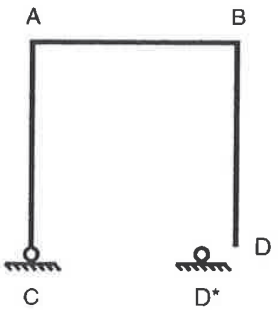


Figura 8.14

Como se acaba de verificar, deslocamentos de apoio, variações de temperatura e defeitos de montagem levam ao aparecimento de esforços na estrutura quando esta resiste às mudanças de forma produzidas por estas ações. Quando a estrutura não opõe resistência às mudanças de forma produzidas por estas ações, não surgem esforços na estrutura.

Uma construção da cidade de São Paulo que é extremamente conhecida, mas que poucos sabem ter sua estrutura principal formada por pórticos triarticulados é o Viaduto do Chá, mostrado na Figura 8.15 em fotografia tirada na época de sua inauguração.

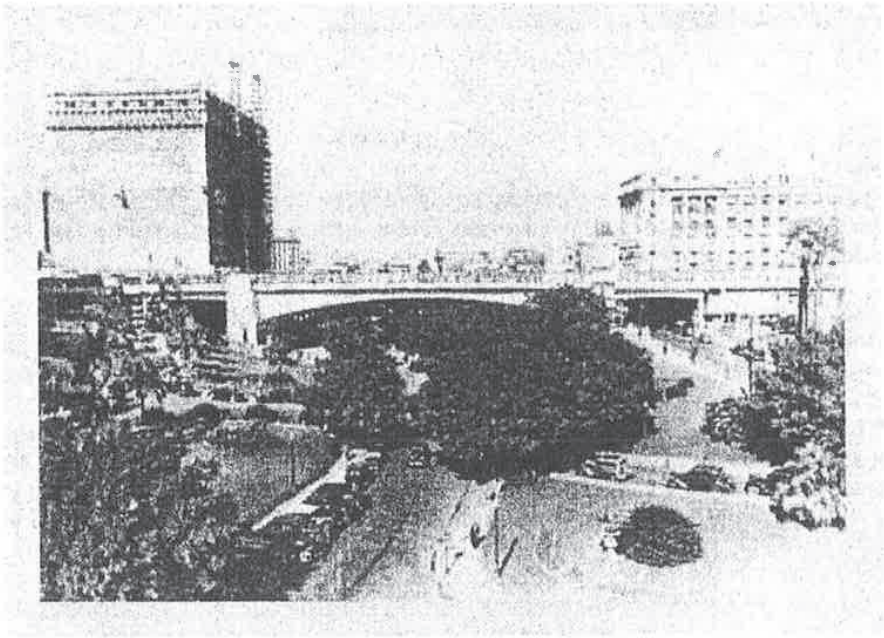


Figura 8.15 (1)

Em 1935, foi aberto um concurso para o projeto do novo viaduto sobre o vale do Anhangabaú, que deveria substituir o viaduto metálico que, desde 1892, fazia a ligação do centro velho ao centro novo da cidade, e que na década de 1930 já não comportava mais o tráfego do centro da cidade, que havia aumentado muito e estava a exigir uma passagem mais larga sobre o vale. Venceu o concurso o projeto do arquiteto Elisiário da Cunha Bahiana e do engenheiro Gustavo Andréas Gam, e o novo Viaduto do Chá, construído pela Companhia Construtora Nacional, foi inaugurado no dia 18 de abril de 1938.

O memorial descritivo do Viaduto do Chá apresentado pela Companhia Construtora Nacional foi publicado no número de maio de 1936 da Revista de Engenharia Mackenzie, e nele são discutidas as razões que levaram à escolha do sistema estrutural do viaduto (3).

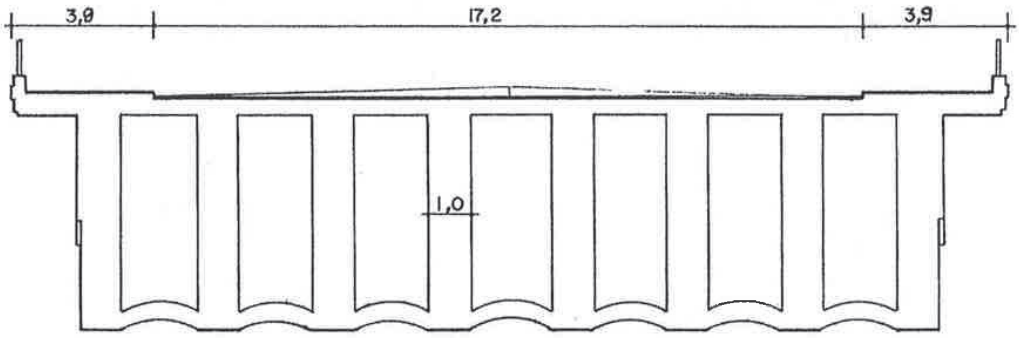
A primeira frase do memorial explica que a natureza do subsolo impunha a escolha de um sistema isostático para o viaduto. Como analisou-se há pouco, os deslocamentos dos apoios de uma estrutura isostática não introduzem esforços na estrutura, ao passo que introduzem esforços nas estruturas hiperestáticas. Em uma região com um solo muito deformável, o emprego de estruturas isostáticas evita os esforços decorrentes de grandes

deslocamentos dos apoios, e esta foi a razão da escolha de um sistema isostático para a estrutura do Viaduto do Chá.

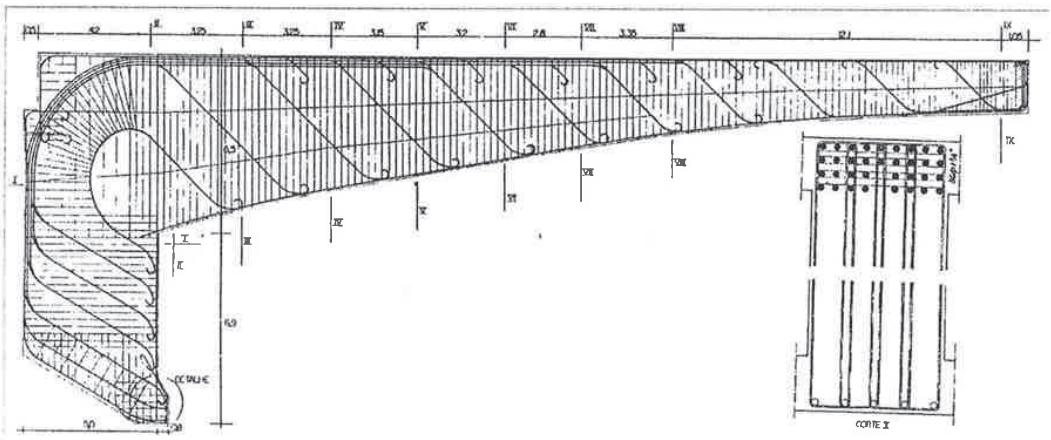
A opção por um pórtico triarticulado deve-se ao grande vão de 66 m que deveria ser vencido, ao fato de que um pórtico levaria a empuxos menores que um arco triarticulado - que, como se verá no próximo capítulo desta apostila, também é uma estrutura isostática - e por permitir o gabarito desejado junto aos apoios.

Verifica-se, portanto, que a escolha do pórtico triarticulado como sistema estrutural do Viaduto do Chá decorreu principalmente do fato de ser uma estrutura em que os deslocamentos dos apoios não introduzem esforços.

A estrutura principal do Viaduto do Chá é assim constituída por oito pórticos triarticulados paralelos que dão apoio ao tabuleiro do viaduto, sendo inferiormente ligados por uma laje que impedem que sejam vistos externamente. Na Figura 8.16, apresenta-se a seção transversal do Viaduto do Chá (Figura 8.16 (a)) e o esquema das armaduras de uma das metades de um dos pórticos triarticulados (Figura 8.16 (b)), ambos reproduzidos da obra de Vasconcelos (4).



(a)



(b)

Figura 8.16

Uma construção histórica notável que possuía pórticos triarticulados como elementos estruturais principais era a "Galerie des machines" (Galeria das máquinas), mostrada na Figura 8.17.

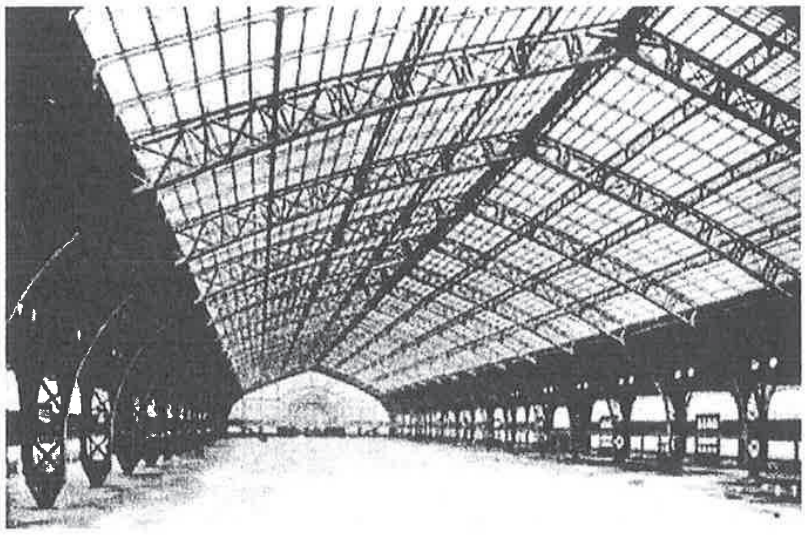


Figura 8.17 (5)

Construída para abrigar a exposição de máquinas da Exposição Universal de 1889, realizada em Paris, era, depois da Torre Eiffel, a segunda maior atração da feira. Projetada pelo arquiteto Ferdinand Dutert e pelo engenheiro Victor Contamin, que a calculou, a "Galerie des machines" tinha 420 m de comprimento, 115 m de largura e 43,5 m de altura, abrigando a maior área até então já coberta por um edifício.

Sua estrutura de aço era constituída por uma série de pórticos triarticulados com 115 m de vão, e, também no caso desta construção, os pórticos triarticulados foram adotados por razões bem objetivas: para facilitar o cálculo da estrutura e facilitar sua montagem (6).

Comentou-se no início deste capítulo que, sendo os pórticos triarticulados isostáticos, suas reações de apoio - e os esforços solicitantes em suas barras - podem ser calculados apenas com o emprego das equações de equilíbrio da estática. No caso das estruturas hiperestáticas, para a determinação das reações de apoio - e dos esforços solicitantes -, além das equações de equilíbrio da estática, são necessárias equações adicionais, ligadas à deformação da estrutura, como se mostrou ao se discutir a obtenção das reações de apoio do pórtico biarticulado da Figura 8.4.

Uma das razões que levaram os engenheiros franceses e alemães a passarem a utilizar estruturas triarticuladas - pórticos e arcos - em meados do século XIX foi exatamente o fato de que eram capazes de calcular os esforços que atuam nestas estruturas, pois o cálculo dos pórticos e arcos biarticulados ainda não estava totalmente dominado (7). O emprego de estruturas triarticuladas conferia assim muito maior segurança ao projeto de estruturas de grande porte; é exatamente o que ocorreu no caso da "Galerie des machines", a cobertura mais extensa até então construída e que até hoje é uma das maiores coberturas já feitas.

Na Figura 8.18, mostra-se o detalhe do apoio de um dos pórticos triarticulados da Galerie des machines", e chama-se a atenção para três pessoas que aparecem nesta fotografia, permitindo assim ter-se uma idéia das dimensões monumentais desta estrutura.

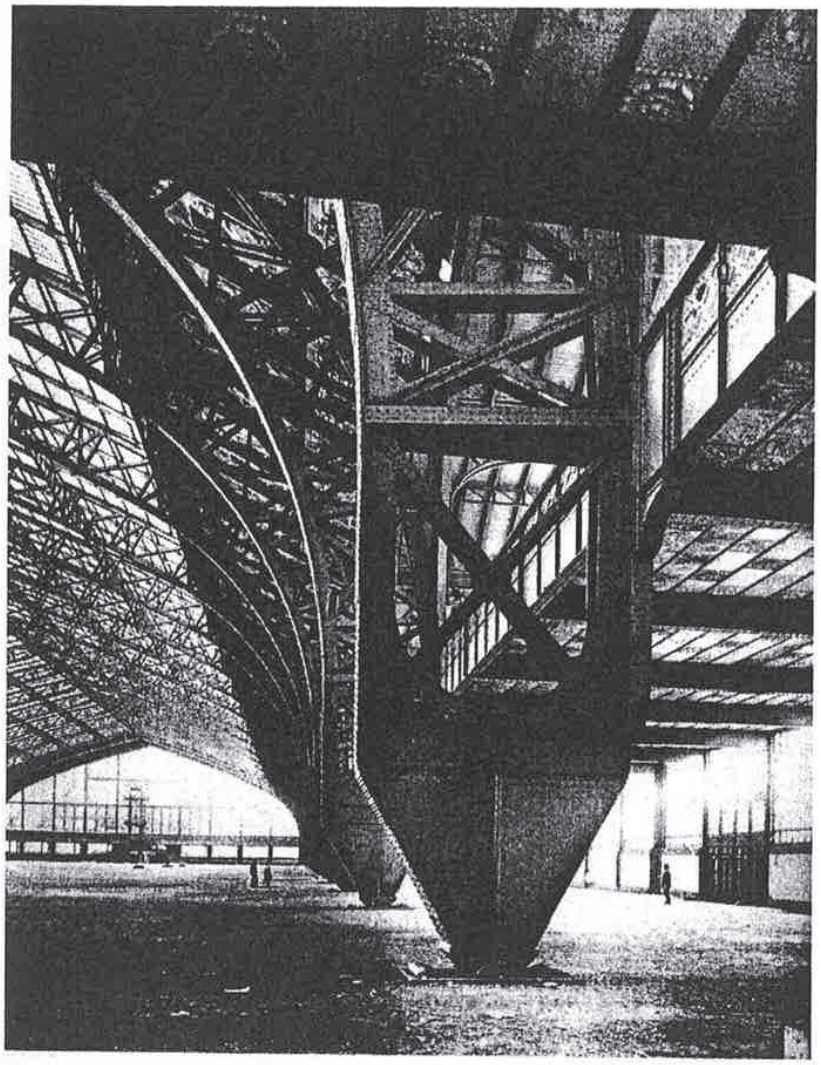


Figura 8.18 (8)

A "Galerie des machines" foi utilizada também na Exposição Universal de 1900, e, posteriormente, até ter sido desmontada em 1909, foi empregada para a realização de competições de hipismo e como hangar para dirigíveis. Na Figura 8.19, mostra-se a "Galerie des machines" sendo usada para a realização de uma exposição de animais, e, na Figura 8.20, como hangar de um dirigível; esta última fotografia revela mais uma vez o enorme tamanho que tinha esta construção.

Figura 8.19 (9)

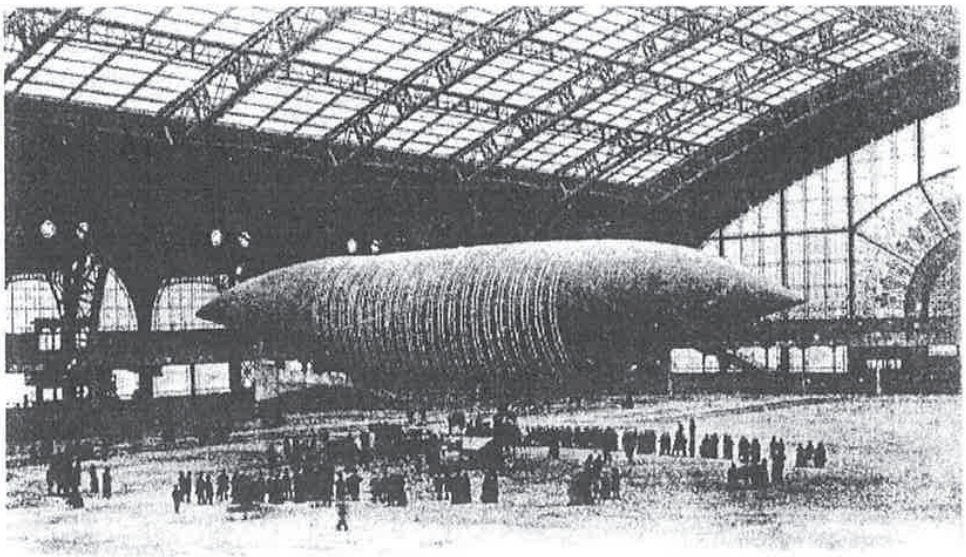


Figura 8.20 (10)

8.2 Resolução dos pórticos triarticulados

Feita esta discussão introdutória sobre o comportamento estrutural dos pórticos triarticulados, será feita agora a sua resolução, isto é, a determinação dos esforços solicitantes que neles atuam.

Exemplo 8.1

Traçar os diagramas de esforços solicitantes do pórtico triarticulado da Figura 8. 21.

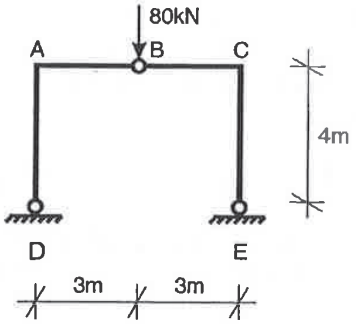


Figura 8.21

Para obter os esforços solicitantes deste pórtico triarticulado, vai-se proceder exatamente como no caso das estruturas analisadas no Capítulo 4: os esforços solicitantes serão determinados por meio do teorema do corte.

Para empregá-lo, é necessário conhecer as reações de apoio do pórtico, que serão agora determinadas. Na Figura 8.22, estão indicadas as reações que se deseja obter.

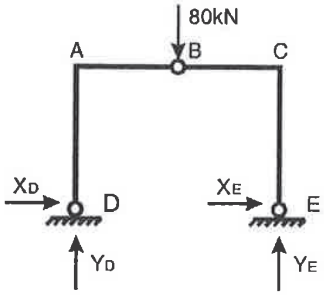


Figura 8.22

Sob a ação do carregamento externo ativo - a força de 80 kN aplicada em B - e dos esforços externos reativos, o pórtico estará em equilíbrio, logo as equações de equilíbrio da estática devem ser satisfeitas:

$$\sum X = 0 \qquad X_D + X_E = 0 \qquad (8.4)$$

$$\sum Y = 0 \qquad Y_D - 80 + Y_E = 0 \qquad (8.5)$$

$$\sum M_D = 0 \qquad -80 \cdot 3 + Y_E \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_E = 40\,kN \qquad (8.6)$$

Da equação (8.5), obtém-se o valor de Y_D:

$$Y_D = 80 - Y_E = 40\,kN \qquad (8.7)$$

Embora as equações de equilíbrio tenham permitido obter Y_D e Y_E, elas não são suficientes para a determinação das reações horizontais, já que se tem duas incógnitas a encontrar - X_D e X_E - e apenas uma das equações de equilíbrio ainda não foi usada, a equação (8.4), da qual se conclui apenas que as duas reações horizontais devem ser iguais e contrárias, isto é, que

$$X_D = -X_E \qquad (8.8)$$

Como a estrutura é isostática, deve ser possível, entretanto, a obtenção de todas as reações de apoio por meio de equações de equilíbrio da estática.

Poder-se-ia imaginar que, impondo-se o equilíbrio dos momentos de todos os esforços externos que atuam no pórtico em relação a um ponto diferente do que já foi considerado - o ponto D - seria possível obter uma das reações horizontais. Este procedimento, entretanto, não iria dar certo, pois, sendo a estrutura plana, o número máximo de equações de equilíbrio global da estrutura linearmente independentes é três, e esta quarta equação de equilíbrio seria uma combinação linear das três equações que já foram utilizadas, não fornecendo nenhuma informação adicional sobre as reações de apoio do pórtico.

Para comprovar esta afirmação, considere-se a equação de equilíbrio dos momentos dos esforços externos que atuam no pórtico em relação ao ponto A:

$$\sum M_A = 0 \qquad X_D \cdot 4 - 80 \cdot 3 + X_E \cdot 4 + Y_E \cdot 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_D \cdot 4 - 80 \cdot 3 + X_E \cdot 4 + 40 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_D + X_E = 0 \qquad (8.9)$$

Observa-se que esta equação de equilíbrio de momentos leva exatamente à equação (8.4) de que já se dispunha, não levando então a nenhuma das reações de apoio horizontais.

O exame do pórtico que está sendo resolvido mostra que há nele um elemento que ainda não foi utilizado, e que é fundamental não apenas para a caracterização do comportamento estrutural do pórtico, mas também para a determinação dos empuxos: a articulação interna existente em B.

Como já se comentou, esta articulação permite que uma parte do pórtico gire em relação à outra, possibilitando que o ângulo de 180º entre as barras AB e BC se modifique. Como já se viu anteriormente, rotações são impedidas por momentos; o fato de a articulação em B não opor nenhum impedimento à rotação de uma parte da estrutura em relação à outra mostra então que em B não há a transferência de momento de uma parte à outra do pórtico, ou seja, que neste ponto do pórtico o momento fletor é nulo.

O fato de o momento fletor na articulação interna B ser nulo leva à quarta equação de equilíbrio, que não apenas possibilita a determinação do empuxo do pórtico como também caracteriza a diferença existente entre o pórtico triarticulado da Figura 8.21 e o pórtico biarticulado que se obteria se a articulação em B fosse suprimida. As equações de equilíbrio global destes dois pórticos seriam exatamente as mesmas, as equações (8.4) a (8.6) (logo as reações verticais do pórtico biarticulado também seriam iguais a $\frac{P}{2}$, como a simetria já faria supor), e o que distinguiria o pórtico triarticulado do biarticulado seria justamente a presença da articulação em B, que, do ponto de vista de equilíbrio, se traduziria pelo fato de o momento fletor ser nulo neste ponto.

A quarta equação de equilíbrio necessária para a determinação das reações de apoio do pórtico da Figura 8.21 é então:

$$M_{fletor\ em\ B} = 0 \qquad -X_D \cdot 4 + Y_D \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_D = \frac{3}{4} Y_D = \frac{3}{4} 40 = 30\,kN \qquad (8.10)$$

Encontrada a reação X_D, X_E é obtida por meio da expressão (8.8), obtendo-se $X_E = -30\,kN$.

Na Figura 8.23, mostram-se todos os esforços externos que atuam no pórtico: a força externa ativa aplicada em B, as reações verticais e os empuxos horizontais que acabam de ser determinados.

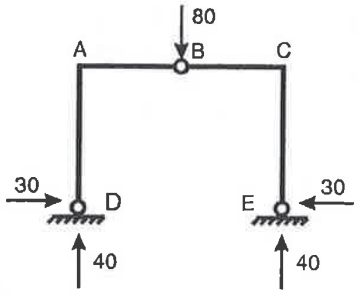


Figura 8.23

Como já se comentou, a equação (8.10) é uma equação de equilíbrio, não uma equação de equilíbrio global do pórtico como as equações (8.4) a (8.6) e como a equação (8.9), mas uma equação de equilíbrio de uma de suas partes, a sua metade direita.

Como o pórtico triarticulado da Figura 8.21 é uma estrutura isostática, era esperado que as suas reações de apoio pudessem ser determinadas apenas com o uso de equações de equilíbrio da estática, e isto realmente foi possível, como se acaba de comprovar.

É interessante comentar que em D há um empuxo horizontal e uma reação de apoio vertical, cuja resultante R tem a sua linha de ação passando pela articulação interna em B, como mostrado na Figura 8.24. Isto já era de se esperar, pois, sendo estas duas forças os únicos esforços externos aplicados à esquerda de B e sendo o momento fletor nulo em B,

o momento destas forças em relação a B deve ser nulo; como a resultante R destas forças não é nula, o seu momento em relação a B só será nulo se a linha de ação da resultante passar por este ponto, o que realmente ocorre. Observação análoga a esta se aplica também ao apoio E, e a Figura 8.24 mostra que a linha de ação da resultante R* das reações de apoio em E também passa por B.

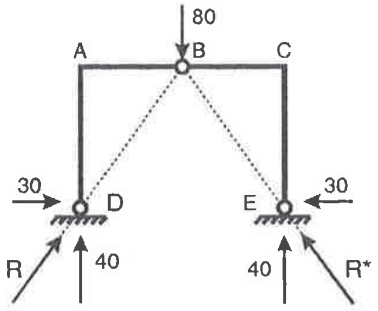


Figura 8.24

Na equação (8.10), o momento fletor em B foi determinado por meio do teorema do corte, reduzindo-se na seção B os esforços externos aplicados à sua esquerda. Alternativamente, o momento fletor em B poderia ter sido determinado transferindo para esta seção todos os esforços externos aplicados à sua direita. Neste caso, em lugar de obter-se a reação horizontal X_D, teria sido determinada a reação horizontal X_E, e X_D seria obtida por meio da expressão (8.8).

Determinadas as reações de apoio do pórtico, os seus esforços solicitantes podem ser obtidos por meio do teorema do corte; por tratar-se de matéria já vista com grande detalhe no Capítulo 4, a determinação dos esforços solicitantes do pórtico não será aqui explicitada, e os diagramas de esforços solicitantes deste pórtico são então diretamente apresentados na Figura 8.25.

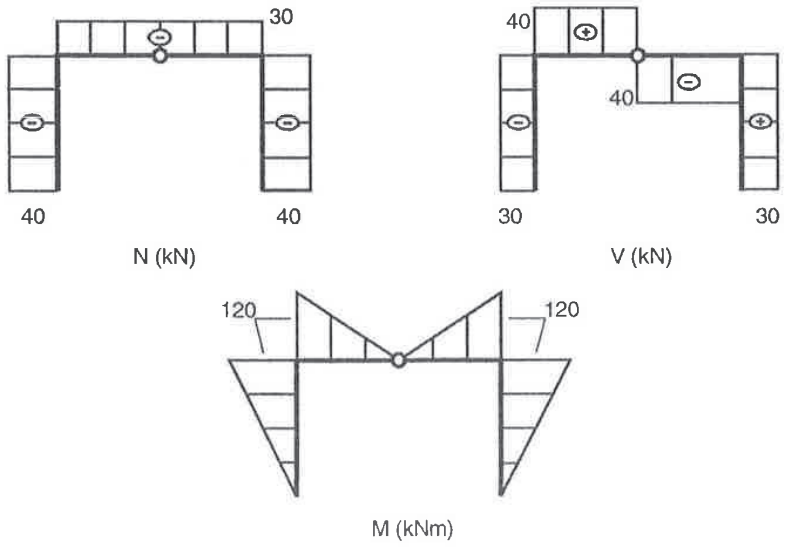


Figura 8.25

A partir do diagrama de momentos fletores pode-se traçar a deformada do pórtico, lembrando que as barras encurvam-se com a concavidade voltada para o lado comprimido. A deformada do pórtico é mostrada na Figura 8.26.

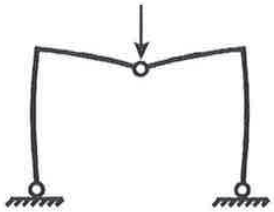


Figura 8.26

A deformada do pórtico revela muito claramente o que se havia afirmado anteriormente: a articulação interna em B permite que uma parte do pórtico gire em relação à outra, o que leva a uma alteração do ângulo de 180º que as barras AB e BC apresentavam entre si na configuração indeformada.

Verifica-se também que, sob a ação da força vertical, o pórtico tende a abrir-se, e os empuxos impedem que isto ocorra, empurrando-o para dentro, desta forma tracionando as fibras externas dos montantes, que encurvam-se com concavidade para o interior do pórtico. As duas partes da trave superior ficam tracionadas em sua parte superior, e se encurvam também com concavidade para o interior do pórtico.

Passa-se agora à resolução de um segundo exemplo.

Exemplo 8.2

Traçar os diagramas de esforços solicitantes do pórtico triarticulado da Figura 8.27 e desenhar a sua deformada.

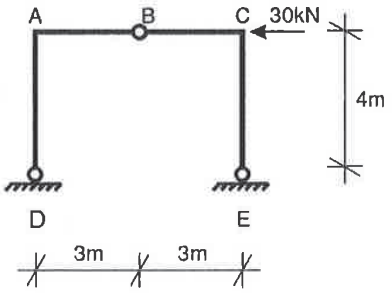


Figura 8.27

Trata-se, na verdade, do pórtico examinado no exemplo anterior, mas submetido a um outro carregamento.

Na Figura 8.28, indicam-se as reações de apoio do pórtico que se deseja determinar, e que, novamente, serão obtidas mediante quatro equações de equilíbrio: as três

equações de equilíbrio global da estrutura e a equação correspondente ao momento fletor nulo na articulação interna:

$$\sum X = 0 \qquad X_D - 30 + X_E = 0 \qquad (8.11)$$

$$\sum Y = 0 \qquad Y_D + Y_E = 0 \qquad (8.12)$$

$$\sum M_D = 0 \qquad 30 \cdot 4 + Y_E \cdot 6 = 0 \qquad (8.13)$$

$$M_{fletor\ em\ B} = 0 \qquad -X_D \cdot 4 + Y_D \cdot 3 = 0 \qquad (8.14)$$

A resolução deste sistema de equações leva às reações de apoio do pórtico:

$$X_D = 15\ kN \qquad (8.15)$$

$$Y_D = 20\ kN \qquad (8.16)$$

$$X_E = 15\ kN \qquad (8.17)$$

$$Y_E = -20\ kN \qquad (8.18)$$

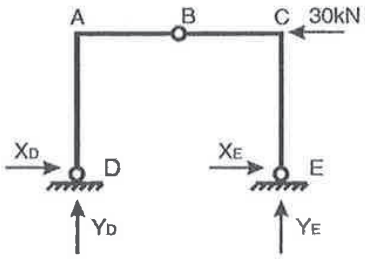


Figura 8.28

Na Figura 8.29, mostra-se o pórtico com todos os esforços externos que nele atuam.

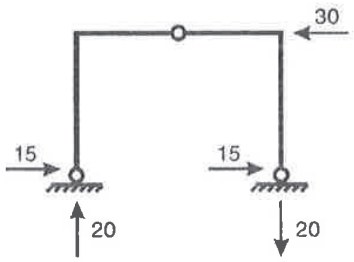


Figura 8.29

As reações de apoio do pórtico, que acabam de ser obtidas mediante a resolução do sistema das equações de equilíbrio (8.11) a (8.14), alternativamente poderiam ter sido obtidas analisando-se o equilíbrio do pórtico de uma forma mais física e menos analítica:

A força horizontal aplicada no pórtico tende a girá-lo no sentido anti-horário, e a tendência do ponto D é então a de deslocar-se para baixo, e a do ponto E, de deslocar-se para cima.

Para impedir que o ponto D desça, a reação vertical em D será para cima, e, para impedir que o ponto E suba, a reação vertical em E será para baixo (Figura 8.30 (a)).

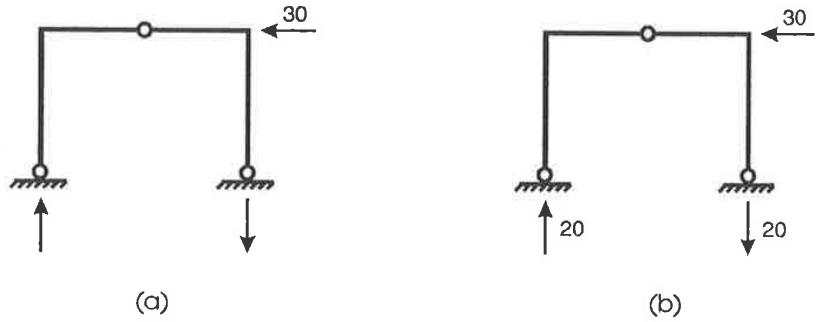
Como no pórtico a única força externa ativa é horizontal, as reações verticais serão iguais em intensidade e de sentidos contrários, isto é, constituirão um binário.

O binário formado pelas reações verticais é que irá se opor à tendência de rotação impressa pela força horizontal aplicada no pórtico. Verifica-se, pelos sentidos já determinados das reações verticais que este binário realmente introduz uma tendência de girar o pórtico no sentido horário, contrária portanto à produzida pela força horizontal.

O momento da força horizontal em relação à base do pórtico é de 120 kNm, logo o binário formado pelas reações de apoio verticais deverá ter este mesmo momento para impedir a rotação do pórtico; como o braço do binário é de 6 m, as reações verticais serão iguais a 20 kN (Figura 8.30 (b)).

Determinadas as reações verticais, como o momento fletor em B é nulo e à esquerda desta articulação interna os únicos esforços externos são as reações de apoio em D, a linha de ação desta reação deve passar por B, o que permite a obtenção da reação horizontal em D, de 15 kN, orientada para a direita (Figura 8.30 (c)).

Pelo equilíbrio das forças horizontais, obtém-se a reação horizontal em E, também de 15 kN e também orientada para a direita (Figura 8.30 (d)).



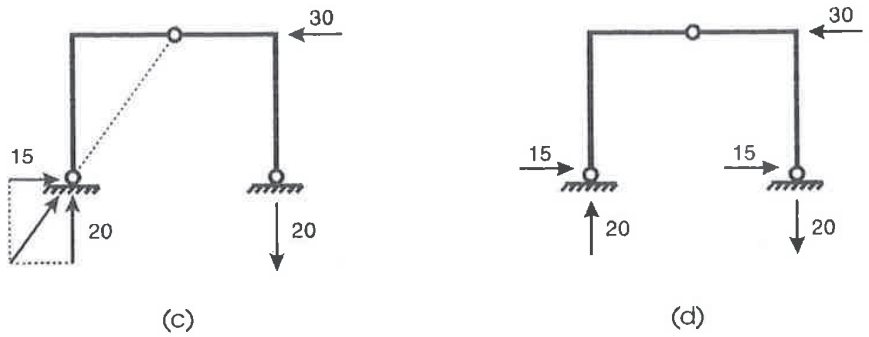


Figura 8.30

Esta forma de determinar as reações de apoio pode à primeira vista parecer mais complicada que a analítica, feita por meio da resolução do sistema de equações de equilíbrio, mas, com a prática de fazer este tipo de análise, ficará mais fácil ao leitor empregar resoluções deste tipo. Ela tem a enorme vantagem de ser diretamente ligada ao comportamento físico da estrutura, portanto muito mais transparente do ponto de vista de funcionamento estrutural do pórtico que a resolução analítica. Sugere-se ao leitor que, ao analisar estruturas simples, procure empregar este procedimento de resolução e por meio dele compreender o comportamento da estrutura que está sendo examinada.

Um outro hábito que sugere-se ao leitor que procure cultivar é o de, antes de partir para a resolução numérica, ou seja, quantitativa da estrutura, procurar analisá-la do ponto de vista apenas qualitativo, tentando perceber como ela irá comportar-se. Feita em seguida a resolução numérica da estrutura, o leitor deverá comparar os resultados encontrados com aqueles que a análise qualitativa havia sugerido. Quando houver discrepâncias entre as duas, o leitor deverá procurar descobrir as razões destas diferenças, procurando sempre fazê-lo tentando entender o comportamento estrutural.

Procedendo desta forma, além de a análise estrutural tornar-se muito mais interessante, é com este tipo de abordagem que irá realmente compreender como as estruturas funcionam.

Vale a pena lembrar que as estruturas só passaram a ser calculadas numericamente a partir do século XVIII -- o cálculo numérico mais antigo registrado é o do reforço da cúpula da Basílica de São Pedro, no Vaticano, realizado por Giovanni Poleni, em 1742 -, e que grande parte das construções mais notáveis da humanidade, das pirâmides egípcias às pontes romanas, das catedrais góticas às grandes igrejas do Renascimento, foram feitas sem cálculo, com base no conhecimento qualitativo das estruturas.

Hoje, dispõe-se de modelos matemáticos extremamente precisos e poderosos para a análise das estruturas, mas o seu real entendimento só se dará quando seu comportamento qualitativo for compreendido.

Obtidas as reações de apoio do pórtico, o teorema do corte pode ser usado para determinar os seus esforços solicitantes, cujos diagramas são mostrados na Figura 8.31.

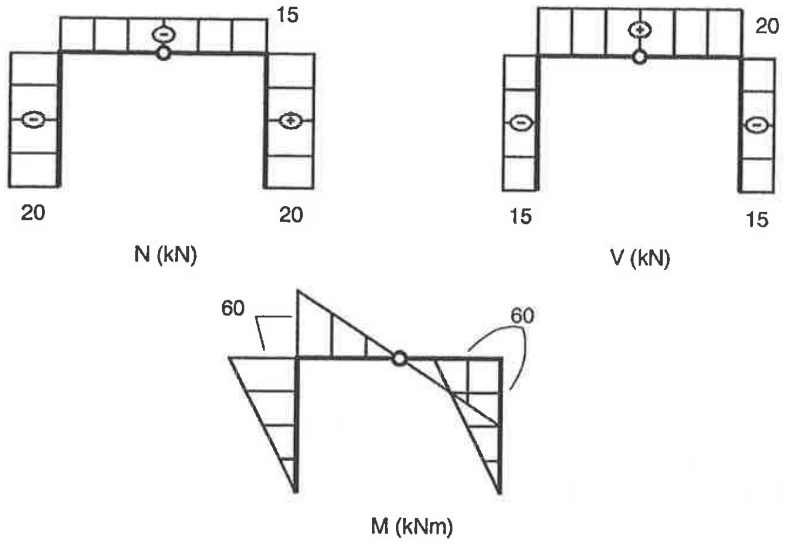


Figura 8.31

A partir do diagrama de momentos fletores, pode-se esboçar a deformada do pórtico, apresentada na Figura 8.32.

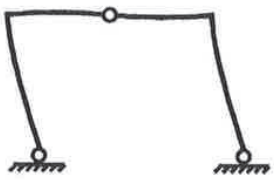


Figura 8.32

Como era de se esperar, a força horizontal aplicada em C desloca o pórtico para a esquerda, o que leva a sua metade esquerda a encurvar-se para o interior do pórtico e a sua metade direita, para o exterior do pórtico.

■

Exemplo 8.3

Traçar os diagramas de esforços solicitantes do pórtico triarticulado da Figura 8.33 e desenhar a sua deformada.

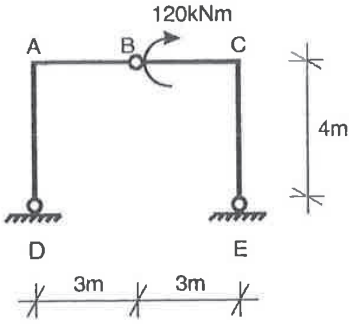


Figura 8.33

Este pórtico, que é novamente o pórtico dos exemplos anteriores, mas com um diferente carregamento, tem como esforço externo ativo um momento aplicado em uma seção imediatamente à direita da articulação interna em B.

Este modelo matemático poderia ser, por exemplo, o modelo de um pórtico triarticulado real cujo nó B é mostrado de forma ampliada na Figura 8.34.

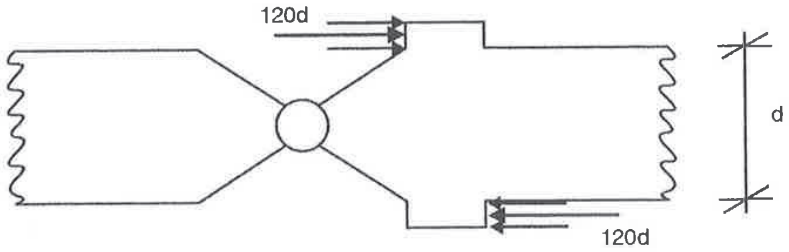


Figura 8.34

Para a determinação das reações de apoio deste pórtico, podem ser usadas as três equações de equilíbrio global da estrutura e a equação de momento fletor nulo em B. É importantíssimo salientar aqui que o momento fletor na articulação sempre será nulo, mesmo que em uma seção imediatamente à sua direita haja um momento externo aplicado. Isto, porque a articulação sempre irá permitir a rotação de uma parte da estrutura em relação à outra, não opondo resistência a este movimento, não podendo então transferir momento de uma parte à outra do pórtico. Isto fica muito claro ao observar-se a Figura 8.34, em que foi representado o nó B de um possível pórtico real representado pelo pórtico da Figura 8.33.

As reações do pórtico estão apresentadas na Figura 8.35, e sugere-se que, como exercício, o leitor procure obtê-las por meio do procedimento baseado no comportamento físico da estrutura discutido no exemplo anterior. Nesta análise, o leitor deverá perceber, por exemplo, que, sob a ação do momento externo aplicado, a tendência deste pórtico é a de fechar-se, o que levará os empuxos a serem agora orientados para o exterior do pórtico, impedindo que ele se feche.

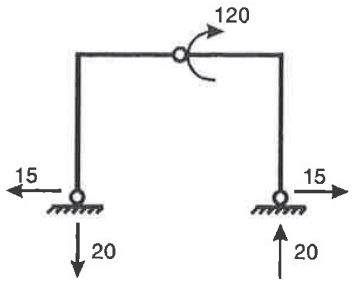


Figura 8.35

É interessante observar que a linha de ação da reação do apoio D do pórtico passa pela articulação B, já que ela é o único esforço externo aplicado à esquerda da articulação; já a linha de ação da reação do apoio E não passa por B, pois, à direita da articulação da trave superior, além da reação de apoio, é aplicado o momento externo ativo de 120 kNm, que introduz momento em B.

Os diagramas de esforços solicitantes deste pórtico estão mostrados na Figura 8.36.

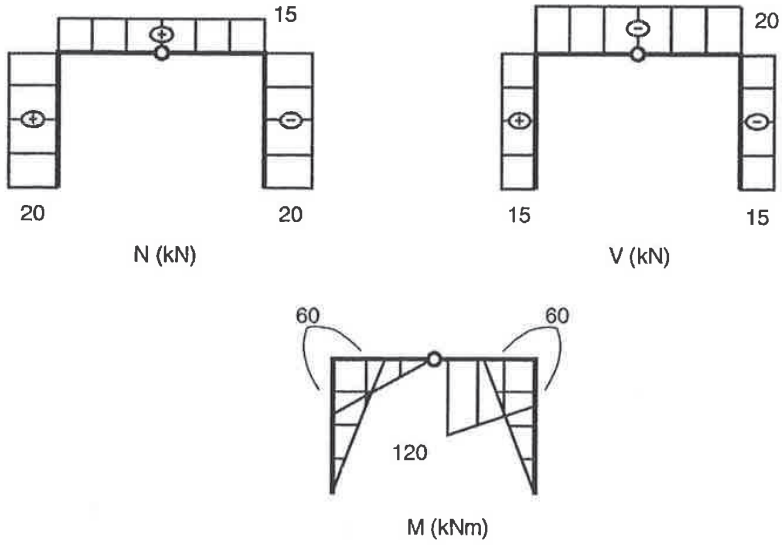


Figura 8.36

O momento fletor em B é nulo, e, imediatamente à sua direita, onde é aplicado o momento externo ativo, há uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores. Entre estas duas seções transversais, há um trecho em que o momento fletor é nulo, como se vê na Figura 8.37, em que o detalhe do diagrama de momentos fletores junto ao nó B é mostrado.

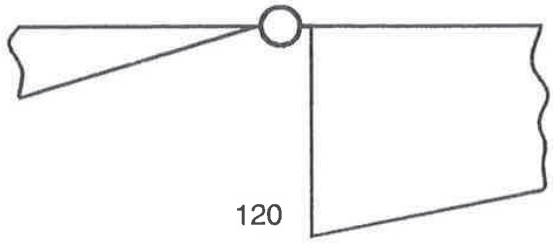


Figura 8.37

A deformada do pórtico é apresentada na Figura 8.38. Como era de se esperar, o nó B se desloca para cima, o que faz com que todas as barras do pórtico fiquem tracionadas no lado interno do pórtico, apresentando então concavidade voltada para o seu exterior.

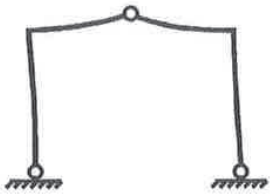


Figura 8.38

Exemplo 8.4

Na Figura 8.39, indicam-se as forças aplicadas pelo vento em um dos pórticos internos de um galpão industrial localizado na cidade de São Paulo. O galpão possui 40 m de comprimento, 10 m de largura, e os pórticos transversais são espaçados a cada 5 m; a pressão e as sucções do vento foram determinadas por meio da norma NBR 6123 "Forças devidas ao vento em edificações", de 1988 (11). Traçar os diagramas de esforços solicitantes deste pórtico.

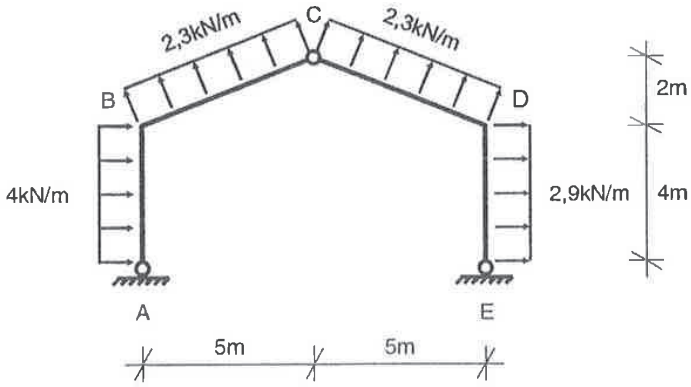


Figura 8.39

Antes de iniciar a resolução do problema, é interessante constatar que, neste galpão, o vento produz pressão apenas na parede situada a barlavento - que é o lado de onde vem o vento -, produzindo sucção nas duas águas do telhado e também na parede situada a sotavento - que é o lado contrário àquele de onde sopra o vento. É por esta razão que, quando há ventos muito fortes, casas e galpões são destelhados, coberturas de postos de gasolina são arrancadas, etc.

Para calcular as reações de apoio do pórtico, substituem-se as forças uniformemente distribuídas pelas forças mecanicamente equivalentes a elas, indicadas na Figura 8.40; as componentes horizontal e vertical destas forças mecanicamente equivalentes também estão indicadas na Figura 8.40.

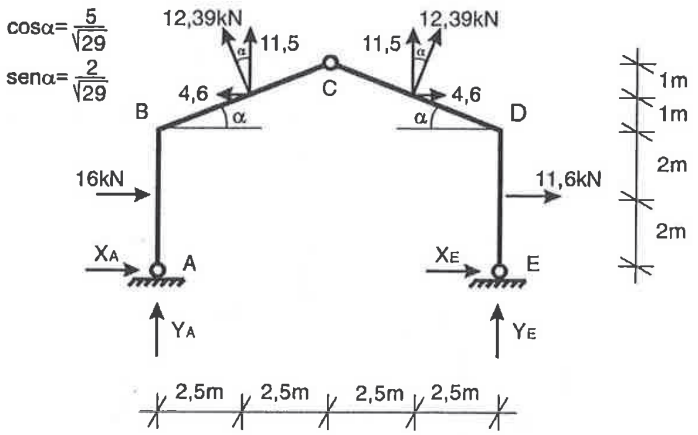


Figura 8.40

As reações de apoio do pórtico podem ser obtidas por meio das equações de equilíbrio abaixo:

$$\sum X = 0 \qquad X_A + 16{,}0 - 4{,}6 + 4{,}6 + 11{,}6 + X_E = 0 \tag{8.19}$$

$$\sum Y = 0 \qquad Y_A + 11{,}5 + 11{,}5 + Y_E = 0 \tag{8.20}$$

$$\sum M_A = 0 \qquad -16{,}0 \cdot 2{,}0 + 4{,}6 \cdot 5{,}0 + 11{,}5 \cdot 2{,}5 + 11{,}5 \cdot 7{,}5 - 4{,}6 \cdot 5{,}0 - \\ -11{,}6 \cdot 2{,}0 + Y_E \cdot 10{,}0 = 0 \tag{8.21}$$

$$M_{fletor\ em\ C} = 0 \quad -X_A \cdot 6{,}0 + Y_A \cdot 5{,}0 - 16{,}0 \cdot 4{,}0 + 4{,}6 \cdot 1{,}0 + 11{,}5 \cdot 2{,}5 = 0 \tag{8.22}$$

A resolução deste sistema leva às reações de apoio, $X_A = -19{,}29\,kN$, $X_E = -8{,}31\,kN$, $Y_A = -17{,}02\,kN$ e $Y_E = -5{,}98\,kN$, mostradas na Figura 8.41. Como o vento tende a empurrar o pórtico para a direita, as reações horizontais são para a esquerda; como tende a levantá-lo, as reações verticais são para baixo.

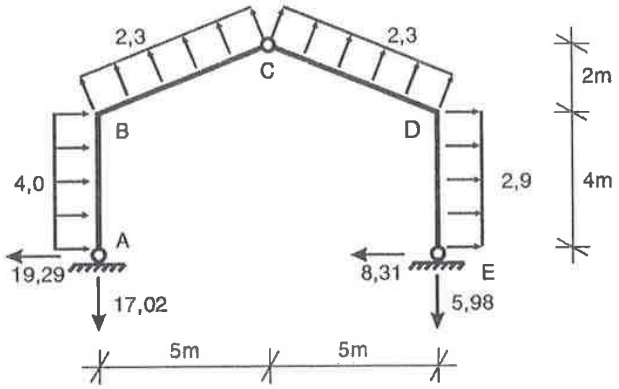
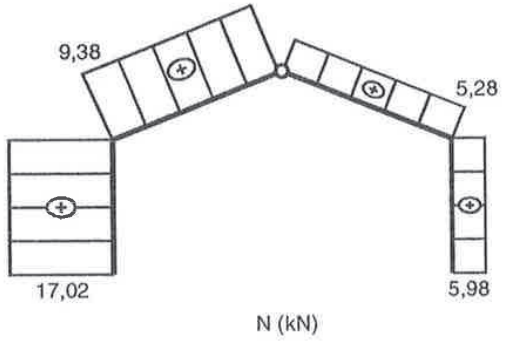


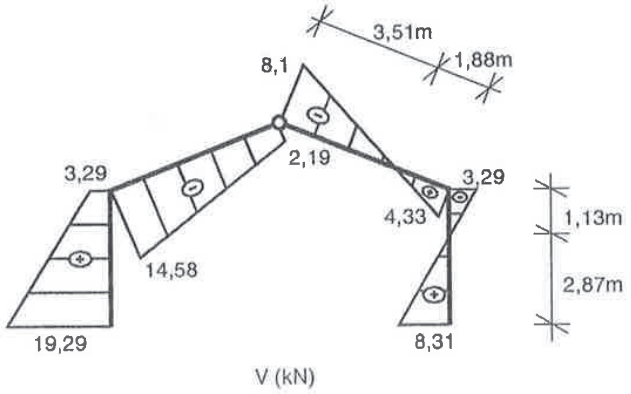
Figura 8.41

Os diagramas de esforços solicitantes do pórtico estão mostrados na Figura 8.42: o de forças normais na Figura 8.42 (a), o de forças cortantes na Figura 8.42 (b) e o de momentos fletores na Figura 8.42 (c).

(a)



(b)



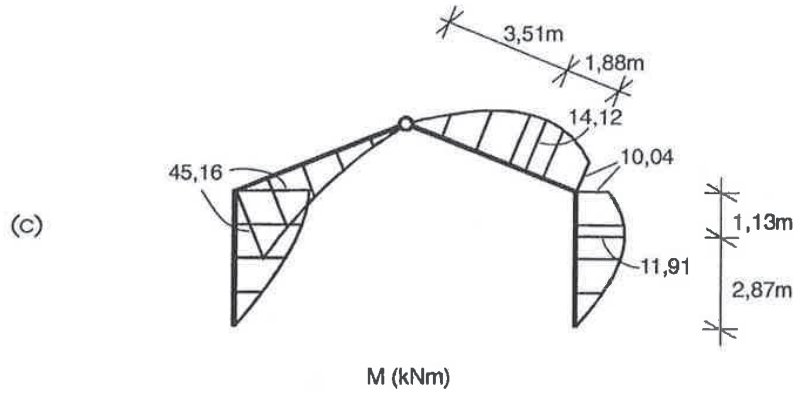


Figura 8.42

Para obter estes diagramas, como habitualmente, utiliza-se o teorema do corte.

A força normal em BC, por exemplo, é obtida cortando-se esta barra na seção B+ imediatamente à direita de B, nela reduzindo os esforços externos aplicados à sua esquerda, como indicado na Figura 8.43.

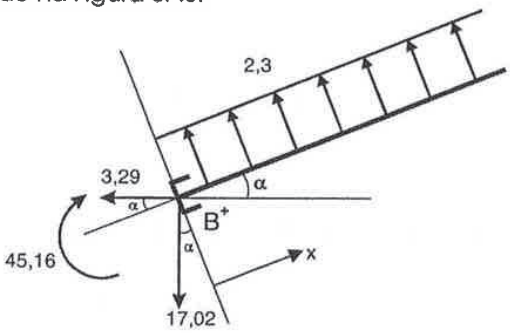


Figura 8.43

Tem-se então na barra BC:

$$N = 3{,}29 \cos\alpha + 17{,}02 \operatorname{sen}\alpha = 9{,}38 \qquad (8.23)$$

A força cortante na seção B+ é

$$V = 3{,}29 \operatorname{sen}\alpha - 17{,}02 \cos\alpha = -14{,}58 \qquad (8.24)$$

e a força cortante na barra BC tem então a equação

$$V(x) = -14{,}58 + 2{,}3\,x \qquad (8.25)$$

Já o momento fletor em BC tem por equação

$$M(x) = 45{,}16 - 14{,}58\,x + 2{,}3\,\frac{x^2}{2} \qquad (8.26)$$

Observando o diagrama de forças cortantes, verifica-se que nas barras CD e DE há uma seção em que a força cortante se anula, logo em que o momento fletor passa por um extremo. Estes extremos estão indicados na Figura 8.42 (c).

Uma verificação interessante de se fazer é a do equilíbrio do nó C, indicado na Figura 8.44. Os esforços que nele atuam devem estar em equilíbrio, ou seja, as somatórias das componentes horizontais e verticais das forças mostradas na Figura 8.44 devem ser nulas.

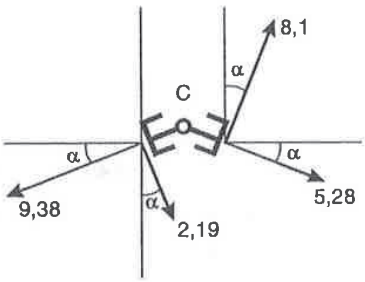


Figura 8.44

De fato, tem-se

$$\sum X = -9{,}38 \cos\alpha + 2{,}19 \operatorname{sen}\alpha + 8{,}1 \operatorname{sen}\alpha + 5{,}28 \cos\alpha = 0{,}015 \qquad (8.27)$$

e

$$\sum Y = -9{,}38 \operatorname{sen}\alpha - 2{,}19 \cos\alpha + 8{,}1 \cos\alpha - 5{,}28 \operatorname{sen}\alpha = 0{,}043 \qquad (8.28)$$

Embora as duas somas acima não tenham sido nulas, são praticamente nulas, o que confirma o equilíbrio dos esforços que atuam no nó C; foram os erros de arredondamento que levaram-nas a não darem resultados exatamente nulos.

Na Figura 8.45, mostra-se a deformada do pórtico que está sendo analisado. Como era de se esperar, em decorrência do vento que o empurra para a direita e tende a levantá-lo, ele se desloca para a direita e para cima.

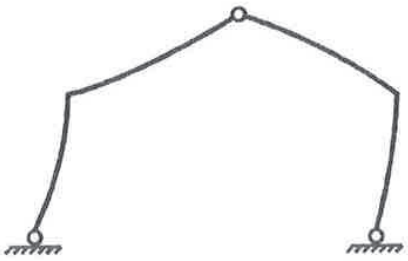
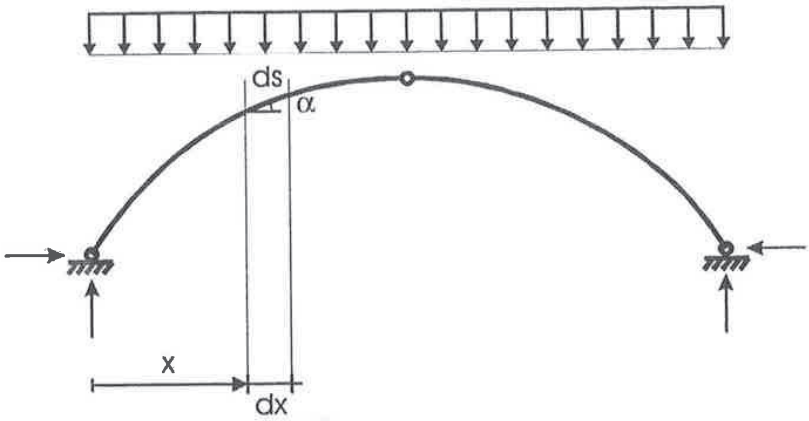


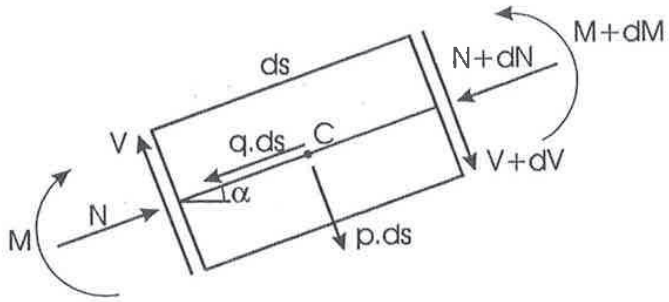
Figura 8.45

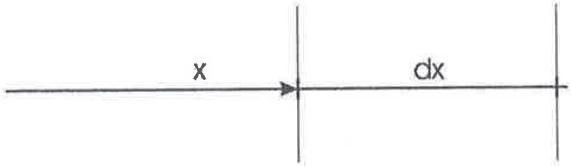
O próximo capítulo será dedicado ao estudo de mais uma estrutura triarticulada, os arcos triarticulados, e nele serão discutidas as características estruturais ímpares dos arcos, que fizeram deles um dos elementos estruturais mais significativos para a evolução da arquitetura e da engenharia de estruturas e o principal sistema estrutural empregado pelo homem do século I a.C. ao século XIX.

8.3 Referências bibliográficas

1. São Paulo Antigamente: site sobre a cidade de São Paulo elaborado por sampa.art.br. Disponível em http://www.sampa.art.br/SAOPAULO/SP%20Antiga/SaoPauloAntigamente.htm. Acesso em 3 maio 2006.
2. Instituto Cultural Itaú. Cadernos Cidade de São Paulo: Praça do Patriarca/Viaduto do Chá - Praça Ramos/Viaduto do Chá. São Paulo, Instituto Cultural Itaú, 1992. 19 p.
3. Companhia Construtora Nacional. Novo Viaduto do Chá. Revista de Engenharia Mackenzie, São Paulo, p. 38-41, maio 1936.
4. Vasconcelos, A. C. Pontes Brasileiras: Viadutos e Passarelas Notáveis. São Paulo: Editora Pini Ltda., 1993. 614 p.
5. History of Architecture Survey II: 1000-1870: site sobre a história da arquitetura elaborado pela School of Architecture da Universidade do Texas. Disponível em <http://www.ar.utexas.edu/AV/ARC318L/glossary/building/galmach1.html>. Acesso em 3 maio 2006.
6. Picon, A., dir. L'Art de l'ingénieur - Constructeur, entrepreneur, inventeur. Paris, Editions du Centre Pompidou, 1997. 598 p.
7. Schodek, D.L. Structures, 2ª ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1992. 557 p.
8. Mythos der Moderne - Der Crystal Palace in der modernen Architekturgeschichte: site sobre arquitetura elaborado pela Universidade de Trier, na Alemanha. Disponível em http://www.uni-trier.de/uni/fb3/kunstgeschichte/nicolai/html/I_3_6.htm#. Acesso em 3 maio 2006.
9. La Médiatèque de l'Architecture et du Patrimoine: site sobre a arquitetura e o patrimônio da França, elaborado pelo Ministério da Cultura da França. Disponível em <http://www.culture.gouv.fr/public/mistral/memsmn_fr?ACTION=CHERCHER&FIELD_6=SERIE&VALUE_6=exposition+universelle+de+1889>. Acesso em 3 maio 2006.
10. WWI and Early Aviation Image Archive: site sobre os primórdios da aviação elaborado por Rosebud e Rod Filan. Disponível em <http://www.earlyaviator.com/archive4.htm>. Acesso em 3 maio 2006.
11. ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6123 Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro: ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, junho 1988.







$$\sum M_c = 0$$

$$\Rightarrow -M - V \cdot \frac{ds}{2} - (V + dV) \cdot \frac{ds}{2} + (M + dM) = 0$$

$$\Rightarrow dV \cdot \frac{ds}{2} \approx 0 \Rightarrow -\frac{Vds}{2} - \frac{Vds}{2} + dM = 0$$

$$\Rightarrow dM = Vds$$

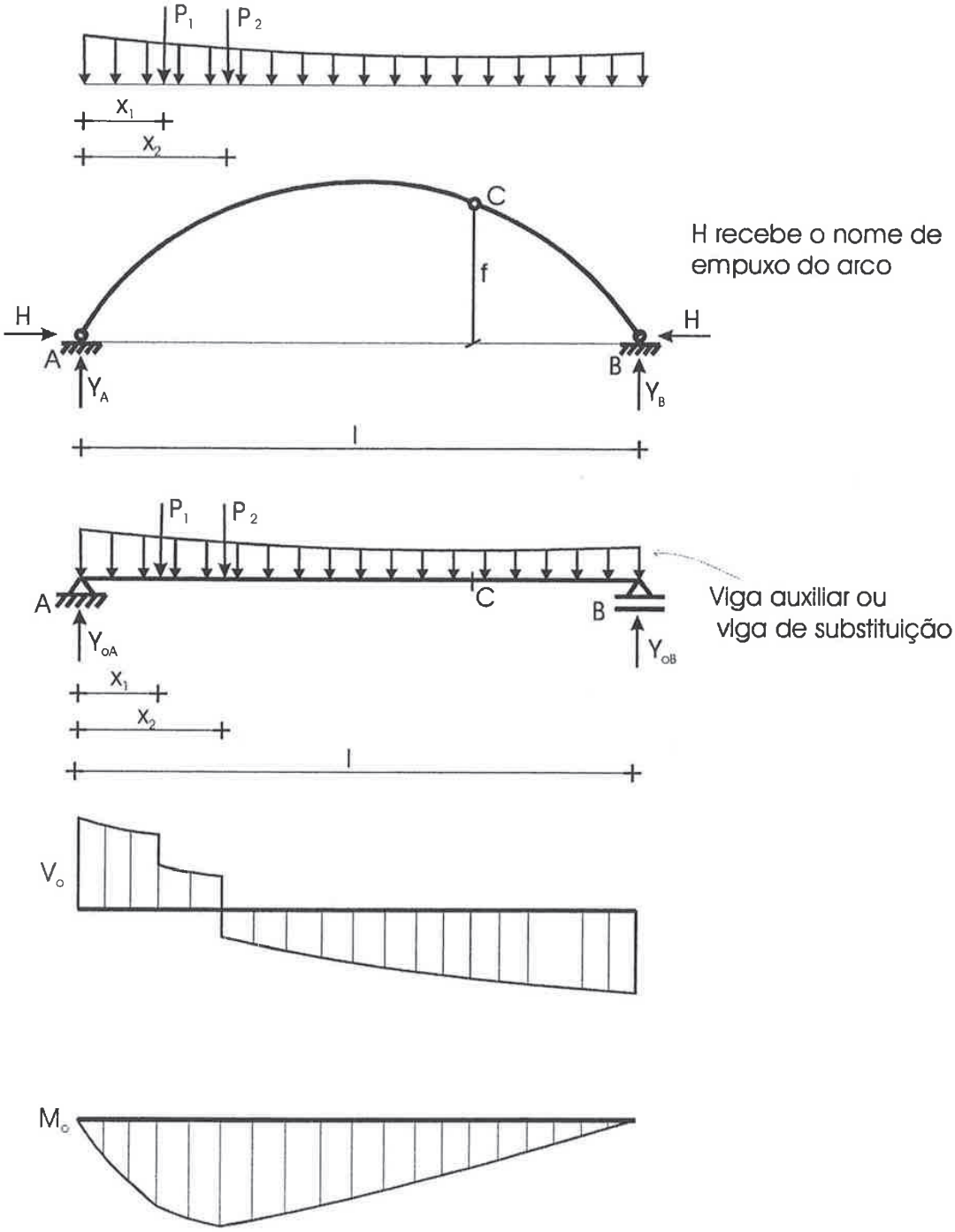
$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{dM}{ds} = V}}$$

$$\Rightarrow dx = ds \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{dM}{dx} = \frac{V}{\cos\alpha}}}$$

9.1 Arcos triarticulados submetidos exclusivamente a esforços verticais

9.1.1 Determinação dos esforços solicitantes



As reações do arco podem ser calculadas a partir dos esforços que atuam na viga auxiliar:

Reações verticais do arco:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B = P_1 + P_2 + \int_0^l p(x) \cdot dx$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P_1 \cdot x_1 - P_2 \cdot x_2 - \int_0^l p(x) \cdot x \cdot dx + Y_B \cdot l = 0$$

$$\Rightarrow Y_A \;\; e \;\; Y_B$$

Reações verticais da viga auxiliar:

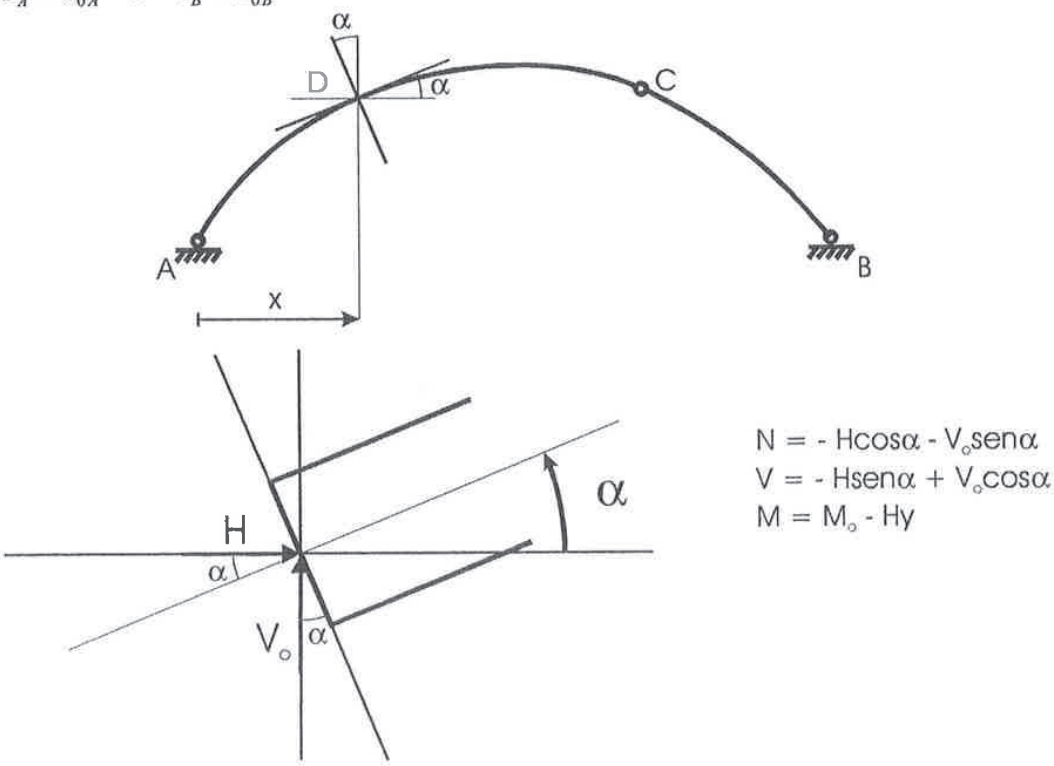
$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_{0A} + Y_{0B} = P_1 + P_2 + \int_0^l p(x) \cdot dx$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P_1 \cdot x_1 - P_2 \cdot x_2 - \int_0^l p(x) \cdot x \cdot dx + Y_{0B} \cdot l = 0$$

$$\Rightarrow Y_{0A} \;\; e \;\; Y_{0B}$$

Portanto, podemos concluir:

$$Y_A = Y_{0A} \quad e \quad Y_B = Y_{0B}$$

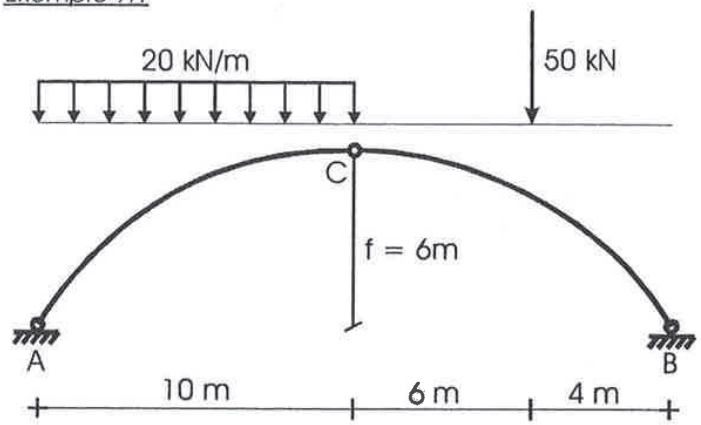


Empuxo do arco:

$$M_C = 0 = M_{0C} - Hf$$

$$H = \frac{M_{0C}}{f}$$

Exemplo 9.1



$y = 1{,}2x - 0{,}06x^2$

$tg\alpha = 1{,}2 - 0{,}12x$

$\alpha = arctg\,(1{,}2 - 0{,}12x)$

Viga auxiliar:

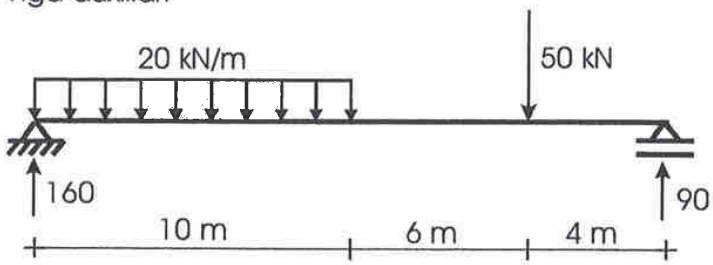


Tabela dos resultados do exemplo 9.1:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X (m)	y (m)	α (o)	sen α	cos α	Vo (kN)	Mo (kNm)	H sen α (kN)	H cos α (kN)	Vo sen α (kN)	Vo cos α (kN)	Hy (kNm)	N (kN)	V (kN)	M (kNm)
0.00	0.00	50.19	0.77	0.64	160.00	0.00	76.82	64.02	122.92	102.43	0.00	-186.93	25.61	0.00
2.00	2.16	43.83	0.69	0.72	120.00	280.00	69.25	72.14	83.10	86.57	216.00	-155.24	17.31	64.00
4.00	3.84	35.75	0.58	0.81	80.00	480.00	58.43	81.15	46.74	64.92	384.00	-127.90	6.49	96.00
6.00	5.04	25.64	0.43	0.90	40.00	600.00	43.27	90.15	17.31	36.06	504.00	-107.46	-7.21	96.00
8.00	5.76	13.50	0.23	0.97	0.00	640.00	23.34	97.24	0.00	0.00	576.00	-97.24	-23.34	64.00
10.00	6.00	0.00	0.00	1.00	-40.00	600.00	0.00	100.00	0.00	-40.00	600.00	-100.00	-40.00	0.00
12.00	5.76	-13.50	-0.23	0.97	-40.00	520.00	-23.34	97.24	9.33	-38.90	576.00	-106.57	-15.56	-56.00
14.00	5.04	-25.64	-0.43	0.90	-40.00	440.00	-43.27	90.15	17.31	-36.06	504.00	-107.46	7.21	-64.00
16.00	3.84	-35.75	-0.58	0.81	-40.00 -90.00	360.00	-58.43	81.15	23.37 52.59	-32.46 -73.04	384.00	-104.53 -133.74	25.97 -14.61	-24.00
18.00	2.16	-43.83	-0.69	0.72	-90.00	180.00	-69.25	72.14	62.33	-64.92	216.00	-134.47	4.33	-36.00
20.00	0.00	-50.19	-0.77	0.64	-90.00	0.00	-76.82	64.02	69.14	-57.62	0.00	-133.16	19.21	0.00

$$y = 1.2\,x - 0.06\,x^2$$

$$tg\,\alpha = 1.2 - 0.12\,x$$

$$\alpha = arctg\,(1.2 - 0.12\,x)$$

$$H = \frac{Moc}{f} = \frac{600}{6} = 100$$

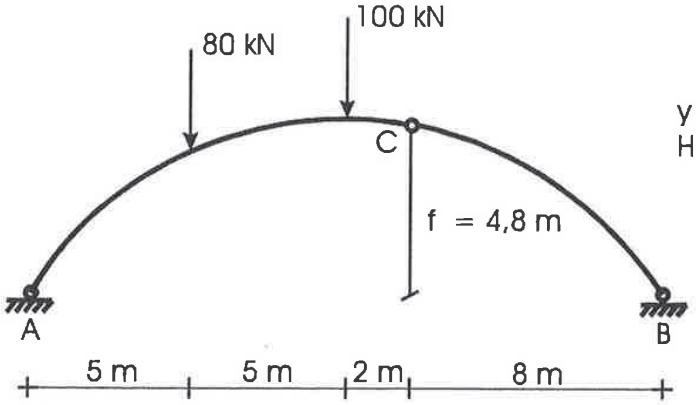
$$N = -H\cos\alpha - Vo\,sen\alpha$$

$$V = -H\,sen\alpha + Vo\cos\alpha$$

$$M = Mo - Hy$$

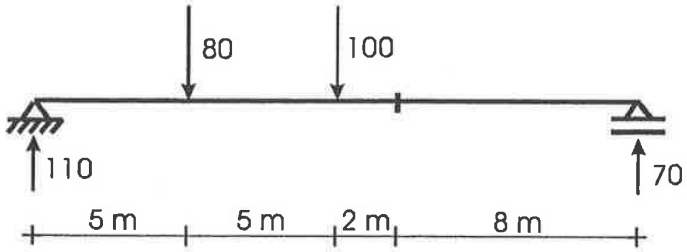
Exemplo 9.2

Traçar por superposição gráfica o diagrama dos momentos fletores do arco triarticulado da figura:

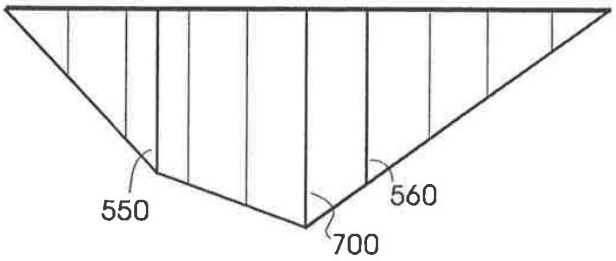


$y = x - 0{,}05x^2$
$H = 116{,}67$ kN

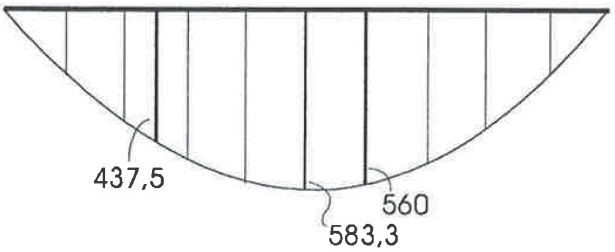
Solução:



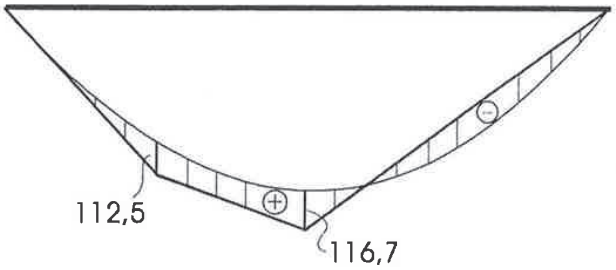
M_o (kNm)



Hy (kNm)



$M = M_o - Hy$
(kNm)



9.2 Linha das Pressões

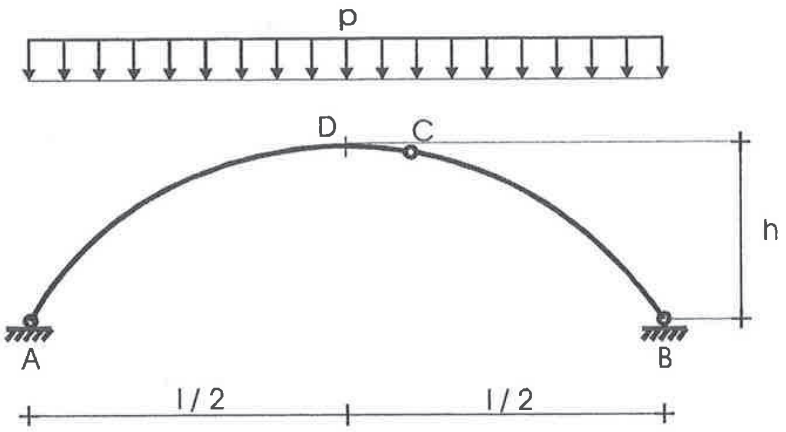
Definição: dá-se o nome de linha das pressões associada a um determinado carregamento à forma da estrutura triarticulada que, solicitada por aquele carregamento, apresenta momentos fletores nulos e forças cortantes nulas em todas as seções transversais.

$$M = M_0 - H \cdot y = 0$$

$y = \dfrac{M_0}{H}$ é a equação da linha das pressões.

Exemplo 9.3

Determinar a linha das pressões que passa pelos pontos A, B e D correspondente à carga *p* uniformemente distribuída sobre todo o comprimento *l*.



Solução:

$$M_0 = \frac{pl}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2}$$

$$y = \frac{M_0}{H}$$

$$H = \frac{M_{0D}}{h} = \frac{pl^2}{8h}$$

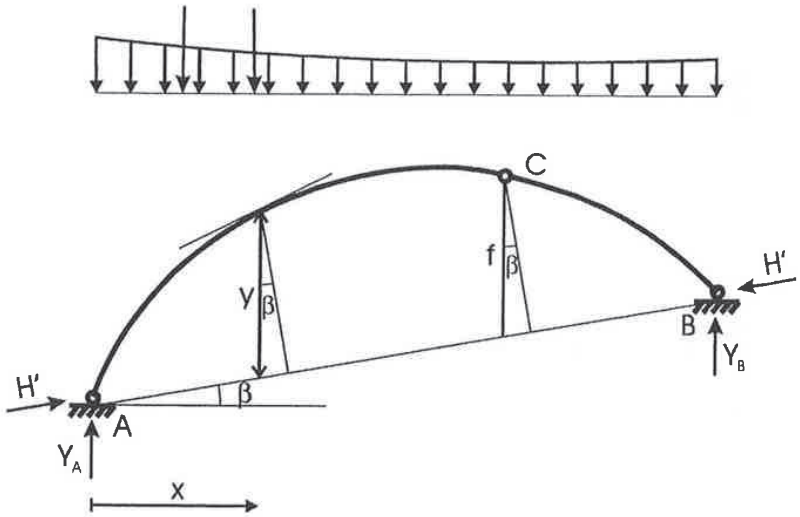
$$y = \left(\frac{pl}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2} \right) \cdot \frac{8h}{pl^2} = \frac{4h}{l^2} \cdot \left(lx - x^2 \right) = \frac{4hx}{l^2} \cdot (l - x)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x)}}$$

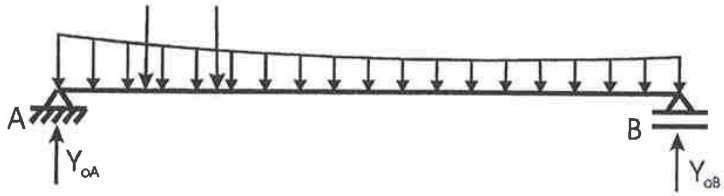
A articulação pode ser colocada em qualquer posição, por exemplo em C.

9.3 Arcos com apoios desnivelados

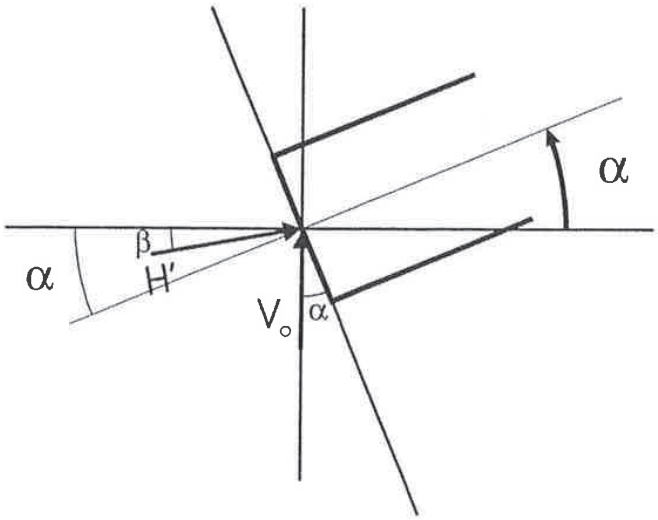
Quando as articulações dos arcos não se encontram numa mesma horizontal, tem-se:



Viga auxiliar:



$$H' = \frac{M_{0C}}{f \cos \beta}$$



$N = - H'\cos(\alpha-\beta) - V_o \operatorname{sen}\alpha$

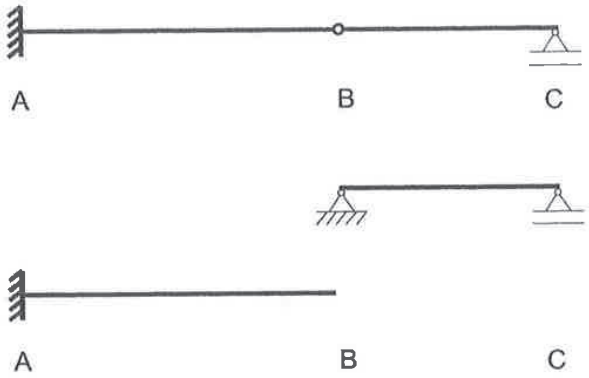
$V = - H'\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + V_o \cos\alpha$

$M = M_o - H'y\cos\beta$

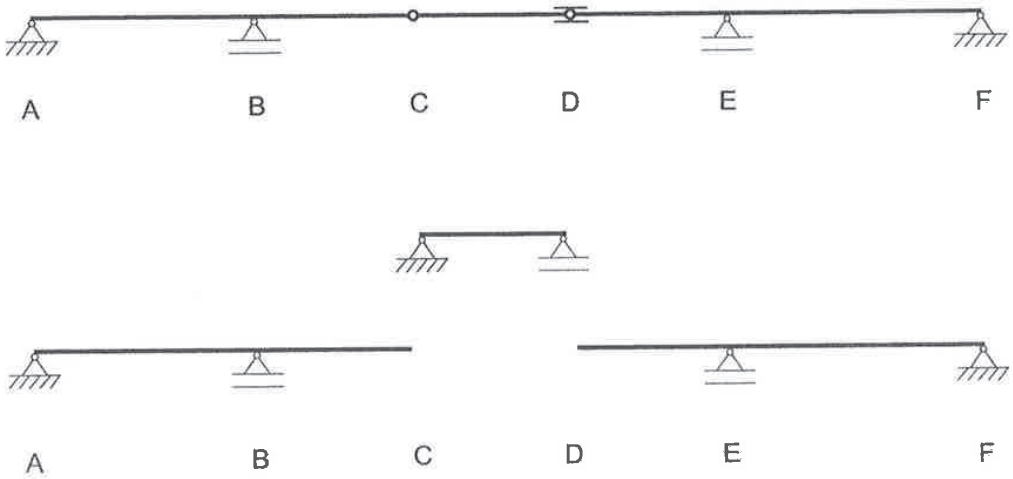
Capítulo 10: Vigas Gerber

Sistema patenteado em 1866 por um engenheiro alemão com este nome.

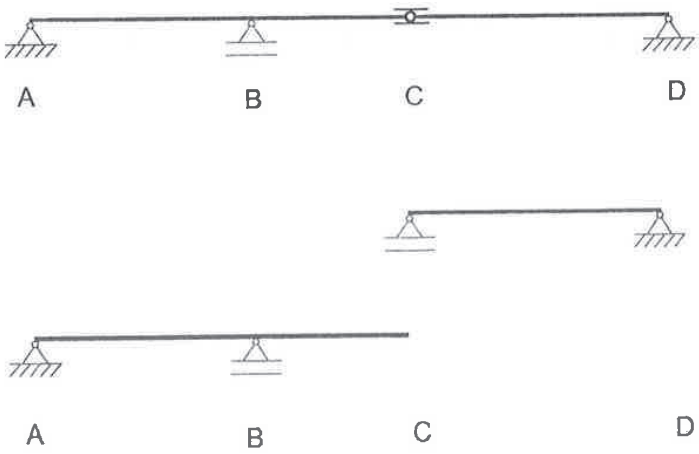
a)



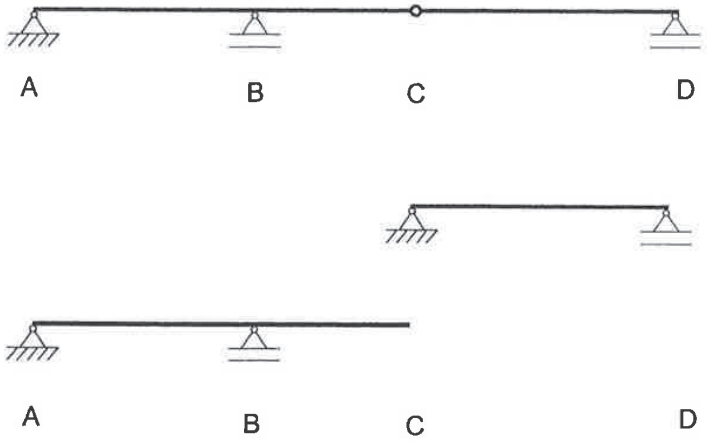
b)



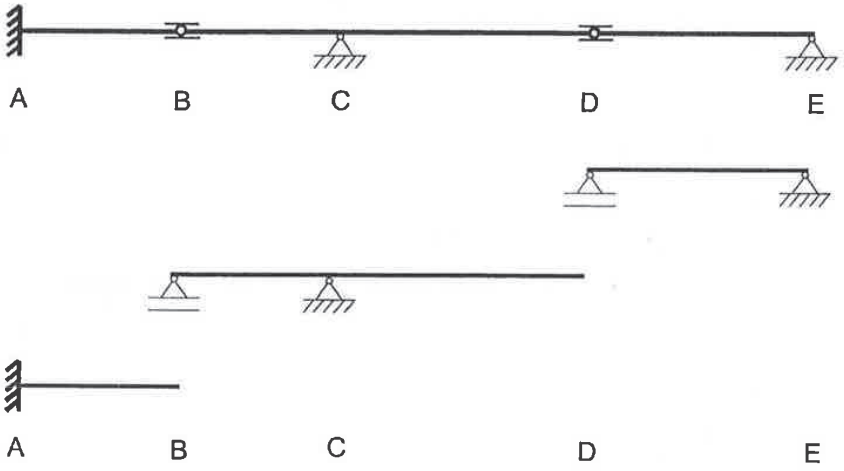
c)



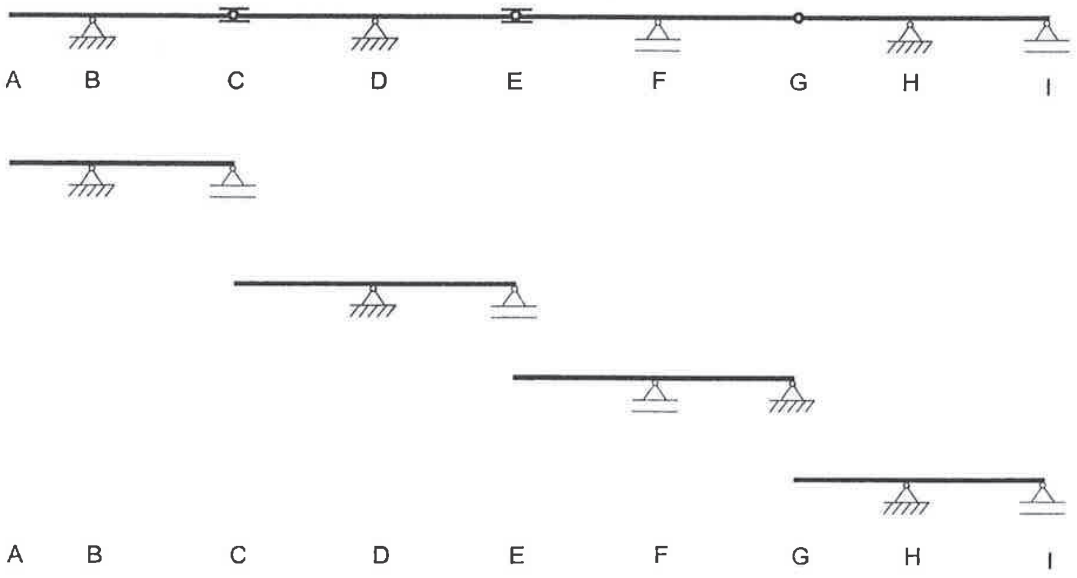
d)



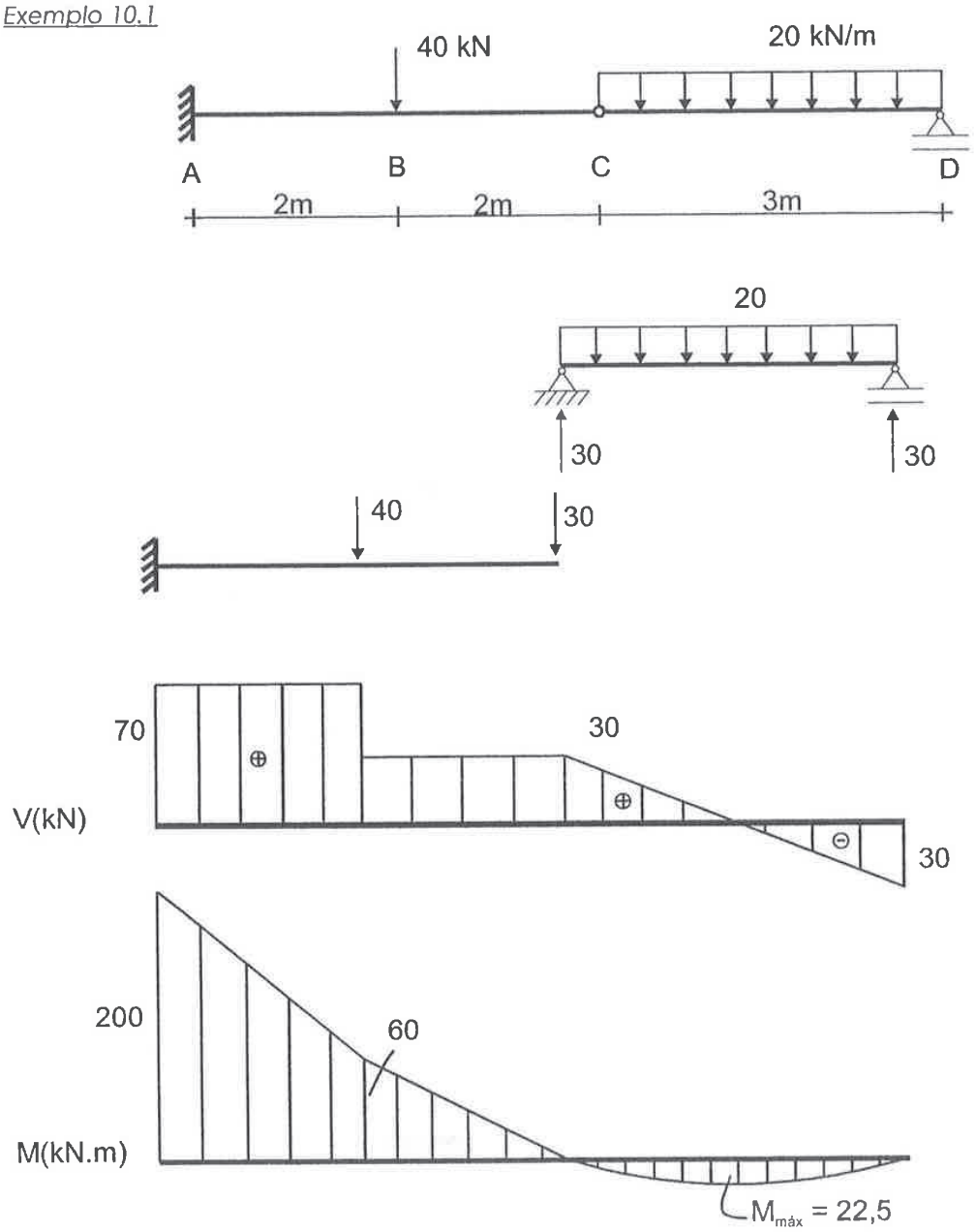
e)



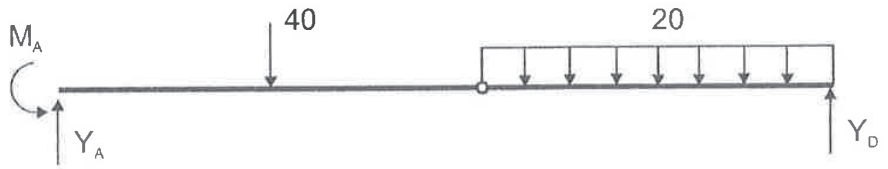
f)



Exemplo 10.1



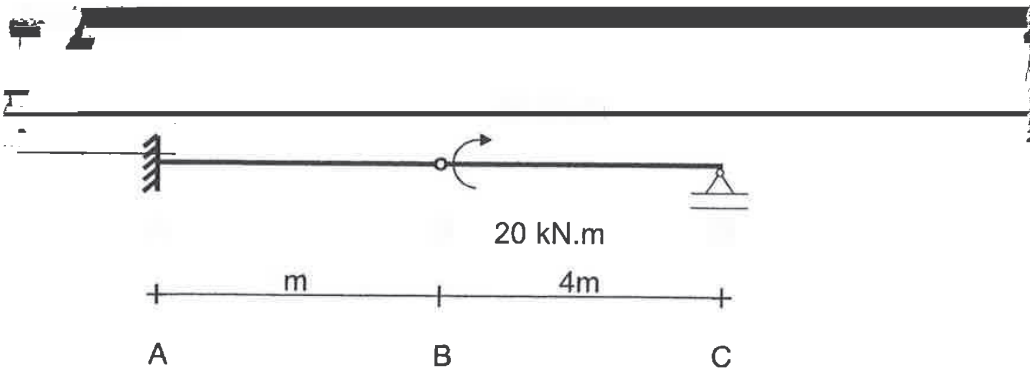
Outra maneira de calcular as reações:



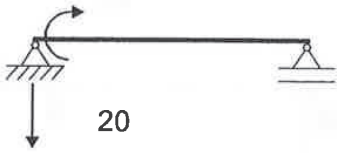
$\Sigma Y = 0$ $\quad Y_A + Y_D = 40 + 20.\,3 = 100 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 70$

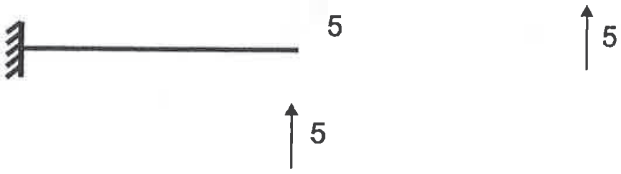
$\Sigma M_A = 0$ $\quad M_A - 40.\,2 - 20.\,3.\,5{,}5 + Y_D.\,7 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 200$

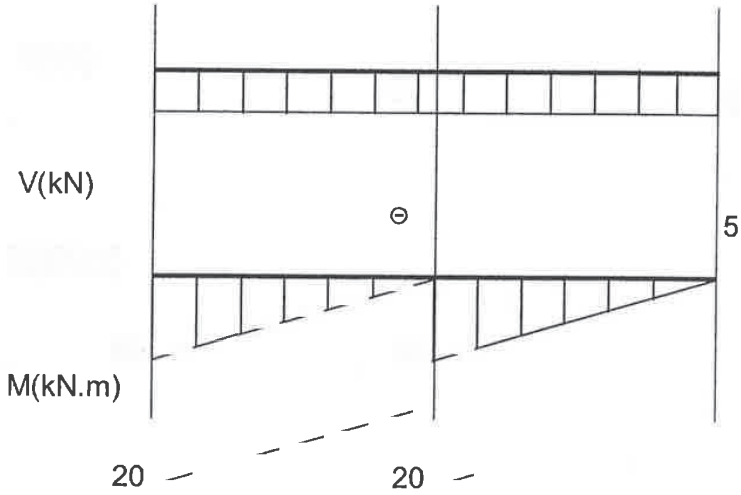
$M_C = 0$ $\quad Y_D.\,3 - (20.3^2)/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_D = 30$



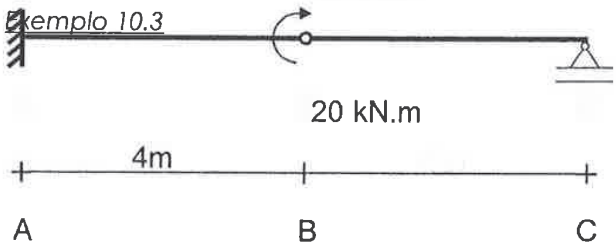
4



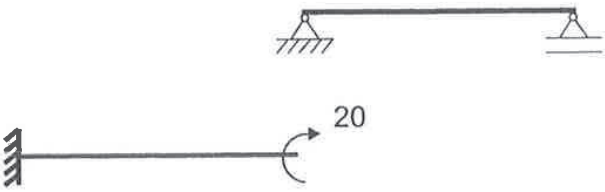


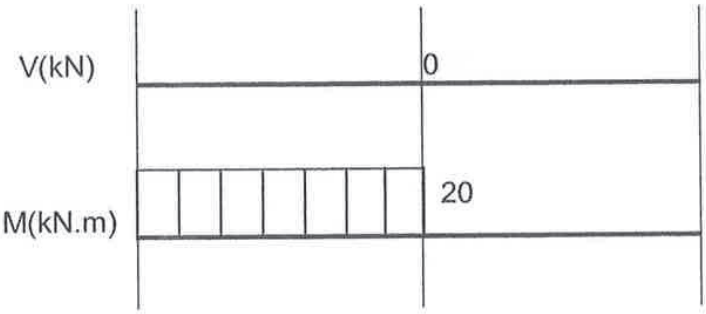


Exemplo 10.3

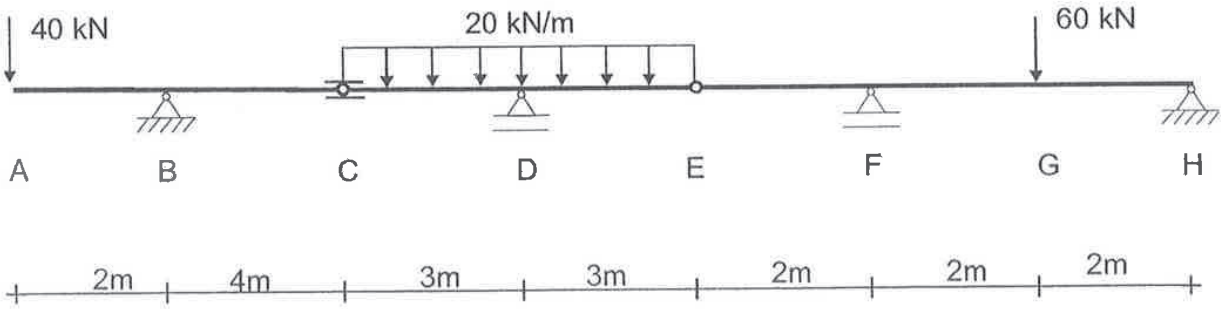


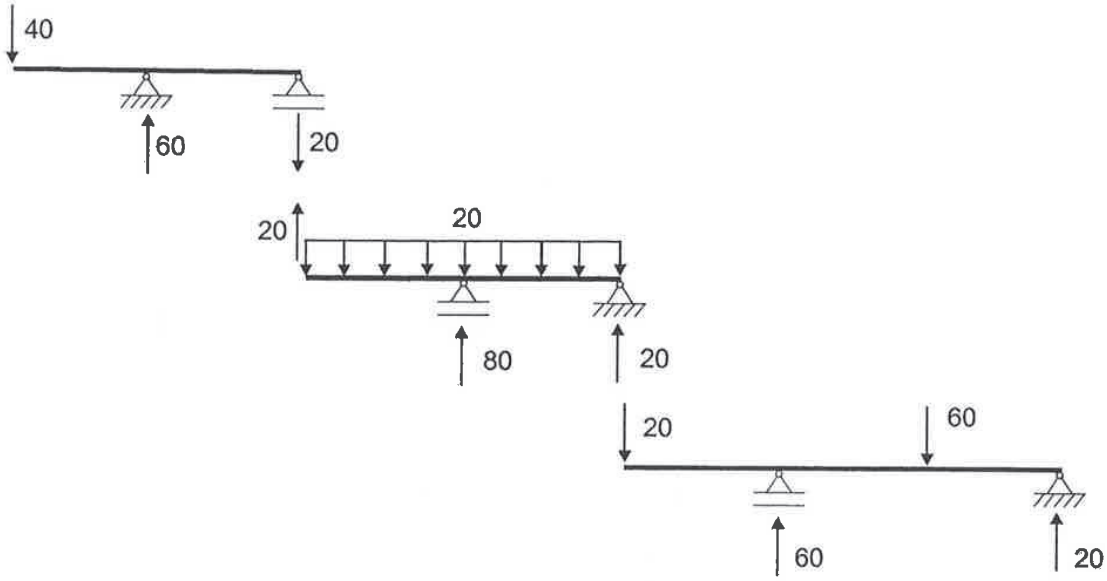
4m

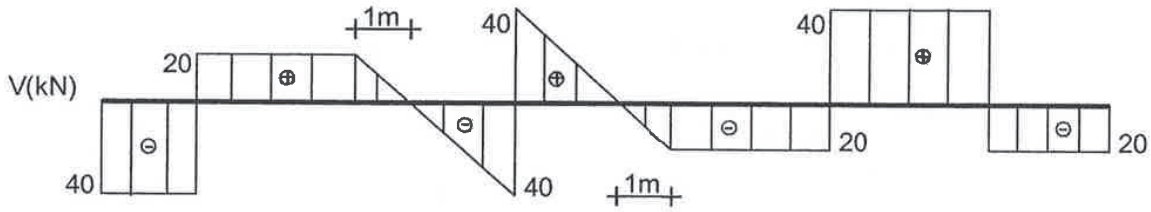


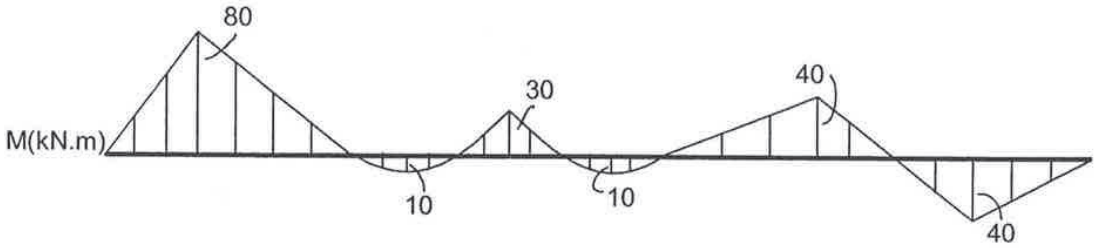


Exemplo 10.4

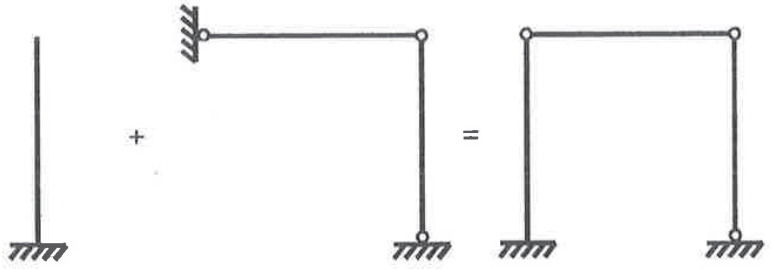



40
60
20
20
20
80
20
20
60
60
20

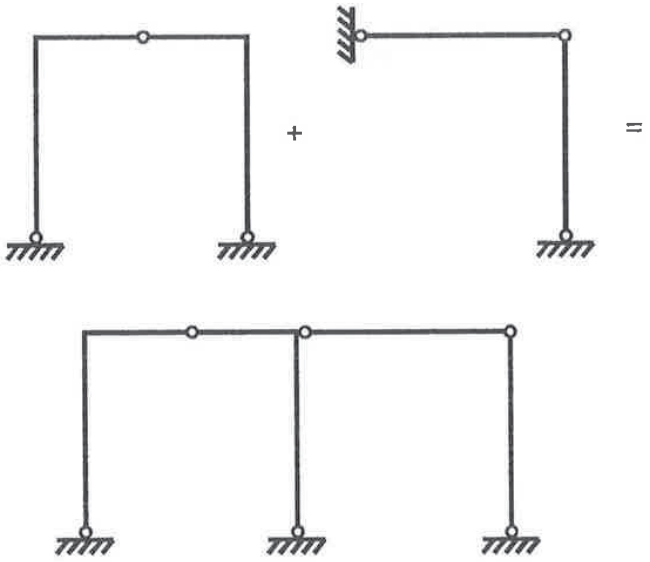

V(kN)
1m
40
20
40
40
40
20
20
1m


M(kN.m)
80
30
40
10
10
40

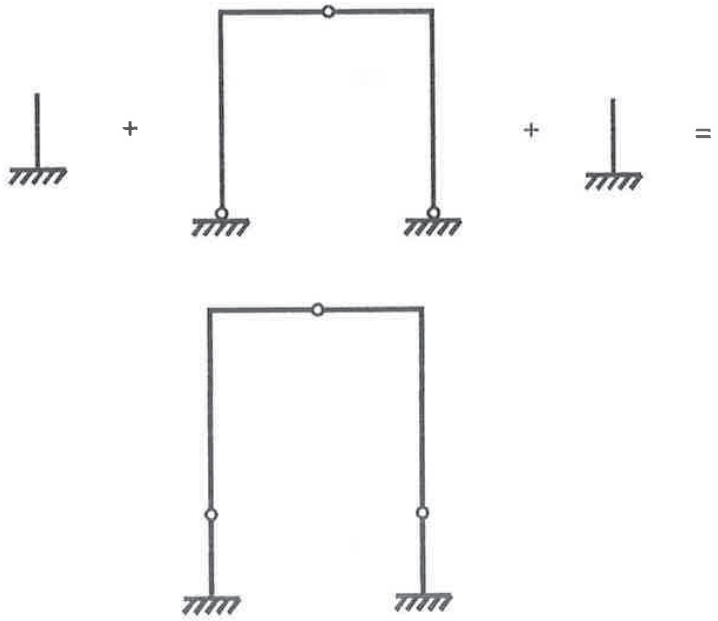
a)



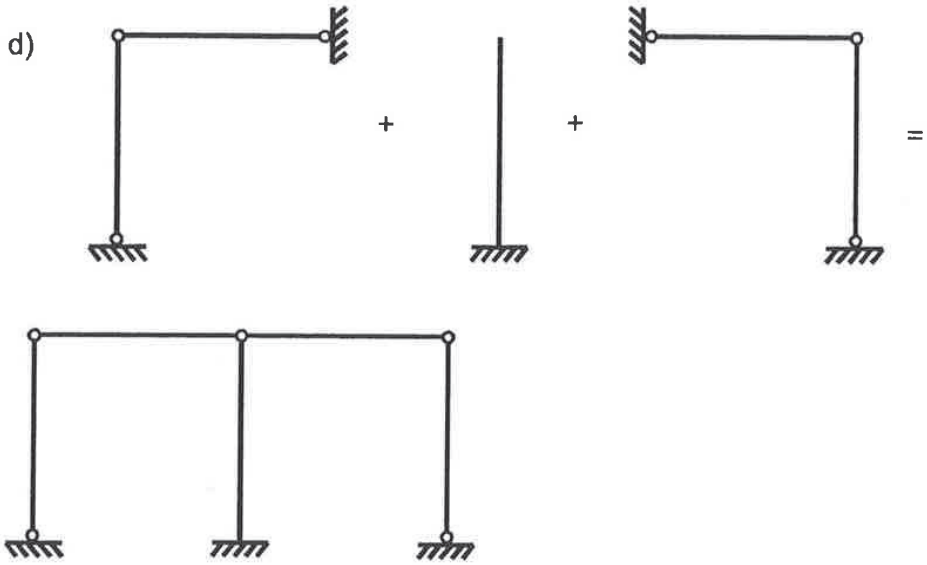
b)



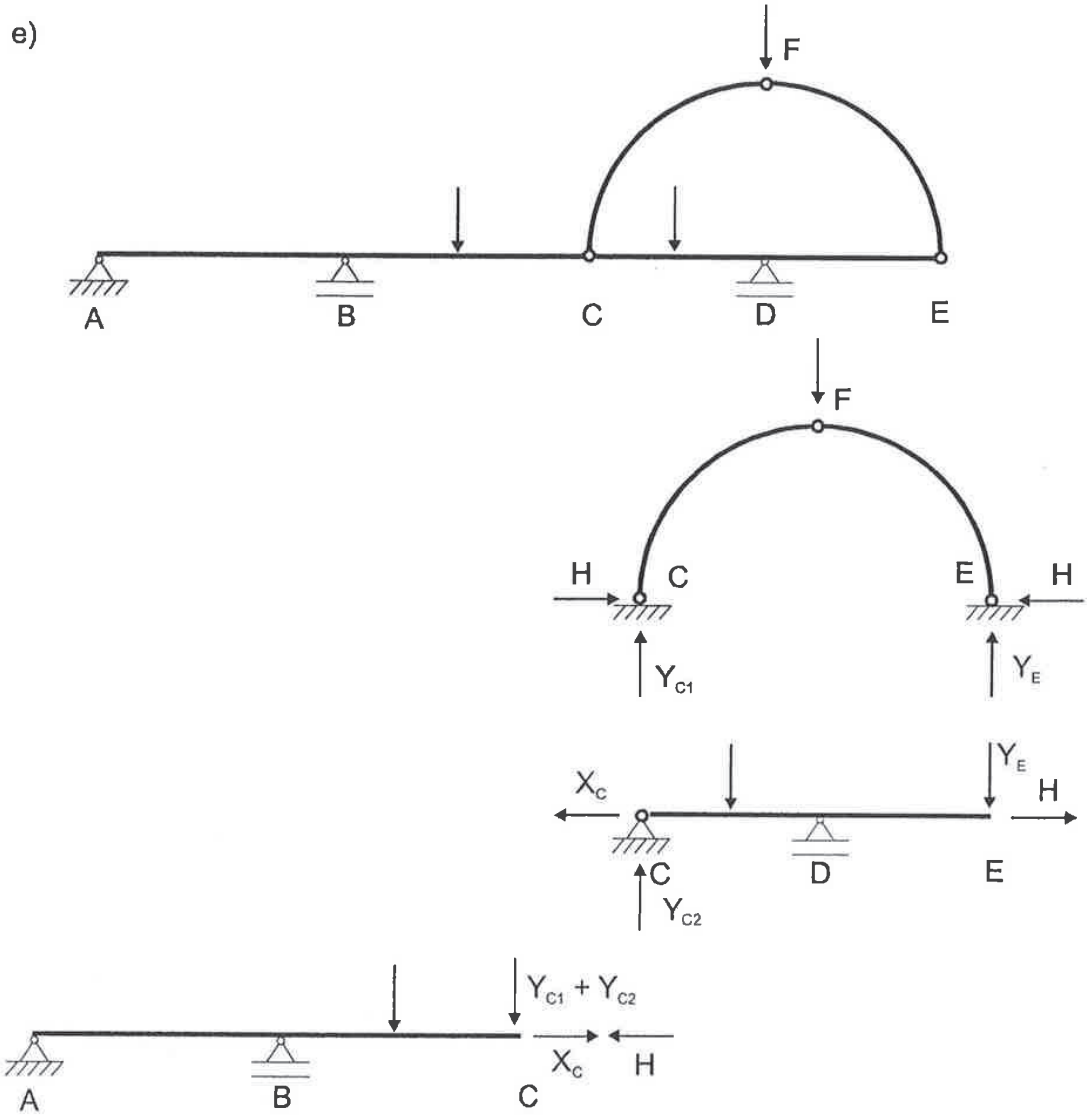
c)



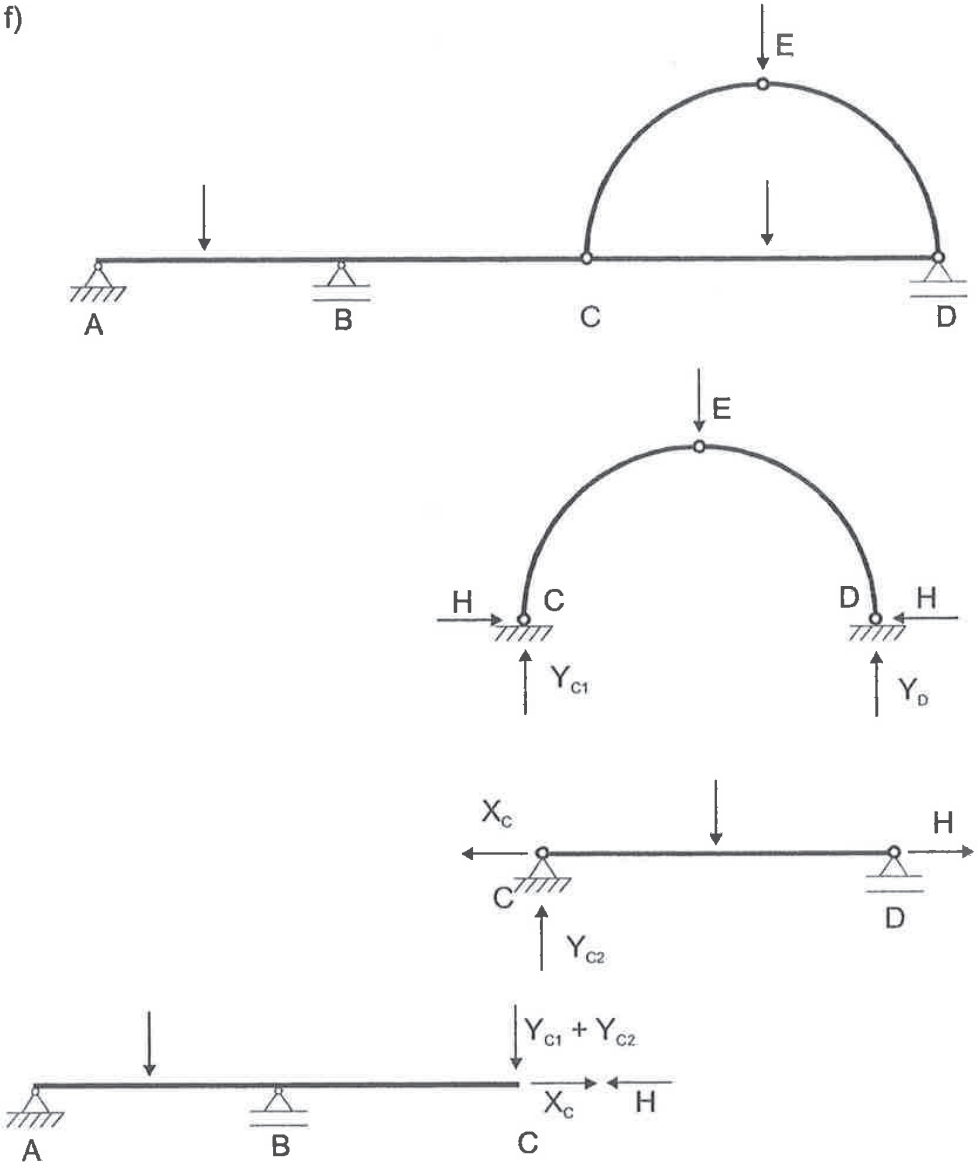
d)



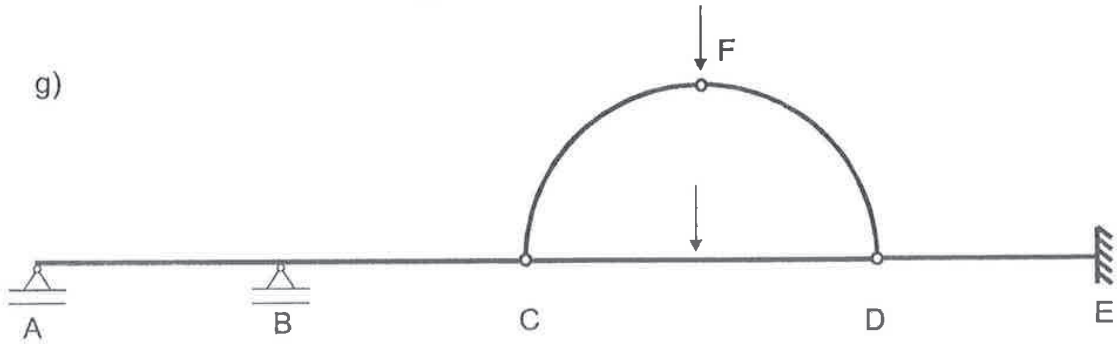
e)

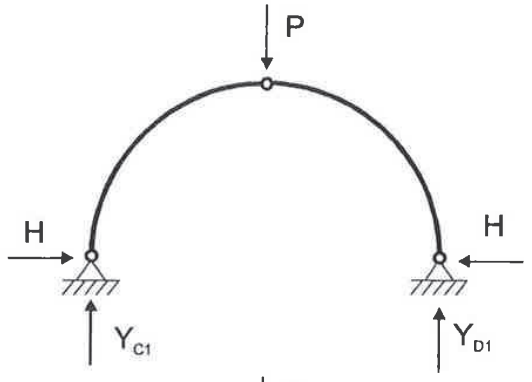


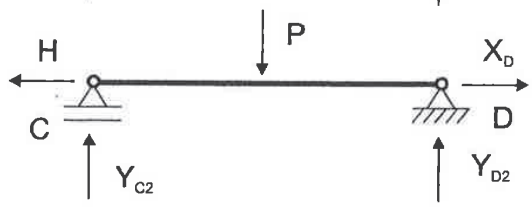
f)

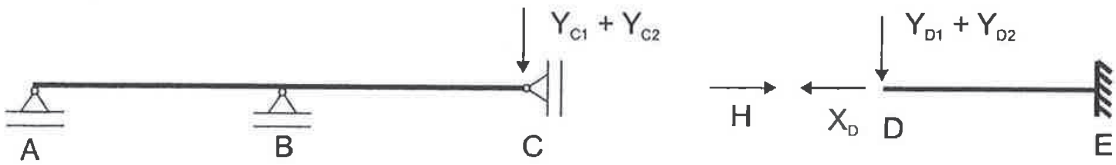


g)

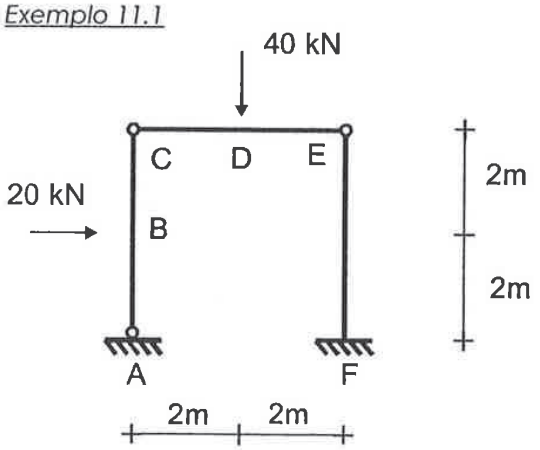


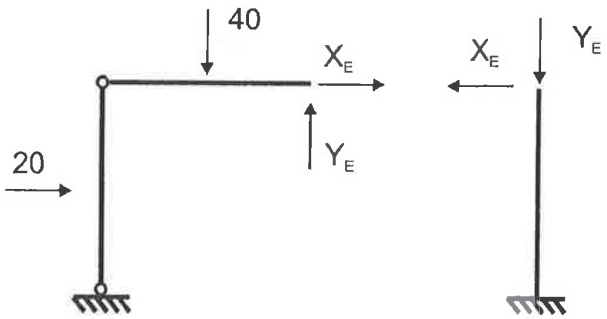

P
H
H
Y_{C1}
Y_{D1}

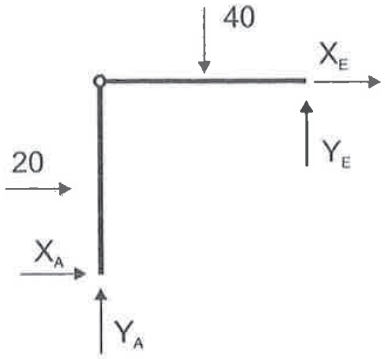

P
H
X_D
C
D
Y_{C2}
Y_{D2}


$Y_{C1} + Y_{C2}$
$Y_{D1} + Y_{D2}$
A
B
C
H
X_D
D
E

Exemplo 11.1


40 kN
C
D
E
20 kN
B
2m
2m
A
F
2m
2m


40
X_E
X_E
Y_E
Y_E
20

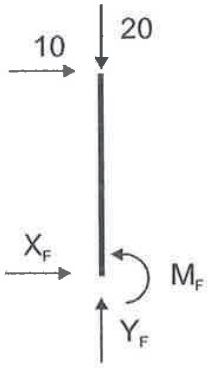


$\sum X = 0 \qquad X_A + X_E + 20 = 0 \Rightarrow X_E = -10$

$\sum Y = 0 \qquad Y_A + Y_E = 40 \Rightarrow Y_A = 20$

$\sum M_A = 0 \qquad -20.\,2 - 40.\,2 - X_E.\,4 + Y_E..4 = 0 \Rightarrow Y_E = 20$

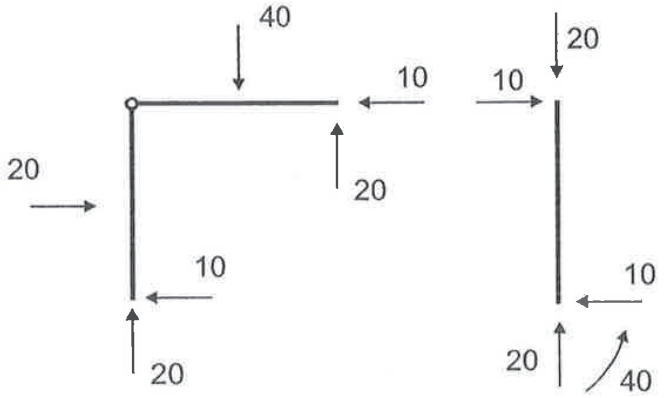
$M_C = 0 \qquad X_A.\,4 + 20.\,2 = 0 \Rightarrow X_A = -10$

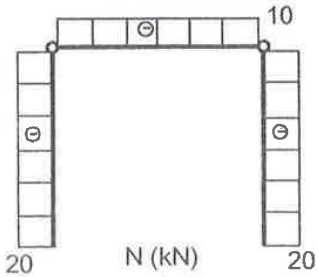


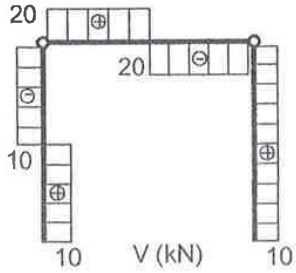
$\sum X = 0 \qquad X_F + 10 = 0 \Rightarrow X_F = -10$

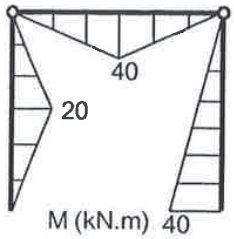
$\sum Y = 0 \qquad Y_F - 20 = 0 \Rightarrow Y_F = 20$

$\sum M_F = 0 \qquad M_F - 10.\,4 = 0 \Rightarrow M_F = 40$

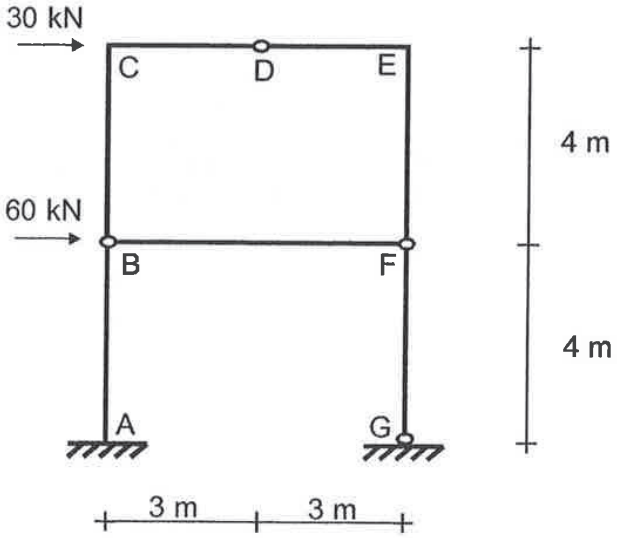


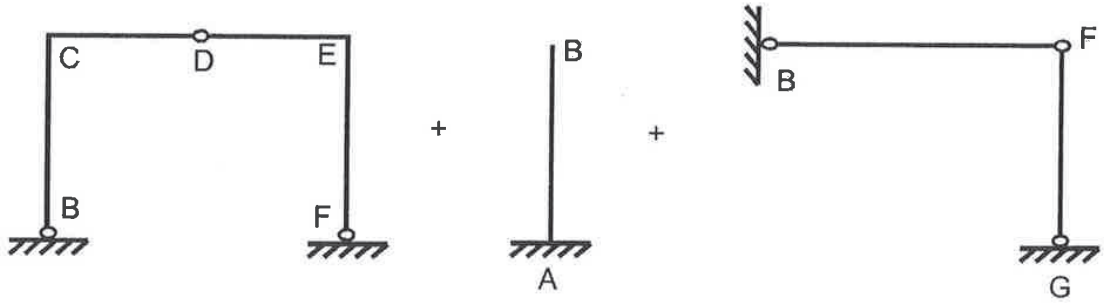


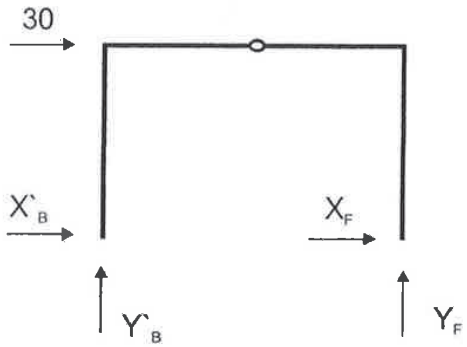


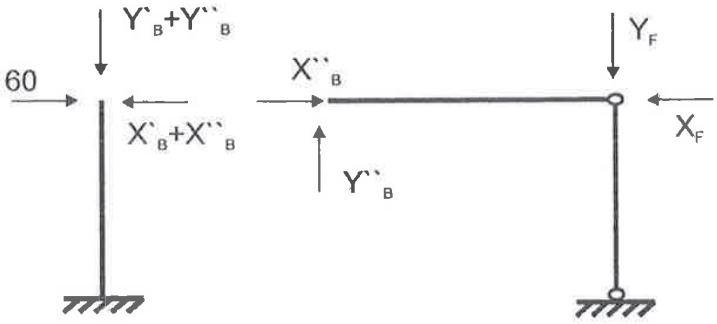

40
20
M (kN.m) 40

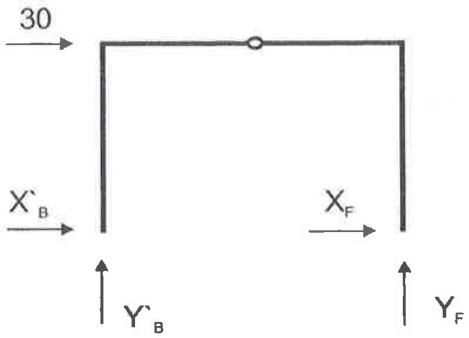
Exemplo 11.2


30 kN
C
D
E
4 m
60 kN
B
F
4 m
A
G
3 m
3 m


C
D
E
B
F
+
B
A
+
F
B
G


30
X`B
XF
Y`B
YF



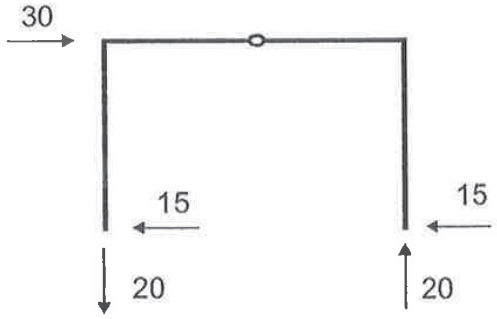


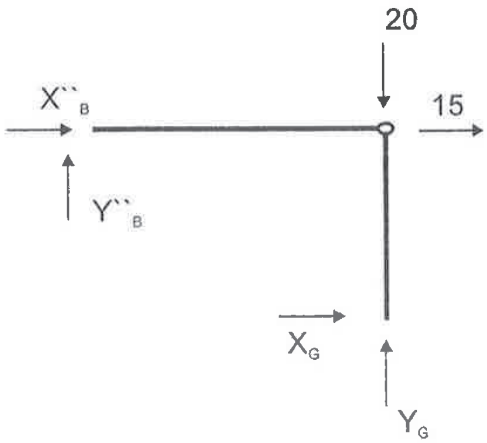
$\Sigma X = 0 \quad X`_B + X_F + 30 = 0 \Rightarrow X`_B = -15$

$\Sigma Y = 0 \quad Y`_B + Y_F = 0 \Rightarrow Y`_B = -20$

$\Sigma M_B = 0 \quad -30.\,4 + Y_F.\,6 = 0 \Rightarrow Y_F = 20$

$M_D = 0 \quad Y_F.\,3 + X_F.\,4 = 0 \Rightarrow X_F = -15$



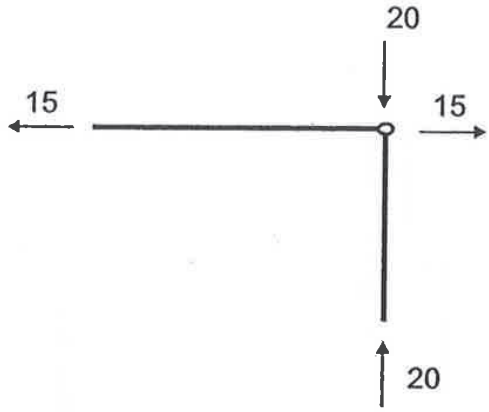


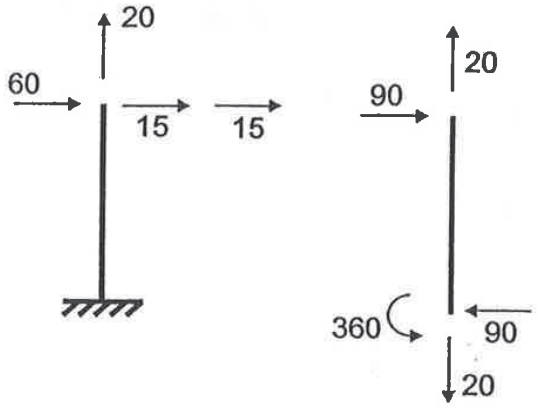
$\Sigma X = 0 \quad X``_B + X_G + 15 = 0 \Rightarrow X``_B = -15$

$\Sigma Y = 0 \quad Y``_B + Y_G = 20 \Rightarrow Y``_B = 0$

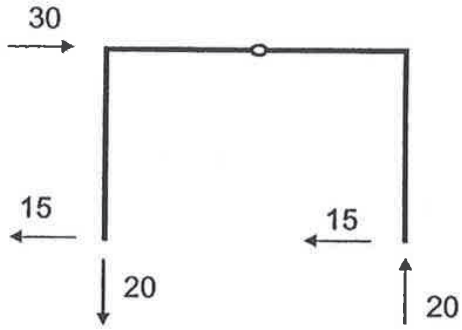
$\Sigma M_B = 0 \quad X_G\,.\,4 + Y_G.\,6 - 20.\,6 = 0 \Rightarrow Y_G = 20$

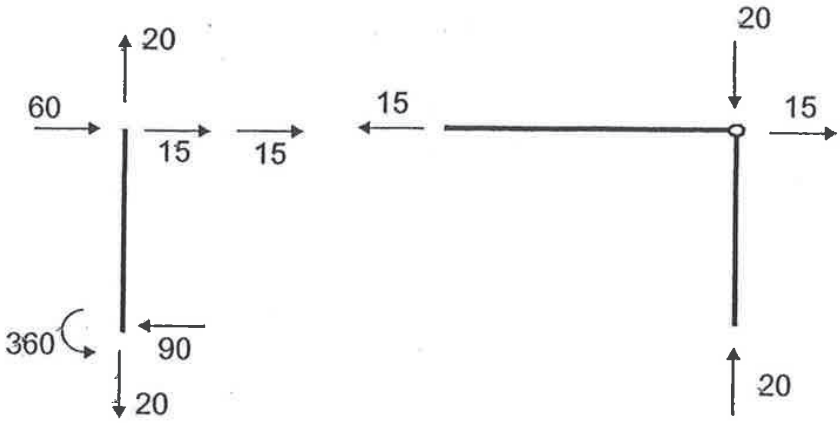
$M_F = 0 \quad X_G.\,4 = 0 \Rightarrow X_G = 0$

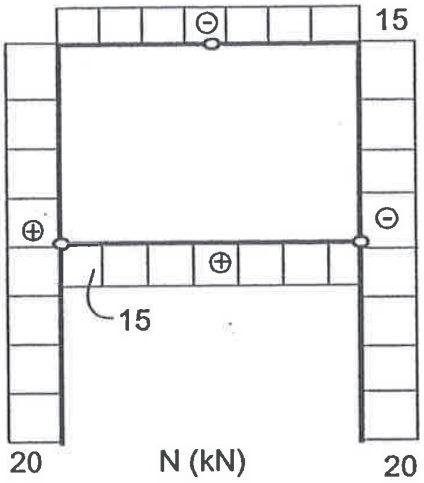


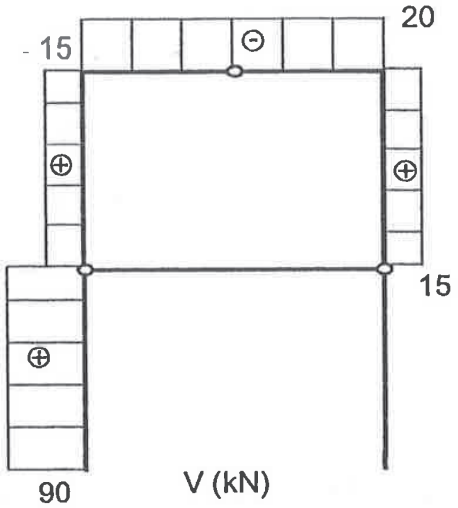


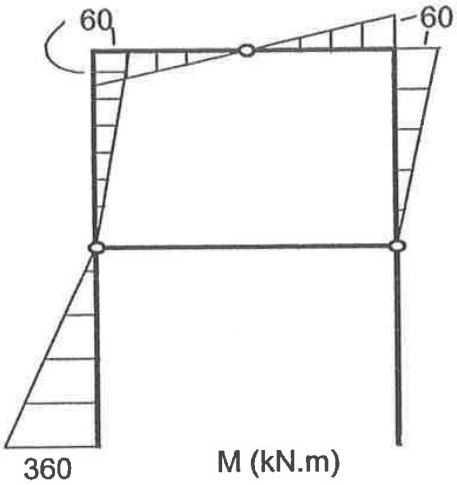
Esforços externos nas subestruturas:





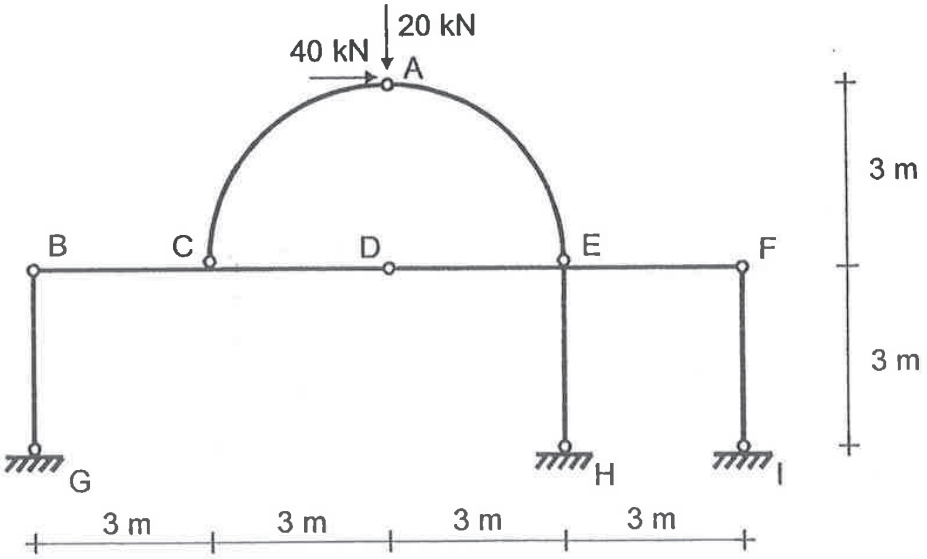


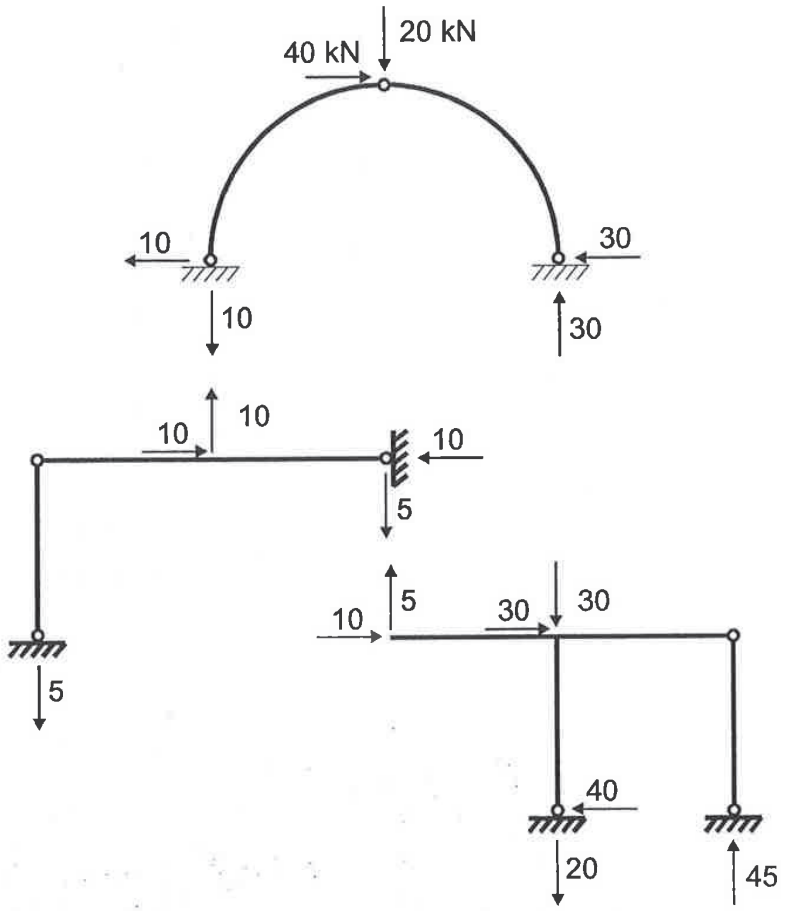
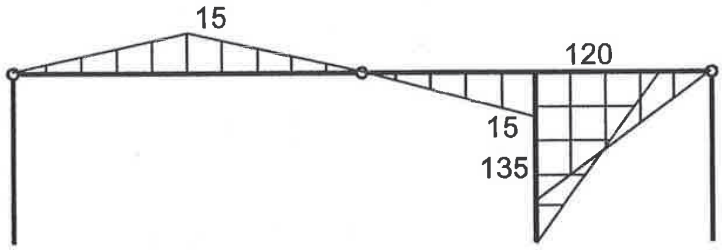




Exemplo 11.3

Traçar o diagrama de momentos fletores dos trechos retos da estrutura da figura:





M (kNm)