Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Introdução à Mecânica das Estruturas

Capítulos 1 a 5

Henrique Lindenberg Neto

1996

Índice

Prefácio II
Capítulo 1 Estática 1
1.1 Noções fundamentais 1
1.2 Redução de um sistema de forças em um ponto 7
1.3 Sistemas mecanicamente equivalentes 8
1.4 Sistemas de forças coplanares 13
1.5 Equilíbrio 24
1.6 Estática dos sistemas materiais planos 25
1.6.1 Apoios 26
1.6.2 Movimento de um sistema material plano 30
1.6.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas 32
1.6.4 Determinação das reações de apoio 39
1.7 Estática dos sistemas materiais espaciais 50
1.7.1 Apoios 51
1.7.2 Movimentos de um sistema material espacial 56
1.7.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas 58
1.7.4 Momento de uma força em relação a um eixo 60
1.7.5 Equações de equilíbrio 62
1.7.6 Determinação das reações de apoio 64
Capítulo 2 O Conceito de Tensão 70
Capítulo 3 Esforços Solicitantes 83
Capítulo 4 Teorema Fundamental 92
Capítulo 5 Diagramas de Esforços Solicitantes 101
5.1 Introdução 101
5.2 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas 105
5.2.1 Convenção de sinais 105
5.2.2 Exemplos 109
5.2.3 Equações diferenciais de equilíbrio 129
5.2.4 Continuando os exemplos 140
5.3 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais 203
5.3.1 Convenção de sinais 206
5.3.2 Exemplos 213

Prefácio

Esta publicação apresenta o texto da disciplina PEF-124 "Introdução à Mecânica das Estruturas", lecionada aos alunos do 4º semestre do curso de engenharia civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

É nesta disciplina que os alunos têm seu primeiro contato com as estruturas e seu projeto, sendo seu objetivo dar as primeiras noções sobre o comportamento físico das estruturas e sobre concepção estrutural.

Estudam-se estruturas reticuladas isostáticas – vigas simples, treliças, vigas Gerber, arcos e pórticos triarticulados –, mostrando-se como o comportamento de cada um destes tipos de estrutura decorre de sua forma e do arranjo de suas barras.

Apresenta-se também um breve histórico da evolução das estruturas, analisa-se a adequação dos diferentes materiais estruturais aos diferentes sistemas estruturais, discutem-se os aspectos construtivos e de localização física das estruturas que influem na decisão sobre o tipo de estrutura a ser adotado.

Esta é a primeira de uma série de cinco disciplinas que têm como objetivo dar aos alunos os fundamentos básicos da engenharia de estruturas, preparando-os para as disciplinas de projeto de estruturas de concreto, metálicas e de madeira e para as disciplinas de geotecnia do curso de engenharia civil. As demais disciplinas da série são PEF-125 "Resistência dos Materiais e Estática das Construções I", PEF-126 "Resistência dos Materiais e Estática das Construções II", PEF-127 "Resistência dos Materiais e Estática das Construções III" e PEF-128 "Resistência dos Materiais e Estática das Construções IV", ministradas respectivamente aos alunos do 5º, 6º, 7º e 8º semestre do curso de engenharia civil.

Apresento os meus mais profundos agradecimentos ao Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior e à Engenheira Maria Silvina Medrano pela magnífica composição e editoração do texto e das figuras, com tanto capricho e de forma tão clara e didática.

O Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior e a Engenheira Maria Silvina Medrano, que desenvolvem programa de doutorado em engenharia de estruturas no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP, foram estagiários do PAE – Programa de Aperfeiçoamento de Ensino da Reitoria da Universidade de São Paulo, junto à disciplina PEF-124 "Introdução à Mecânica das Estruturas". O Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior realizou seu estágio durante o segundo semestre de 1994 e o primeiro semestre de 1995; a Engenheira Maria Silvina Medrano, durante o segundo semestre de 1995 e o primeiro semestre de 1996. A editoração deste texto foi uma das atividades que desenvolveram neste estágio: o Engenheiro Alfonso Pappalardo Junior se encarregou dos Capítulos 1, 2 e 3, e a Engenheira Maria Silvina Medrano, dos Capítulos 4 e 5.

São Paulo, julho de 1996 Henrique Lindenberg Neto

Capítulo 1

Estática

O objetivo deste capítulo é recordar algumas noções da estática dos sólidos rígidos que serão utilizadas ao longo do curso de engenharia de estruturas e, por esta razão, vai-se procurar ilustrar esta recordação com exemplos extraídos da própria engenharia de estruturas.

1.1 Noções fundamentais

Nesta seção serão examinadas as forças e seus momentos.

O conceito de força será introduzido por meio do 3º Princípio da Mecânica Clássica: "*Em cada instante, a ação mecânica de um corpo sobre um ponto material pode ser representada por um vetor (força interativa) aplicado no ponto*".

Uma extensão deste princípio leva à seguinte afirmação: "*Em cada instante, a ação mecânica de um corpo sobre um sólido rígido pode ser representada por vetores (forças interativas) aplicados em pontos do sólido*".

Esta ação de um sólido sobre outro pode se manifestar à distância ou por contato direto entre eles. No primeiro caso, as forças que representam a ação são forças de volume, como as que representam a atração que a Terra exerce sobre um homem em pé em uma calçada; no segundo caso, as forças que representam a ação são forças de superfície, como as que representam a ação que a calçada exerce sobre o homem, aplicadas nos trechos das solas dos sapatos que estão em contato com a calçada.

Quando a superfície em que se aplicam as forças é muito pequena, pode-se admití-la reduzida a um ponto, dizendo-se então que a força é concentrada; quando a superfície em que se aplicam as forças é muito estreita, pode-se admití-la reduzida a uma linha, dizendo-se então que a força se distribui linearmente.

É muito importante salientar que quando se fala de uma força interativa está-se fazendo referência a um vetor aplicado e não a um vetor livre. A consideração dos pontos de aplicação das forças é de capital importância para o estudo da ação que um sólido exerce sobre outro, pois uma mesma força aplicada em diferentes pontos de um mesmo sólido pode produzir efeitos totalmente distintos, como claramente mostra a Figura 1.1. A força $\vec{F}$, quando aplicada no ponto A, imprime ao sólido um movimento de rotação no sentido anti-horário; quando aplicada no ponto B, não provoca nenhum movimento do sólido e, quando aplicada no ponto C, produz uma rotação no sentido horário.

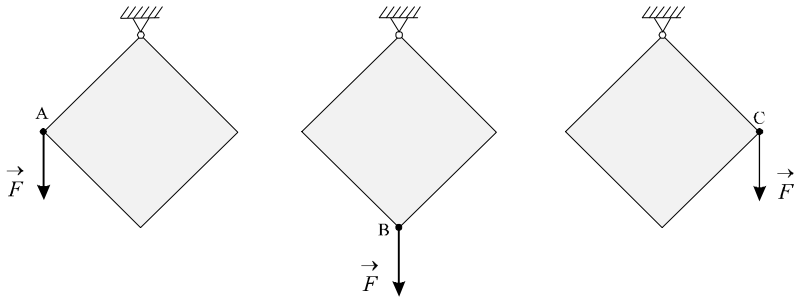


Figura 1.1

Volta-se então a enfatizar: *uma força interativa é um vetor aplicado*.

Matematicamente, as forças interativas são representadas por um par constituído por um vetor e por um ponto. Uma força concentrada $\vec{F}$ aplicada em um ponto P é matematicamente representada pelo par (P, $\vec{F}$), isto é, pelo vetor aplicado (P, $\vec{F}$).

Definição 1.1

Linha de ação de uma força $\vec{F}$ aplicada em um ponto P é a reta que passa por P e é paralela a $\vec{F}$ (Figura 1.2).

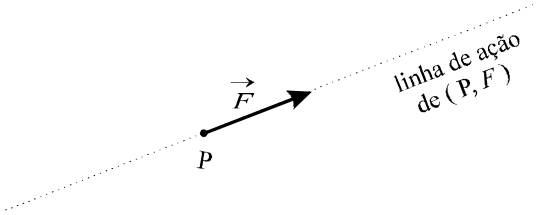


Figura 1.2

Definição 1.2

Momento de (P, $\vec{F}$) *em relação a um ponto (ou polo)* O é o vetor, passando em O, definido por

$$\vec{M}_{\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \vec{F} \ . \qquad (1.1)$$

Suas características são:

- **direção**: perpendicular ao plano determinado pela linha de ação de (P, $\vec{F}$) e pelo polo O (plano π da Figura 1.3).

- **sentido**: dado pela regra da mão direita ou, equivalentemente, pela regra do saca-rolha.

- **intensidade**: $$\|\vec{M}_{\mathrm{O}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\| \, \|\vec{F}\| \operatorname{sen}\alpha \, . \qquad (1.2)$$

Por simplicidade, vai-se sempre desenhar o vetor $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ com origem no ponto O e, para facilitar a distinção entre forças e momentos, os vetores que representam momentos serão identificados por setas duplas. O momento $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ de (P, $\vec{F}$) em relação a O está indicado na Figura 1.3.

Como

$$\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\| \operatorname{sen}\alpha = d \ , \qquad (1.3)$$

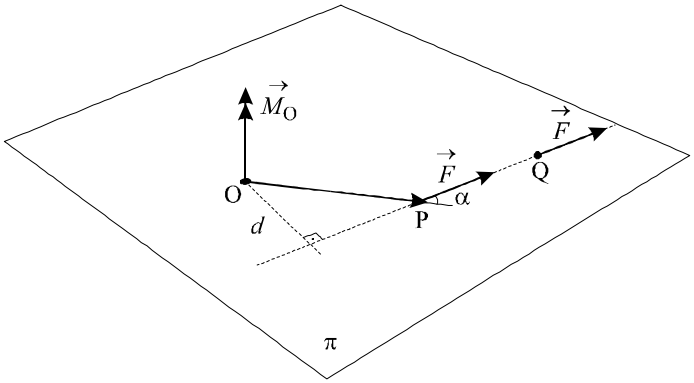


Figura 1.3

onde d é a distância do polo O à linha de ação de (P, $\vec{F}$), tem-se:

$$\|\vec{M}_O\| = \|\vec{F}\| \; d \; . \qquad (1.4)$$

A distância d recebe o nome de *braço do momento* de (P, $\vec{F}$) em relação ao polo O.

Observa-se que o momento de uma força em relação a um ponto tem a dimensão do produto de uma força por uma distância, sendo então medido em Nm, kgfcm, tfm, etc.

Mencionou-se acima que o sentido de $\vec{M}_O$ pode ser determinado pela regra da mão direita ou, equivalentemente, pela regra do saca-rolha. Estas duas regras serão agora explicadas, começando-se pela regra da mão direita.

<u>Regra da mão direita</u>

Sabe-se que o momento $\vec{M}_O$ tem a direção da reta r da Figura 1.4, passando por O e perpendicular ao plano definido pela linha de ação de (P, $\vec{F}$) e pelo ponto O (plano π).

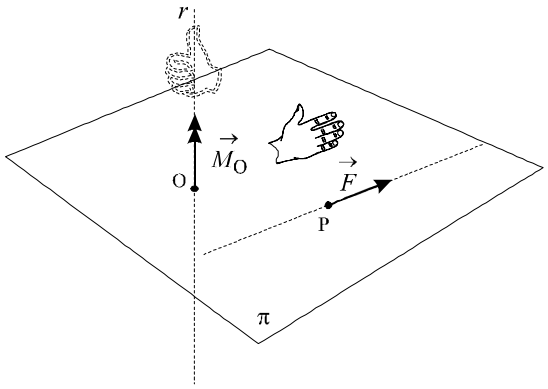


Figura 1.4

O sentido de $\vec{M}_O$ pode ser determinado da seguinte maneira:

- no plano que contém a linha de ação de (P, $\vec{F}$) e é perpendicular a π, coloque a mão direita com a palma voltada para a reta r e com os dedos no sentido de $\vec{F}$;
- deixe o polegar perpendicular aos demais dedos;
- o sentido de $\vec{M}_O$ é então o apontado pelo polegar da mão direita (Figura 1.4).

<u>Regra do saca-rolha</u>

A regra do saca-rolha é a seguinte:

- imagine um saca-rolha posicionado de forma que seu eixo fique sobre a reta r;
- gire o cabo do saca-rolha no mesmo sentido que o da rotação da força $\vec{F}$ em torno do ponto O ;
- a ponta do saca-rolha vai então se deslocar sobre a reta r ;
- o sentido de $\vec{M}_O$ é o do deslocamento da extremidade do saca-rolha.

Há duas posições possíveis para a colocação do saca-rolha sobre a reta r: com a ponta voltada para cima ou com a ponta voltada para baixo. Em ambos os casos o deslocamento da extremidade do saca-rolha se dá no mesmo sentido, como mostram as Figuras 1.5(a) e 1.5(b), podendo-se então utilizar a regra para a

determinação do sentido de $\vec{M}_O$ com o saca-rolha em qualquer uma das duas posições. Na Figura 1.5(a) o saca-rolha foi colocado com a ponta voltada para cima; na Figura 1.5(b), com a ponta voltada para baixo.

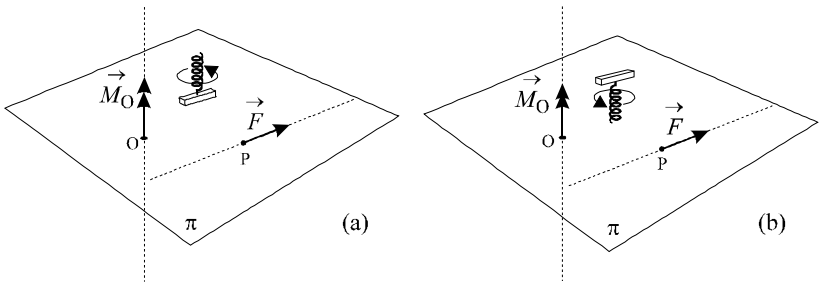


Figura 1.5

As duas regras apresentadas levam ao mesmo resultado, e qualquer uma delas pode ser empregada para determinar o sentido de $\vec{M}_O$. A regra do saca-rolha, por permitir a colocação do saca-rolha em duas posições, é a mais versátil das duas e, em determinadas situações, permite evitar ginásticas desajeitadas com a mão direita. A adoção de uma regra ou outra é, portanto, uma questão de gosto pessoal e fica ao critério de quem irá utilizá-la.

A expressão $\|\vec{M}_O\| = \|\vec{F}\|\, d$ mostra que a intensidade do momento de uma força (P, $\vec{F}$) em relação a um ponto O é o produto de duas grandezas: a intensidade da força e a distância entre sua linha de ação e o ponto O. Desta expressão, obtêm-se as seguintes propriedades:

<u>Propriedade 1.1</u>

$$\vec{M}_O = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad d = 0\,, \qquad (1.5)$$

isto é, o momento de (P, $\vec{F}$) em relação a O é nulo se e somente se a força $\vec{F}$ é nula ou então se sua linha de ação passa por O.

<u>Propriedade 1.2</u>

Se (P, $\vec{F}$) e (Q, $\vec{F}$) têm a mesma linha de ação, então seus momentos em relação a um mesmo polo são iguais.

Dado um *sistema de forças* $S = \{(\mathrm{P}_1, \vec{F}_1), (\mathrm{P}_2, \vec{F}_2), \ldots, (\mathrm{P}_n, \vec{F}_n)\}$, tem-se:

<u>Definição 1.3</u>

Resultante de S é a soma vetorial das forças que o compõem.

A resultante é indicada por $\vec{R}$, tendo-se então

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,. \qquad (1.6)$$

<u>Definição 1.4</u>

Momento de S em relação a um ponto O é a soma vetorial dos momentos de cada uma das forças do sistema em relação a esse ponto.

O momento de S em relação a O é indicado por $\vec{M}_{\mathrm{O}}$, tendo-se então:

$$\vec{M}_{\mathrm{O}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OP}}_i \wedge \vec{F}_i \,. \qquad (1.7)$$

O momento $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ passa por O e, por simplicidade, vai-se sempre desenhá-lo com origem em O.

Definição 1.5

Um sistema constituído por duas forças de mesma intensidade e direção, mas de sentidos opostos e com diferentes linhas de ação, recebe o nome de *binário* (Figura 1.6).

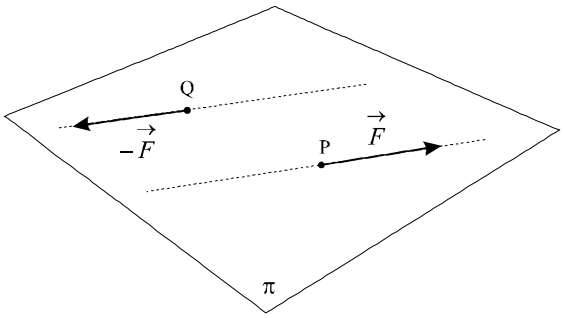


Figura 1.6

Propriedade 1.3

A resultante de um binário é sempre nula.

Propriedade 1.4

O momento de um binário em relação a um ponto é sempre o mesmo, qualquer que seja o ponto considerado.

A demonstração da primeira propriedade é imediata. Para demonstrar a segunda, considerem-se o binário da Figura 1.6 e um ponto genérico O. O momento do binário em relação a O é

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\mathrm{O}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \wedge (-\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \vec{F} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{\mathrm{QO}} \wedge \vec{F} = \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{QO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{QP}} \wedge \vec{F} \,, \end{aligned} \qquad (1.8)$$

independente do ponto O considerado, o que prova a propriedade.

Como o momento de um binário em relação a um ponto independente do polo, ele será simplesmente chamado de momento de binário e identificado por $\vec{M}$, sem qualquer referência a um polo.

Já que o momento de um binário independe do polo, qualquer ponto pode ser utilizado em sua determinação, por exemplo o ponto P ou o ponto Q da Figura 1.7, ou então qualquer outro ponto. A adoção de P ou de Q facilita a obtenção de $\vec{M}$, pois em relação a eles uma das forças do binário tem momento nulo.

É fácil verificar que o momento $\vec{M}$ de um binário tem as seguintes características:

- **direção**: perpendicular ao plano definido pelas linhas de ação das forças que constituem o binário (plano π da Figura 1.7).

- **sentido**: o do momento de (P, $\vec{F}$) em relação a Q – ou de (Q,- $\vec{F}$) em relação a P –, dado pela regra da mão direita ou pela regra do saca-rolha.

- **intensidade**:

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{F}\|\ b, \qquad (1.9)$$

onde b é a distância entre as linhas de ação das duas forças (Figura 1.7).
A distância b recebe o nome de *braço de alavanca* do binário.

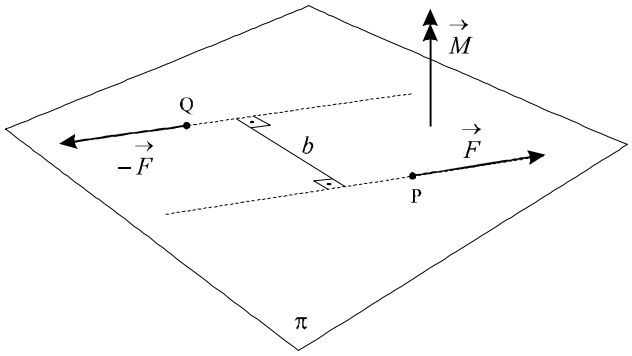


Figura 1.7

A intensidade do momento do binário é, portanto, o produto da intensidade de uma das forças que constituem o binário pelo braço de alavanca.
Deve-se ainda comentar que quando se faz referência apenas ao momento de um binário, sem a menção de um polo específico, não fica definido um ponto particular pelo qual deve passar a reta que contém $\vec{M}$. O vetor $\vec{M}$ pode então ser indicado sobre qualquer reta perpendicular a π (Figura 1.7).

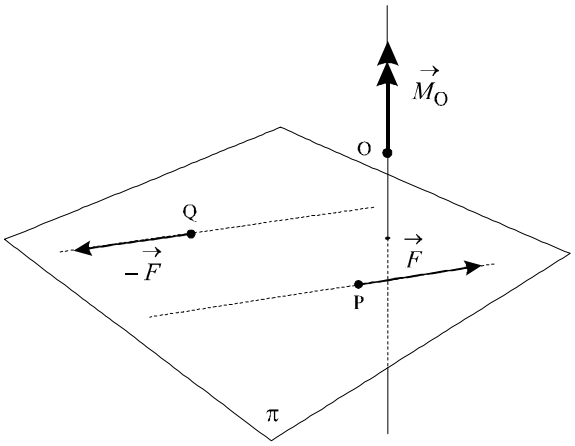


Figura 1.8

O mesmo não ocorre quando se menciona um polo específico: o momento de um binário em relação a um ponto O é o vetor $\vec{M}_{\mathrm{O}} \equiv \vec{M}$ situado sobre a reta perpendicular a π que passa por O. Por simplicidade, indica-se esse vetor $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ com origem em O (Figura 1.8).

1.2 Redução de um sistema de forças em um ponto

Definição 1.6

Reduzir um sistema de forças $S = \{(P_i, \vec{F}_i),\ i = 1,2,\ldots,n\}$ *em um ponto (ou polo)* A consiste em aplicar neste ponto dois vetores: $\vec{R}$ e $\vec{M}_{\mathrm{A}}$.
É interessante notar que a resultante $\vec{R}$ do sistema de forças S independe do polo de redução.

A redução de um mesmo sistema de forças S em dois pontos distintos A e B leva respectivamente aos momentos $\vec{M}_{\mathrm{A}}$ e $\vec{M}_{\mathrm{B}}$. A relação entre eles se determina facilmente:

$$\vec{M}_{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{BP}}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}_i) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{AP}}_i \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{M}_{\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \vec{R} + \vec{M}_{\mathrm{A}} \ . \tag{1.10}$$

Tem-se assim a seguinte *fórmula de mudança de polo*:

$$\vec{M}_{\mathrm{B}} = \vec{M}_{\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \vec{R} \ . \tag{1.11}$$

Esta fórmula mostra que o momento $\vec{M}_{\mathrm{B}}$ é a soma vetorial de $\vec{M}_{\mathrm{A}}$ com o momento que a resultante $\vec{R}$ aplicada em A tem em relação a B . Em outras palavras, reduzir em B um sistema de forças previamente reduzido em A consiste em aplicar em B uma força e dois momentos: $\vec{R}$, $\vec{M}_{\mathrm{A}}$ e o momento de (A , $\vec{R}$) em relação a B (Figura 1.9).

Propriedade 1.5

Se a resultante $\vec{R}$ de um sistema de forças é nula, então o momento $\vec{M}_{\mathrm{B}}$ independe da posição do polo B de redução.

A recíproca desta afirmação também é verdadeira: se o momento $\vec{M}_{\mathrm{B}}$ independe da posição do polo B de redução, então a resultante $\vec{R}$ do sistema é nula.

A frase matemática que traduz a Propriedade 1.5 é:

$$\vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_{\mathrm{B}} \text{ independe da posição do polo } B \text{ de redução} \tag{1.12}$$

Esta propriedade decorre imediatamente da fórmula de mudança de polo.

Como um caso particular da situação descrita tem-se o de um binário, cuja resultante é nula, e cujo momento, portanto, independe do polo de redução, como já se mostrou anteriormente.

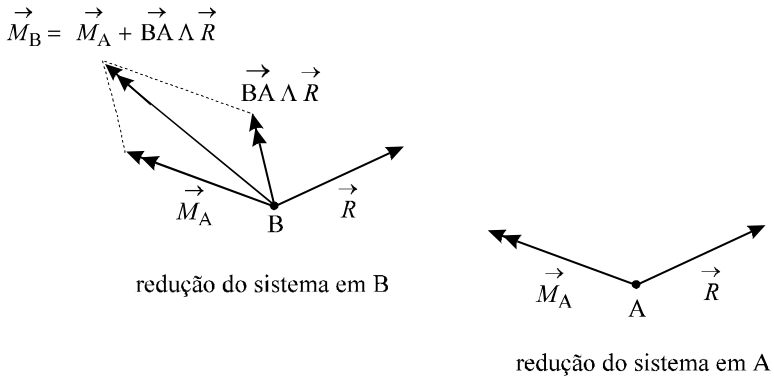


Figura 1.9

Propriedade 1.6

Se a resultante $\vec{R}$ de um sistema de forças é nula e seu momento em relação a um polo A também é nulo, então a redução do sistema em qualquer outro ponto B leva a um momento $\vec{M}_B$ nulo.

A recíproca desta afirmação também é verdadeira.

Matematicamente, tem-se:

$$\vec{R} = \vec{0} \text{ e } \vec{M}_A = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_B = \vec{0}\ ,\ \forall B \qquad (1.13)$$

Esta propriedade também decorre imediatamente da fórmula de mudança de polo, e ela é o caso particular da Propriedade 1.5 correspondente à situação em que o momento que independe do polo de redução é nulo.

1.3 Sistemas mecanicamente equivalentes

Definição 1.7

Diz-se que dois sistemas de forças S e S' são *mecanicamente equivalentes* quando suas reduções em um mesmo ponto genérico A levam aos mesmos esforços, isto é, $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}_A = \vec{M}'_A$.

Observa-se que na definição acima o ponto A de redução é qualquer, ou seja, sempre a redução de dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes em um mesmo ponto levará aos mesmos esforços, qualquer que seja o polo de redução considerado.

Pode-se verificar facilmente por meio da fórmula de mudança de polo que a igualdade de esforços em um polo de redução implica na igualdade de esforços em todos os demais polos de redução.

Dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes aplicados em um mesmo sólido rígido levam-no a apresentar o mesmo movimento, e esta é a origem do termo *mecanicamente equivalentes*.

A demonstração desta afirmação decorre diretamente da aplicação do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento Cinético.

Como exemplo, considere-se uma mesma barra rígida homogênea submetida a dois sistemas de forças distintos, mas mecanicamente equivalentes (Figura 1.10).

É imediata a constatação de que os dois sistemas de forças da Figura 1.10 são mecanicamente equivalentes: basta para isso reduzí-los em um mesmo ponto, por exemplo, o centro de massa G da barra. Nos dois casos se obterá $\vec{R} = 2\,P\,\vec{j}$ e $\vec{M} = \vec{0}$; estando o sólido nas mesmas condições nos instantes em que são aplicados os dois sistemas de forças, passará a apresentar o mesmo movimento nos dois casos.

Se as barras da Figura 1.10 estiverem em repouso no momento em que são solicitadas pelos dois sistemas de forças, passarão a apresentar o mesmo movimento de translação vertical após a aplicação das forças.

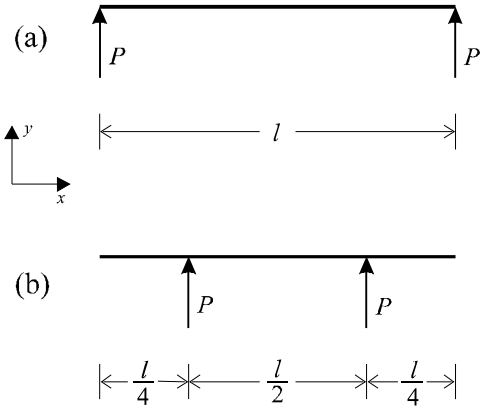


Figura 1.10

<u>Propriedade 1.7</u>

A redução de um sistema de forças em um ponto leva a uma força e um momento mecanicamente equivalentes a esse sistema.

A demonstração desta propriedade é bastante simples.

Considere-se a Figura 1.11(a), em que se representa um sólido submetido a um sistema de forças S_I .

A redução do sistema S_I em um ponto genérico *A* do sólido leva aos esforços $\vec{R}$ e $\vec{M}_A$ indicados na Figura 1.11(b); o sistema constituído por estes dois esforços será chamado de sistema S_{II}.

Deseja-se demonstrar que os sistemas S_I e S_{II} são mecanicamente equivalentes.

Basta, para isso, mostrar que a redução destes dois sistemas em um mesmo ponto genérico B leva aos mesmos esforços.

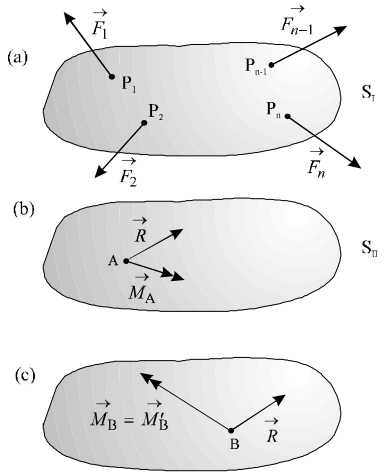


Figura 1.11

Seja B o ponto indicado na Figura 1.11(c). A redução do sistema S_I em B leva à resultante $\vec{R}$ e ao momento $\vec{M}_B$; a redução do sistema S_{II} nesse mesmo ponto leva obviamente à mesma resultante $\vec{R}$ e ao momento $\vec{M}'_B$.

Demonstrando que $\vec{M}'_B = \vec{M}_B$, demonstra-se a propriedade.

Tem-se

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BP_i} \wedge \vec{F_i} \tag{1.14}$$

e

$$\vec{M}'_B = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A \ . \tag{1.15}$$

Pode-se reescrever (1.14) como

$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP_i}) \wedge \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F_i} = \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F_i} \ . \end{aligned} \tag{1.16}$$

Como se tem

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{R} \tag{1.17}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F_i} = \vec{M}_A , \tag{1.18}$$

tem-se

$$\vec{M}_B = \overrightarrow{BA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F_i} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A = \vec{M}'_B \ , \tag{1.19}$$

ficando assim demonstrada a Propriedade 1.7.

Ilustra-se a Propriedade 1.7 por meio de um exemplo.

Exemplo 1.1

Considere-se a barra da Figura 1.12(a), em que são aplicadas duas forças coplanares, que constituem o sistema de esforços S_I.

A redução destas forças em A leva aos esforços indicados na Figura 1.12(b), que constituem o sistema de esforços S_{II}:

$$\vec{R} = 20\vec{i} - 50\vec{i} = -30\vec{i} \tag{1.20}$$

E

$$\vec{M}_A = -20 \cdot 2\vec{k} + 50 \cdot 4\vec{k} = 160\vec{k} \ . \tag{1.21}$$

Os sistemas de esforços S_I e S_{II} são sistemas mecanicamente equivalentes: de fato, reduzindo os dois sistemas no ponto B obtêm-se os mesmos esforços, indicados na Figura 1.12(c).

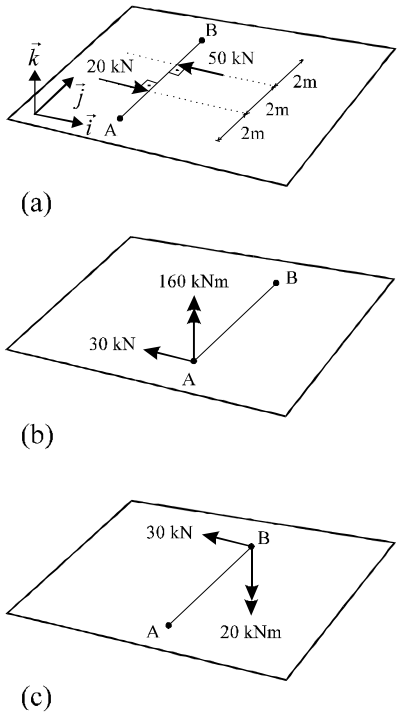


Figura 1.12

A redução de S_I em B leva à resultante $\vec{R} = -30\vec{i}$ e ao momento

$$\vec{M}_B = 20 \cdot 4\vec{k} - 50 \cdot 2\vec{k} = -20\vec{k}\ ; \qquad (1.22)$$

a redução de S_{II} em B leva à resultante $\vec{R}$ e ao momento

$$\vec{M}'_B = -30 \cdot 6\vec{k} + 160\vec{k} = -20\vec{k}\ . \qquad (1.23)$$

Como se previra, tem-se

$$\vec{M}'_B = \vec{M}_B = -20\vec{k}\ , \qquad (1.24)$$

comprovando-se assim que S_I e S_{II} são sistemas mecanicamente equivalentes.

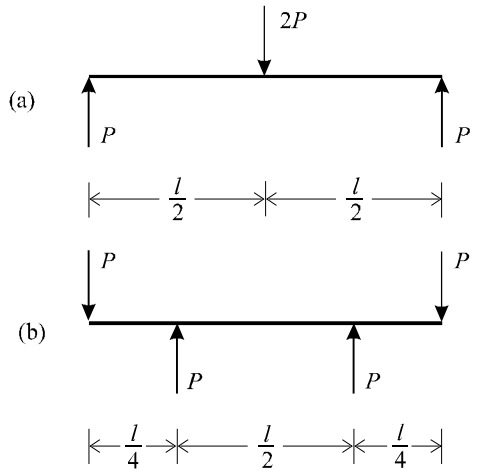


Figura 1.13

Mostrou-se, no início desta seção, que dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes produzirão os *mesmos* efeitos se forem aplicados em um mesmo sólido *rígido* nas mesmas condições iniciais. É entretanto extremamente importante observar que dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes produzirão efeitos *distintos* se forem aplicados em um mesmo sólido *deformável*.

Na Figura 1.13 se indica uma mesma barra deformável homogênea solicitada por dois carregamentos mecanicamente equivalentes.

A redução dos dois sistemas de forças no centro de massa G leva em ambos os casos a $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_G = \vec{0}$. Se as barras se encontrarem em repouso no instante em que são aplicados os carregamentos, elas irão se deformar – pois trata-se agora de barras deformáveis –, e permanecerão em repouso na configuração deformada.

As formas deformadas das duas barras são intuitivamente conhecidas, sendo completamente distintas nos dois casos (Figura 1.14): a barra da Figura 1.14(a) tem concavidade para cima e a da Figura 1.14(b), para baixo.

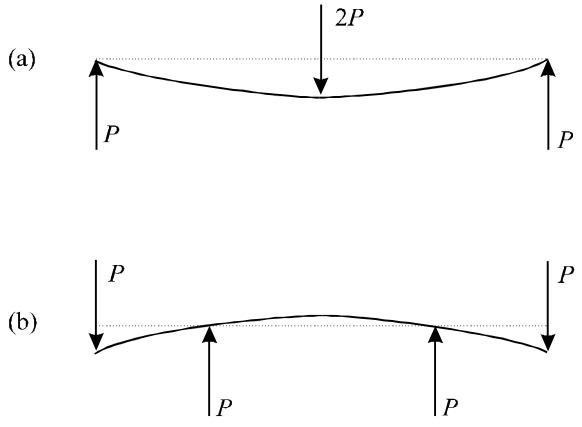


Figura 1.14

Como outro exemplo de estrutura deformável submetida a sistemas de forças mecanicamente equivalentes considerem-se as molas da Figura 1.15, já representadas na configuração deformada de repouso.

Como era de se esperar em vista dos carregamentos que as solicitam, a mola superior apresenta alongamento maior que a mola inferior.

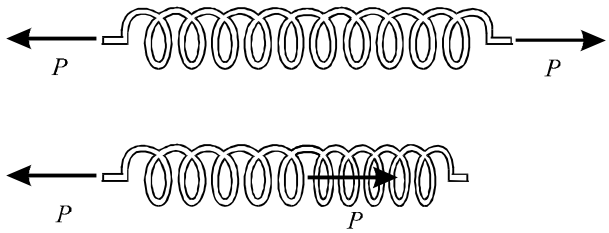


Figura 1.15

Esta discussão mostra claramente que dois sistemas de forças mecanicamente equivalentes produzem os mesmos efeitos apenas quando aplicados em um mesmo sólido rígido, produzindo efeitos distintos quando o sólido em que se aplicam é deformável.

Neste capítulo está-se fazendo uma recordação de noções da estática dos sólidos rígidos, logo, no seu âmbito, pode-se afirmar que sistemas mecanicamente equivalentes aplicados em um mesmo sólido produzem os mesmos efeitos.

1.4 Sistemas de forças coplanares

Vai-se iniciar o estudo dos sistemas de forças coplanares pela apresentação – na Figura 1.16 – de uma nova forma de indicar momentos, particularmente adequada à analise destes sistemas.

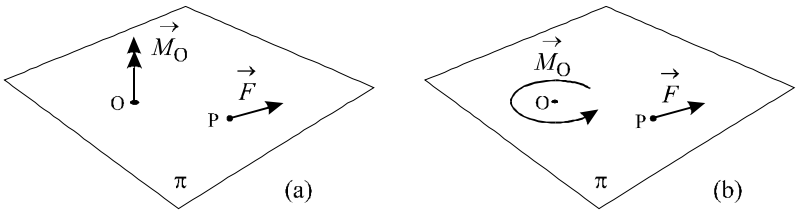


Figura 1.16

Na Figura 1.16(a) o momento $\vec{M}_O$ de uma força (P, $\vec{F}$) em relação a um polo genérico O encontra-se representado da maneira já apresentada anteriormente. Uma outra forma de representar este momento, por meio de uma flecha circular, está indicada na Figura 1.16(b). A flecha circular é desenhada em perspectiva no plano π (plano definido pela força (P, $\vec{F}$) e pelo ponto O), e seu sentido é o da rotação de (P, $\vec{F}$) em torno de O. Não havendo perigo de confundir esta representação de momento com a de uma força, utiliza-se apenas uma seta na flecha circular.

Na Figura 1.17 indicam-se as duas representações do momento de (P, $\vec{F}$) em relação ao ponto O no caso em que a força $\vec{F}$ tem sentido oposto ao anterior.

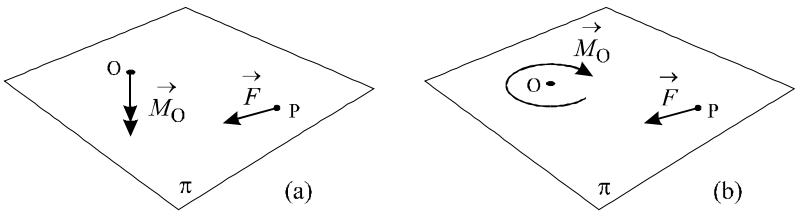
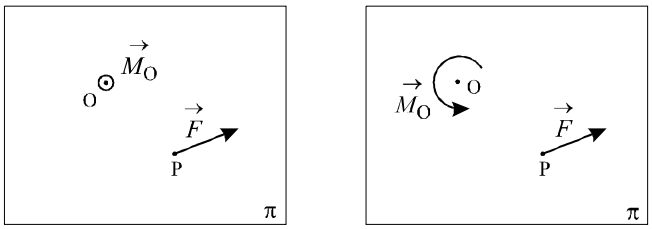


Figura 1.17

A representação dos momentos com flechas circulares é muito adequada ao estudo dos sistemas de forças coplanares, pois neste caso costuma-se confundir o plano π com o plano do papel, ficando a linha de visão do observador perpendicular ao plano do papel.



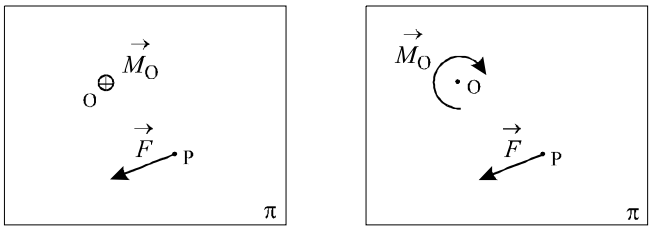
(a) (b)

Figura 1.18

Quando se confunde o plano π com o plano do papel as representações dos momentos da Figura 1.16 tornam-se as da Figura 1.18.

Observa-se que a primeira representação de $\vec{M}_O$ torna-se agora pouco adequada, pois o vetor $\vec{M}_O$ se reduz a um ponto. Ele é indicado pelo símbolo $\odot$, que mostra a ponta de uma flecha que está saindo do papel. Já a representação com a flecha circular é muito adequada a esta situação, inclusive porque agora a eventual dificuldade de desenhá-la em perspectiva no plano π deixa de existir.

Na Figura 1.19 mostram-se os vetores da Figura 1.17 quando se confunde o plano π com o do papel.



(a) (b)

Figura 1.19

Mais uma vez, a primeira representação leva o vetor $\vec{M}_O$ a se reduzir a um ponto, indicado agora pelo símbolo $\oplus$, que mostra a extremidade final de uma flecha que está entrando no papel. Mais uma vez a representação do momento com flecha circular é muito adequada.

Deve-se dizer que as mesmas virtudes que tornam atraente a representação dos momentos com flechas circulares no caso dos sistemas de forças coplanares fazem com que ela seja pouco adequada para sistemas espaciais, que exigem o desenho de flechas circulares em perspectiva, o que é muito difícil de fazer de forma clara. Neste caso opta-se então pela primeira representação, com flechas retas e setas duplas.

<u>Proposição 1.1</u>

Sendo S um sistema de forças coplanares com resultante $\vec{R} \neq \vec{0}$, existe uma reta paralela a $\vec{R}$ e pertencente ao plano tal que a redução do sistema em qualquer ponto B desta reta leva exclusivamente ao vetor $\vec{R}$, com $\vec{M}_B = \vec{0}$. Nos pontos desta reta, que é única, o sistema se reduz portanto a apenas uma força.

Vai-se agora demonstrar esta proposição. Na Figura 1.20 estão indicados o plano definido pelas forças coplanares (plano π) e os esforços provenientes da redução do sistema em um ponto genérico A de π : $\vec{R}$ e $\vec{M}_A$.

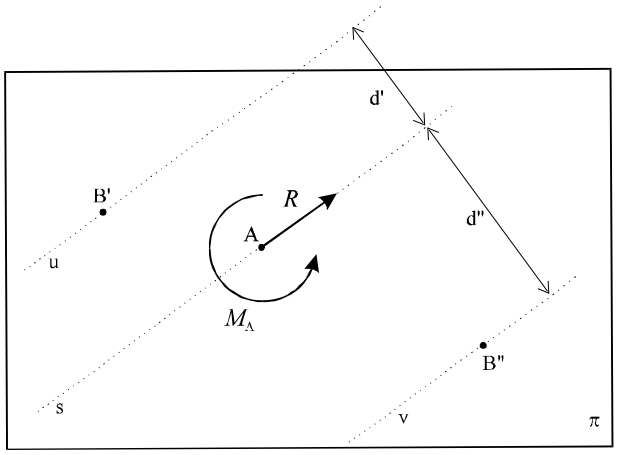


Figura 1.20

Observa-se que na Figura 1.20 as flechas de $\vec{R}$ e $\vec{M}_A$ foram omitidas, numa simplificação da notação utilizada. Esta simplificação não elimina nenhuma informação, e ela deve ser entendida da seguinte forma: em A tem-se uma força com a direção e o sentido indicados e de intensidade R ; tem-se também um momento com a direção e o sentido indicados pela flecha circular e de intensidade M_A.

Indicam-se ainda na Figura 1.20 a linha de ação de (A, $\vec{R}$) – reta s – e dois pontos do plano π, ambos localizados em retas paralelas à reta s: o ponto B′ , situado sobre uma reta acima de s – reta u –, e o ponto B″ , situado sobre uma reta abaixo de s – reta v. A redução do sistema nos pontos B′ e B″ leva aos esforços indicados na Figura 1.21.

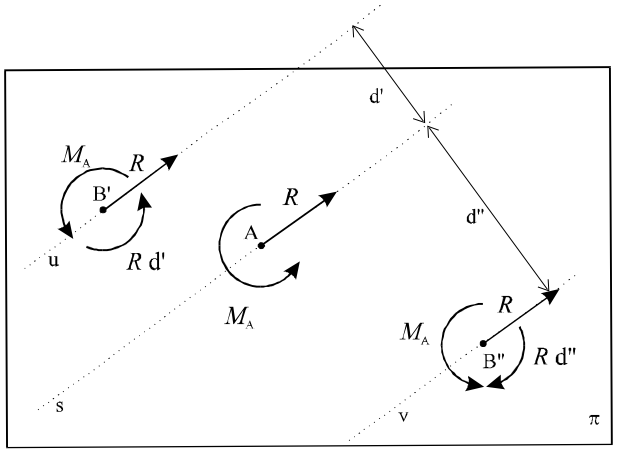


Figura 1.21

Os momentos do sistema em relação aos pontos B′ e B″ são determinados pela fórmula de mudança de polo, sendo iguais à soma vetorial do momento $\vec{M}_A$ com o momento de (A , $\vec{R}$) em relação a B′ e a B″ respectivamente. Sendo as forças coplanares e estando os pontos A , B′ e B″ no plano π, todos estes

momentos têm a mesma direção – perpendicular ao plano π –, e a soma vetorial citada pode então ser reduzida à simples soma algébrica dos módulos dos vetores.

Na Figura 1.21 as duas parcelas que compõem $\vec{M}_{B'}$ e $\vec{M}_{B''}$ estão indicadas separadamente. O momento de (A , $\vec{R}$) em relação a B′ tem o mesmo sentido de $\vec{M}_A$ – o sentido anti-horário –, logo $\vec{M}_{B'}$ tem sentido anti-horário e intensidade maior que M_A :

$$M_{B'} = M_A + R\,d' . \qquad (1.25)$$

Quanto maior for a distância d' entre as retas *u* e *s* maior será a intensidade $M_{B'}$.

Já o momento de (A , $\vec{R}$) em relação a B″ tem sentido horário, contrário ao de $\vec{M}_A$, e $\vec{M}_{B''}$ pode então, dependendo do valor de d'' , ter o sentido anti-horário, ser nulo ou ter o sentido horário, pois tem-se

$$M_{B''} = M_A - R\,d'' , \qquad (1.26)$$

sendo fácil perceber que um valor negativo para $M_{B''}$ nesta expressão indica um momento horário de intensidade $R\,d'' - M_A$.

A expressão (1.26) mostra que se tem:

- $M_{B''} > 0$ para $d'' < \dfrac{M_A}{R}$; (1.27)
- $M_{B''} = 0$ para $d'' = \dfrac{M_A}{R}$; (1.28)
- $M_{B''} < 0$ para $d'' > \dfrac{M_A}{R}$, (1.29)

ou seja, o momento $\vec{M}_{B''}$ tem o mesmo sentido que $\vec{M}_A$ para $d'' < M_A / R$, sentido contrário a $\vec{M}_A$ para $d'' > M_A / R$ e é nulo para $d'' = M_A / R$.

Como o momento $M_{B''}$ independe da posição do ponto B″ sobre a reta *v*, conclui-se que em todos os pontos da reta *v* definida por $d'' = M_A / R$ se tem $M_{B''} = 0$. A expressão (1.26) mostra claramente que esta é a única reta em cujos pontos se tem $M_{B''} = 0$.

Está assim demonstrada a Proposição 1.1: existe e é única a reta pertencente ao plano π em cujos pontos a redução do sistema de forças coplanares leva exclusivamente a uma força, a resultante $\vec{R}$ do sistema.
Estas idéias podem ser generalizadas determinando-se o momento do sistema em relação a um ponto genérico B do plano π. Na Figura 1.22 indica-se o gráfico da variação de M_B ao longo de qualquer reta perpendicular a *s*.

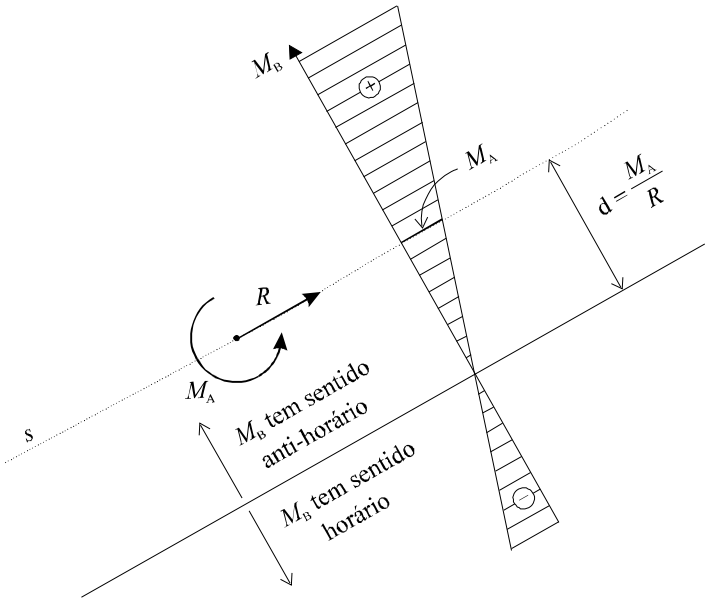


Figura 1.22

A discussão relativa à Proposição 1.1 que se acaba de fazer foi desenvolvida em cima de um caso concreto. As conclusões obtidas, entretanto, se aplicam às demais situações encontráveis na prática, como se mostra na Figura 1.23, em que um outro caso – diferente do anterior pelo fato de se ter $\vec{R}$ para baixo – é contemplado.

A convenção de sinais empregada nas Figuras 1.22 e 1.23 é aquela que costuma ser utilizada na estática dos sistemas coplanares, e ela encerra uma informação sobre o sentido dos momentos: momentos no sentido anti-horário são

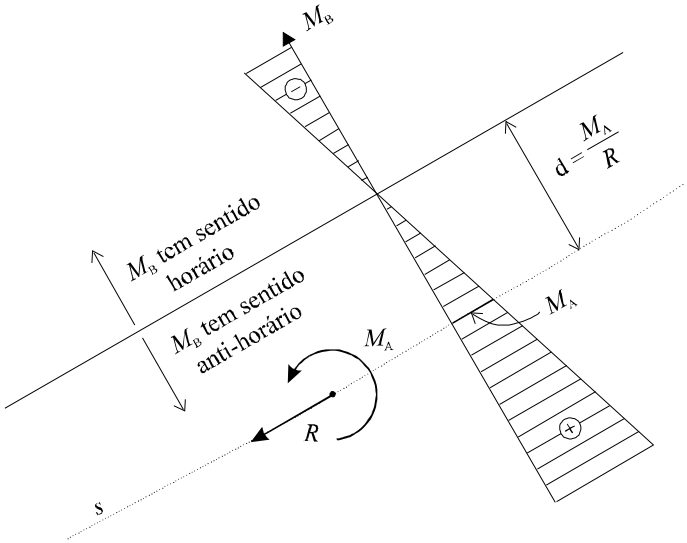


Figura 1.23

considerados positivos e momentos no sentido horário são considerados negativos. Isto, porque utilizando o referencial mostrado na Figura 1.24, um momento representado por uma flecha circular anti-horária tem o sentido de z e um momento representado por uma flecha circular horária tem o sentido contrário a z.

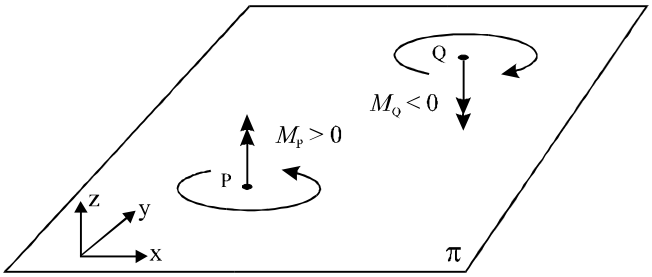


Figura 1.24

Todas as idéias aqui apresentadas para forças concentradas se estendem a forças distribuídas; a demonstração desta afirmação não será aqui apresentada, mas pode ser feita facilmente.

A determinação da reta em que um sistema de forças coplanares – com $\vec{R} \neq \vec{0}$ – se reduz exclusivamente à resultante $\vec{R}$ tem grande importância, e alguns exemplos desta determinação serão agora apresentados.

Exemplo 1.2

Determinar para que ponto da barra da Figura 1.25 a redução do sistema de forças aplicadas conduz exclusivamente à resultante *R*.

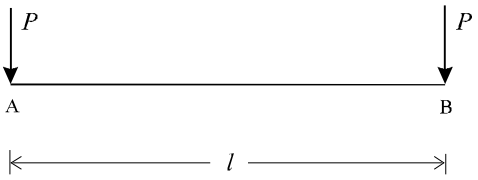


Figura 1.25

São apresentadas aqui duas formas de resolver este problema:

a) Solução direta

A solução direta consiste na redução do sistema em um ponto genérico Q da barra e na determinação de qual deve ser a posição do ponto Q para que o momento de redução se anule.

A redução do sistema em Q leva aos esforços indicados na Figura 1.26.

O momento de redução é

$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x); \qquad (1.30)$$

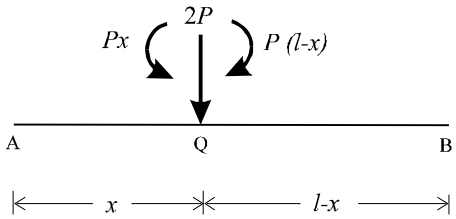


Figura 1.26

o ponto no qual a redução do sistema leva a momento nulo tem, portanto, a seguinte abcissa

$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x) = 0 \qquad (1.31)$$

$$2\,P \cdot x - P \cdot l = 0 \qquad (1.32)$$

$$x = \frac{l}{2}. \qquad (1.33)$$

Conclui-se, então, que o polo no qual o sistema de forças da Figura 1.25 se reduz exclusivamente à resultante é o ponto médio da barra, como se indica na Figura 1.27.

Como já se verificou, a redução de um sistema de forças em um ponto leva a um sistema mecanicamente equivalente ao sistema que já foi reduzido. São, portanto, mecanicamente equivalentes os dois sistemas representados na Figura 1.28, onde o símbolo ≡ indica a equivalência mecânica entre eles.

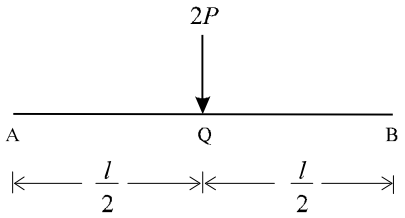


Figura 1.27

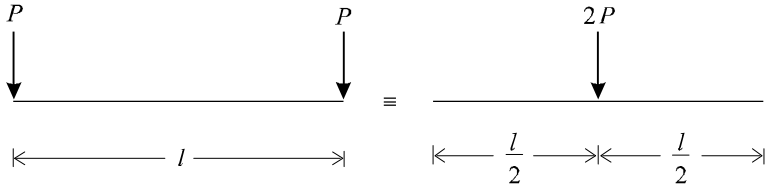


Figura 1.28

b) <u>Solução indireta</u>

A solução indireta se baseia no fato de o sistema original e o sistema reduzido exclusivamente a sua resultante serem mecanicamente equivalentes, o que possibilita que a determinação do polo de redução procurado seja feita de maneira indireta, através da resposta à seguinte pergunta: *em que ponto da barra se deve aplicar a resultante do sistema para que ela seja mecanicamente equivalente ao sistema original?*

Em outras palavras, deve-se responder ao seguinte: *qual deve ser a abcissa x do ponto* Q *para que os dois sistemas da Figura 1.29 sejam mecanicamente equivalentes?*

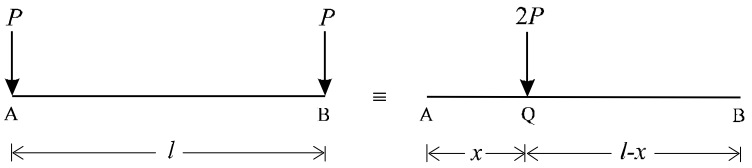


Figura 1.29

Para responder estas indagações basta reduzir os dois sistemas em um mesmo ponto e impor que os momentos de redução sejam os mesmos.

Por exemplo, reduzindo os dois sistemas no ponto A, tem-se os esforços da Figura 1.30.

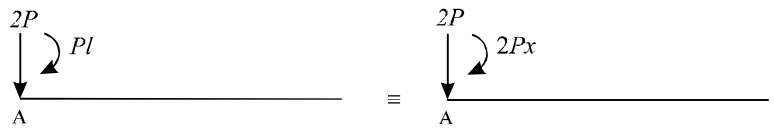


Figura 1.30

Impondo que os dois momentos sejam iguais, obtém-se a abcissa do ponto Q procurado

$$M_A = -P \cdot l = -2\ P \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{2}\ . \qquad (1.34)$$

O ponto Q obtido é o mesmo encontrado na resolução direta.

As duas soluções levam ao mesmo resultado, podendo-se então utilizar qualquer uma delas. A solução indireta costuma ser a mais simples, dada a liberdade que se tem na escolha do polo de redução para a comparação de momentos que leva ao ponto procurado.

Na resolução dos problemas que se seguem vai-se utilizar a solução indireta.

Exemplo 1.3

Aplicar na barra da Figura 1.31 uma única força mecanicamente equivalente ao sistema aplicado.

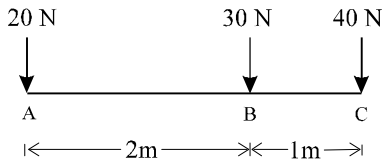


Figura 1.31

A força procurada é a resultante do sistema, mostrada na Figura 1.32.

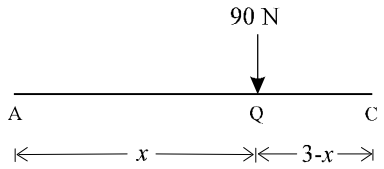


Figura 1.32

A redução do sistema da Figura 1.31 no ponto A leva ao momento

$$M_A = -30 \cdot 2 - 40 \cdot 3 = -180 \text{ Nm}\ ; \qquad (1.35)$$

a redução da resultante da Figura 1.32 nesse mesmo ponto leva ao momento

$$M_A = -90 \cdot x\ . \qquad (1.36)$$

Impondo que esses dois momentos sejam iguais, obtém-se

$$M_A = -180 = -90 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{180}{90} = 2 \text{ m}. \qquad (1.37)$$

São portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.33.

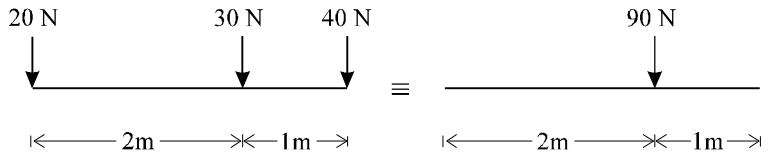


Figura 1.33

Exemplo 1.4

Determinar a linha de ação da força mecanicamente equivalente ao sistema da Figura 1.34.

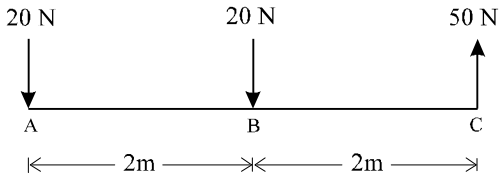


Figura 1.34

Esta força está indicada na Figura 1.35.

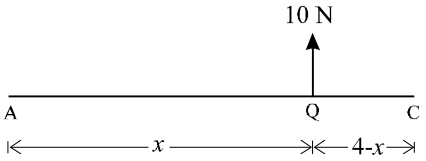


Figura 1.35

Impondo que as reduções desses dois sistemas em A levem aos mesmos momentos, obtém-se

$$M_A = -20 \cdot 2 + 50 \cdot 4 = 10 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{160}{10} = 16 \text{ m}. \qquad (1.38)$$

São portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.36.

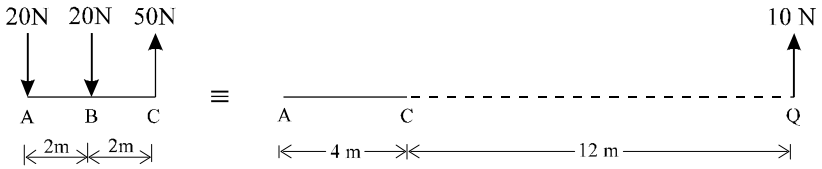


Figura 1.36

Quando se diz que dois sistemas são mecanicamente equivalentes está-se dizendo que, se eles forem aplicados em um mesmo sólido rígido nas mesmas condições iniciais, imprimirão ao sólido o mesmo movimento nos dois casos.

Observa-se que, neste exemplo, a linha de ação da força mecanicamente equivalente ao sistema não passa pela barra AC. Por esta razão, para conseguir aplicar a resultante isolada na barra AC, é necessário ligar

fisicamente o ponto Q à barra AC por meio de uma estrutura rígida, como se indica na Figura 1.37, garantindo-se assim que as duas barras da Figura 1.36 apresentem o mesmo movimento.

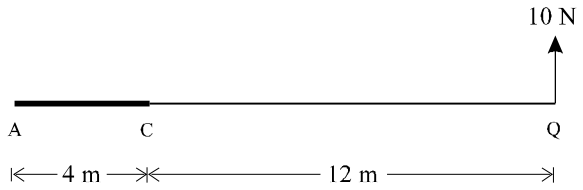


Figura 1.37

Exemplo 1.5

Determinar o ponto de aplicação da força mecanicamente equivalente ao sistema que atua na barra da Figura 1.38.

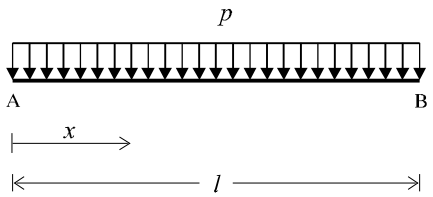


Figura 1.38

A resultante do carregamento uniformemente distribuído que atua na barra é

$$R = \int_0^l p \, \mathrm{d}x = p \, l \, . \qquad (1.39)$$

A determinação do ponto de aplicação desta força – mostrada na Figura 1.39 – será feita impondo que ambos os sistemas tenham o mesmo momento em relação ao ponto A.

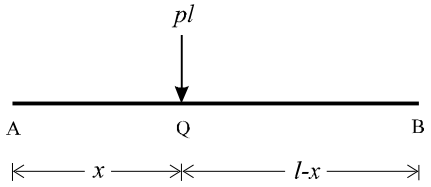


Figura 1.39

O momento do carregamento distribuído em relação ao ponto A é

$$M_{\mathrm{A}} = \int_0^l - p \, x \, \mathrm{d}x = - \frac{p \, l^2}{2} \, ; \qquad (1.40)$$

o momento da resultante é

$$M_{\mathrm{A}} = - p \, l \, x \, . \qquad (1.41)$$

Estes dois momentos tornam-se iguais para

$$x = \frac{l}{2} \, , \qquad (1.42)$$

logo os dois sistemas da Figura 1.40 são mecanicamente equivalentes.

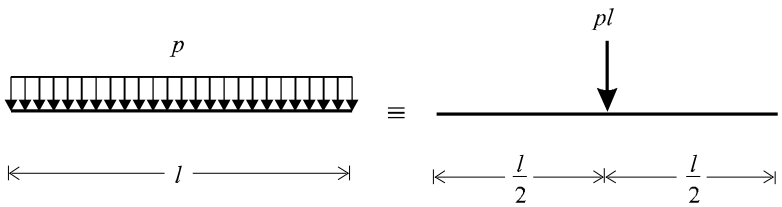


Figura 1.40

Exemplo 1.6

Determinar uma força mecanicamente equivalente ao sistema que atua na barra da Figura 1.41.

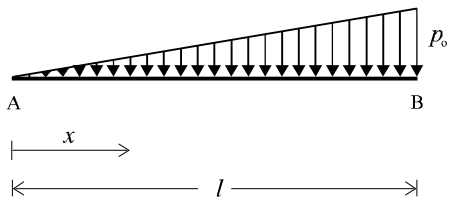


Figura 1.41

O carregamento linearmente distribuído que atua nesta barra tem a expressão

$$p(x) = p_o \frac{x}{l} \ , \tag{1.43}$$

e sua resultante é

$$R = \int_0^l p(x)\mathrm{d}x = \int_0^l p_o \frac{x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{p_o l}{2} \ , \tag{1.44}$$

como mostra na Figura 1.42.

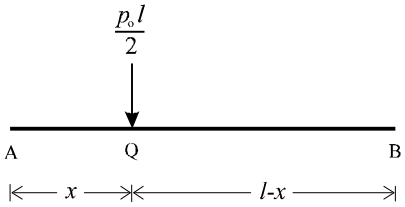


Figura 1.42

Os momentos destes dois sistemas em relação ao ponto A são respectivamente

$$M_A = \int_0^l -p(x)x\,\mathrm{d}x = \int_0^l -\frac{p_o x^2}{l}\mathrm{d}x = -\frac{p_o l^2}{3} \tag{1.45}$$

e

$$M_A = -\frac{p_o\, l}{2} x \, ; \tag{1.46}$$

estes dois momentos tornam-se iguais para

$$x = \frac{2}{3}\, l \ , \tag{1.47}$$

sendo portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.43.

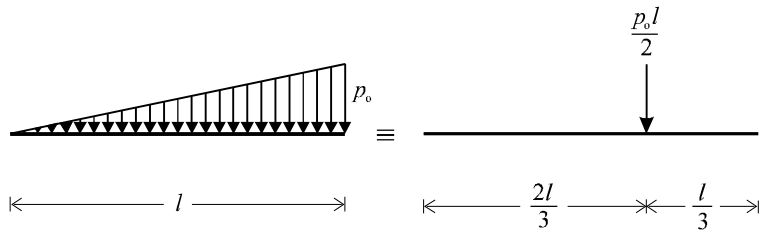


Figura 1.43

Observa-se que as resultantes dos carregamentos distribuídos dos dois últimos exemplos são iguais às áreas das figuras delimitadas pelo eixo da barra e pelo gráfico do carregamento: no caso do Exemplo 1.5, um retângulo de base l, altura p e área $A = p\,l$ e, no caso do Exemplo 1.6, um triângulo de base l, altura p_o e área $A = p_o\,l/2$.

Este resultado é geral, e a resultante de um carregamento distribuído pode ser sempre determinada calculando-se a área da figura delimitada pelo eixo da barra e pelo gráfico do carregamento.

1.5 Equilíbrio

Definição 1.8

Diz-se que um sistema de pontos materiais está em *equilíbrio* em relação a um referencial se ele estiver em repouso em relação a esse referencial, isto é, se as posições de todos os seus pontos em relação a esse referencial não variarem com o tempo.

Propriedade 1.8

Se um sistema de pontos materiais está em equilíbrio em relação a um referencial inercial, então a resultante das forças externas que atuam no sistema é nula e o momento destas forças em relação a um ponto qualquer do espaço também é nulo.

A demonstração desta propriedade decorre imediatamente do Princípio Fundamental da Dinâmica, expresso por meio das equações

$$\vec{R} = \int_{P \in S} \vec{a}_P \, dm \qquad (1.48)$$

e

$$\vec{M}_O = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge \vec{a}_P \, dm, \qquad (1.49)$$

onde: $\vec{R}$ é a resultante das forças externas que atuam no sistema ;

$\vec{a}_P$ é a aceleração de um ponto P qualquer do sistema em relação ao referencial inercial ;

m é a densidade de massa do sistema ;

$\vec{M}_O$ é o momento das forças externas que atuam no sistema em relação um ponto O qualquer do espaço.

Estando o sistema em repouso em relação ao referencial inercial, tem-se que $\vec{a}_P = \vec{0}$ para todos os seus pontos, logo:

$$\int_{P \in S} \vec{a}_P \, dm = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{0} \tag{1.50}$$

E

$$\int_{P \in S} \vec{OP} \wedge \vec{a}_P \, dm = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_O = \vec{0} \, , \tag{1.51}$$

demonstrando-se assim a propriedade.

É muito importante ressaltar que $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$ são condições necessárias para que um sistema material esteja em equilíbrio, não sendo, contudo, uma condição suficiente para se ter o equilíbrio do sistema em relação a um referencial inercial.

O simples movimento de translação uniforme de um cubo sobre um plano horizontal liso ilustra uma situação em que se tem $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$, mas não se tem repouso do cubo em relação ao plano horizontal.

Os referenciais ligados à Terra não são referenciais inerciais, mas o erro que se comete ao considerá-los como tal nos problemas comuns da mecânica é muito pequeno e, por esta razão, os referenciais ligados à Terra serão aqui considerados como sendo inerciais, admitindo-se que em relação a eles $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$ sejam condições necessárias para o equilíbrio de um sistema material.

Observa-se também que todos os conceitos apresentados nessa seção se aplicam a quaisquer sistemas materiais, sejam eles planos ou espaciais.

1.6 Estática dos sistemas materiais planos

A estática dos sistemas materiais planos estuda o equilíbrio desses sistemas.

<u>Definição 1.9</u>

Diz-se que um sistema material é *plano* quando todas as suas partículas se situam em um mesmo plano, no qual também se situam as forças que atuam no sistema.

Não existem de fato sólidos reais geometricamente planos, pois, por mais fino que seja um sólido, sempre terá uma espessura não nula. Na prática, entretanto, consideram-se como planos os sólidos delimitados por duas faces planas pouco afastadas, isto é, cuja espessura é muito menor que suas outras duas dimensões. Também são considerados como geometricamente planos os sistemas constituídos por barras cujos eixos se situam em um mesmo plano.

Assim, consideram-se como sendo planos os dois sistemas materiais mostrados na Figura 1.44.

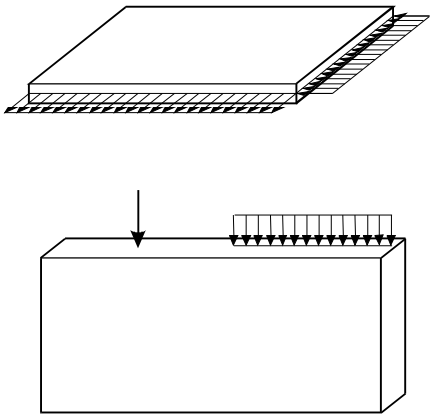


Figura 1.44

1.6.1 Apoios

Os esforços externos que atuam em um sistema material podem ser classificados em esforços externos *ativos* e esforços externos *reativos*.

Como exemplos de esforços externos ativos tem-se o peso dos objetos e pessoas que ocupam uma sala, o peso de um trem que passa por uma ponte, a pressão do vento sobre um telhado, a pressão da água sobre as paredes de uma caixa d'água e também o próprio peso do sistema, chamado de peso próprio da estrutura. Como se observa, os esforços externos ativos são os carregamentos que exigem a construção de uma estrutura que os suporte. Se eles não existirem, a estrutura deixa de ter sua razão de ser.

Os esforços externos reativos são os introduzidos pelos apoios que ligam os pontos do sistema a outros sistemas que o suportam.

<u>Definição 1.10</u>

Apoios são dispositivos que ligam pontos do sistema material a outros sistemas, impedindo determinados movimentos destes pontos ou do sistema como um todo.

Os principais apoios dos sistemas planos são:

- <u>apoio simples ou articulação móvel</u>

***impede*:** o movimento do ponto vinculado na direção normal à da reta de vinculação.

***permite*:** o movimento do ponto vinculado na direção paralela à da reta de vinculação;
o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

A articulação móvel é indicada pelos símbolos:

 ,  ,  ou  .

Na Figura 1.45 representa-se uma barra vinculada por uma articulação móvel, indicando-se o movimento impedido e os movimentos permitidos.

Observa-se na Figura 1.45 que a articulação móvel é um apoio de dupla ação, ou seja, tanto impede que o ponto se movimente verticalmente para cima como para baixo.

Uma das maneiras de construir uma articulação móvel consiste em ligar o ponto que se deseja vincular a uma chapa por meio de um pino, e esta chapa à reta de vinculação por meio de rodas, como se mostra na

Figura 1.46. Algum tipo de dispositivo deve impedir que as rodas possam se destacar da base, garantindo-se assim a dupla ação do apoio.

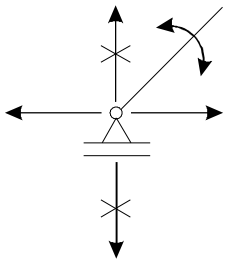


Figura 1.45

Os símbolos empregados para indicar este tipo de apoio são representações esquemáticas deste dispositivo mecânico.

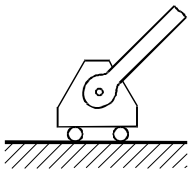


Figura 1.46

Para impedir que o ponto vinculado tenha movimento na direção normal à reta de vinculação, a articulação móvel aplica neste ponto do sólido vinculado uma força com a direção do movimento impedido, como se mostra na Figura 1.47.

Figura 1.47

A reação de apoio introduzida em uma estrutura por uma articulação móvel é, portanto, uma força com direção conhecida, mas com sentido e intensidade que devem ser determinados em cada caso particular.

- <u>articulação fixa</u>

***impede*:** qualquer movimento do ponto vinculado.

***permite*:** o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

Utilizam-se os seguintes símbolos para representar uma articulação fixa:

 ,  ou  .

Uma articulação fixa impede qualquer movimento do ponto vinculado. Como qualquer movimento em um plano pode ser sempre considerado como a composição de um movimento na direção horizontal com um movimento na direção vertical, dizer que uma articulação fixa impede o deslocamento horizontal e o deslocamento vertical do ponto vinculado é equivalente a dizer que ela impede qualquer movimento do ponto vinculado.

É neste sentido que se entenderá aqui a articulação fixa: ela impede os movimentos do ponto vinculado nas direções horizontal e vertical, e permite o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

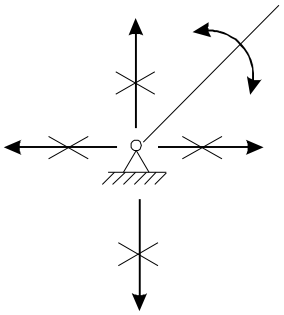


Figura 1.48

Na Figura 1.48 representa-se uma barra vinculada por uma articulação fixa, indicando-se os movimentos impedidos e o movimento permitido.

Uma das formas de construir uma articulação fixa consiste em ligar o ponto que se deseja vincular a uma chapa por meio de um pino e unir rigidamente esta chapa a uma base, como se mostra na Figura 1.49. É deste dispositivo de ligação que decorrem os símbolos utilizados para representar este apoio.

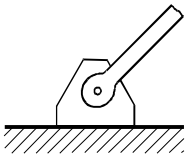


Figura 1.49

Para impedir que o ponto vinculado tenha qualquer movimento, a articulação fixa aplica neste ponto do sólido vinculado uma força que pode ter qualquer direção, como se indica na Figura 1.50(a).

A reação introduzida em uma estrutura por uma articulação fixa é, portanto, uma força com direção, sentido e intensidade que devem ser determinados em cada caso particular.

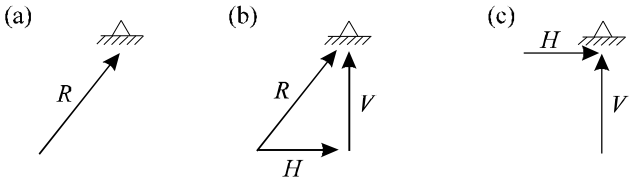


Figura 1.50

A reação introduzida em uma estrutura por uma articulação fixa pode ser sempre decomposta em suas componentes horizontal e vertical, como se mostra na Figura 1.50(b).
Pode-se, então, dizer alternativamente que uma articulação fixa introduz como reações de apoio duas forças – as componentes H e V de R (Figura 1.50(c)) – com direção conhecida, mas com sentido e intensidade desconhecidos, a serem determinados em cada caso particular.

É desta segunda maneira que se considerará uma articulação fixa: como um apoio que introduz como reações duas forças, a reação horizontal H, que impede o movimento horizontal do ponto vinculado, e a reação vertical V, que impede o movimento vertical.

- <u>engastamento</u>

***impede*:** qualquer movimento do ponto vinculado;
o movimento de rotação do sólido em torno do ponto vinculado.

Emprega-se o seguinte símbolo para indicar um engastamento:

O engastamento é o apoio plano mais restritivo que se pode ter, já que impede qualquer movimento do ponto vinculado e a rotação do sólido em torno deste ponto.

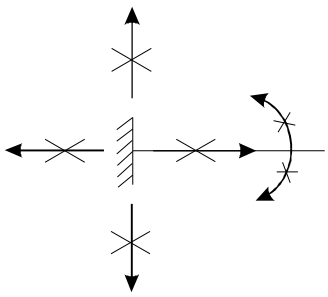


Figura 1.51

Na Figura 1.51 representa-se uma barra vinculada por um engastamento, mostrando-se os deslocamentos impedidos. Também aqui considerou-se um movimento qualquer como a combinação de um movimento na direção horizontal com um movimento na direção vertical.

Do ponto de vista construtivo, obtém-se um engastamento ligando rigidamente o ponto que se deseja vincular a uma base, como mostra a Figura 1.52; é deste dispositivo que deriva o símbolo empregado para representar um engastamento.

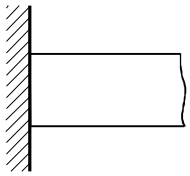


Figura 1.52

Para impedir qualquer movimento do ponto vinculado, o engastamento aplica neste ponto do sólido vinculado uma força horizontal e uma força vertical; para impedir a rotação do sólido em torno do ponto vinculado, aplica neste ponto do sólido vinculado um momento. Estes esforços estão mostrados na Figura 1.53.

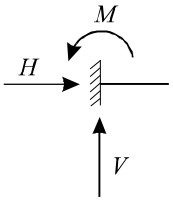


Figura 1.53

As reações de apoio que um engastamento aplica no sólido no ponto de vinculação são, portanto, uma força horizontal, uma força vertical e um momento.

Observações:

1) O número de reações introduzidas pelos apoios é igual ao número de movimentos que eles impedem.

Ao impedir o movimento do ponto vinculado na direção normal à da reta de vinculação, uma articulação móvel aplica no sólido vinculado uma força com a direção do movimento impedido.

Ao impedir qualquer movimento do ponto vinculado, isto é, ao impedir o movimento horizontal e o movimento vertical deste ponto, uma articulação fixa aplica no sólido vinculado duas forças com as direções dos movimentos impedidos.

Finalmente, ao impedir qualquer movimento do ponto vinculado e também a rotação do sólido vinculado em torno deste ponto, um engastamento introduz na estrutura uma força horizontal, uma força vertical e um momento.

Uma articulação móvel impede, portanto, um movimento, e para isso aplica uma reação de apoio no sólido vinculado; uma articulação fixa impede dois movimentos, e aplica duas reações de apoio; um engastamento impede três movimentos, e aplica três reações de apoio.

2) Definição 1.11

Dá-se o nome de *vínculo* a cada uma das restrições impostas por um apoio ao movimento da estrutura.

Assim, ao impedir um movimento do ponto vinculado, uma articulação móvel introduz um vínculo no sistema; ao impedir dois movimentos do ponto vinculado, uma articulação fixa introduz dois vínculos no sistema; ao impedir os movimentos horizontal e vertical do ponto vinculado e a rotação do sólido em torno deste ponto, um engastamento introduz três vínculos no sistema.

O número de reações aplicadas no sólido por um apoio é igual portanto ao número de vínculos que ele introduz no sistema.

3) Deve-se notar que uma força reativa impede o movimento do ponto vinculado na direção desta força e que um momento reativo impede a rotação do sólido em torno do ponto vinculado, isto é, que forças impedem deslocamentos lineares e que momentos impedem deslocamentos angulares, isto é, rotações.

1.6.2 Movimento de um sistema material plano

Um sistema material plano só pode apresentar movimentos em seu plano, e todo movimento que pode ter é a combinação de uma translação com uma rotação.

Como exemplo, o movimento que leva o sólido da Figura 1.54 da *posição 0* para a *posição 2* é a composição de uma translação que o leva da *posição 0* para a *posição 1* e de uma rotação que o leva da *posição 1* à *posição 2*.

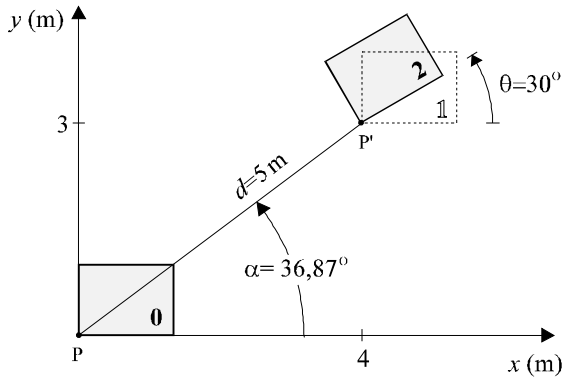


Figura 1.54

O número mínimo de parâmetros necessários para caracterizar este movimento é três: a translação é caracterizada pelo ângulo α e pela distância d entre P e P' ; a rotação é caracterizada pelo ângulo θ.

O primeiro parâmetro que caracteriza a translação determina sua direção e sentido; o segundo, sua magnitude.

O movimento que leva o sólido da *posição 0* para a *posição 2* pode então ser assim descrito: é a composição de uma translação de 5 m na direção e sentido da reta PP' – caracterizada pelo ângulo α = 36,87° com a horizontal – com uma rotação de 30° em torno do ponto P' .

Uma translação em uma direção qualquer pode ser sempre considerada como a composição de uma translação na direção horizontal com uma translação na direção vertical, como se mostra na Figura 1.55.

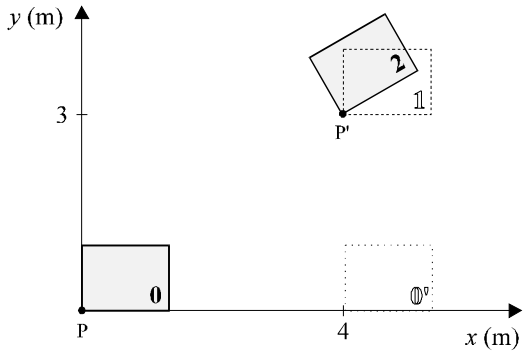


Figura 1.55

O movimento que leva o sólido da *posição 0* para a *posição 2* pode agora ser considerado como a composição de três movimentos: uma translação de 4 m na direção horizontal, que o leva da *posição 0* à *posição 0'* , uma translação de 3 m na direção vertical, que o leva da *posição 0'* à *posição 1*, e a rotação de 30° que o leva da *posição 1* à *posição 2*.

Observa-se que novamente são três os parâmetros que definem o movimento: a translação é definida pelas magnitudes de suas componentes horizontal e vertical, e a rotação, pelo ângulo θ.

É desta segunda maneira que se irá considerar aqui o movimento geral de um sistema material plano: como uma composição de três movimentos, a saber, uma translação horizontal, uma translação vertical e uma rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano do sistema.

Por esta razão, diz-se que um sistema material plano possui três graus de liberdade, ou seja, pode apresentar três tipos independentes de movimento.

Equivalentemente, pode-se dizer que o número de graus de liberdade de um sistema material é o menor número de parâmetros necessários para descrever um movimento do sistema.

No caso dos sistemas materiais planos, como já se mostrou, este número é três.

A definição mais comumente adotada para caracterizar os graus de liberdade de um sistema, e que é equivalente a estas duas que se acaba de mencionar, é a seguinte:

Definição 1.12

Dá-se o nome de graus de liberdade de um sistema material ao menor número de parâmetros necessários para definir a posição deste sólido em relação a um determinado referencial.

Como já se verificou por meio das duas outras definições, um sistema plano possui três graus de liberdade. De fato, fornecendo as coordenadas de um de seus pontos e o ângulo que uma de suas retas forma com um eixo de referência, define-se a posição do sólido.

Na Figura 1.56, as coordenadas x_P e y_P do ponto P do sólido e o ângulo θ que a reta PQ forma com a horizontal caracterizam a sua posição.

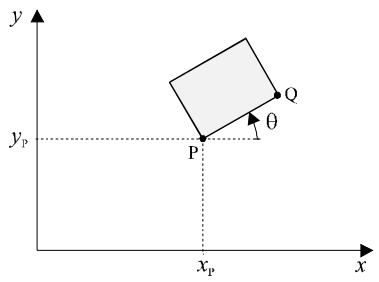


Figura 1.56

1.6.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas

Considere-se a barra homogênea da Figura 1.57.

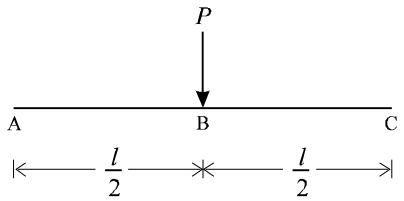


Figura 1.57

Sob a ação deste carregamento, esta barra irá apresentar movimento de translação para baixo.

Para impedir que esta barra venha a apresentar qualquer movimento, isto é, para fazer com que ela fique em equilíbrio, deve-se vinculá-la convenientemente.

Isto pode ser feito, por exemplo, engastando o ponto A, como se mostra na Figura 1.58.

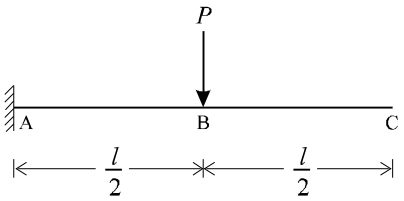


Figura 1.58

O engastamento, ao impedir qualquer movimento de translação do ponto *A*, impede conseqüentemente qualquer movimento de translação da barra; ao impedir, também, a rotação da barra em torno do ponto A, impossibilita que ela apresente movimento de rotação.

Basta, portanto, engastar um ponto de um sistema rígido para fazer com que ele fique em equilíbrio sob a ação de qualquer carregamento que venha a solicitá-lo.

Na Figura 1.59 representa-se novamente a barra, agora vinculada por um apoio fixo em A.

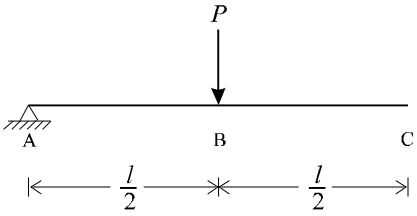


Figura 1.59

É imediata a constatação de que esta barra não apresentará translação, mas que apresentará rotação em torno do ponto A.

Esta rotação pode ser impedida, por exemplo, vinculando-se o ponto C por meio de uma articulação móvel que impede a translação na direção vertical, como se indica na Figura 1.60.

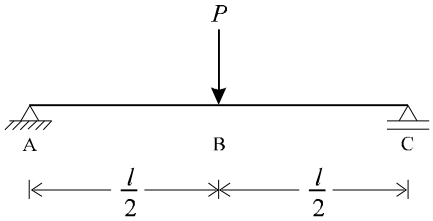


Figura 1.60

Agora a barra não pode mais girar em torno do ponto *A*, ficando então em equilíbrio.

Acabam de ser descritas duas formas de vincular esta estrutura e garantir seu equilíbrio. Existem inúmeras outras maneiras de vinculá-la e mantê-la em equilíbrio; sugere-se aos leitores que procurem formular algumas destas vinculações.

Para verificar se uma certa vinculação da viga é suficiente para mantê-la em equilíbrio, deve-se examinar se ela impede os três movimentos que ela pode ter no plano: translação horizontal , translação vertical e rotação.

Como se tem três movimentos a impedir, deve-se utilizar apoios que restrinjam pelo menos três componentes de movimento dos pontos vinculados ou da estrutura como um todo, isto é, apoios que introduzam pelo menos três vínculos no sistema.

O engastamento da Figura 1.58, ao impedir o movimento horizontal e o movimento vertical do ponto A e a rotação da estrutura em torno deste ponto, obriga-a a ficar em equilíbrio.

Já a articulação fixa da Figura 1.59, ao impedir apenas os movimentos horizontal e vertical do ponto A, não impede a rotação do sólido em torno deste ponto, portanto não garantindo o equilíbrio da viga.

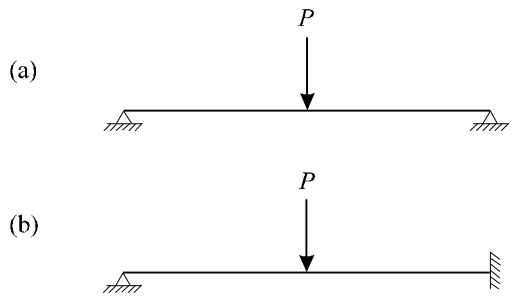


Figura 1.61

Para mantê-la em equilíbrio deve-se restringir um terceiro movimento, o que se faz ao vincular o ponto C por meio da articulação móvel da Figura 1.60, que impede o movimento vertical deste ponto.
A viga também ficaria em equilíbrio se se vinculasse o ponto C por meio de uma articulação fixa ou por meio de um engastamento, como se mostra nas Figuras 1.61(a) e (b).

<u>Definição 1.13</u>

Uma estrutura que pode apresentar movimento recebe o nome de *hipostática*.

A viga da Figura 1.59, por exemplo, é uma estrutura hipostática. Outras estrututras hipostáticas são apresentadas na Figura 1.62.

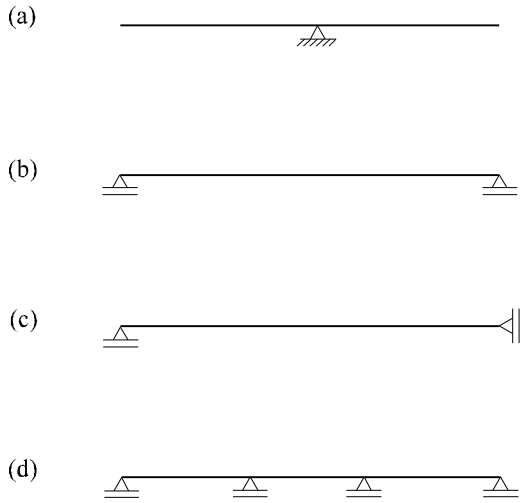


Figura 1.62

Basta existir um carregamento que faça uma estrutura apresentar movimento para que ela seja considerada hipostática.

Se a viga da Figura 1.62(b) for solicitada pela força vertical da figura 1.63(a) não apresentará nenhum movimento; se, entretanto, for solicitada pela força horizontal da Figura 1.63(b) apresentará translação horizontal para a direita, comprovando-se então que a viga da Figura 1.62(b) é uma estrutura hipostática.

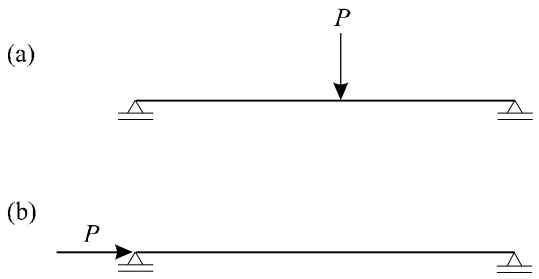


Figura 1.63

Propriedade 1.9

Uma estrutura rígida plana vinculada com menos de três vínculos é hipostática.

Esta forma de enunciar esta propriedade é uma simplificação da seguinte frase mais rigorosa: uma estrutura rígida plana cujos apoios introduzem menos que três vínculos no sistema é hipostática.

Por simplicidade, opta-se pelo enunciado mais informal.

Como já se mostrou, um sistema rígido plano possui três graus de liberdade; por esta razão, para impedir qualquer movimento do sistema devem-se restringir três movimentos dos pontos vinculados ou do sistema como um todo. É por isso que um sistema vinculado com menos de três vínculos é hipostático.

Observa-se, contudo, que a Propriedade 1.9 é uma condição suficiente, mas não uma condição necessária para que um sistema rígido plano seja hipostático.

A barra da Figura 1.62(d), apesar de possuir quatro vínculos, apresentará movimento se for solicitada por uma força horizontal, sendo portanto hipostática.

Definição 1.14

Dá-se o nome de estrutura *isostática* a uma estrutura cujos vínculos impedem que ela se movimente, mas que passa a poder se movimentar se algum de seus vínculos for suprimido.

Como exemplo de uma estrutura isostática tem-se a viga da Figura 1.64(a). Qualquer que seja seu carregamento, ela não poderá se movimentar.

São três os vínculos desta viga: dois introduzidos em A pela articulação fixa e um introduzido em B pela articulação móvel.

A supressão de qualquer um desses vínculos levará a uma estrutura que poderá se mover.

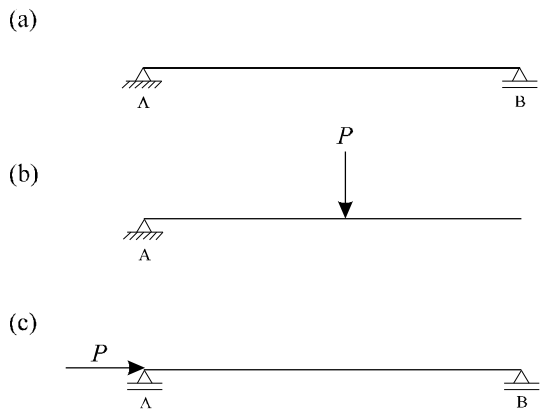


Figura 1.64

Se, por exemplo, for suprimido o vínculo do ponto B a estrutura passará a apresentar movimento se for solicitada por um carregamento vertical, como se indica na Figura 1.64(b).
Outra maneira de suprimir um vínculo desta viga consiste em se substituir a articulação fixa do ponto A por uma articulação móvel que impeça o movimento vertical deste ponto, eliminando-se assim o vínculo que impede o movimento horizontal do ponto A. A viga passará então a poder apresentar translação horizontal, como se mostra na Figura 1.64(c).

É fácil verificar que uma outra forma de se definir uma estrutura isostática é a seguinte: uma estrutura isostática é uma estrutura que não pode apresentar nenhum movimento, e que se transforma em hipostática se algum de seus vínculos for suprimido.

Um outro exemplo de uma estrutura isostática é a viga engastada da Figura 1.65(a).

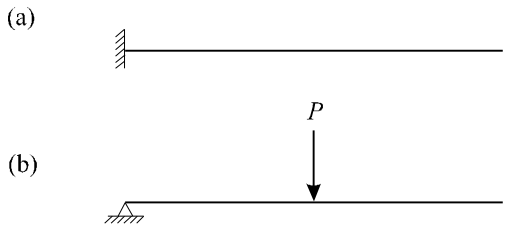


Figura 1.65

Se o engastamento for substituído por uma articulação fixa ela passará a poder apresentar movimento, como se mostra na Figura 1.65(b).

Como uma estrutura rígida plana possui três graus de liberdade, tem-se a seguinte propriedade:

<u>Propriedade 1.10</u>

Os apoios de uma estrutura rígida plana isostática sempre introduzem três vínculos no sistema.

Observa-se que esta propriedade fornece uma condição necessária, mas não suficiente, para que uma estrutura rígida plana seja isostática. A viga da Figura 1.66 possui três vínculos, mas não é isostática, e sim hipostática.

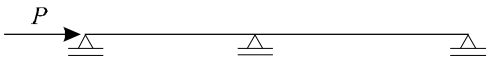


Figura 1.66

Definição 1.15

Dá-se o nome de estrutura *hiperestática* a uma estrutura que não pode apresentar movimento, e que pode ter vínculos suprimidos sem que se torne hipostática.

Como um exemplo de estrutura hiperestática tem-se a viga da Figura 1.67(a). Ela possui quatro vínculos: três introduzidos em A pelo engastamento e um introduzido em B pela articulação móvel.

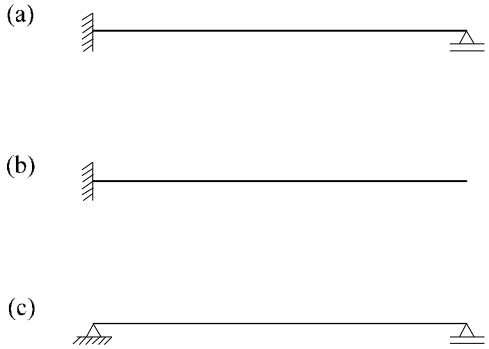


Figura 1.67

Se a articulação móvel for suprimida se obterá a viga da Figura 1.67(b), que não pode apresentar movimento. De igual forma, se o engastamento do ponto A for substituído por uma articulação fixa, se obterá a viga da Figura 1.67(c), que também não pode apresentar movimento.

Pode-se observar que as vigas das Figuras 1.67(b) e (c) são isostáticas, e que poderão passar a apresentar movimento se mais algum outro vínculo for suprimido.

É importante notar que na Definição 1.15 se diz que uma estrutura é hiperestática se existirem vínculos que podem ser suprimidos sem que se torne hipostática, não se dizendo, entretanto, que *qualquer* vínculo pode ser suprimido sem que ela se torne hipostática.

A viga da Figura 1.68(a), por exemplo, é hiperestática, pois qualquer uma de suas articulações móveis pode ser suprimida sem que se torne hipostática, como se vê nas Figuras 1.68(b) e (c). Se, entretanto, se substituir a articulação fixa por uma articulação móvel, como se mostra na Figura 1.68(d), se obterá uma estrutura hipostática. A viga da Figura 1.68(a), contudo, é hiperestática.

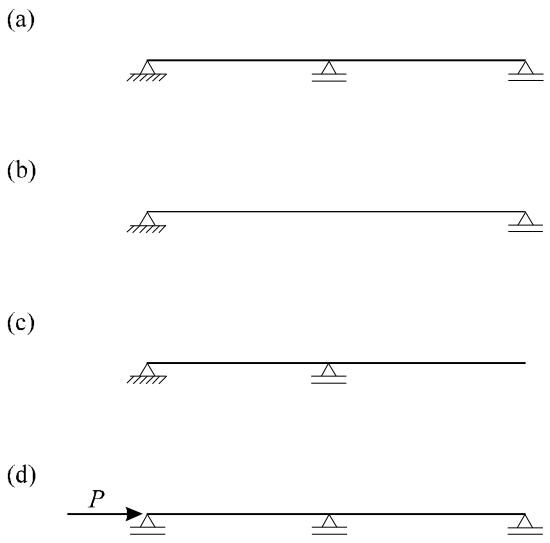


Figura 1.68

Do fato de uma estrutura rígida plana possuir três graus de liberdade decorre a propriedade:

Propriedade 1.11

Os apoios de uma estrutura rígida plana hiperestática sempre introduzem mais que três vínculos no sistema.

Esta propriedade é uma condição necessária, mas não suficiente, para que uma estrutura seja hiperestática. A viga da Figura 1.62(d) é um exemplo de uma estrutura que possui mais que três vínculos, e é hipostática.

Definição 1.16

Dá-se o nome de grau de hiperestaticidade de uma estrutura hiperestática ao número máximo de vínculos da estrutura que podem ser suprimidos sem que ela se torne hipostática.

Comentou-se há pouco que a viga da Figura 1.67 pode ter um vínculo suprimido sem se tornar hipostática, passando a sê-lo se um segundo vínculo vier a ser suprimido. O grau de hiperestaticidade da viga da Figura 1.67 é portanto igual a um.

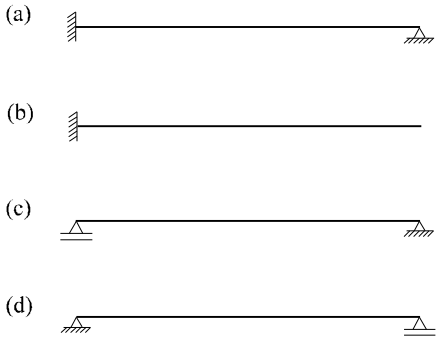


Figura 1.69

Considere-se agora a viga hiperestática da Figura 1.69(a).

Esta viga possui cinco vínculos: três introduzidos pelo engastamento e dois, pela articulação fixa. O maior número de vínculos que podem ser suprimidos sem que se torne hipostática é dois, como se verifica nas Figuras 1.69(b), (c) e (d), em que se apresentam três vigas isostáticas derivadas da viga hiperestática pela supressão de dois vínculos.

A viga da Figura 1.69(a) tem portanto grau de hiperestaticidade igual a dois.

Como o número mínimo de vínculos necessários para impedir que uma estrutura rígida plana apresente movimento é três, tem-se a seguinte propriedade.

Propriedade 1.12

O grau de hiperestaticidade de uma estrutura rígida plana hiperestática é

$$g = v - 3\,, \tag{1.52}$$

onde: g é o grau de hiperestaticidade da estrutura;
v é o número de vínculos introduzidos na estrutura pelos apoios.

Como se pode ver, grau de hiperestaticidade de uma estrutura é o número de vínculos que excedem o mínimo necessário para impedir o movimento da estrutura; estes vínculos superabundantes podem ser suprimidos sem que a estrutura se torne hipostática.

Encerrando e resumindo esta seção, comenta-se que a hipostaticidade, isostaticidade ou hiperestaticidade de uma estrutura se prende à capacidade que seus apoios apresentam de impedir o movimento da estrutura, o que depende do número de vínculos introduzidos na estrutura pelos apoios e do posicionamento desses vínculos.

1.6.4 Determinação das reações de apoio

Os esforços externos que atuam em uma estrutura são classificados em esforços externos ativos e reativos. Os esforços externos ativos – o peso dos objetos e pessoas que ocupam uma sala, o peso de um trem que passa por uma ponte, etc.– são sempre conhecidos. Já os esforços externos reativos, introduzidos na estrutura pelos apoios, precisam ser determinados.

No caso das estruturas isostáticas esta determinação é muito simples, e se faz por meio das equações de equilíbrio da estática.

Como uma estrutura isostática sempre está em equilíbrio e o número de reações de apoio a determinar é igual ao número de equações de equilíbrio satisfeitas pelos esforços externos que atuam na estrutura, tem-se um sistema com o mesmo número de incógnitas e de equações, e que sempre é determinado.

No caso dos sistemas rígidos planos tem-se três reações de apoio a determinar e as seguintes três equações de equilíbrio da estática a serem satisfeitas pelos esforços externos que atuam no sistema:

$$\begin{aligned} \sum X &= \sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,, \\ \sum Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\,, \\ \sum M_{\mathrm{O}} &= \sum_{i=1}^{n} M_{\mathrm{O}i} = 0\,, \end{aligned} \tag{1.53}$$

onde X_i e Y_i são as componentes das n forças externas do sistema em relação a um referencial situado no plano do sistema e $M_{\mathrm{O}i}$ são os momentos de cada uma das forças do sistema em relação a um ponto qualquer O do plano.

A nomenclatura $\sum X$, $\sum Y$ e $\sum M_O$ utilizada nas expressões (1.53) é uma simplificação da nomenclatura mais rigorosa a sua direita.

Serão apresentados agora alguns exemplos de determinação das reações de apoio de estruturas planas.

Exemplo 1.7

Determinar as reações de apoio da viga em balanço da Figura 1.70.

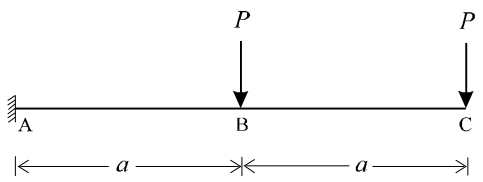


Figura 1.70

Dá-se o nome de vigas em balanço às vigas vinculadas apenas por um engastamento; estas vigas são também chamadas vigas engastadas.

As reações de apoio introduzidas na viga pelo engastamento são as forças X_A , Y_A e o momento M indicados na Figura 1.71, e são estes os esforços que se deseja determinar.

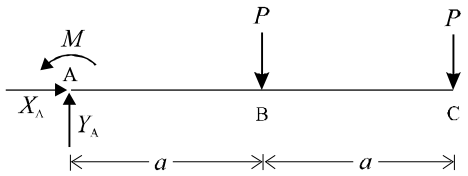


Figura 1.71

Na Figura 1.71 estão indicados todos os esforços externos – ativos e reativos – que atuam na estrutura, e que devem satisfazer as três equações de equilíbrio da estática:

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = 0 \,,$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A - P - P = 0 \,, \qquad (1.54)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M - Pa - P\,2a = 0 \,.$$

Observa-se que se utilizou o ponto A como polo para o cálculo dos momentos.
Do sistema (1.54) obtêm-se as reações de apoio:

$$X_A = 0 \,,$$

$$Y_A = 2P \,, \qquad (1.55)$$

$$M = 3Pa \,.$$

Nota-se que a reação horizontal X_A é nula, e a explicação para este fato é bastante simples: como o carregamento que atua na viga não tende a fazê-la apresentar deslocamento horizontal, o engastamento não precisa introduzir na viga uma força que impeça tal translação.

Já com relação às duas outras reações tem-se uma situação diferente. O carregamento da viga tende a fazê-la apresentar translação vertical, e o engastamento introduz então uma reação vertical Y_A para impedir esta translação. Sob a ação das forças verticais – ativas e reativa – a viga tende a apresentar rotação, que é impedida pelo momento reativo M.

Os esforços externos que atuam na viga estão mostrados na Figura 1.72; o símbolo ≡ nesta figura indica que os esforços aplicados nestas duas vigas são os mesmos.

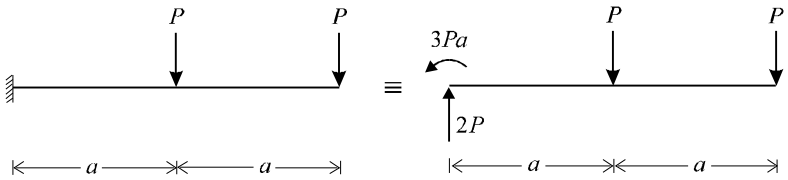


Figura 1.72

Exemplo 1.8

Determinar as reações de apoio da viga em balanço da Figura 1.73.

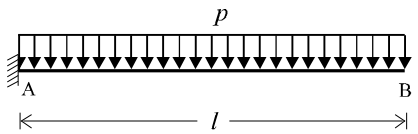


Figura 1.73

A determinação das reações de apoio desta viga ficará muito simplificada se se substituir o carregamento distribuído que atua nesta barra pela força mecanicamente equivalente a ele, indicada na Figura 1.74.

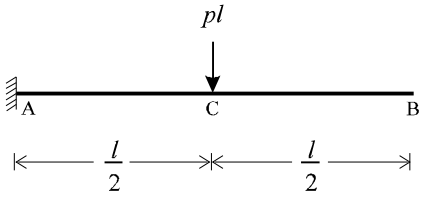


Figura 1.74

Como os carregamentos das vigas 1.73 e 1.74 são mecanicamente equivalentes, possuem as mesmas reações de apoio, sendo mais fácil determiná-las para a viga da Figura 1.74 que para a viga da Figura 1.73. As reações de apoio procuradas estão indicadas na Figura 1.75.

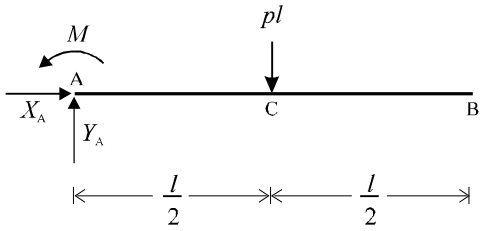


Figura 1.75

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, tem-se:

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = 0 \,,$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A - p\,l = 0 \,, \qquad (1.56)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M - p\,l\,\frac{l}{2} = 0 \,.$$

As reações de apoio da viga da Figura 1.74 e também da viga da Figura 1.73 são portanto:

$$X_A = 0 \,,$$

$$Y_A = p\,l \,, \qquad (1.57)$$

$$M = \frac{p\,l^2}{2} \,.$$

Estas reações estão mostradas na Figura 1.76.

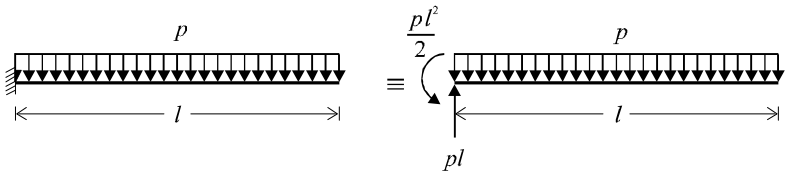


Figura 1.76

Na determinação das reações de apoio, a substituição de um carregamento distribuído por uma força mecanicamente equivalente sempre facilitará a resolução, devendo portanto ser sempre feita.

<u>Exemplo 1.9</u>

Determinar as reações de apoio da viga da Figura 1.77.

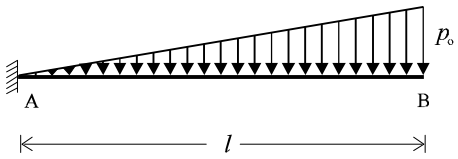


Figura 1.77

A substituição do carregamento distribuído pela força mecanicamente equivalente a ele leva à viga da Figura 1.78, cujas reações se determinam por meio das equações de equilíbrio

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = 0 \,,$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A - \frac{p_o\,l}{2} = 0 \,, \qquad (1.58)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M - \frac{p_o\,l}{2}\,\frac{2\,l}{3} = 0 \,.$$

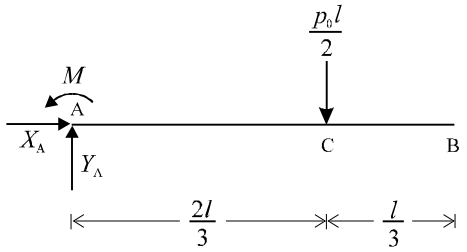


Figura 1.78

As reações de apoio da viga da Figura 1.77 são portanto:

$$X_A = 0 \ ,$$

$$Y_A = \frac{p_o\, l}{2}, \qquad (1.59)$$

$$M = \frac{p_o\, l^2}{3} \ ,$$

como se mostra na Figura 1.79.

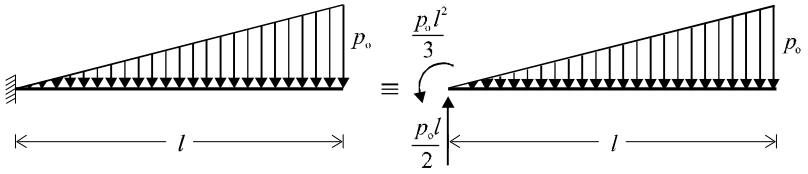


Figura 1.79

<u>Exemplo 1.10</u>

Determinar as reações de apoio da viga poligonal da Figura 1.80.

A obtenção das reações de apoio segue a mesma sistemática que nos demais exemplos: substitui-se o engastamento pelos esforços que pode introduzir na viga (Figura 1.81), e impõe-se que os esforços externos que atuam na estrutura satisfaçam as equações de equilíbrio da estática:

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A - 20 + 10 = 0 \ ,$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A + 20 - 10 = 0 \ , \qquad (1.60)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 0 \ .$$

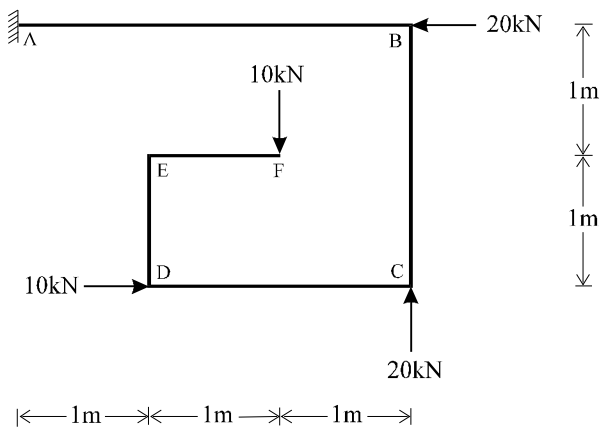


Figura 1.80

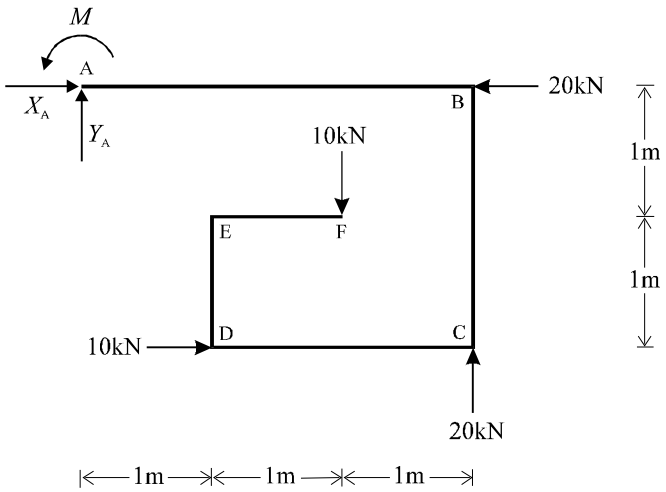


Figura 1.81

As reações de apoio são portanto:

$$X_A = 10 \text{ kN} \ ,$$

$$Y_A = -10 \text{ kN} \ , \qquad (1.61)$$

$$M = -60 \text{ kN m} ,$$

como se mostra na Figura 1.82.

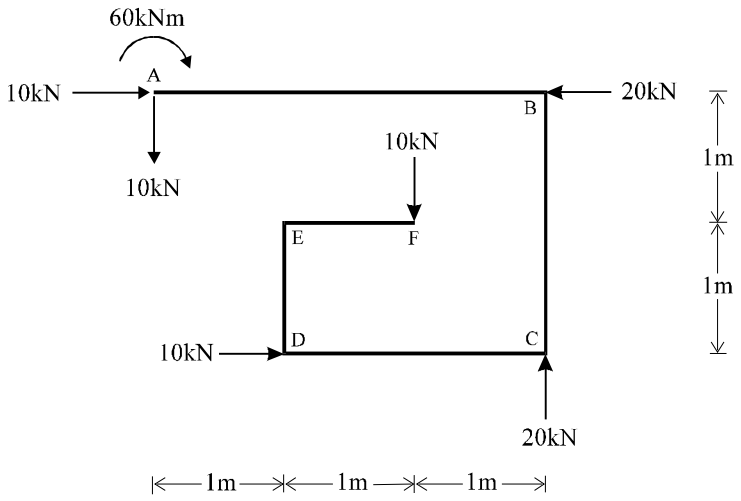


Figura 1.82

<u>Exemplo 1.11</u>

Determinar as reações de apoio da viga simplesmente apoiada da Figura 1.83.

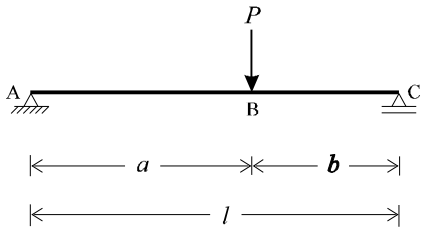


Figura 1.83

Dá-se o nome de vigas simplesmente apoiadas às vigas apoiadas em suas extremidades por meio de duas articulações, uma móvel e a outra fixa.

As reações de apoio que podem ser introduzidas nesta viga pelos apoios estão indicadas na Figura 1.84.

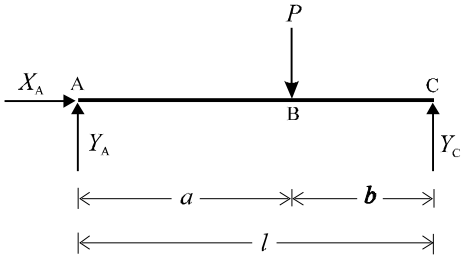


Figura 1.84

As equações de equilíbrio são

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = 0,$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A - P + Y_C = 0\ , \qquad (1.62)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -Pa + Y_C\, l = 0\ ,$$

de onde se obtém as reações:

$$X_A = 0\ ,$$

$$Y_A = \frac{Pb}{l}, \qquad (1.63)$$

$$Y_C = \frac{Pa}{l}.$$

Na Figura 1.85 indicam-se as reações de apoio desta viga simplesmente apoiada.

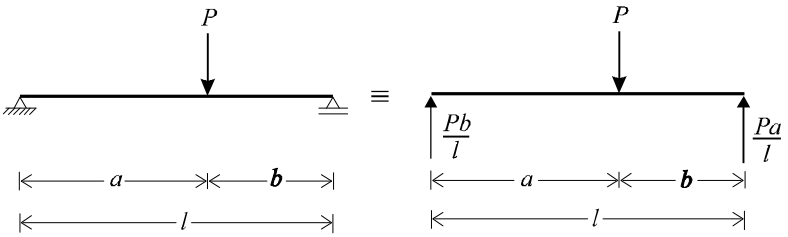


Figura 1.85

Exemplo 1.12

Determinar as reações de apoio da viga simplesmente apoiada com dois balanços da Figura 1.86.

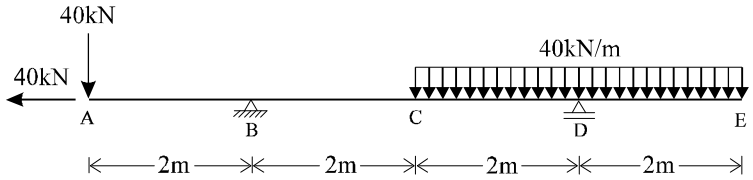


Figura 1.86

Esta viga é uma viga simplesmente apoiada porque possui como apoios duas articulações, uma fixa e outra móvel; como a extremidade A do trecho AB é livre, diz-se que este trecho está em balanço, apoiado na viga simplesmente apoiada BD; da mesma forma, como a extremidade E do trecho DE também é livre, diz-se que ele está em balanço, apoiado na viga simplesmente apoiada.

Por estas razões, dá-se a este tipo de viga o nome de viga simplesmente apoiada com dois balanços, um balanço à esquerda – o trecho AB – e um balanço à direita – o trecho DE.

Para determinar as reações de apoio da viga substituem-se os apoios pelos esforços que podem introduzir na estrutura, substitui-se o carregamento distribuído pela força mecanicamente equivalente a ele, e impõe-se que estes esforços, indicados na Figura 1.87, satisfaçam as equações de equilíbrio da estática.

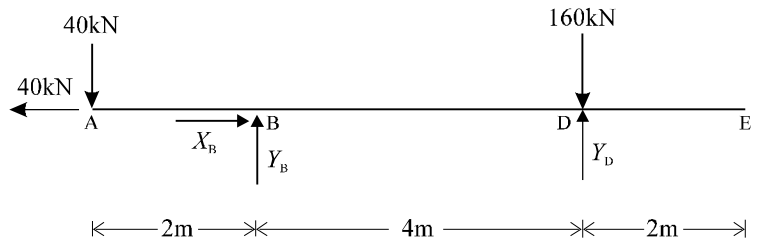


Figura 1.87

Tem-se

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad -40 + X_B = 0,$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B + Y_D = 40 + 160, \qquad (1.64)$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 40 \cdot 2 + 4 \cdot Y_D - 160 \cdot 4 = 0 \ ,$$

de onde decorrem

$$X_B = 40 \text{ kN} \ ,$$

$$Y_B = 60 \text{ kN} \ , \qquad (1.65)$$

$$Y_D = 140 \text{ kN} \ .$$

Observa-se que, neste problema, optou-se por escrever a equação de equilíbrio de momentos utilizando como polo o ponto B, e não a extremidade esquerda da barra – o ponto A –, como se havia feito nos exemplos anteriores.

A razão para esta escolha é muito simples: a equação de equilíbrio de momentos relativamente ao ponto A é

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot Y_B + 6 \cdot Y_D - 160 \cdot 6 = 0 \ , \qquad (1.66)$$

verificando-se que figuram nesta equação duas das reações desconhecidas. Como a reação Y_B passa pelo ponto B, na equação de equilíbrio de momentos relativamente ao ponto B figura apenas a incógnita Y_D, o que facilita a resolução do sistema, já que o valor dessa incógnita decorre diretamente dessa equação.

Convém, portanto, escolher como polo da equação de equilíbrio de momentos um ponto pelo qual passe a linha de ação de uma ou mais incógnitas, de forma a facilitar a resolução do sistema de equações.

Na Figura 1.88 indicam-se as reações de apoio da viga da Figura 1.86.

Neste exemplo foram apresentadas quatro equações de equilíbrio para a viga da Figura 1.87: as equações (1.64) e a equação (1.66).

Como se trata de um sistema rígido plano que possui três graus de liberdade, apenas três dessas equações podem ser linearmente independentes, sendo a quarta delas uma combinação linear das outras três.

A grande utilidade de se examinar uma equação de equilíbrio de momentos adicional reside no fato de que ela permite verificar se houve algum erro na determinação das reações de apoio.

Vai-se utilizar a viga da Figura 1.88(b) para ilustrar esta afirmação. Qualquer que seja o polo considerado, o momento dos esforços que atuam nesta viga em relação a este polo deve ser nulo. Este fato pode ser usado para comprovar se as reações já determinadas estão corretas.

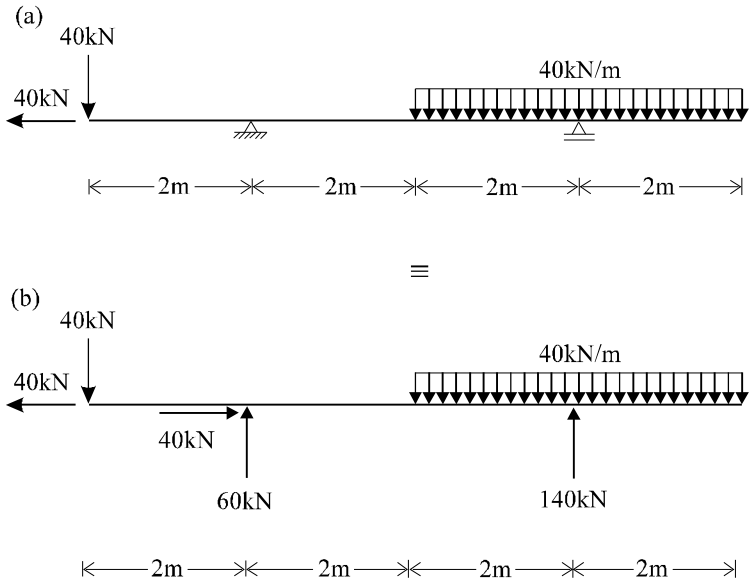


Figura 1.88

Calculando, por exemplo, os momentos destes esforços em relação ao ponto D, tem-se

$$\sum M_{\mathrm{D}} = 40 \cdot 6 - 60 \cdot 4 = 0 \ . \qquad (1.67)$$

Este valor nulo para o momento do sistema em relação ao ponto *D* é uma boa indicação de que as reações devem estar corretas, pois uma condição necessária para que se tenha reações corretas é que o momento dos esforços que atuam na viga em relação a este ou a qualquer outro polo seja nulo.
Esta condição, entretanto, não é suficiente para garantir a exatidão das reações, e dois erros que se compensem podem fazer com que se tenha $\sum M_{\mathrm{D}} = 0$ mesmo com reações de apoio incorretas.

Apesar disso, a equação de equilíbrio de momentos adicional, por ser muito simples de escrever e por quase sempre permitir detectar reações de apoio calculadas incorretamente, deve ser feita sempre que o sistema de equações de equilíbrio for um pouco mais complexo e de solução mais trabalhosa.

<u>Exemplo 1.13</u>

Determinar as reações de apoio da estrutura da Figura 1.89.

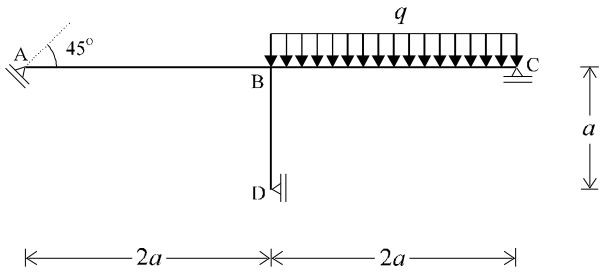


Figura 1.89

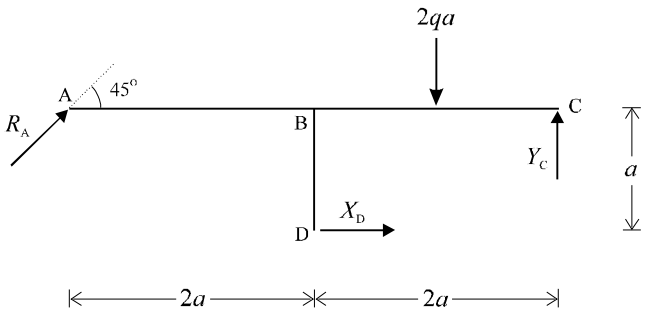


Figura 1.90

Na Figura 1.90 representam-se as reações que podem ser introduzidas na estrutura pelos apoios e a força mecanicamente equivalente à carga distribuída.

As equações de equilíbrio referentes a esta estrutura são

$$\begin{aligned} \sum X = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_A \frac{\sqrt{2}}{2} + X_D = 0 , \\ \sum Y = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_A \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_C = 2qa , \\ \sum M_A = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_D\, a - 2qa \cdot 3a + Y_C\, 4a = 0 , \end{aligned} \tag{1.68}$$

decorrendo

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{2\sqrt{2}}{5} qa , \\ Y_C &= \frac{8}{5} qa , \\ X_D &= -\frac{2}{5} qa . \end{aligned} \tag{1.69}$$

Na Figura 1.91 indicam-se as reações de apoio da estrutura da Figura 1.89.

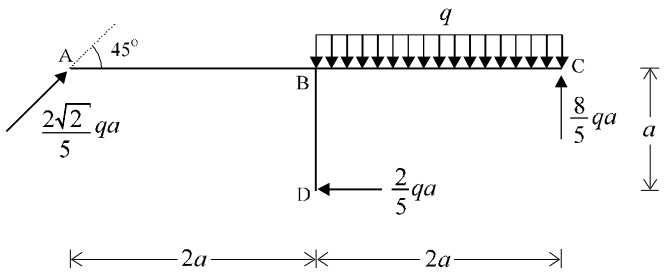


Figura 1.91

Examinando as equações (1.68) observa-se que em cada uma delas há duas incógnitas, o que torna a resolução do sistema um pouco trabalhosa.

Pode-se obter um outro sistema de equações que permite determinar as reações de apoio de forma mais imediata, lembrando que o momento dos esforços que atuam na estrutura da Figura 1.90 é nulo em relação a qualquer ponto que se considere. Este sistema mais simples é constituído pelas três equações de equilíbrio de momentos relativas a três pontos particulares. Para comprovar esta afirmação, considere-se a

Figura 1.92, em que se reapresenta a estrutura que está sendo analisada, e na qual estão indicadas as interseções E, F e G das linhas de ação das reações de apoio.

A equação de equilíbrio de momentos em relação ao ponto E é

$$\sum M_{\mathrm{E}} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{\mathrm{D}}\, 5\, a + 2\, q\, a \cdot a = 0\ . \qquad (1.70)$$

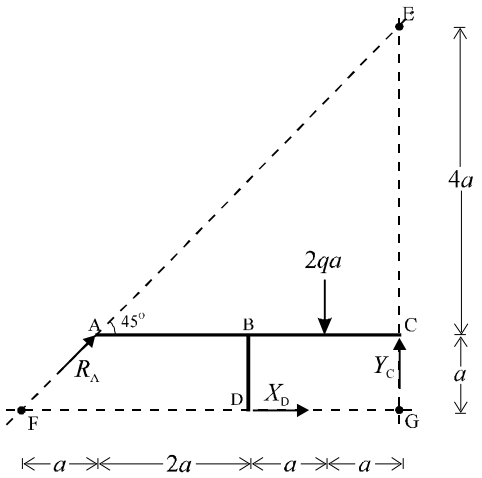


Figura 1.92

Observa-se que nesta equação de equilíbrio só figura a incógnita X_{D}, já que as linhas de ação das outras duas incógnitas passam pelo ponto E.
Coisa análoga se passa em relação às equações de equilíbrio de momentos referentes aos pontos F e G:

$$\begin{aligned} \sum M_{\mathrm{F}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad -2\, q\, a \cdot 4a + Y_{\mathrm{C}}\, 5\, a = 0\ , \\ \sum M_{\mathrm{G}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\, q\, a \cdot a - R_{\mathrm{A}}\, \frac{5\, a \sqrt{2}}{2} = 0\ . \end{aligned} \qquad (1.71)$$

O sistema constituído pelas equações (1.70) e (1.71) leva às mesmas reações de apoio já determinadas, mas agora de forma mais simples, já que em cada uma das equações figura apenas uma incógnita, comprovando-se assim a afirmação que havia sido feita.

Conclui-se, portanto, que nem sempre o sistema constituído pelas três equações de equilíbrio clássicas – $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ e $\sum M_{\mathrm{P}} = 0$, onde P é um ponto qualquer – é o mais adequado para determinar as reações de apoio.

Quaisquer três equações de equilíbrio linearmente independentes podem ser empregadas para determinar as reações de apoio, podendo-se substituir uma ou mesmo as duas equações de equilíbrio de forças – $\sum X = 0$ e $\sum Y = 0$ – por equações de equilíbrio de momentos.

Como princípio geral a ser sempre seguido, recomenda-se que as equações de equilíbrio de momentos sejam determinadas em relação a pontos particulares, que venham a facilitar a posterior resolução do sistema.

1.7 Estática dos sistemas materiais espaciais

Nesta seção será estudado o equilíbrio dos sistemas materiais espaciais.

Definição 1.17

Os sistemas materiais espaciais são aqueles que não são planos, isto é, são aqueles que não possuem todas as suas partículas e todos os esforços que os solicitam situados em um mesmo plano.

Há dois tipos de sistemas espaciais: aqueles que, embora tendo todas as suas partículas situadas em um mesmo plano, são solicitados por forças que não pertencem a este plano, como se mostra nas Figuras 1.93(a) e (b), e aqueles que não possuem todas as suas partículas situadas em um mesmo plano, como os das Figuras 1.93(c) e (d).

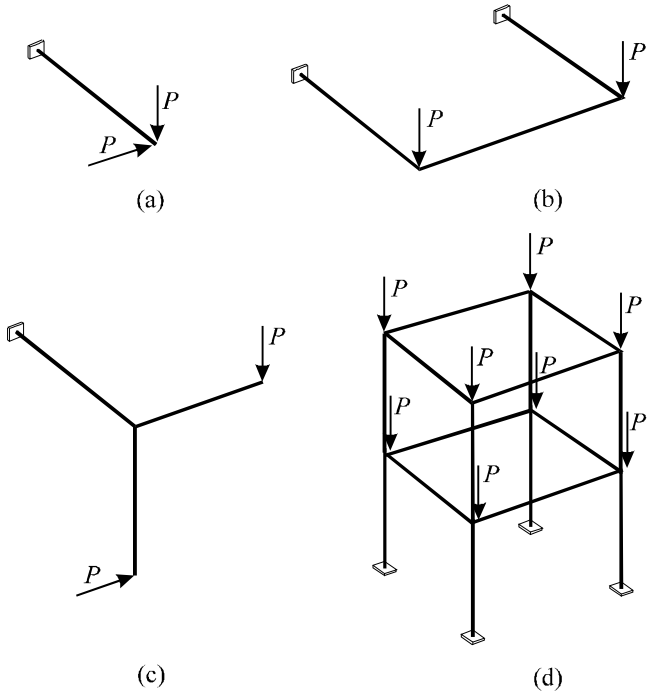


Figura 1.93

1.7.1 Apoios

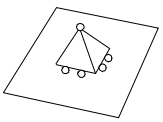
Os principais apoios dos sistemas espaciais são os seguintes:

- apoio simples

***impede*:** o movimento do ponto vinculado na direção normal à do plano de vinculação.

***permite*:** o movimento do ponto vinculado em qualquer direção paralela ao plano de vinculação;
o movimento de rotação do sólido em torno de qualquer eixo que passa pelo ponto vinculado.

O apoio simples é indicado pelos símbolos



ou

O primeiro destes símbolos é uma representação esquemática de um dos dispositivos mecânicos utilizados para construir um apoio simples: uma articulação ligada a uma base que se movimenta livremente sobre o plano de vinculação.

Para impedir o movimento do ponto vinculado na direção normal à do plano de vinculação o apoio simples introduz neste ponto do sólido uma força com a direção do movimento impedido, como se mostra na Figura 1.94.

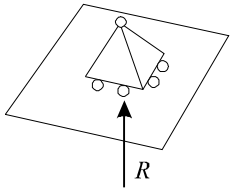


Figura 1.94

A reação de apoio introduzida em uma estrutura espacial por um apoio simples é uma força com direção conhecida, mas com sentido e intensidade a determinar em cada caso particular.
Como um apoio simples restringe um único movimento do ponto vinculado – o movimento numa determinada direção –, introduz um único vínculo no sistema.

Nos cursos de mecânica apresentam-se outros dois apoios que restringem movimentos do ponto vinculado: o *anel* e a *rótula*.

- <u>anel</u>

***impede*:** o movimento do ponto vinculado no plano perpendicular à reta de vinculação.

***permite*:** o movimento do ponto vinculado na direção da reta de vinculação; a rotação do sólido em torno dos eixos que passam pelo ponto vinculado.

O anel é indicado pelo símbolo da Figura 1.95.

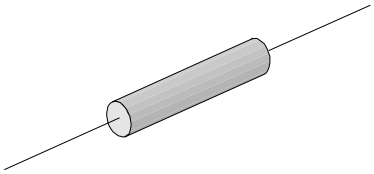


Figura 1.95

O anel impede que o ponto vinculado se movimente no plano perpendicular à reta de vinculação, o plano caracterizado pelos eixos x e y da Figura 1.96.

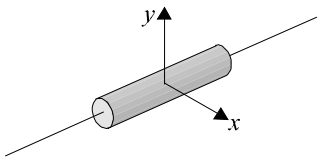


Figura 1.96

Como qualquer movimento de um ponto em um plano pode ser decomposto em duas componentes segundo duas direções distintas situadas nesse plano, dizer que um anel impede qualquer movimento do ponto vinculado no plano xy da Figura 1.96 é equivalente a dizer que ele impede o movimento do ponto na direção do eixo x e também o seu movimento na direção do eixo y.

Para impedir que o ponto vinculado apresente movimento no plano perpendicular à reta de vinculação o anel introduz neste ponto do sistema uma força situada no plano dos movimentos impedidos – a força *R* da Figura 1.97(a) –, com direção, sentido e intensidade a determinar em cada caso particular.

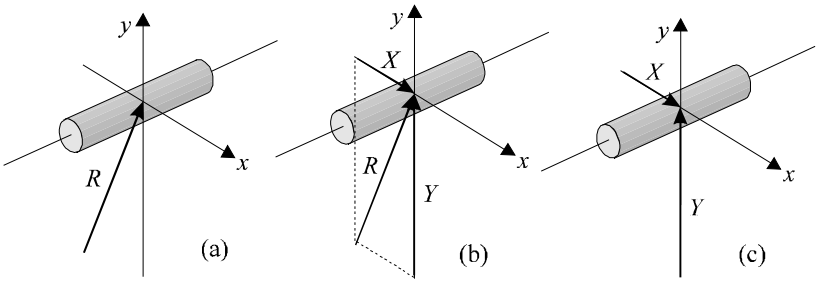


Figura 1.97

Como uma força situada em um plano pode ser sempre decomposta em duas componentes segundo duas direções distintas nesse plano, pode-se dizer que o anel introduz como reações de apoio as duas componentes de *R* segundo os eixos *x* e *y*, como se indica na Figura 1.97(b). A reação *X* impede o movimento do ponto na direção do eixo *x* e a reação *Y*, o movimento na direção do eixo *y*.

Pode-se dizer, portanto, que as reações de apoio introduzidas por um anel em um sistema são duas forças com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar em cada caso particular, as forças *X* e *Y* da Figura 1.97(c).

Como impede os movimentos de um ponto segundo duas direções distintas, um anel introduz dois vínculos em um sistema.
Pode-se facilmente verificar que dois apoios simples convenientemente posicionados são equivalentes a um anel, como se mostra na Figura 1.98.

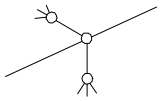


Figura 1.98

Ao impedir que o ponto vinculado apresente movimento nas duas direções normais à reta de vinculação, os dois apoios simples da Figura 1.98 estão impedindo que ele apresente qualquer movimento no plano perpendicular a essa reta, o que torna os apoios das Figuras 1.95 e 1.98 equivalentes.

Esta forma de se considerar um anel – como o resultado da combinação de dois apoios simples – tem a grande vantagem de deixar bem claros quantos vínculos e quantas reações de apoio um anel introduz em uma estrutura.

- <u>rótula</u>

***impede*:** qualquer movimento do ponto vinculado.

***permite*:** a rotação do sistema em torno dos eixos que passam pelo ponto vinculado.

Indica-se uma rótula por meio do símbolo da Figura 1.99.

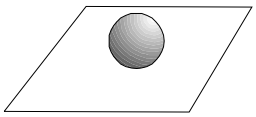


Figura 1.99

Os comentários relativos a uma rótula são qualitativamente semelhantes aos feitos a respeito de um anel. Como um movimento qualquer no espaço pode ser sempre decomposto em três componentes segundo três direções não-coplanares, dizer que uma rótula impede qualquer movimento de um ponto é equivalente a dizer que ela impede os movimentos deste ponto em três direções não-coplanares, por exemplo as direções *x*, *y* e *z* da Figura 1.100.

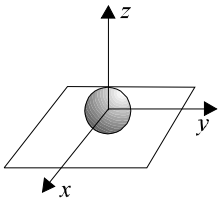


Figura 1.100

Para impedir qualquer movimento do ponto vinculado uma rótula nele aplica uma força *R* – mostrada na Figura 1.101(a) –, cuja direção, sentido e intensidade devem ser determinados em cada caso particular.

Esta força reativa pode ser decomposta em suas componentes segundos os eixos *x*, *y*, *z*, como se mostra na Figura 1.101(b). As forças *X*, *Y* e *Z* impedem, respectivamente, os movimentos do ponto nas direções dos eixos *x*, *y* e *z*.

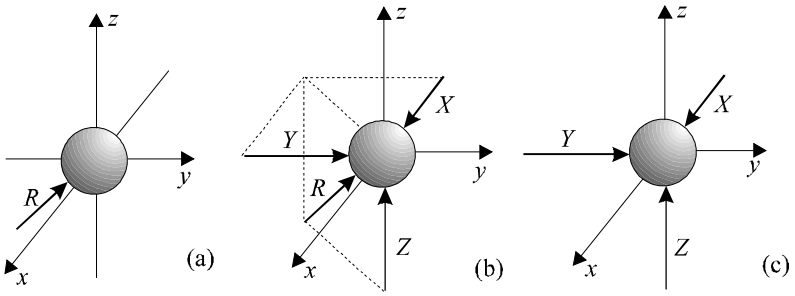


Figura 1.101

Pode-se dizer então que as reações de apoio introduzidas por uma rótula são três forças com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar, as forças *X*, *Y* e *Z* da Figura 1.101(c).

Como impede três movimentos de um ponto, uma rótula introduz três vínculos no sistema.

Três apoios simples convenientemente dispostos – como se mostra na Figura 1.102 – são equivalentes a uma rótula: ao impedir os movimentos do ponto em três direções não-coplanares, os apoios simples da Figura 1.102 impedem qualquer movimento do ponto vinculado.

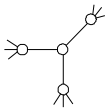


Figura 1.102

Neste texto, um anel será considerado como na Figura 1.98: uma combinação adequada de dois apoios simples; de igual forma, se considerará uma rótula como uma combinação conveniente de apoios simples, como na Figura 1.102.

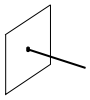
Os três apoios que acabam de ser examinados impedem movimentos do ponto vinculado, mas todos eles permitem a rotação do sistema em torno dos eixos que passam por esse ponto.

Será examinado agora um apoio que também impede rotações.

- <u>engastamento</u>

***impede*:** qualquer movimento do ponto vinculado;
a rotação do sistema em torno dos eixos que passam pelo ponto vinculado.

Indica-se o engastamento espacial pelo símbolo



No estudo que se acaba de fazer sobre a rótula foram determinados os esforços que um apoio introduz em um sistema ao impedir que o ponto vinculado apresente qualquer movimento.

Da mesma forma que a rótula, também o engastamento, ao impedir qualquer movimento do ponto engastado, nele aplica uma força com direção, sentido e intensidade a serem determinados.

Como esta força pode ser decomposta segundo três direções não-coplanares, pode-se dizer alternativamente que um engastamento introduz no ponto vinculado três forças com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar, as forças X, Y e Z da Figura 1.103.

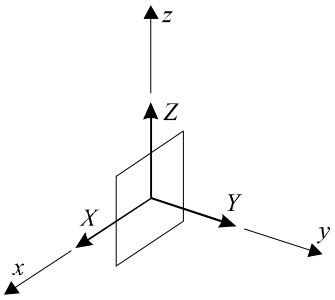


Figura 1.103

Além de impedir qualquer movimento do ponto vinculado, o engastamento também impede a rotação do sistema em torno de qualquer eixo que passa por este ponto. Para isso, aplica no ponto engastado um momento com direção, sentido e intensidade a determinar em cada caso particular (Figura 1.104(a)).

O momento reativo M da Figura 1.104(a) pode ser decomposto segundo três direções não-coplanares, como se indica na Figura 1.104(b).

Pode-se, então, dizer que para impedir a rotação do sistema em torno de qualquer eixo que passa pelo ponto vinculado um engastamento introduz neste ponto três momentos com direções conhecidas, mas com sentidos e intensidades a determinar, os momentos M_x, M_y e M_z da Figura 1.104(c).

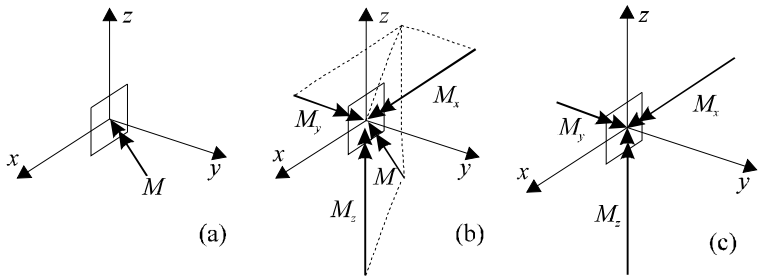


Figura 1.104

O momento M da Figura 1.104(a) impede a rotação do sistema em torno do eixo que possui a direção do vetor que representa esse momento; essa rotação pode ser sempre considerada como a composição de três rotações do sistema, em torno dos eixos x, y e z.

As componentes M_x, M_y e M_z de M impedem, respectivamente, as rotações do sistema em torno dos eixos x, y e z, impedindo desta forma que o sistema apresente rotação em torno de qualquer eixo que passe pelo ponto vinculado.

Um engastamento, portanto, ao impedir o movimento de um ponto em três direções não-coplanares e as rotações deste ponto em torno destes três eixos, introduz seis vínculos no sistema.

As seis reações de apoio que impedem esses seis movimentos estão indicadas na Figura 1.105.

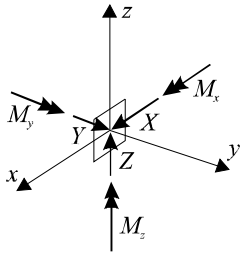


Figura 1.105

Para finalizar esta seção deve-se notar que, da mesma forma que para os sistemas planos, também no caso dos sistemas espaciais os deslocamentos lineares dos pontos vinculados são impedidos por forças e os deslocamentos angulares, isto é, as rotações do sistema em torno dos eixos que passam por um ponto, são impedidos por momentos.

1.7.2 Movimentos de um sistema material espacial

Um sistema rígido espacial possui seis graus de liberdade, ou seja, são necessários seis parâmetros para caracterizar um movimento do sistema; três desses parâmetros definem a translação do sólido e os outros três, a rotação.

Considere-se o sólido da Figura 1.106, que da *posição 0* passa à *posição 4*, fazendo com que o ponto P passe à posição P'.

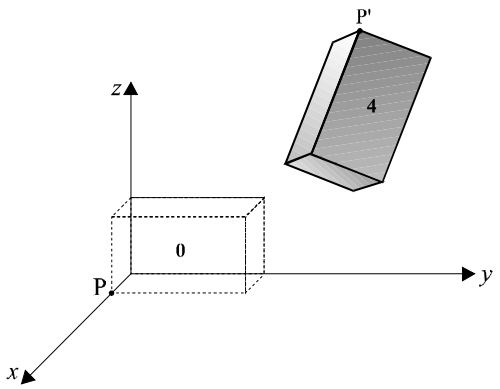


Figura 1.106

Este movimento pode ser considerado como a composição de três translações e três rotações.

As três translações do sólido que levam o ponto P à posição P' estão indicadas na Figura 1.107: uma translação na direção do eixo x, que o leva da *posição 0* à *posição 1*, uma translação na direção do eixo y, que o leva à *posição 2*, e uma translação na direção do eixo z, que o leva à *posição 3*.
O movimento que leva o sólido da *posição 3* à *posição final 4* é a composição de três rotações, em torno dos eixos x', y' e z', que passam por P' e são paralelos aos eixos coordenados (Figura 1.108).

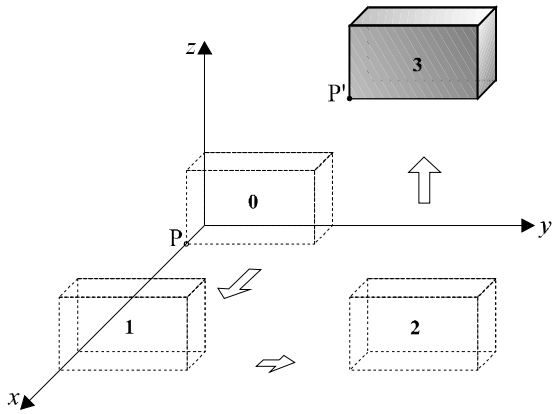


Figura 1.107

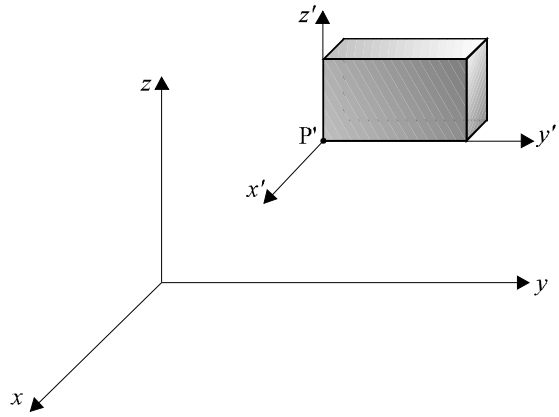


Figura 1.108

Como é difícil representar esta seqüência de rotações, optou-se por apresentar isoladamente cada uma destas rotações na Figura 1.109. Na Figura 1.109(a) mostra-se a rotação em torno de x', na Figura 1.109(b), a rotação em torno de y' e na Figura 1.109(c), a rotação em torno de z'.

Nesta figura não se está mostrando o que de fato ocorre. Na realidade, é o sólido $3'$ da Figura 1.109(a) que gira em torno de y' e em seguida em torno de z', atingindo desta forma a *posição final 4*.

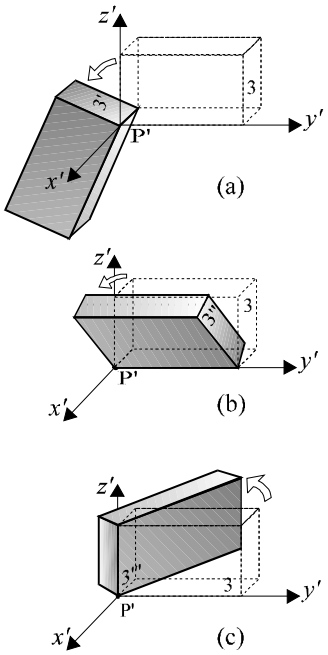


Figura 1.109

O movimento que leva um sistema rígido espacial de uma posição a outra pode, portanto, ser sempre considerado como o resultado de seis movimentos independentes: três translações e três rotações.

É por isso que se diz que um sistema material espacial possui seis graus de liberdade.

Comentou-se ao se estudar os sistemas rígidos planos que os graus de liberdade de um sistema também podem ser definidos como sendo o número mínimo de parâmetros necessários para caracterizar a posição do sistema em relação a um determinado referencial.

As duas definições para graus de liberdade de um sistema estão relacionadas, não sendo difícil mostrar que também de acordo com esta segunda definição um sistema rígido espacial possui seis graus de liberdade.

1.7.3 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas

Tudo o que foi visto a respeito da estaticidade dos sistemas rígidos planos se aplica aos sistemas rígidos espaciais, devendo-se lembrar apenas que um sistema espacial possui seis graus de liberdade, enquanto um sistema plano possui apenas três.

Assim, um sistema espacial cujos apoios introduzem menos que seis vínculos no sistema é hipostático. Como exemplo, tem-se a estrutura da Figura 1.110, vinculada por meio de um anel e de uma rótula, que não impedem a rotação em torno do eixo definido pelos pontos A e B.

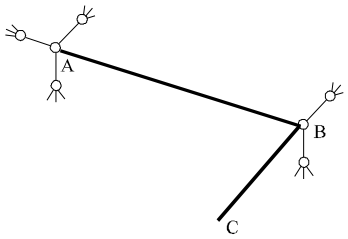


Figura 1.110

Um sistema espacial isostático possui apoios que introduzem seis vínculos no sistema. Como exemplo de um sistema espacial isostático tem-se a estrutura da Figura 1.111, vinculada por uma rótula, um anel e um apoio simples. Ela é semelhante à estrutura da Figura 1.110, mas apresenta uma restrição de movimento adicional, o impedimento ao deslocamento vertical do ponto C, que impede a rotação da estrutura em torno do eixo AB.

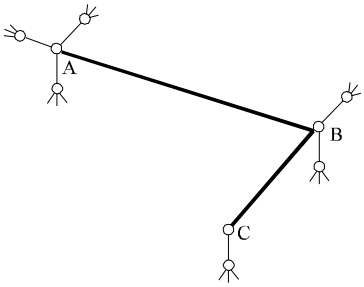


Figura 1.111

Lembra-se mais uma vez que não basta que haja seis vínculos para que uma estrutura seja isostática: apesar de possuir seis vínculos, a estrutura da Figura 1.112 pode apresentar rotação em torno do eixo AB.

Uma estrutura hiperestática espacial possui sempre mais que seis vínculos. Na Figura 1.113 mostra-se uma estrutura hiperestática com dois graus de hiperestaticidade, como se depreende ao compará-la com a estrutura da Figura 1.111, que é isostática.

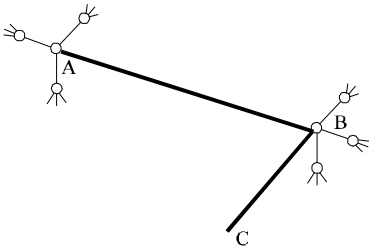


Figura 1.112

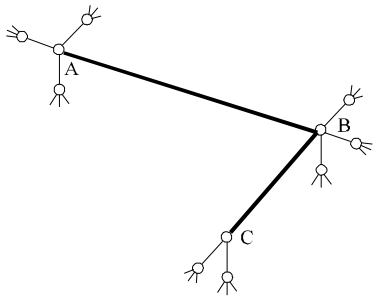


Figura 1.113

Novamente vale a pena lembrar que o fato de uma estrutura espacial possuir mais que seis vínculos não é condição suficiente para que ela seja hiperestática.

Embora possua sete vínculos, a estrutura da Figura 1.114 é hipostática, já que pode girar em torno do eixo AB.

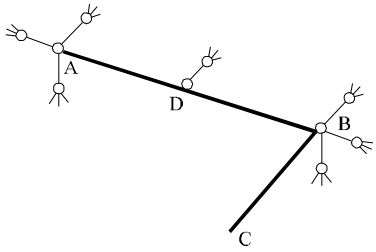


Figura 1.114

1.7.4 Momento de uma força em relação a um eixo

Nesta seção será apresentado o momento de uma força em relação a um eixo, que será utilizado na obtenção das equações de equilíbrio de um sistema material espacial.
Considerem-se os seguintes elementos mostrados na Figura 1.115:

- um eixo r
- uma força aplicada (P, $\vec{F}$)
- o plano α que passa por P e é ortogonal ao eixo r
- a interseção A do eixo r com o plano α
- as componentes $\vec{F}_n$ e $\vec{F}_t$ de $\vec{F}$, $\vec{F}_n$ ortogonal ao plano α e $\vec{F}_t$ situada no plano α

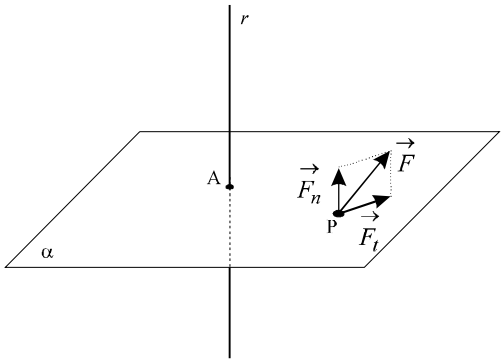


Figura 1.115

Definição 1.18

Define-se como momento da força (P, $\vec{F}$) em relação ao eixo *r* o vetor

$$\vec{M}_r = \vec{\mathrm{AP}} \wedge \vec{F}_t \ , \qquad (1.72)$$

ou seja, o momento da força (P, $\vec{F}$) em relação ao eixo *r* é o momento da componente (P, $\vec{F}_t$) em relação ao ponto A.

O momento da força (P, $\vec{F}$) em relação ao eixo *r* está indicado na Figura 1.116; observa-se que este momento é paralelo ao eixo *r*.

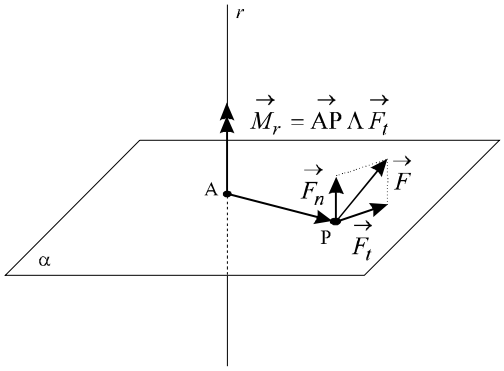


Figura 1.116

Propriedade 1.13

O momento de uma força em relação a um eixo paralelo a ela é nulo.

A demonstração desta propriedade é imediata, pois se a força é paralela ao eixo então $\vec{F}_t = \vec{0}$, logo $\vec{M}_r = \vec{\mathrm{AP}} \wedge \vec{F}_t = \vec{0}$.

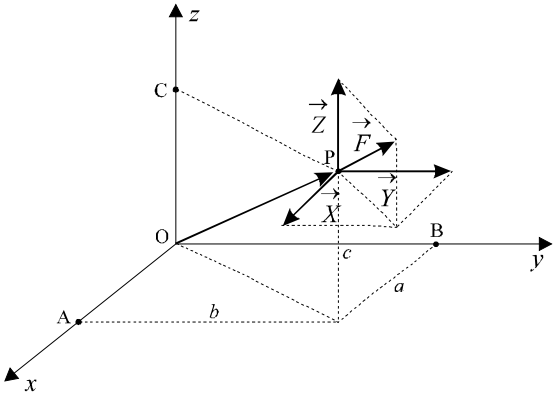


Figura 1.117

Propriedade 1.14

O momento de uma força em relação a um ponto é a soma vetorial dos momentos desta força em relação a três eixos ortogonais entre si que passam por esse ponto.

Considere-se a Figura 1.117. De acordo com a Propriedade 1.14 o momento $\vec{M}_O$ da força (P, $\vec{F}$) em relação ao ponto O é

$$\vec{M}_O = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z \ , \qquad (1.73)$$

onde $\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$ e $\vec{M}_z$ são respectivamente os momentos da força (P, $\vec{F}$) em relação aos eixos *x*, *y* e *z*.

A demonstração dessa propriedade não é difícil.

Tem-se $\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, logo

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = \\
&= a\vec{i} \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) + b\vec{j} \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) + c\vec{k} \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = \\
&= a\vec{i} \wedge X\vec{i} + a\vec{i} \wedge Y\vec{j} + a\vec{i} \wedge Z\vec{k} + b\vec{j} \wedge X\vec{i} + b\vec{j} \wedge Y\vec{j} + b\vec{j} \wedge Z\vec{k} + \\
&+ c\vec{k} \wedge X\vec{i} + c\vec{k} \wedge Y\vec{j} + c\vec{k} \wedge Z\vec{k} = \vec{0} + Ya\vec{k} - Za\vec{j} - Xb\vec{k} + \vec{0} + Zb\vec{i} + \\
&+ Xc\vec{j} - Yc\vec{i} + \vec{0} = (Zb - Yc)\vec{i} + (Xc - Za)\vec{j} + (Ya - Xb)\vec{k} .
\end{aligned} \qquad (1.74)$$

Mostrar-se-á agora que

$$\begin{aligned}
\vec{M}_x &= (Zb - Yc)\vec{i} \ , \\
\vec{M}_y &= (Xc - Za)\vec{j} \ , \\
\vec{M}_z &= (Ya - Xb)\vec{k} \ ,
\end{aligned} \qquad (1.75)$$

logo que

$$\vec{M}_O = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z \ , \qquad (1.76)$$

como se desejava demonstrar.
Pela definição de momento de uma força em relação a um eixo tem-se

$$\begin{aligned}
\vec{M}_x &= \overrightarrow{AP} \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) = (b\vec{j} + c\vec{k}) \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) = b\vec{j} \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) + \\
&c\vec{k} \wedge (Y\vec{j} + Z\vec{k}) = b\vec{j} \wedge Y\vec{j} + b\vec{j} \wedge Z\vec{k} + c\vec{k} \wedge Y\vec{j} + c\vec{k} \wedge Z\vec{k} = \vec{0} + \\
&Zb\vec{i} - Yc\vec{i} + \vec{0} = (Zb - Yc)\vec{i} .
\end{aligned} \qquad (1.77)$$

.

Analogamente, verifica-se que

$$\begin{aligned}
\vec{M}_y &= (Xc - Za)\vec{j} , \\
\vec{M}_z &= (Ya - Xb)\vec{k} ,
\end{aligned} \qquad (1.78)$$

ficando assim demonstrada a Propriedade 1.14.

Examinando a expressão (1.77), observa-se que, como era de se esperar, o momento de uma força em relação a um eixo é a soma vetorial dos momentos que as componentes dessa força têm em relação a esse eixo.

1.7.5 Equações de equilíbrio

Viu-se na Seção 1.5 que se um sistema material espacial está em equilíbrio então a resultante das forças externas que nele atuam é nula e que o momento destas forças em relação a um ponto qualquer do espaço também é nulo.

Na Figura 1.118 representa-se um sistema espacial em equilíbrio sob a ação de um conjunto de forças externas ativas e reativas.

Como o sistema está em equilíbrio, tem-se

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

e (1.79)

$$\vec{M}_{\mathrm{O}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OP}}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \ .$$

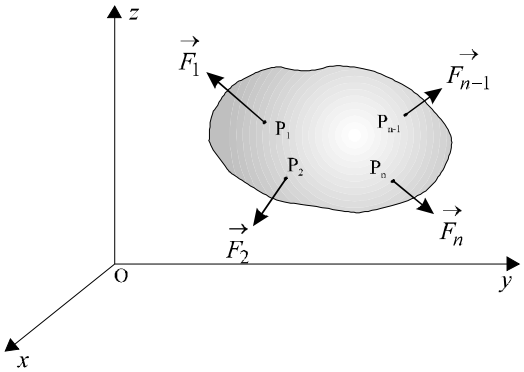


Figura 1.118

A primeira destas equações pode ser desenvolvida como

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}) =$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \vec{k} = \vec{0} \ , \qquad (1.80)$$

de onde decorre

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \ ,$$
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \ , \qquad (1.81)$$
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \ .$$

Nestas expressões, X_i , Y_i e Z_i são as componentes das forças F_i segundo os três eixos coordenados.
O fato de a resultante das forças que atuam no sistema ser nula implica, portanto, em que as somas das componentes destas forças segundo três eixos coordenados também sejam nulas.

Tem-se ainda que

$$\vec{M}_{\mathrm{O}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{\mathrm{O}i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OP}}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \ . \qquad (1.82)$$

Lembrando que

$$\vec{M}_{O_i} = M_{x_i}\vec{i} + M_{y_i}\vec{j} + M_{z_i}\vec{k}\,, \qquad (1.83)$$

onde $M_{x_i}\vec{i}$, $M_{y_i}\vec{j}$ e $M_{z_i}\vec{k}$ são os momentos das forças (P_i , $\vec{F}_i$) em relação aos eixos *x*, *y* e *z*, pode-se reescrever (1.82) como

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n}(M_{x_i}\vec{i} + M_{y_i}\vec{j} + M_{z_i}\vec{k}) = \\ &\left(\sum_{i=1}^{n}M_{xi}\right)\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{n}M_{y_i}\right)\vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{n}M_{zi}\right)\vec{k} = \vec{0}\,,\end{aligned} \qquad (1.84)$$

de onde decorre

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}M_{x_i} = 0\ ,\\ &\sum_{i=1}^{n}M_{y_i} = 0\ ,\\ &\sum_{i=1}^{n}M_{z_i} = 0\ .\end{aligned} \qquad (1.85)$$

O fato de o momento das forças que atuam no sistema ser nulo em relação a um ponto O implica portanto em que as somas dos momentos destas forças em relação aos três eixos coordenados também sejam nulas. Os esforços externos que atuam em um sólido espacial em equilíbrio satisfazem então as seguintes seis equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}X_i = 0\\ &\sum_{i=1}^{n}Y_i = 0\\ &\sum_{i=1}^{n}Z_i = 0\\ &\sum_{i=1}^{n}M_{x_i} = 0\\ &\sum_{i=1}^{n}M_{y_i} = 0\\ &\sum_{i=1}^{n}M_{z_i} = 0\ .\end{aligned} \qquad (1.86)$$

1.7.6 Determinação das reações de apoio

A determinação das reações de apoio das estruturas espaciais isostáticas é feita mediante o emprego das seis equações de equilíbrio (1.86).

<u>Exemplo 1.14</u>

Determinar as reações de apoio da viga da Figura 1.119(a).

Na Figura 1.119(b) indicam-se os esforços externos reativos que podem ser introduzidos na viga pelo engastamento em A.

Os esforços externos ativos e reativos representados na Figura 1.119(b) devem satisfazer as seis equações de equilíbrio da estática:

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{\mathrm{A}} = 0$$

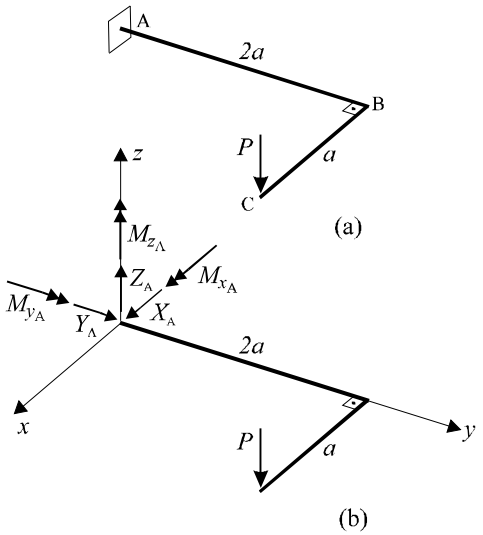


Figura 1.119

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{\mathrm{A}} = 0$$

$$\sum Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{\mathrm{A}} - P = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{\mathrm{A}} = P$$

$$\sum M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{x_{\mathrm{A}}} - P\,2a = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{x_{\mathrm{A}}} = 2\,Pa \qquad (1.87)$$

$$\sum M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{y_{\mathrm{A}}} + Pa = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{y_{\mathrm{A}}} = -\,Pa$$

$$\sum M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{z_{\mathrm{A}}} = 0 \ .$$

Nota-se que nestas equações, de forma semelhante ao que já se fez antes, está-se usando uma notação simplificada, indicando-se $\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, $\sum_{i=1}^{n} Z_i$, $\sum_{i=1}^{n} M_{xi}$, $\sum_{i=1}^{n} M_{y_i}$ e $\sum_{i=1}^{n} M_{zi}$ respectivamente como $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$, $\sum M_x$, $\sum M_y$ e $\sum M_z$.
As reações de apoio não-nulas decorrentes do sistema (1.87) são

$$Z_{\mathrm{A}} = P$$

$$M_{x_{\mathrm{A}}} = 2\,Pa \qquad (1.88)$$

$$M_{y_{\mathrm{A}}} = -\,Pa\ ,$$

encontrando-se representadas na Figura 1.120.

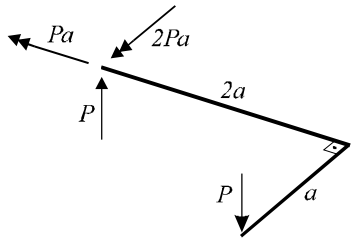


Figura 1.120

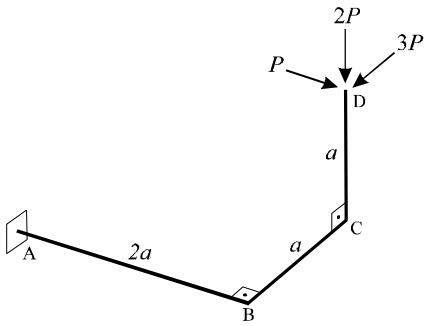
Exemplo 1.15

Determinar as reações de apoio da estrutura da Figura 1.121(a).

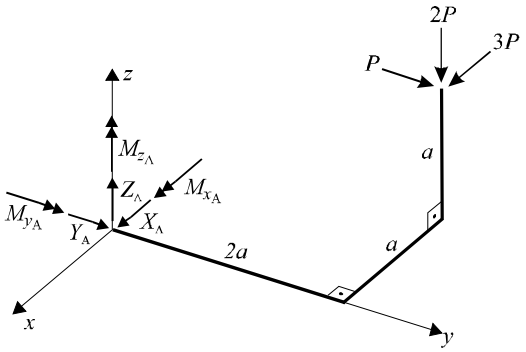
As reações que podem ser introduzidas na viga pelo engastamento estão indicadas na Figura 1.121(b).

Os esforços externos que atuam na estrutura devem satisfazer as seis equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\Rightarrow \quad X_A + 3P = 0 \\
\sum Y = 0 \quad &\Rightarrow \quad Y_A + P = 0 \\
\sum Z = 0 \quad &\Rightarrow \quad Z_A - 2P = 0 \\
\sum M_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad M_{x_A} - P\,a - 2P\,2a = 0 \\
\sum M_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad M_{y_A} - 2Pa + 3Pa = 0 \\
\sum M_z = 0 \quad &\Rightarrow \quad M_{z_A} - Pa - 3P\,2a = 0 \;,
\end{aligned} \tag{1.89}$$



(a)



(b)

Figura 1.121

de onde se obtém as reações de apoio

$$
\begin{aligned}
X_A &= -3P \\
Y_A &= -P \\
Z_A &= 2P \\
M_{x_A} &= 5Pa \\
M_{y_A} &= -Pa \\
M_{z_A} &= 7Pa
\end{aligned}
\tag{1.90}
$$

mostradas na Figura 1.122.

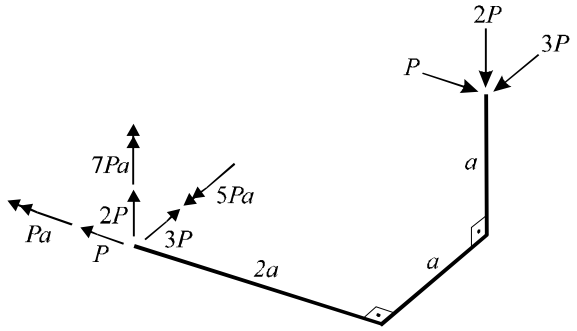


Figura 1.122

Exemplo 1.16

Determinar as reações de apoio da estrutura da Figura 1.123(a).

Na Figura 1.123(b) indicam-se os esforços reativos introduzidos na estrutura pela rótula em A, pelo apoio simples em C e pelo anel em G; nesta figura também se indica a força uniformemente equivalente ao carregamento distribuído que atua na barra FG.

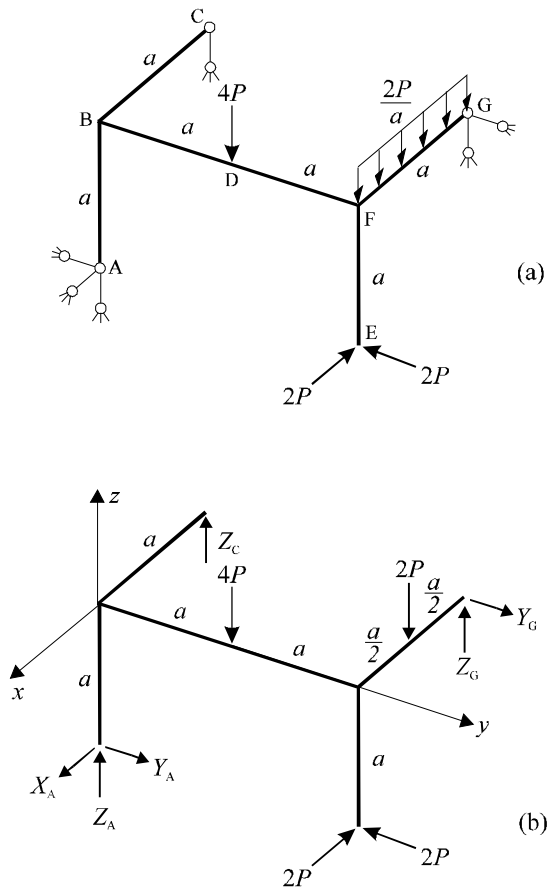


Figura 1.123

Os esforços indicados na Figura 1.123(b) devem satisfazer as equações de equilíbrio

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A - 2P = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A - 2P + Y_G = 0$$

$$\sum Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_C - 4P - 2P + Z_G = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A a - 4Pa - 2Pa - 2P2a + Z_G 2a = 0 \qquad (1.91)$$

$$\sum M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -X_A a + Z_C a + 2Pa - 2P\frac{a}{2} + Z_G a = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P2a - Y_G a = 0 \ ,$$

de onde decorrem as reações

$$X_A = 2P$$

$$Y_A = -2P$$

$$Z_A = 5P$$

$$Z_C = -5P \qquad (1.92)$$

$$Y_G = 4P$$

$$Z_G = 6P \ ,$$

indicadas na Figura 1.124(a).

Sugeriu-se anteriormente que no caso dos problemas um pouco mais complexos se fizesse uma verificação das reações encontradas por meio de equações de equilíbrio de momentos suplementares.

Vai-se aqui fazer uma conferência das reações obtidas, calculando os momentos dos esforços que atuam na estrutura em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ indicados na Figura 1.124(b).

Tem-se

$$\sum M_{\bar{x}} = 5P2a - 5P2a - 2Pa + 4Pa - 2Pa = 0$$

$$\sum M_{\bar{y}} = -5Pa - 2P\frac{a}{2} + 6Pa = 0. \qquad (1.93)$$

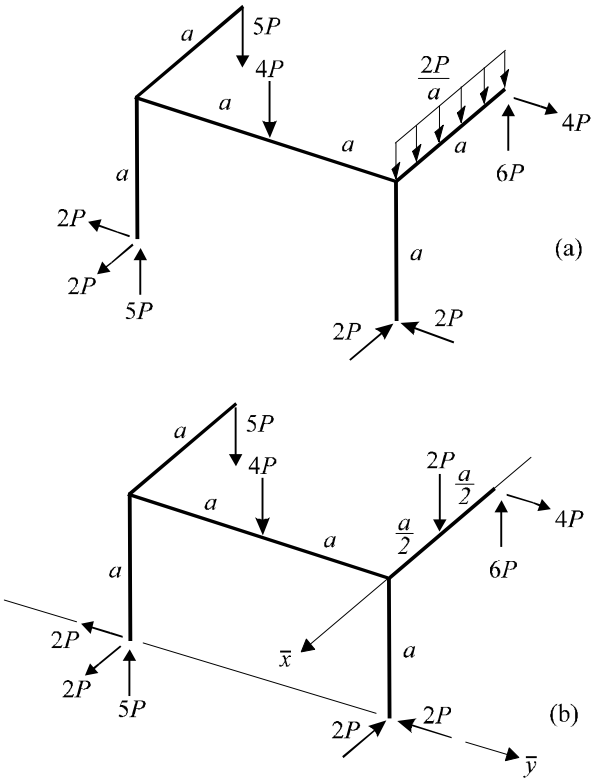


Figura 1.124

O fato destes dois momentos serem nulos é uma boa indicação de que as reações obtidas devem estar corretas, pois não seria muito provável que, com reações incorretas, se obtivessem duas equações de equilíbrio de momentos suplementares nulas.

Mais uma vez, entretanto, lembra-se que este teste não é infalível, pois o fato das equações de momentos suplementares serem nulas é condição necessária, mas não suficiente para que as reações obtidas sejam as corretas.

Capítulo 2

O Conceito de Tensão

No Capítulo I foram recordadas algumas noções de estática dos sistemas rígidos que serão utilizadas no curso de mecânica das estruturas.

Neste capítulo inicia-se o estudo dos sólidos que serão o objeto do curso de mecânica das estruturas: os sólidos deformáveis, ou seja, os sólidos que mudam de forma quando solicitados por esforços.

Todos os sólidos reais são deformáveis, e é neste fato que reside a importância fundamental da mecânica dos sólidos deformáveis. Para projetar uma estrutura real é necessário levar em consideração a deformabilidade de seu material.

Vai-se iniciar o estudo dos sólidos deformáveis apresentando o conceito de tensão. Antes de se passar a uma formalização maior, vai-se dar uma primeira ideia muito informal do que são as tensões no interior de um sólido.

Para isto, considere-se a ponte esquematizada na Figura 2.1(a).

O que acontece nesta ponte quando um veículo passa por ela? Na Figura 2.1(b) mostram-se as forças introduzidas na ponte pelo veículo e também os esforços reativos que as equilibram, aplicados pelo solo nas bases das sapatas de fundação.

Como funciona a estrutura desta ponte? As forças P_1 e P_2 aplicadas na ponte pelo veículo caminham pelo tabuleiro até os pilares, descendo até as sapatas de fundação, de onde passam para o solo. Na Figura 2.1(c) mostra-se este caminho que os esforços percorrem no interior da estrutura, desde o tabuleiro até o solo.

O que ocorre neste exemplo simples se estende a todas as demais estruturas, podendo-se dizer de uma maneira bastante simplista e geral que a finalidade de uma estrutura é permitir que os esforços externos ativos caminhem desde os pontos em que são aplicados até os apoios, onde passam ao solo – no caso das construções – ou a outras estruturas.

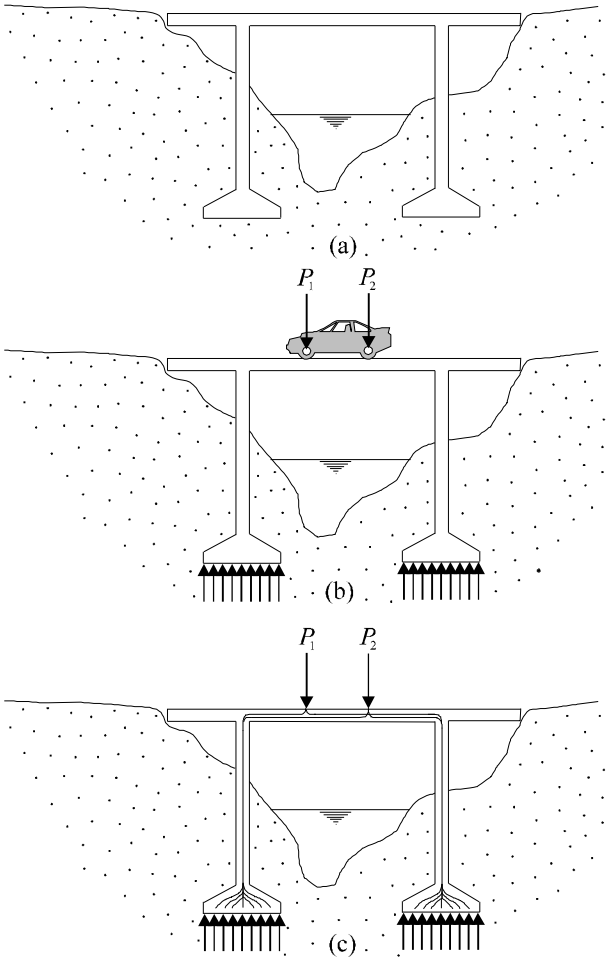


Figura 2.1

A finalidade da estrutura da ponte da Figura 2.1 é permitir que os esforços aplicados pelos veículos que passam por ela possam atingir as sapatas de fundação, de onde passam para o solo.
Ao caminhar pela estrutura os esforços modificam as posições relativas de suas moléculas, dando-se então a deformação da estrutura.

Outro fato também explicado por esse caminhamento dos esforços pelo interior de uma estrutura é sua ruptura.

Por que a ponte se romperá se as forças aplicadas pelos veículos forem muito grandes? Porque neste caso os esforços que irão caminhar por seu interior também serão muito grandes, atingindo a capacidade de resistência do material que constitui a estrutura, que irá então se quebrar.

Este exemplo simples mostra que tanto a deformação como a ruptura de uma estrutura estão ligadas ao caminhamento dos esforços externos ativos desde os pontos em que são aplicadas até os apoios.

Pode-se dar agora uma primeira idéia do que são as tensões no interior de uma estrutura: elas são os esforços que surgem em seu interior quando os esforços externos ativos caminham desde seus pontos de aplicação até os apoios.

Para reforçar ainda mais esta idéia intuitiva do que é uma tensão, serão agora idealizadas algumas experiências, que, embora muito simples, são muito ricas.

A primeira experiência é a seguinte: segura-se uma das extremidades de um pedaço de giz com os dedos da mão esquerda, e puxa-se a outra extremidade com os dedos da mão direita. Sabe-se que para manter o giz em equilíbrio a mão esquerda tem que aplicar nele uma força adequada, pois se não aplicar nenhuma força ou então aplicar uma força insuficiente o pedaço de giz se deslocará no mesmo sentido que a mão direita. Sabe-se também que forças crescentes aplicadas com a mão direita exigem que a mão esquerda aplique forças cada vez maiores para manter o giz em equilíbrio.

Este fato mostra que a força aplicada pela mão direita – a força ativa – é transmitida pelo giz até a mão esquerda, onde ela é equilibrada pela força introduzida por esta mão – a força reativa.

Sabe-se ainda que, ao ser transmitida de uma extremidade à outra do giz, a força ativa solicita o material que constitui a barra de giz, tanto assim que o giz acaba se rompendo quando a força ativa é muito grande.

Deve-se acrescentar ainda que o giz se deforma, isto é, muda de forma, quando transmite esforços de uma extremidade à outra. Como já se mencionou, todos os sólidos se deformam sob a ação de esforços; alguns bastante rígidos, se deformam pouco, e sua mudança de forma é praticamente imperceptível. É o caso do pedaço de giz, que aparentemente não se deforma. É claro que se a experiência fosse com um elástico, segurado pela mão esquerda e puxado pela mão direita, a deformação seria perfeitamente visível.

A descrição da experiência com o giz tem como finalidade permitir que o conceito de tensão seja mais uma vez apresentado de forma intuitiva. Como já se viu, as tensões nada mais são que os esforços internos que surgem em um sólido quando esforços externos são transmitidos de um ponto a outro por seu intermédio. No caso do giz, as tensões são os esforços internos que nele surgem quando a força aplicada pela mão direita é transmitida para a mão esquerda, onde ela é equilibrada. Cada material resiste a estas tensões até um determinado limite, rompendo-se se ele for atingido. Por esta razão, ao se fazer o projeto de uma estrutura, precisa-se determinar as tensões que deverão surgir em seu interior e compará-las com as tensões limites do material que será utilizado em sua construção. As tensões limites de cada material são obtidas experimentalmente.

É oportuno mencionar que um mesmo material resiste de forma distinta a diferentes esforços internos, isto é, a diferentes tensões. Repetindo-se a experiência com o giz, se em vez de puxado ele for empurrado, se irá verificar que ele resistirá a esforços muito maiores quando empurrado que quando puxado.

O conceito de tensão, que acaba de ser apresentado de forma simples e intuitiva, será agora abordado de maneira mais formal e rigorosa, de modo a se definir matematicamente o que é uma tensão.

Para isto, considere-se a Figura 2.2, em que se representa uma estrutura genérica submetida aos esforços externos ativos $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, equilibrados pelas reações de vínculo $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ (Figura 2.3). Como já se mencionou, as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ caminham pela estrutura até atingirem os vínculos, onde são equilibradas pelas reações $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$. É este caminhamento dos esforços que origina as tensões nos pontos internos da estrutura.

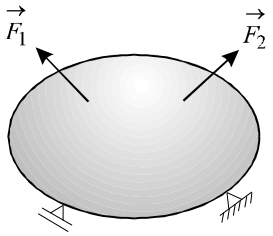


Figura 2.2

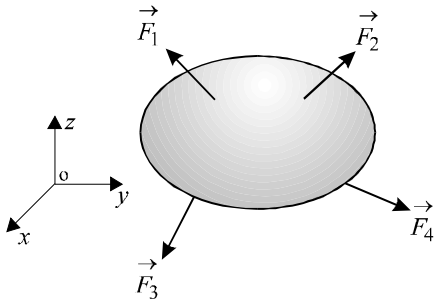


Figura 2.3

Estando a estrutura em equilíbrio, os esforços externos que nela atuam – os esforços externos ativos $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e os esforços externos reativos $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ – satisfazem as seis equações de equilíbrio da estática, a saber:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

onde x, y e z são os três eixos coordenados indicados na Figura 2.3.

Considerando agora um ponto interno P do sólido e um plano α que passa por P (Figura 2.4), pode-se, num esforço de imaginação, supor o sólido separado em duas partes por meio de um corte segundo o plano α (Figura 2.5).

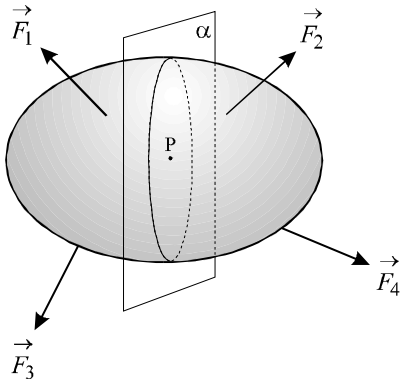


Figura 2.4

No caso geral, a parte do sólido à esquerda do corte (parte I) não fica em equilíbrio sob a ação exclusiva dos esforços externos $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$; o mesmo se pode dizer da parte do sólido à direita do corte (parte II), que também não fica em equilíbrio sob a ação exclusiva de $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$. Sabe-se, entretanto, que a situação representada na Figura 2.5 não pode ser a existente no sólido real, em que as duas partes se encontram unidas, pois, se assim fosse, elas não ficariam em equilíbrio, e se separariam uma da outra: a parte I se deslocaria para a esquerda e a parte II, para a direita. Com certeza, existem então outros esforços aplicados na parte I, equilibrando-a. Além de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$, os únicos esforços que podem atuar na parte I são

esforços internos, aplicados na seção do corte – como se indica na Figura 2.6 –, e são realmente esforços deste tipo que promovem o equilíbrio deste trecho do sólido. Eles representam a ação que a parte II exerce sobre a parte I.

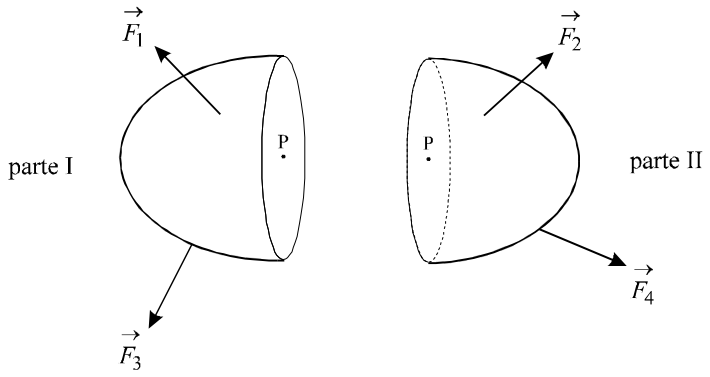


Figura 2.5

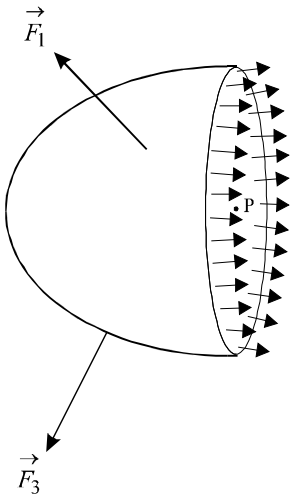


Figura 2.6

É fácil concluir que o equilíbrio da parte I não poderia se dar de outra forma: no sólido original, não separado em duas partes, são as forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ que equilibram $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$; não é porque mentalmente se supôs o sólido separado em dois trechos que as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ aplicadas na parte I deixarão de ser equilibradas pelas forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ aplicadas na parte II. De alguma forma a ação de $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ deve se fazer sentir na parte I e equilibrá-la. Pois bem, é por meio dos esforços distribuídos aplicados na seção do corte que a ação de $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ é exercida sobre a parte I.

Todo este raciocínio se aplica também ao equilíbrio da parte II do sólido: a ação das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$, isto é, a ação da parte I se faz sentir na parte II por meio de forças distribuídas aplicadas na seção do corte – como se indica na Figura 2.7 –, equilibrando-a.

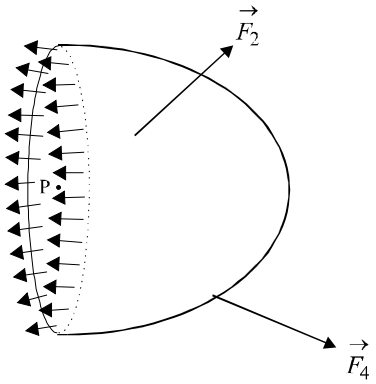


Figura 2.7

As forças distribuídas indicadas na Figura 2.6 se constituem, portanto, na ação que a parte II do sólido exerce sobre a parte I; de forma análoga, as forças distribuídas indicadas na Figura 2.7 se constituem na ação que a parte II exerce sobre a parte I. Da natureza física destes esforços e do princípio da ação e reação decorre que as forças distribuídas em pontos correspondentes da parte I e da parte II têm a mesma intensidade e a mesma direção, mas sentidos opostos.
São estas forças distribuídas que atuam nos planos internos do sólido e representam a ação que uma de suas partes exerce sobre a outra que recebem o nome de tensões. Para definir matematicamente a tensão em P segundo o plano α, considere-se a Figura 2.8, em que se indica uma região do plano α que contém o ponto P.

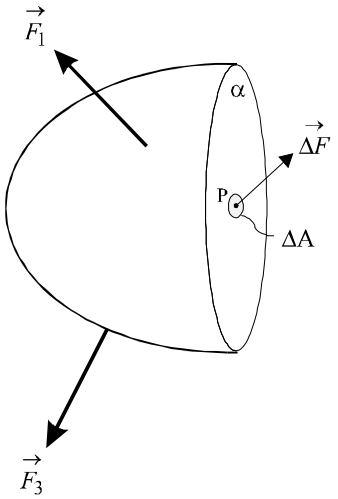


Figura 2.8

Sendo $\vec{\Delta F}$ a resultante das forças distribuídas que atuam nesta região e ΔA a sua área, define-se como tensão média na região considerada:

$$\vec{\rho}_m = \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta \mathrm{A}} \quad . \qquad (2.2)$$

Observa-se que $\vec{\rho}_m$ é um vetor: tem a direção e o sentido de $\vec{\Delta F}$ e a intensidade $\left\|\Delta\vec{F}\right\| / \Delta\mathrm{A}$. A dimensão de $\vec{\rho}_m$ é a de uma força dividida por uma área.

Fazendo agora ΔA tender a zero, sempre mantendo o ponto P em seu interior, define-se como tensão $\vec{\rho}$ em P segundo α:

$$\vec{\rho} = \lim_{\Delta A \to 0} \vec{\rho}_m = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} . \qquad (2.3)$$

A definição matemática acima claramente está de acordo com o significado físico que anteriormente se deu às tensões: a tensão $\vec{\rho}$ em P segundo o plano α nada mais é que o valor – aqui entendido como um vetor – apresentado em P pelas forças distribuídas que atuam em α e se constituem na ação que a parte II exerce sobre a parte I do sólido.

Como já se mencionou, as tensões são grandezas vetoriais, logo dotadas de direção, sentido e intensidade; sua dimensão é a de uma força dividida por uma área. No Sistema Internacional a unidade de medida das tensões é o pascal, sendo:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 . \qquad (2.4)$$

Observa-se que esta unidade de medida é a mesma utilizada para pressões, o que decorre do fato de tensões e pressões terem a mesma dimensão.

No Sistema Técnico utiliza-se como unidade de medida das tensões o kgf/cm^2, tendo-se a seguinte relação entre estas unidades:

$$1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \cong \frac{10 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 10^5 \text{ Pa} . \qquad (2.5)$$

Como o pascal é uma unidade de medida muito pequena para as tensões encontradas na prática, utilizar-se-á neste curso como unidade de medida o kN/cm^2, tendo-se

$$1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 1000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cong 100 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 10 \text{ MPa} \qquad (2.6)$$

Voltando agora à tensão em P segundo o plano α, observa-se que no caso geral ela não apresenta nenhuma direção particular, podendo então ser decomposta em uma componente normal ao plano α e em uma componente situada no plano α (Figura 2.9). Estas componentes recebem respectivamente os nomes de tensão normal ($\vec{\sigma}$) e tensão tangencial ou tensão de cisalhamento ($\vec{\tau}$). Vetorialmente, tem-se

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} . \qquad (2.7)$$

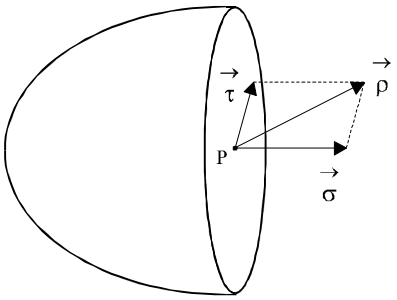


Figura 2.9

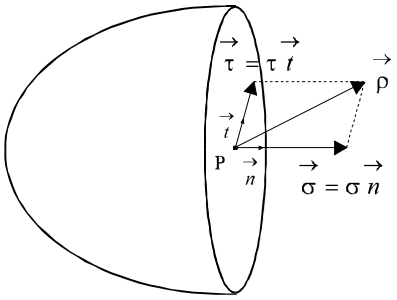


Figura 2.10

Sendo $\vec{n}$ o versor que caracteriza a direção da normal externa em P e sendo $\vec{t}$ o versor que caracteriza a direção da tensão tangencial, tem-se (Figura 2.10)

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma\,\vec{n} + \tau\,\vec{t}\ , \qquad (2.8)$$

onde σ e τ são respectivamente a medida da tensão normal e a medida da tensão de cisalhamento.

A tensão normal recebe o nome de tensão normal de tração – ou, mais simplesmente, tensão de tração – quando tem o sentido da normal externa, isto é, o sentido de $\vec{n}$ (Figura 2.11). Neste caso, tem-se $\sigma > 0$. Ela recebe o nome de tensão normal de compressão – ou, mais simplesmente, tensão de compressão – quando tem o sentido contrário ao da normal externa, isto é, o sentido de $-\vec{n}$ (Figura 2.12). Neste caso, tem-se $\sigma < 0$. As tensões de cisalhamento não recebem nenhum qualificativo especial, sendo sempre chamadas tensões de cisalhamento, qualquer que seja o seu sentido.

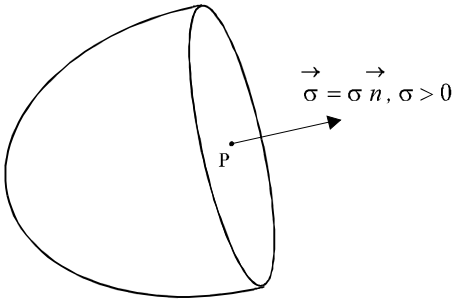


Figura 2.11

Não é por mera conveniência matemática que existe interesse em conhecer as componentes $\vec{\sigma}$ e $\vec{\tau}$ da tensão $\vec{\rho}$ em P e identificar a tensão normal como sendo de tração ou de compressão. A importância de se fazer esta caracterização tem razões físicas: as tensões de tração, compressão e de cisalhamento correspondem a fenômenos físicos distintos, e é por esta razão que é imprescindível distingui-las e quantificá-las.

Como já se mencionou anteriormente, sob a ação de esforços externos todo sólido se deforma, pois os esforços externos provocam uma mudança nas posições relativas das partículas do sólido. O material do sólido opõe resistência a esta mudança das posições relativas de suas partículas: esta resistência são as tensões, e são elas que possibilitam que os esforços externos ativos caminhem através da estrutura até os apoios, onde são equilibrados pelas reações de vínculo. Caso o sólido não opusesse resistência à mudança das posições relativas de suas partículas, ele se desintegraria, se pulverizaria, suas partículas se separariam umas das outras.

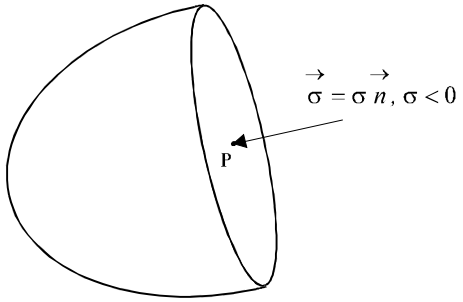


Figura 2.12

Para compreender como se processa o mecanismo de surgimento das tensões, considere-se a Figura 2.13, em que se indicam duas partículas vizinhas ao plano α, uma delas pertencente à parte I e a outra, à parte II.

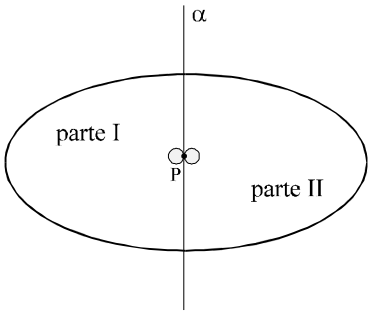


Figura 2.13

Quando os esforços externos fazem com que uma partícula se afaste da outra na direção normal ao plano α as ligações moleculares entre as partículas oferecem resistência a este afastamento, surgindo então uma tensão de tração em P (Figura 2.14).

É esta resistência, isto é, é esta tensão que impede a separação do sólido, ao impedir que ele se deforme indefinidamente. Tração, portanto, está ligada ao afastamento das partículas perpendicularmente ao plano α. Todos já experimentaram a resistência oposta por um sólido ao afastamento de suas partículas ao esticar com as mãos um pedaço de elástico.

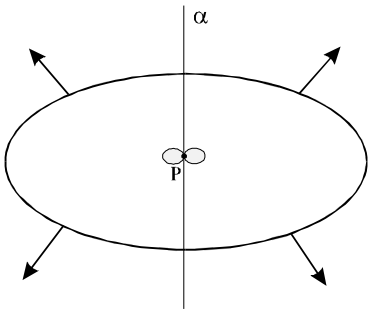


Figura 2.14

Quando os esforços externos fazem com que as duas partículas se aproximem uma da outra normalmente ao plano α as ligações moleculares entre as partículas reagem a esta aproximação, surgindo assim uma tensão de compressão em P (Figura 2.15); esta tensão impede a desagregação do sólido. Compressão, portanto, está ligada à aproximação das partículas perpendicularmente ao plano α.

Finalmente, quando os esforços externos fazem com que as partículas se afastem uma da outra tangencialmente ao plano α, as ligações moleculares entre elas opõem resistência a este afastamento, surgindo desta forma uma tensão de cisalhamento em P (Figura 2.16); ela impede a separação do sólido por escorregamento de uma parte sobre a outra. Cisalhamento, portanto, está ligado ao afastamento das partículas tangencialmente ao plano α.

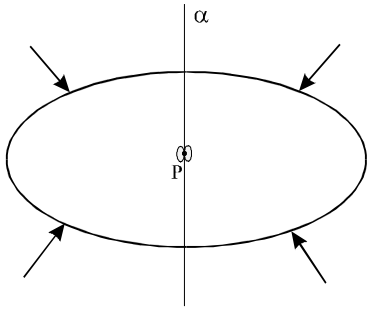


Figura 2.15

Até o momento vem-se sempre associando a tensão $\vec{\rho}$ em P ao plano α em que ela atua, mas ainda não se enfatizou a necessidade desta associação. Pode-se mostrar com facilidade que o conceito de tensão em um ponto só tem sentido se se mencionar o plano em que ela atua. Isto, porque não existe apenas uma tensão em um ponto, mas sim infinitas tensões atuando nos infinitos planos que por ele passam.

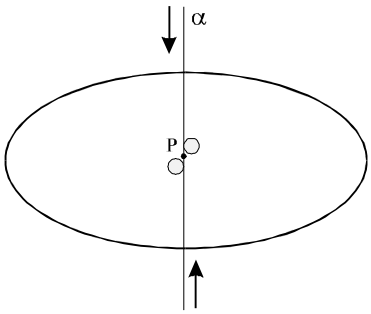


Figura 2.16

Na Figura 2.17 reproduz-se o sólido utilizado para apresentar o conceito de tensão em P segundo α; nele indica-se um plano horizontal β que também passa por P.

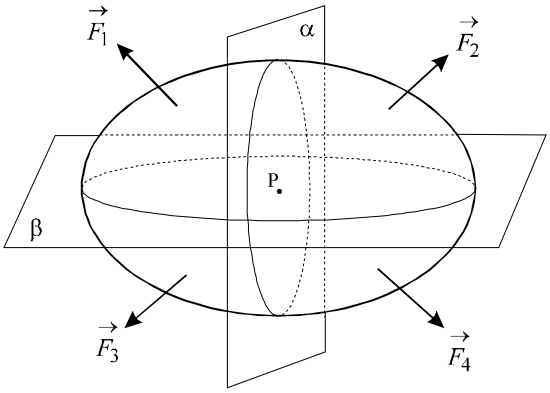


Figura 2.17

O raciocínio empregado anteriormente pode ser repetido, supondo-se o sólido separado em duas partes pelo plano β. O equilíbrio de cada uma das partes do sólido é estabelecido pelas tensões que atuam na seção do corte. Na Figura 2.18 representam-se as tensões que atuam no sólido segundo os planos α (Figura 2.18(a)) e β (Figura 2.18(b)).

Percebe-se facilmente que, no caso do sólido da Figura 2.18, as tensões em P segundo os planos α e β são completamente distintas uma da outra.

As tensões em P segundo os outros infinitos planos que por ele passam se definem de forma totalmente análoga à empregada no caso dos planos α e β.

Verifica-se experimentalmente que o nível de solicitação do material em um ponto como P não é caracterizado exclusivamente pela tensão segundo o plano α ou pela tensão segundo o plano β ou então pela tensão segundo qualquer outro plano.
O que caracteriza de fato o nível de solicitação de um ponto é o conjunto de todas as tensões associadas aos infinitos planos que por ele passam.

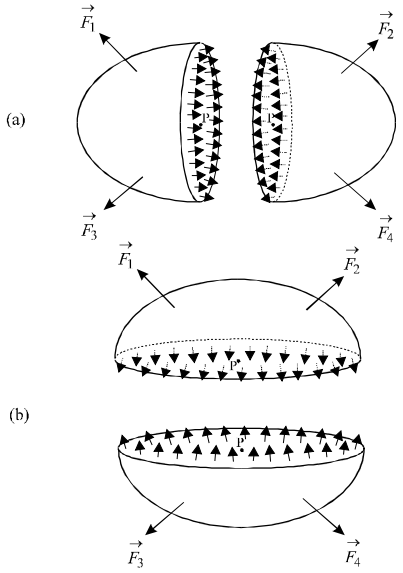


Figura 2.18

Para avaliar o nível de solicitação de um determinado ponto não se pode analisar apenas a tensão segundo um particular plano, sem considerar as tensões que atuam segundo todos os outros planos. Dois carregamentos distintos podem levar exatamente às mesmas tensões em P segundo o plano α, mas a tensões completamente diferentes segundo os demais planos que por ele passam. Fica assim patente a necessidade de examinar o conjunto das tensões e não apenas uma ou outra tensão particular.

Dá-se o nome de estado de tensão em um ponto ao conjunto das infinitas tensões associadas aos infinitos planos que por ele passam. O estado de tensão, portanto, é que caracteriza o nível de solicitação de um ponto.

Mencionou-se anteriormente, de forma simplista, que os materiais resistem às tensões até determinados limites, e que as tensões limites são obtidas experimentalmente. De forma mais rigorosa, o que se deve afirmar é que os materiais resistem aos estados de tensão até determinados limites, e que os estados de tensão limites são obtidos experimentalmente.

Portanto, ao se fazer um projeto, o que se deve comparar com resultados experimentais é o estado de tensão em um ponto: é o conjunto das tensões no ponto que deve ser comparado com os estados de tensão limites, e não tensões em planos particulares que devem ser comparadas com tensões limites, pois, como se acaba de ver, tensões em planos particulares não caracterizam o nível de solicitação do ponto.

Felizmente, pode-se demonstrar – o que será feito mais adiante no curso – que as infinitas tensões segundo os infinitos planos que passam por um ponto podem ser determinadas se forem conhecidas as tensões segundo três destes planos, quaisquer que sejam, desde que perpendiculares entre si dois a dois.

O conhecimento das tensões em P segundo os planos α, β e γ da Figura 2.19 permite que, utilizando apenas as equações de equilíbrio da estática, se obtenham as tensões segundo todos os demais planos que passam por P.

O trabalho de calcular infinitas tensões, portanto, não existe, se reduzindo ao trabalho de calcular três tensões em três planos perpendiculares entre si.

Para exemplificar a influência que o estado de tensão tem na resistência de um material, considere-se o caso de um prisma de concreto. Colocado em uma prensa, ele se rompe quando a força que o comprime atinge um determinado valor limite. Jogado no mar numa fossa abissal com 10 km de profundidade, ele atinge o fundo do mar sem se romper, apesar de ser solicitado por forças superiores àquela que o rompe na prensa. A razão desta diferença de comportamentos é que os estados de tensão dos pontos do prisma nos dois casos são fundamentalmente distintos, possuindo o concreto resistências limites diferentes nas duas situações.

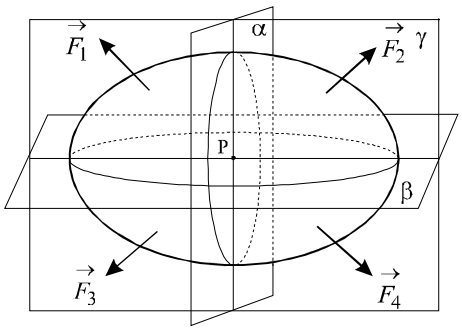


Figura 2.19

Na Figura 2.20 indicam-se em (a) e (b) as forças distribuídas que solicitam o prisma nos dois casos.

Para comparar os estados de tensão que se tem em um mesmo ponto do prisma nas duas situações, retira-se deles um mesmo cubo elementar que contém este ponto em seu interior. As tensões que atuam nas faces do cubo nos dois casos estão indicadas na Figura 2.20, em (c) e (d). Observa-se que, no caso destes

carregamentos particulares, as tensões nas faces dos cubos são iguais às forças distribuídas que atuam nas faces dos prismas paralelas a elas.

O estado de tensão dos pontos do prisma colocado na prensa – representado na Figura 2.20(c) – recebe o nome de estado de compressão simples: nas faces verticais as tensões são todas nulas e nas faces horizontais só atuam tensões normais de compressão.

O estado de tensão dos pontos do prisma jogado no mar – representado na Figura 2.20(d) – recebe o nome de estado hidrostático de compressão: em todas as faces tem-se apenas tensões normais de compressão, iguais em todas elas.

Observa-se que estes dois estados de tensão são fundamentalmente distintos: no primeiro caso, o material é comprimido segundo uma única direção; no segundo caso, segundo as três direções. O concreto, assim como todos os demais materiais, tem resistência extremamente elevada quando igualmente comprimido

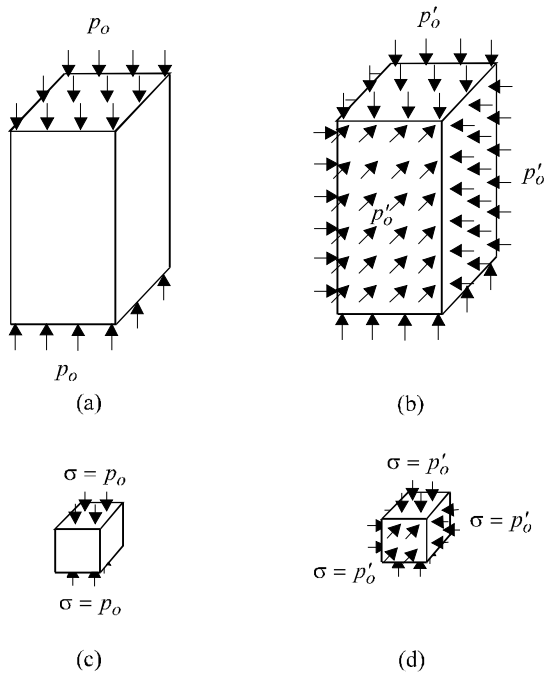


Figura 2.20

em todas as direções; apresenta, entretanto, resistência muito menor se for comprimido segundo uma única direção.

É intuitivo este comportamento: no estado de compressão simples não existem tensões nos planos verticais impedindo a desagregação do material; no estado hidrostático de compressão há um confinamento, existindo tensões nos planos verticais que impedem a desagregação do material por efeito da compressão vertical.

Este exemplo evidencia, portanto, que a resistência do material de fato se liga ao estado de tensão em que ele se encontra.

Capítulo 3

Esforços Solicitantes

A Resistência dos Materiais estuda estruturas constituídas por barras, e, para caracterizar o estado de tensão dos pontos destas estruturas, deve-se determinar as tensões que neles atuam segundo três planos perpendiculares entre si dois a dois.

No caso das barras, um destes planos sempre é o plano da seção transversal que contém o ponto cujo estado de tensão se deseja conhecer. Por este motivo, a determinação das tensões nas seções transversais das barras é um dos principais temas estudados pela Resistência dos Materiais.

Para compreender o que são os esforços solicitantes na seção transversal de uma barra, considere-se a Figura 3.1, em que se indica uma barra genérica submetida aos esforços externos ativos $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, equilibrados pelas reações de vínculo $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ (Figura 3.2). Estas figuras são a particularização das Figuras 2.2 e 2.3 para o caso de uma barra.

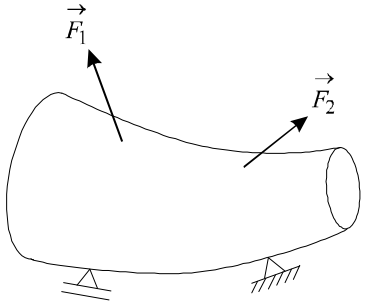


Figura 3.1

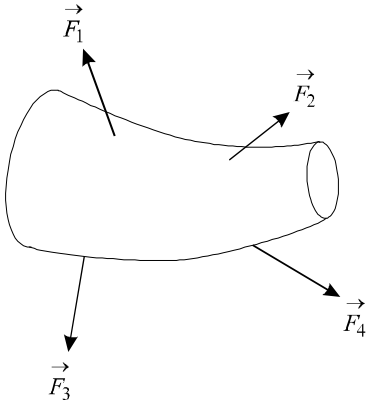


Figura 3.2

É claro que tudo o que se disse na seção anterior para um sólido genérico vale para a barra. Para obter as tensões que atuam em uma seção transversal genérica (plano α da Figura 3.3), deve-se supor a barra separada em duas partes por um corte segundo esta seção transversal, e determinar as forças distribuídas que atuam na seção de corte e equilibram cada uma das partes da barra (Figura 3.4).

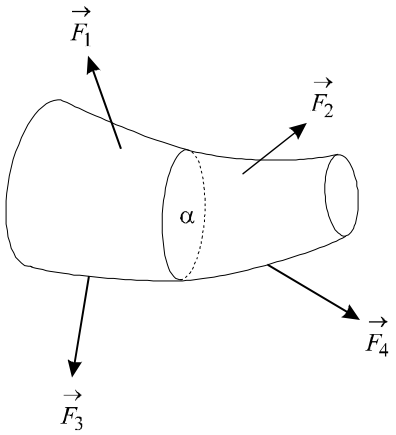


Figura 3.3

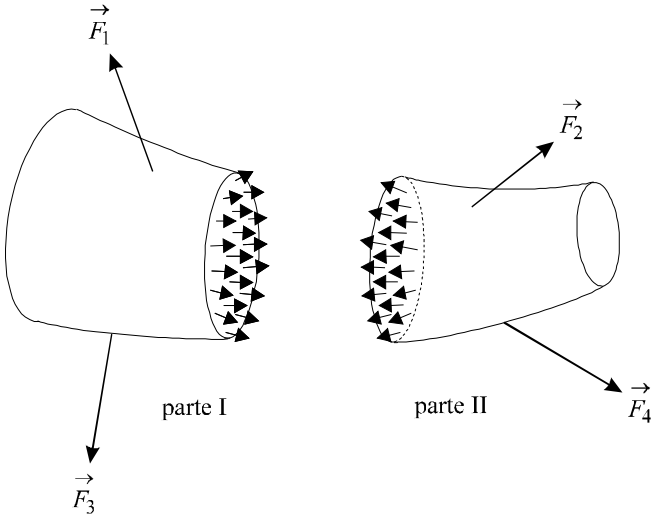


Figura 3.4

Como já se mencionou, a obtenção direta das tensões indicadas na Figura 3.4 não é simples, e a Resistência dos Materiais as calcula de maneira indireta, por intermédio dos esforços solicitantes.

Os esforços solicitantes são os esforços obtidos pela redução das tensões no centro de gravidade da seção transversal em que atuam.

Como se sabe, a redução das tensões em G consiste em aplicar neste ponto dois esforços: a resultante $\vec{\mathcal{R}}$ das tensões e o momento $\vec{\mathcal{M}}$ que as tensões têm em relação a G.

Na Figura 3.5 estão representados os esforços solicitantes determinados para as partes I e II da barra.

Pelo princípio da ação e reação sabe-se que as tensões em pontos correspondentes da parte I e da parte II são iguais em intensidade e direção, mas opostas em sentido; como consequência, os esforços solicitantes que agem na parte I e na parte II também são iguais em intensidade e direção, mas opostos em sentido.
Isto já era esperado, pois os esforços solicitantes que atuam na parte I "representam" a ação que a parte II exerce sobre a parte I; da mesma forma, os esforços solicitantes que atuam na parte II "representam" a ação que a parte I exerce sobre a parte II. Estas ações de uma parte da barra sobre a outra obviamente são iguais em intensidade e direção, mas opostas em sentido.

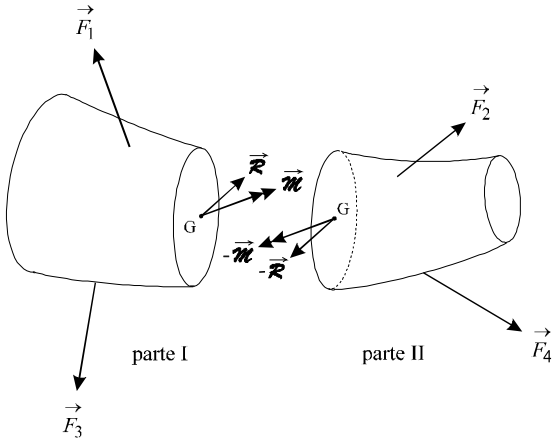


Figura 3.5

Na frase acima o termo "representam" foi colocado entre aspas para deixar bem claro o seguinte: a ação que uma parte da barra exerce sobre a outra é de fato representada pelas tensões, isto é, pelas forças distribuídas que atuam nos pontos da seção transversal, e não pelos esforços solicitantes, que são esforços concentrados. Não agem de fato na seção transversal da barra a força concentrada e o momento concentrado indicados na Figura 3.5; são as tensões da Figura 3.4 que efetivamente atuam nos pontos da seção em que se fez o corte. Como os esforços solicitantes decorrem das tensões, num abuso de linguagem pode-se dizer que eles "representam" a ação que uma parte da barra exerce sobre a outra. É neste sentido que se deve entender o uso do termo "representam" naquela frase.

A redução de um sistema de esforços em um ponto leva a uma força e a um momento mecanicamente equivalentes ao sistema que foi reduzido. Os esforços que atuam na parte I da barra nas Figuras 3.4 e 3.5 são, portanto, mecanicamente equivalentes; o mesmo pode-se dizer dos esforços que atuam na parte II da barra nas Figuras 3.4 e 3.5.

Como as duas partes da barra estão em equilíbrio sob a ação dos esforços indicados na Figura 3.4, conclui-se então que os esforços externos $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ e os esforços solicitantes $\vec{\mathcal{R}}$ e $\vec{\mathcal{M}}$ aplicados na parte I estão em equilíbrio; da mesma forma, os esforços externos $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ e os esforços solicitantes $-\vec{\mathcal{R}}$ e $-\vec{\mathcal{M}}$ aplicados na parte II também estão em equilíbrio.

É este fato que torna os esforços solicitantes tão úteis e atraentes: é muito fácil determiná-los. Uma vez conhecidos os esforços externos ativos e reativos, a determinação dos esforços solicitantes que atuam na seção transversal de uma barra pode ser feita utilizando apenas as equações de equilíbrio da estática. Eles são a força concentrada e o momento concentrado que, aplicados no centro de gravidade da seção em que se fez o corte, estabelecem o equilíbrio da parte da barra em que se aplicam. É, portanto, extremamente simples obter os esforços solicitantes a partir dos esforços externos.

Verificou-se na seção anterior que é muito importante decompor as tensões em suas componentes normal e tangencial ao plano do corte, pois estas duas componentes têm significados físicos totalmente distintos, o que torna necessário distinguí-las e quantificá-las.

De igual forma, as componentes de $\vec{\mathcal{R}}$ e de $\vec{\mathcal{M}}$ normal e tangencial à seção transversal também têm significados físicos distintos, devendo-se então determiná-las.

Na Figura 3.6 apresentam-se as decomposições de $\vec{\mathcal{R}}$ e de $\vec{\mathcal{M}}$.

Tem-se

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{N} + \vec{V} = N\,\vec{n} + V\,\vec{t}$$

e (3.1)

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{T} + \vec{M} = T\,\vec{n} + M\,\vec{t}\,'.$$

O versor $\vec{n}$ é normal à seção transversal e os vetores $\vec{t}$ e $\vec{t}\,'$ estão no plano da seção transversal.

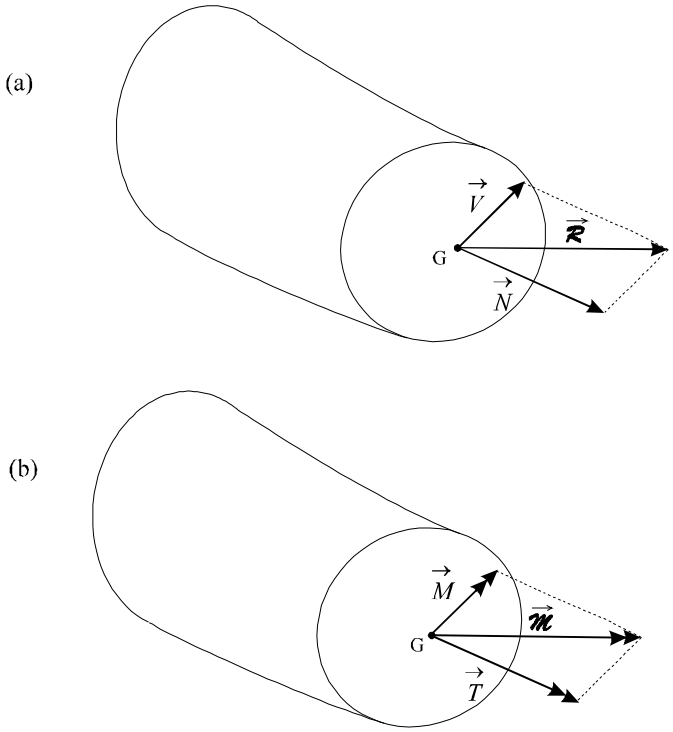


Figura 3.6

As componentes de $\vec{\mathcal{R}}$ recebem o nome de força normal ($\vec{N}$) e de força cortante ($\vec{V}$). A força normal é de tração quando tem o sentido de $\vec{n}$ e de compressão quando tem o sentido de $-\vec{n}$. A força cortante não recebe nenhum qualificativo especial, quaisquer que sejam sua direção e seu sentido.

Fisicamente, como se disse, estas forças têm significados distintos: a força normal está ligada ao alongamento – quando de tração – ou ao encurtamento – quando de compressão – da barra. Já a força cortante está relacionada ao escorregamento das seções transversais, umas sobre as outras (Figura 3.9(c)). Este tipo de deformação recebe o nome de distorção.

Na seção anterior mencionou-se uma experiência em que um pedaço de giz era puxado em suas extremidades pelas mãos de uma pessoa (Figura 3.7). Tem-se então forças normais de tração em todas as seções transversais do giz, e ele se alonga.

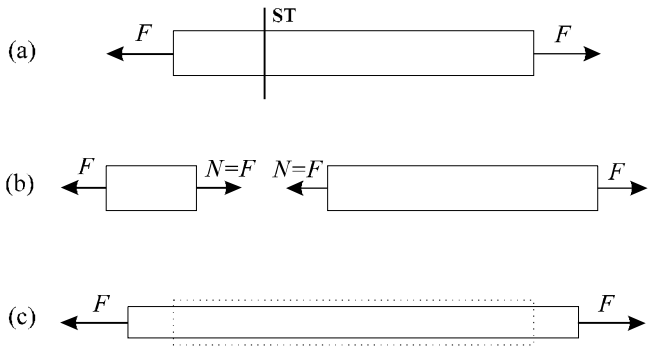


Figura 3.7

Na Figura 3.7 indicam-se o carregamento externo que age no giz (Figura 3.7(a)) e as forças normais que atuam nas duas partes em que se supõe separado o giz por um corte segundo uma seção transversal genérica (Figura 3.7(b)). Indica-se também a deformação do giz (Figura 3.7(c)).

Observa-se que na Figura 3.7 a direção e o sentido das forças estão indicados pelas flechas e a intensidade, pelas letras *F* e *N*.

Quando, em lugar de ser puxado, o giz é empurrado pelas duas mãos (Figura 3.8), passa-se a ter forças normais de compressão em todas as suas seções transversais, e o giz se encurta.

Se, com uma tesoura, se tentar cortar o pedaço de giz segundo uma de suas seções transversais, se terá na seção do corte uma força cortante (Figura 3.9).

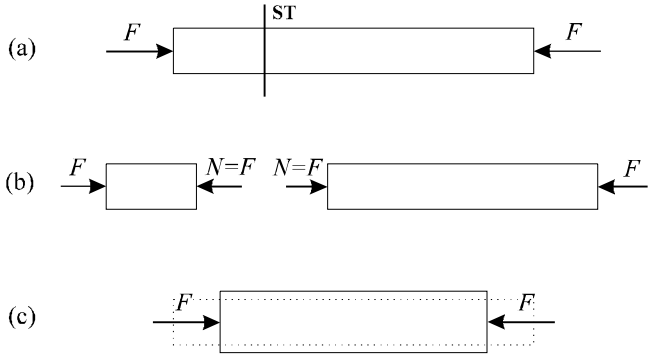


Figura 3.8

As componentes de $\vec{\mathcal{M}}$ recebem o nome de momento de torção ($\vec{T}$) e momento fletor ($\vec{M}$).

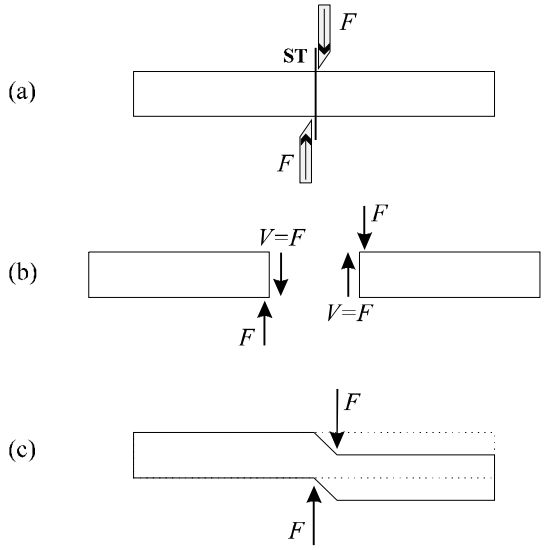


Figura 3.9

Fisicamente, o momento de torção está ligado à torção da barra, causada pela rotação das seções transversais em torno do eixo da barra (Figura 3.10). Quando uma lavadeira torce uma toalha com as mãos, ela o faz mediante a aplicação de momentos de torção nas duas extremidades da toalha.

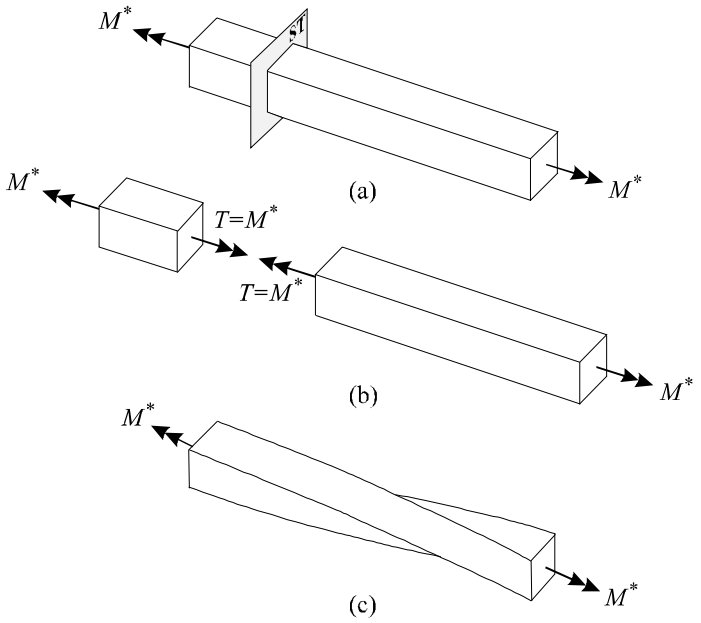


Figura 3.10

O momento fletor está ligado à flexão da barra, isto é, ao encurvamento do eixo da barra (Figura 3.11). Esta flexão é causada por rotações das seções transversais em torno de eixos situados no próprio plano da seção transversal.

Após esta apresentação das quatro componentes dos esforços solicitantes fica clara a origem dos seus nomes: a força normal é normal à seção transversal da barra, a força cortante está ligada ao corte da barra, o momento de torção, à torção da barra e o momento fletor, à flexão da barra.

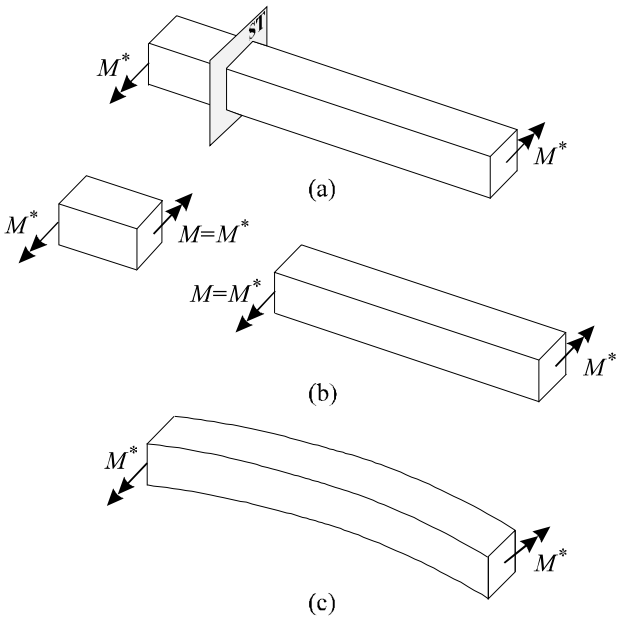


Figura 3.11

Como as componentes de $\vec{\mathcal{R}}$ e de $\vec{\mathcal{M}}$ têm significados físicos completamente distintos, é fundamental determiná-las. Não existe sentido em se falar apenas em $\vec{\mathcal{R}}$ e em $\vec{\mathcal{M}}$: é necessário conhecer isoladamente $\vec{N}$, $\vec{V}$, $\vec{T}$ e $\vec{M}$. Por esta razão, a partir de agora, quando se fizer menção a esforços solicitantes em uma seção transversal de uma barra, claramente se estará fazendo referência a $\vec{N}$, $\vec{V}$, $\vec{T}$ e $\vec{M}$, e não simplesmente a $\vec{\mathcal{R}}$ e a $\vec{\mathcal{M}}$.

Quando se carrega uma estrutura, as tensões (e consequentemente os esforços solicitantes) e as deformações surgem simultaneamente na estrutura. As tensões (e os esforços solicitantes) sempre coexistem com as deformações. Apesar disso, é muito comum dizer-se, por exemplo, "uma barra submetida a momentos fletores se encurva" ou então "uma barra submetida a forças normais de tração se alonga". No fundo, o que se está dizendo é que "uma barra em que há momentos fletores encontra-se encurvada" ou então que "uma barra em que há forças normais de tração encontra-se alongada". Na linguagem corrente, entretanto, transmite-se a sensação de que a deformação decorre dos esforços solicitantes, o que, contudo, não é verdade.

Os esforços solicitantes foram definidos a partir das tensões que atuam na seção transversal de uma barra: eles são os esforços decorrentes da redução dessas tensões no centro de gravidade da seção. Esta definição permite que os esforços solicitantes sejam facilmente determinados a partir das tensões. É o que se fará a seguir.

Na Figura 3.12 estão indicadas as componentes da tensão $\vec{\rho}$ em um ponto genérico P da seção transversal de uma barra.

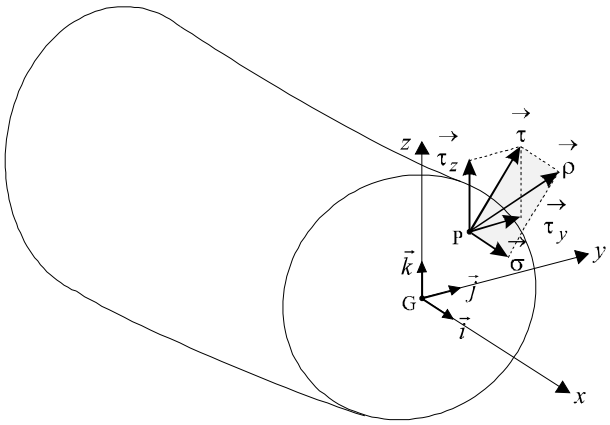


Figura 3.12

O eixo x é normal à seção transversal, sendo tangente ao eixo da barra em G; os eixos y e z se situam na seção transversal da barra.

Tem-se

$$\begin{aligned}\vec{\rho} &= \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z = \\ &= \sigma\,\vec{i} + \tau_y\,\vec{j} + \tau_z\,\vec{k}\,,\end{aligned} \tag{3.2}$$

tendo-se decomposto a tensão de cisalhamento $\vec{\tau}$ em suas componentes $\vec{\tau}_y$ e $\vec{\tau}_z$, respectivamente paralelas aos eixos y e z.

Em um elemento infinitesimal dA da seção transversal tomado em torno de P atuam então as tensões $\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}_y$ e $\vec{\tau}_z$, logo agem neste elemento as forças $\vec{\sigma}\,\mathrm{dA}$, $\vec{\tau}_y\,\mathrm{dA}$ e $\vec{\tau}_z\,\mathrm{dA}$, como se indica na Figura 3.13. É a redução destas forças em G que leva aos esforços solicitantes.

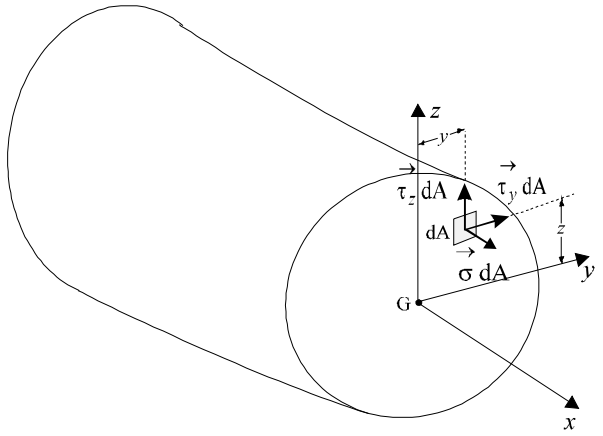


Figura 3.13

Para se chegar às expressões que ligam os esforços solicitantes às tensões deve-se decompor os esforços solicitantes em suas componentes segundo os eixos *x*, *y* e *z*, como se mostra na Figura 3.14, em que se apresentam as decomposições de $\vec{\mathcal{R}}$ (Figura 3.14(a)) e de $\vec{\mathcal{M}}$ (Figura 3.14(b)). Nota-se que nestas figuras tanto a força cortante $\vec{V}$ como o momento fletor $\vec{M}$ foram decompostos em suas componentes segundo os eixos *y* e *z*.
Tem-se então

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{R}} &= \vec{N}+\vec{V} = \vec{N}+\vec{V}_y+\vec{V}_z = \\ &= N\,\vec{i}+V_y\,\vec{j}+V_z\,\vec{k}\end{aligned} \tag{3.3}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= \vec{T}+\vec{M} = \vec{T}+\vec{M}_y+\vec{M}_z = \\ &= T\,\vec{i}+M_y\,\vec{j}+M_z\,\vec{k}\ .\end{aligned} \tag{3.4}$$

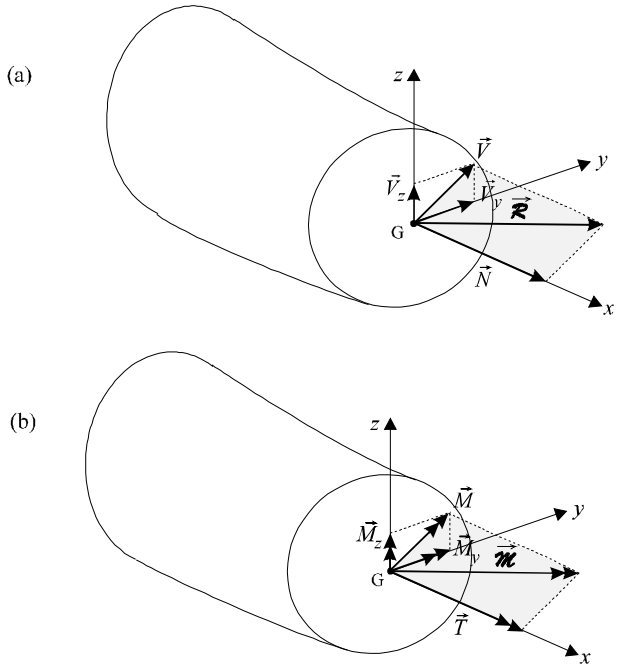


Figura 3.14

Observando as Figuras 3.13 e 3.14, e relembrando mais uma vez que os esforços solicitantes são obtidos pela redução das forças $\vec{\sigma}\,\mathrm{dA}$, $\vec{\tau}_y\,\mathrm{dA}$ e $\vec{\tau}_z\,\mathrm{dA}$ em G, chega-se facilmente às relações entre as seis componentes dos esforços solicitantes e as três componentes das tensões:

$$N = \int_A \sigma\,\mathrm{dA} \tag{3.5}$$

$$V_y = \int_A \tau_y\,\mathrm{dA} \tag{3.6}$$

$$V_z = \int_A \tau_z\,\mathrm{dA} \tag{3.7}$$

$$T = \int_A (\tau_z\,y - \tau_y\,z)\,\mathrm{dA} \tag{3.8}$$

$$M_y = \int_A \sigma\,z\,\mathrm{dA} \tag{3.9}$$

$$M_z = -\int_A \sigma\,y\,\mathrm{dA} \tag{3.10}$$

Verifica-se que as forças $-N$, V_y e V_z – nada mais são que as resultantes das tensões a elas paralelas e que os momentos $-T$, M_y e M_z – nada mais são que os momentos das tensões em relação aos eixos *x*, *y* e *z*. Nas expressões (3.8) a (3.10) estes momentos são considerados positivos quando têm os sentidos dos eixos.

Como se acaba de mostrar, conhecidas as tensões, a determinação dos esforços solicitantes é imediata. Passar das tensões aos esforços solicitantes é muito simples. Infelizmente, entretanto, não é este o problema que se tem para resolver. O que se procura é exatamente o contrário: conhecidos os esforços solicitantes na seção transversal de uma barra, quais as tensões a eles associadas, quais as tensões que os originam? Responder esta indagação é um dos principais objetivos da Resistência dos Materiais, como se verá na sequência do curso.

Capítulo 4

Teorema Fundamental

Neste capítulo se examinará o teorema fundamental da estática das construções, também conhecido como teorema do corte, que se constitui na forma mais simples, rápida e segura de determinar os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra.

Apresenta-se inicialmente o enunciado do teorema; mais adiante se verá sua demonstração.

Teorema fundamental: enunciado

Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade ou todos os esforços externos aplicados de um lado do corte ou então todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.

Para facilitar a compreensão deste enunciado se exemplificará agora o uso do teorema fundamental, mostrando como empregá-lo para determinar os esforços solicitantes que atuam na seção transversal *S* da barra da Figura 4.1.

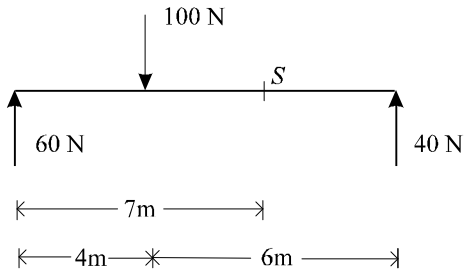


Figura 4.1

De acordo com o teorema fundamental, os esforços solicitantes em *S* podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo em seu centro de gravidade G ou os esforços externos aplicados à direita do corte ou então os esforços externos aplicados à esquerda do corte.

Na Figura 4.2 representa-se a barra já cortada em *S* e os esforços aplicados à direita (Figura 4.2(a)) e à esquerda (Figura 4.2(b)) do corte.

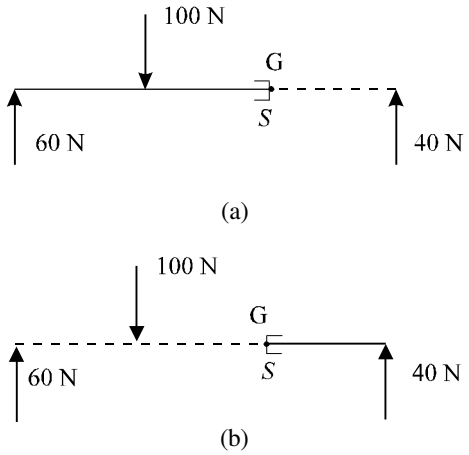


Figura 4.2

A redução em G dos esforços externos aplicados à direita do corte leva aos esforços representados na Figura 4.3(a); a redução em G dos esforços externos aplicados à esquerda do corte, aos esforços representados na Figura 4.3(b).

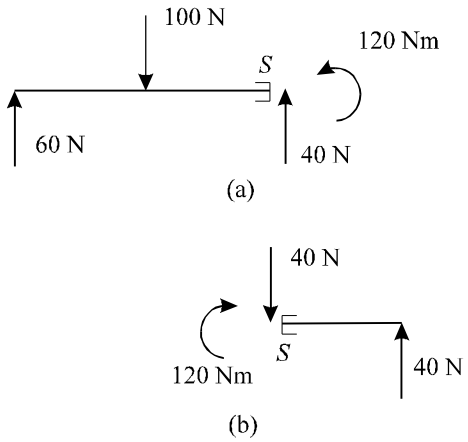


Figura 4.3

Os esforços solicitantes na seção *S* são os indicados nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b). Em ambas as figuras atua em *S* uma força cortante de 40 N, tendendo a girar o trecho de barra em que se aplica no sentido anti-horário. Também se tem nas duas Figuras um momento fletor de 120 Nm, tracionando as fibras inferiores da barra.

Observa-se na Figura 4.3 que os esforços solicitantes que atuam nos dois lados da barra cortada segundo *S* são iguais em intensidade, mas com sentidos opostos.

Esta propriedade é geral, e decorre do princípio da ação e reação: os esforços solicitantes que atuam nas duas partes em que fica dividida uma barra cortada segundo uma seção transversal são iguais em intensidade, mas opostos em sentido.

Conhecer os esforços solicitantes que atuam de um lado do corte é, portanto, conhecer também os esforços solicitantes que atuam do outro lado do corte.

Por esta razão, para obter os esforços solicitantes na seção *S* da barra da Figura 4.1 basta reduzir no centro de gravidade desta seção ou todos os esforços externos aplicados a sua direita, como se fez na Figura 4.3(a), ou então todos os esforços externos aplicados a sua esquerda, como se fez na Figura 4.3(b). Não é preciso fazer ambas as reduções, pois conhecidos os esforços solicitantes de um lado conhecem-se também os do outro lado. Por este motivo, ao se determinar os esforços solicitantes em uma seção transversal, deve-se optar pela redução de esforços menos trabalhosa e menos sujeita a erros. No caso ilustrado nas Figuras 4.2 e 4.3, é mais simples reduzir em G os esforços externos aplicados à direita do corte - uma única força concentrada - que os esforços externos aplicados à esquerda do corte - duas forças concentradas.

Examinado o enunciado do teorema fundamental, passa-se agora a sua demonstração, que será feita para o caso mais geral de um sistema tridimensional.

Teorema fundamental: demonstração

Considere-se a barra da Figura 4.4, em equilíbrio sob a ação de um sistema de forças externas ativas e reativas.

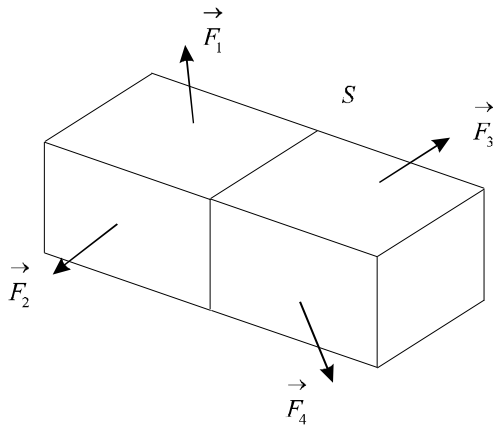
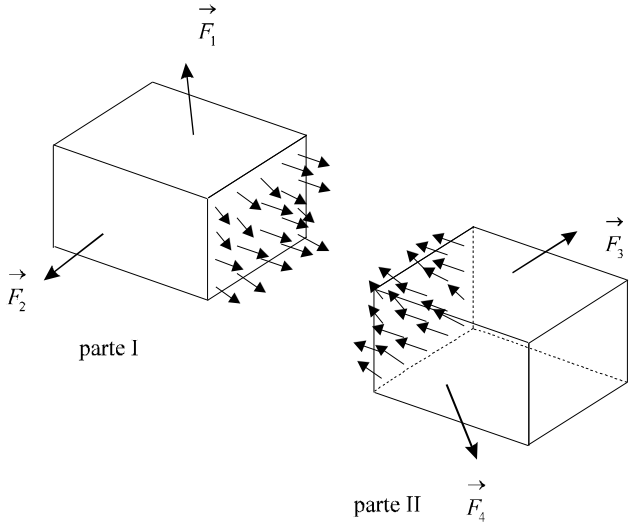
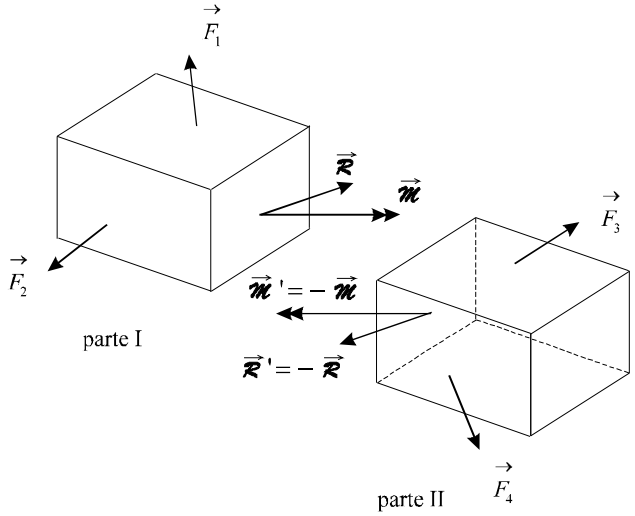


Figura 4.4

O que se deseja demonstrar é que os esforços solicitantes em uma seção transversal genérica *S* podem ser determinados cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade G ou todos os esforços externos aplicados à direita do corte ou então todos os esforços externos aplicados à esquerda do corte.



(a)



(b)

Figura 4.5

Na Figura 4.5(a) mostram-se as tensões que atuam nas duas partes da barra cortada segundo *S*; na Figura 4.5(b) mostram-se os esforços solicitantes que atuam nestas duas partes da barra, decorrentes da redução em G das tensões que atuam na seção transversal *S*.

Do princípio de ação e reação decorre que as tensões que atuam em pontos correspondentes da seção *S* nas partes I e II da barra são iguais em intensidade e direção, mas opostas em sentido. Por este motivo, os esforços solicitantes que atuam na seção *S* nestas duas partes da barra também são iguais em intensidade e direção, mas opostos em sentido, como se mostra na Figura 4.5(b).

Deve-se lembrar ainda que, conforme se viu no Capítulo 3, a parte I da barra fica em equilíbrio sob a ação dos esforços que nela atuam na Figura 4.5(b); o mesmo se pode dizer também da parte II, que fica em equilíbrio sob a ação dos esforços externos que nela atuam na Figura 4.5(b).

Imagine-se agora que se corte a barra em *S* e que se reduzam no seu centro de gravidade G os esforços externos aplicados à direita do corte como se mostra na Figura 4.6.

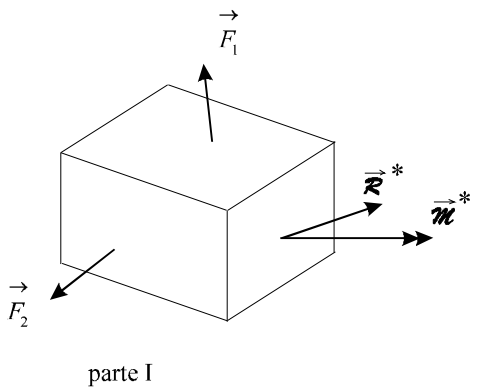


Figura 4.6

Sabe-se do Capítulo I que a redução de um sistema de esforços em um ponto leva a uma força e a um momento mecanicamente equivalentes ao sistema que foi reduzido.

Conclui-se desta propriedade que os esforços que atuam na parte I da barra indicada na Figura 4.6 estão em equilíbrio, pois eles decorrem da redução dos esforços que atuam na barra da Figura 4.4, que está em equilíbrio.

O mesmo se pode dizer dos esforços decorrentes do corte da barra em *S* e da redução em G das forças externas aplicadas à esquerda do corte, mostrados na Figura 4.7.

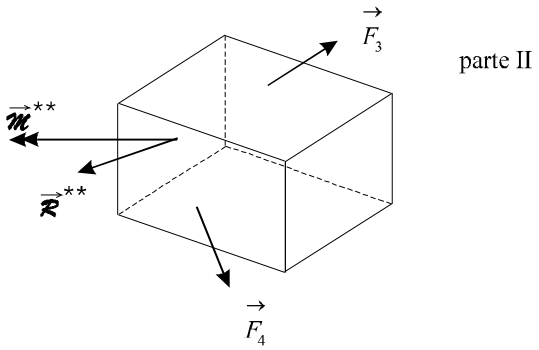


Figura 4.7

Pelas mesmas razões apontadas, os esforços que atuam na parte II da barra indicada na Figura 4.7 estão em equilíbrio.

Voltando agora ao enunciado do teorema fundamental, observa-se que para demonstrá-lo basta provar que se tem

$$\vec{\mathcal{R}}^{\,*} = \vec{\mathcal{R}} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathcal{M}}^{\,*} = \vec{\mathcal{M}}, \tag{4.1}$$

e ainda que

$$\vec{\mathcal{R}}^{\,**} = \vec{\mathcal{R}}^{\,\prime} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathcal{M}}^{\,**} = \vec{\mathcal{M}}^{\,\prime}. \tag{4.2}$$

Esta prova é bastante fácil.

Comparem-se as partes I da barra mostradas nas Figuras 4.5(b) e 4.6. Como ambas estão em equilíbrio, conclui-se que se tem

$$\vec{\mathcal{R}}^{\,*} = \vec{\mathcal{R}}$$

e (4.3)

$$\vec{\mathcal{M}}^{\,*} = \vec{\mathcal{M}}.$$

De forma análoga, pela comparação das partes II da barra mostradas nas Figuras 4.5(b) e 4.7, conclui-se que se tem

$$\vec{\mathcal{R}}^{\,**} = \vec{\mathcal{R}}^{\,\prime} = -\vec{\mathcal{R}} = -\vec{\mathcal{R}}^{\,*}$$

e (4.4)

$$\vec{\mathcal{M}}^{\,**} = \vec{\mathcal{M}}^{\,\prime} = -\vec{\mathcal{M}} = -\vec{\mathcal{M}}^{\,*}$$

demonstrando-se assim que de fato pelo corte da barra em *S* e redução em G de todos os esforços externos aplicados à direita do corte ou então de todos os esforços externos aplicados à esquerda do corte se obtém os esforços solicitantes que atuam nessa seção, ficando então demonstrado o teorema fundamental. ✪

Examinado o teorema fundamental, apresenta-se agora mais um exemplo de sua aplicação.

<u>Exemplo 4.1</u>

Determinar os esforços solicitantes que atuam na seção *S* da viga poligonal da Figura 4.8(a).

A determinação dos esforços solicitantes na seção *S* será feita por meio do teorema fundamental, cortando-se a barra em *S* e reduzindo no seu centro de gravidade ou todos os esforços externos aplicados à direita do corte ou então todos os esforços externos aplicados à esquerda do corte.

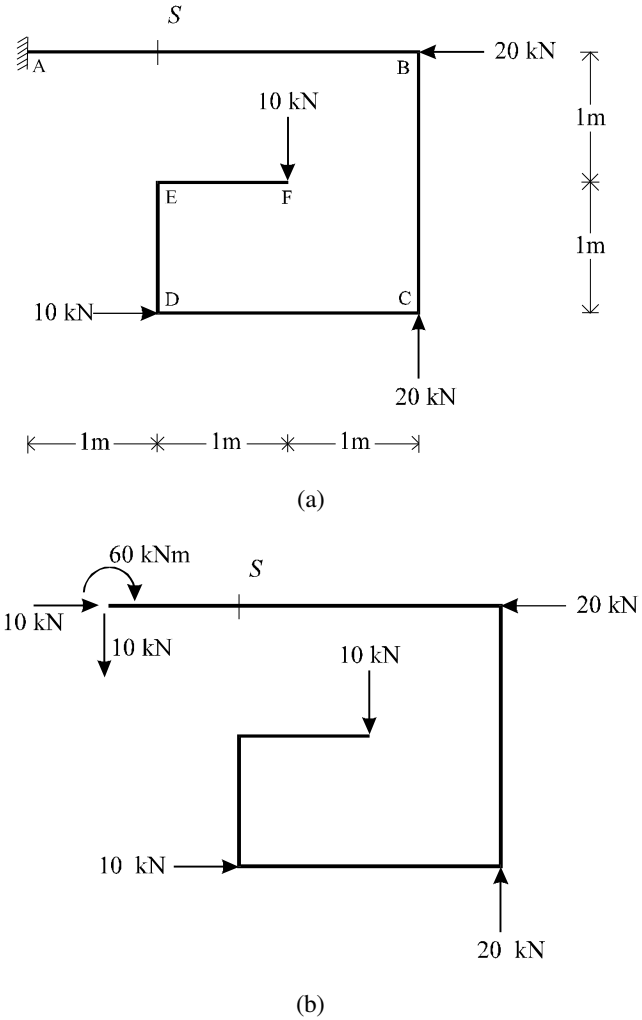


Figura 4.8

Observa-se que os esforços externos aplicados à direita do corte são conhecidos; já os esforços externos aplicados à esquerda do corte são as reações introduzidas na estrutura pelo engastamento, que precisam ser determinadas. Estas reações já foram obtidas no Exemplo 1.10 do Capítulo I, e estão indicadas na Figura 4.8(b).

Passa-se agora ao emprego do teorema fundamental.

Inicialmente serão obtidos os esforços solicitantes que atuam no trecho da viga à esquerda do corte.

Na Figura 4.9(a) representa-se a viga cortada segundo *S*, desenhando-se o trecho da viga à esquerda do corte com linha cheia e o trecho da viga à direita do corte com linha tracejada.

A redução dos esforços externos aplicados à direita do corte no centro de gravidade da seção *S* leva aos esforços solicitantes que atuam nessa seção, indicados de forma detalhada na Figura 4.9(b) e de forma concisa na Figura 4.9(c).

Observa-se nesta figura que se tem como esforços solicitantes em *S* uma força normal de compressão de 10 kN, uma força cortante de 10 kN girando o trecho de viga em que se aplica no sentido anti-horário e um momento fletor de 50 kNm tracionando as fibras inferiores da barra.

Determinam-se agora os esforços solicitantes que atuam no trecho da viga à direita do corte.

Na Figura 4.10(a) indica-se a viga cortada segundo *S*, desenhando-se com linha cheia o trecho da viga à direita do corte e com linha tracejada o trecho da viga à esquerda do corte.

A redução dos esforços externos aplicados à esquerda do corte no centro de gravidade da seção *S* leva aos esforços solicitantes que atuam nesta seção, indicados de forma detalhada na Figura 4.10(b) e de forma concisa na Figura 4.10(c).

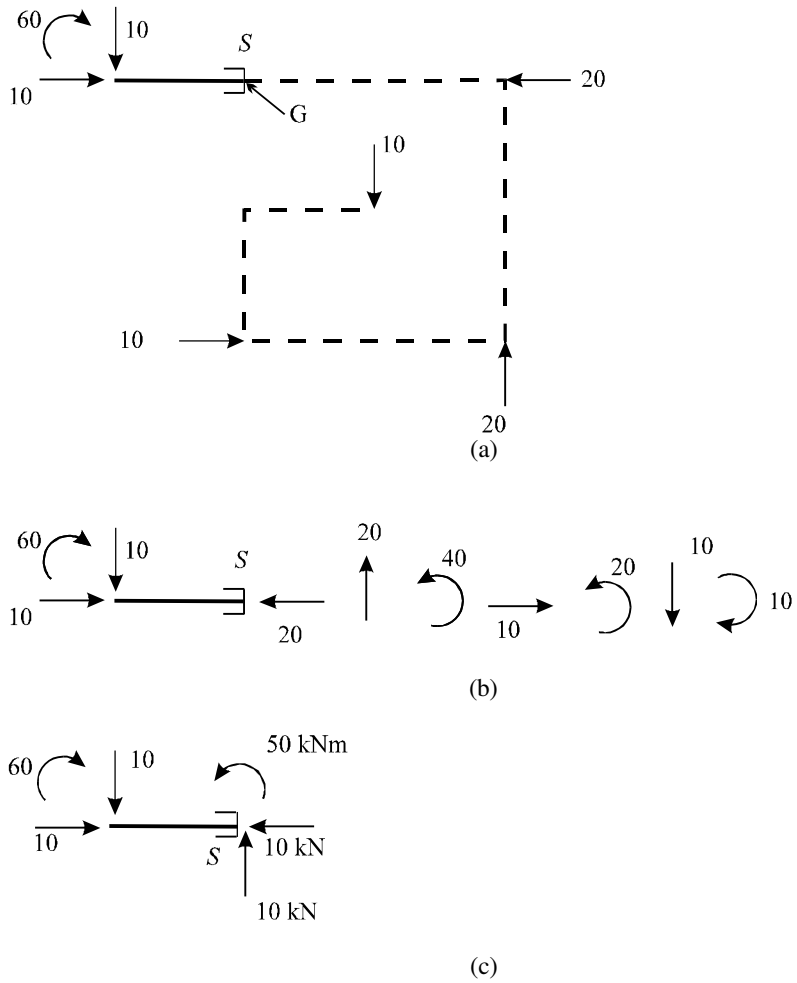
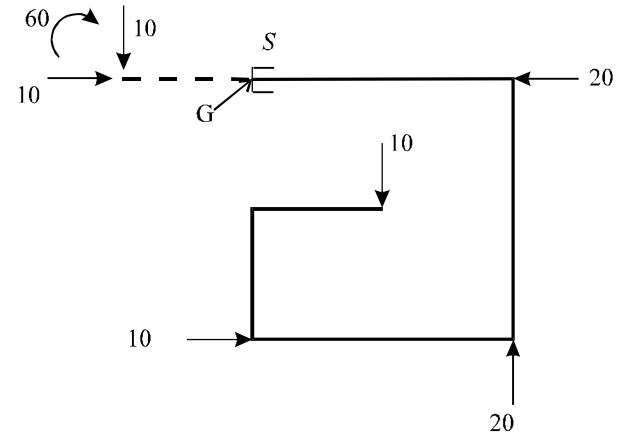
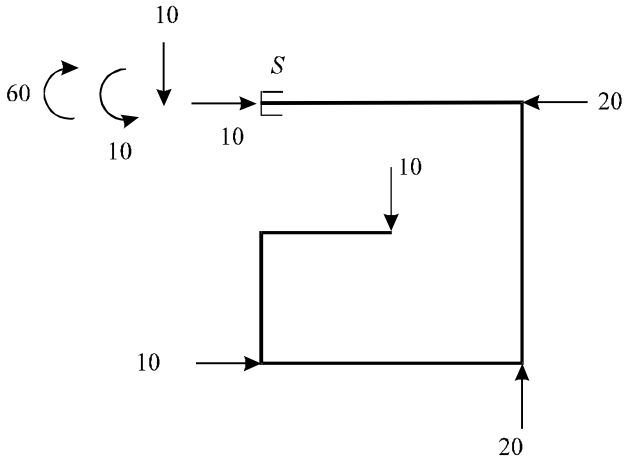


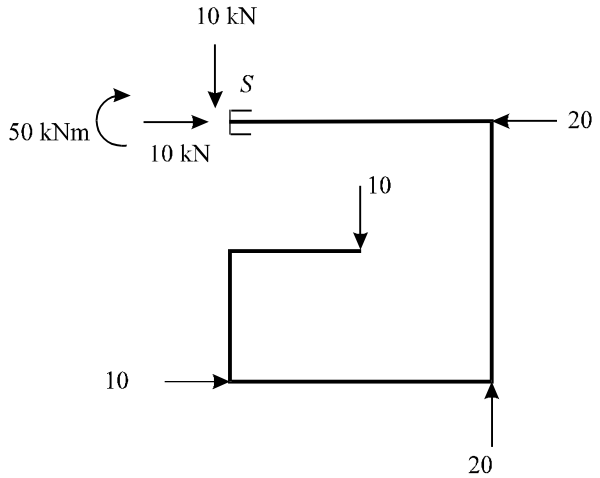
Figura 4.9



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10

Observa-se que novamente se tem na seção *S* uma força normal de compressão de 10 kN, uma força cortante de 10 kN girando o trecho de viga em que se aplica no sentido anti-horário e um momento fletor de 50 kNm tracionando as fibras inferiores da barra.

Como era esperado, os esforços solicitantes determinados nos dois lados do corte - indicados nas Figuras 4.9(c) e 4.10(c) - têm a mesma intensidade e a mesma direção, mas sentidos opostos.

No caso particular dessa seção transversal que se acaba de analisar é mais fácil e menos sujeita a erros a determinação dos esforços solicitantes mediante a redução em G dos esforços externos aplicados à direita do corte. Isto, porque todos os esforços externos aplicados à direita do corte são conhecidos, e sua redução em G pode ser feita diretamente, sem que seja necessário calcular as reações de apoio introduzidas em A pelo engastamento.

Apesar de aparentemente mais simples, por envolver um menor número de esforços a serem reduzidos, a redução em G dos esforços externos aplicados à esquerda do corte é na realidade mais sujeita a erros, pois como estes esforços são reações de apoio desconhecidas, é preciso primeiro determiná-los e depois fazer sua redução em G.

Capítulo 5

Diagramas de Esforços Solicitantes

5.1 Introdução

Considere-se a viga prismática da Figura 5.1.

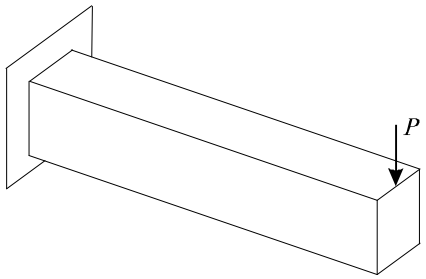


Figura 5.1

Antes de prosseguir na leitura deste texto, responda à seguinte pergunta: "*Se se aumentar continuamente o valor da carga P aplicada nesta viga, onde deverá ocorrer sua ruptura, ou seja, onde a viga irá se quebrar*?"

Muito provavelmente sua resposta terá sido: "*Bem próximo do engastamento*."

Procure agora responder a essa outra indagação: "*E por que bem próximo do engastamento*?"

Talvez sua resposta a esta segunda pergunta tenha sido: "*Porque é onde se terá os maiores esforços na viga*."

Procure, então, responder ao seguinte: "*Por que os maiores esforços nesta viga se darão junto ao engastamento*?"

Talvez agora já esteja começando a ser difícil explicar melhor um fato que intuitivamente lhe parece muito claro: que a viga deverá se romper junto ao engastamento porque é nesta região que ela estará sujeita aos maiores esforços.

Sua intuição e sua resposta estão de fato corretas. Mas por que?

A resposta da resistência dos materiais a esta pergunta é a seguinte: "*Se se aumentar continuamente a carga P aplicada na viga da Figura 5.1 ela deverá se romper junto ao engastamento, porque é onde se terá o maior momento fletor na viga e, conseqüentemente, é onde ela estará sujeita aos maiores esforços*."

Como se mostrará mais à frente, as tensões - isto é, os esforços - nos pontos de uma viga são diretamente proporcionais aos esforços solicitantes que atuam nas seções transversais que os contêm. Onde se tiver os maiores esforços solicitantes se terá as maiores tensões, ou seja, os maiores esforços.

Como o maior momento fletor nesta viga se dá junto ao engastamento, é aí que se terá as maiores tensões e, conseqüentemente, é onde se dará a ruptura da viga.

A seção mais perigosa de uma estrutura formada por barras é portanto aquela em que se tem a combinação mais desfavorável de esforços solicitantes, levando às maiores tensões na estrutura.

Para saber se uma estrutura que se está projetando resistirá ou não ao carregamento que nela irá atuar deve-se determinar sua seção mais perigosa, as tensões que irão atuar nos pontos desta seção e compará-las com as tensões limites do material que a constitui, verificando-se por meio desta comparação se a estrutura proposta irá ou não suportar o carregamento previsto[1].
A determinação da seção crítica de uma estrutura formada por barras se faz por meio dos diagramas de esforços solicitantes, que se constituem no objeto deste capítulo.

Para facilitar a compreensão do que são os diagramas de esforços solicitantes, vai-se utilizar a viga da Figura 5.1 para apresentá-los.

O sistema constituído por esta viga é plano, pois, como se observou no Capítulo I, são consideradas planas as estruturas constituídas por barras cujos eixos se situam em um plano, no qual estão também os esforços externos que nela atuam.

Na Figura 5.2 a viga é reapresentada, agora esquematizada por seu eixo.

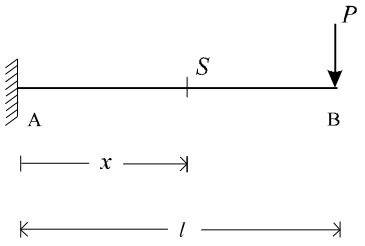


Figura 5.2

Os esforços solicitantes que atuam em uma seção genérica *S* da viga, caracterizada por sua distância *x* ao engastamento, podem ser determinados por meio do teorema fundamental.

Por simplicidade, se optará pela redução na seção do corte dos esforços externos aplicados no trecho de barra à sua direita.

Na Figura 5.3(a) indica-se o trecho da viga à esquerda do corte com linha cheia e o trecho à direita, com linha tracejada.

---

[1] Mostrou-se no Capítulo II que para saber se uma estrutura irá resistir aos esforços que deverá receber deve-se determinar os estados de tensão em seus pontos e compará-los com os estados de tensão limites do material que a constitui. Recorda-se que o estado de tensão em um ponto é o conjunto das infinitas tensões associadas aos infinitos planos que por ele passam. Não basta, portanto, comparar tensões em planos particulares com as tensões limites do material da estrutura.

Mais adiante neste curso se irá mostrar, entretanto, que no caso das estruturas reticuladas - isto é, formadas por barras - usuais, em face dos coeficientes de segurança normalmente adotados, basta calcular as tensões nas seções transversais das barras e compará-las com as tensões limites do material.

Daí poder-se, em grande numero de casos, reduzir a análise da estrutura à das tensões em suas seções transversais.

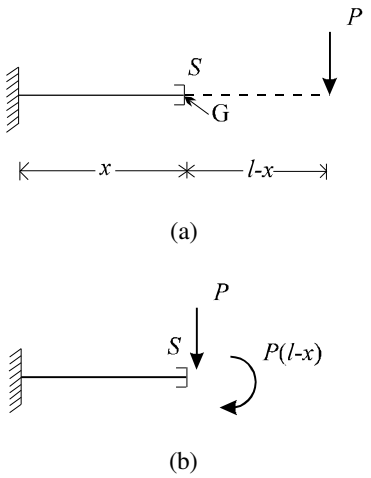


Figura 5.3

A redução em G do único esforço externo aplicado à direita do corte leva aos esforços solicitantes que atuam na seção genérica *S*: uma força cortante *P* girando o trecho de barra em que se aplica no sentido horário e um momento fletor *P*(*l*-*x*) tracionando as fibras superiores da barra.

A força cortante e o momento fletor em uma seção genérica desta viga têm portanto as seguintes equações:

$$V(x) = P$$
$$M(x) = P(l - x)\,. \tag{5.1}$$

Para chegar à seção transversal mais crítica da estrutura, deve-se analisar a variação dos esforços solicitantes ao longo da barra, e determinar em que seção transversal se tem a combinação mais desfavorável desses esforços.

A melhor forma de se fazer esta análise é através dos gráficos que mostram a variação da força cortante e do momento fletor ao longo da viga, apresentados na Figura 5.4: a variação da força cortante em (a) e do momento fletor em (b).

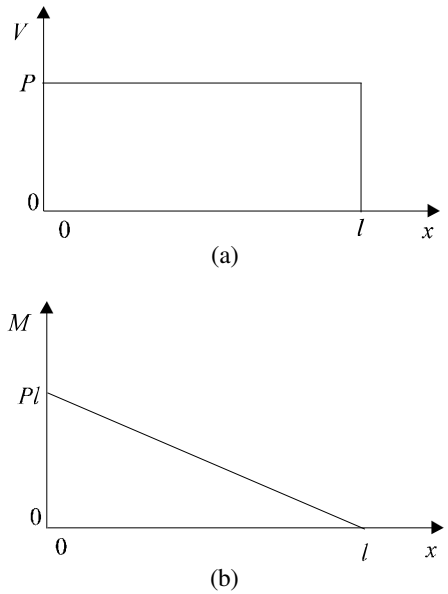


Figura 5.4

Observa-se por meio destes gráficos que a força cortante é constante ao longo da viga e que o momento fletor varia linearmente de *Pl* no engastamento a 0 na extremidade livre da viga.

Destes gráficos conclui-se com facilidade que a seção mais perigosa da viga é a do engastamento, pois é onde se tem o máximo momento fletor, que é o único esforço solicitante variável ao longo da barra.

Os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.1 ou 5.2 estão informalmente apresentados: são os diagramas da Figura 5.4.

Passa-se agora a uma definição mais formal.

Definição 5.1

Diagramas de esforços solicitantes de uma estrutura constituída por barras são diagramas em que se mostra graficamente como cada um dos esforços solicitantes varia ao longo das barras da estrutura.

Os diagramas de esforços solicitantes costumam ser apresentados como se indica na Figura 5.5, desenhando-se o esquema da estrutura, sob ele traçando-se de forma bem esquemática os gráficos da força cortante *V* e do momento fletor *M*.

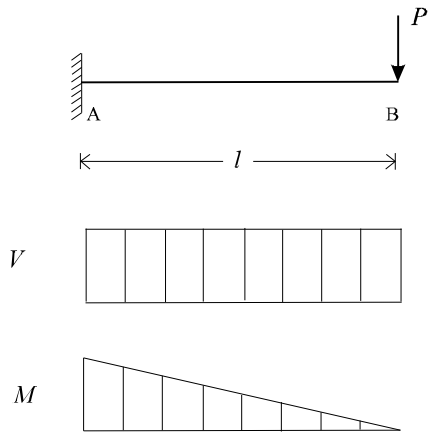


Figura 5.5

A finalidade dos traços verticais presentes nestes dois diagramas é lembrar que os valores de *V* e *M* encontram-se indicados perpendicularmente ao eixo da barra.

Como já se comentou, uma das principais finalidades dos diagramas de esforços solicitantes é permitir que se determine a seção crítica da estrutura e os esforços solicitantes que nela atuam.

Vê-se com facilidade que eles cumprem muito bem esse objetivo, pois num relance percebe-se que a seção crítica é a do engastamento e que nela atuam uma força cortante de intensidade *P* e um momento fletor de intensidade *Pl*.

Verifica-se, portanto, que os diagramas de esforços solicitantes são importantíssimos no estudo da resistência das estruturas.

Como se verá mais à frente, assim como as tensões, também os deslocamentos dos pontos de uma estrutura constituída por barras dependem dos esforços solicitantes que nelas atuam. Por esta razão, esses diagramas também terão um papel importante na determinação dos deslocamentos dos pontos de uma estrutura.

Todas estas observações permitem concluir que os diagramas de esforços solicitantes têm um papel muito destacado na engenharia de estruturas. Ao se fazer o projeto ou a verificação de uma estrutura constituída por barras tem-se sempre que traçar seus diagramas de esforços solicitantes.

É por este motivo que neste capítulo se irá estudá-los de maneira profunda e detalhada.

5.2 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

5.2.1 Convenção de sinais

Considerem-se as duas vigas da Figura 5.6.

Nas seções correspondentes destas duas vigas têm-se esforços solicitantes que, apesar de possuírem exatamente as mesmas intensidades, têm ações físicas bem distintas: na viga (a) as forças cortantes giram o trecho de viga em que se aplicam no sentido horário, enquanto que na viga (b) giram o trecho de viga em que se aplicam no sentido anti-horário; na viga (a) os momentos fletores tracionam as fibras superiores da barra, ao passo que na viga (b) tracionam as fibras inferiores.

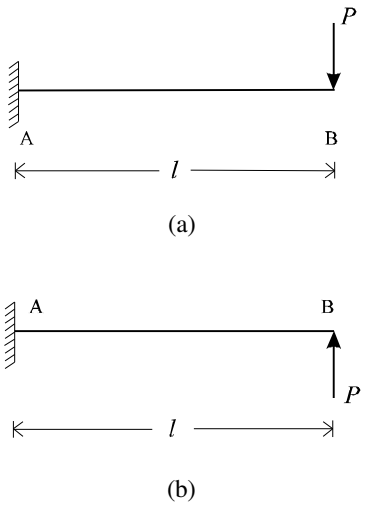


Figura 5.6

Os diagramas de esforços solicitantes destas duas vigas devem ser diferentes, pois devem retratar as diferentes ações físicas que se tem nos dois casos.

Esta identificação da ação física dos esforços solicitantes é feita mediante a atribuição de sinais a eles, conforme se apresenta na Tabela 5.1.

Os sinais dos esforços solicitantes permitem a imediata identificação de sua ação física.

Assim, se se disser que em uma seção transversal de uma barra se tem os esforços solicitantes

Convenção de sinais dos esforços solicitantes

Esforço solicitante	Sinal positivo (+)	Sinal negativo (-)
Força normal	Tração	Compressão
Força cortante	Gira o trecho de barra em que atua no sentido horário	Gira o trecho de barra em que atua no sentido anti-horário
Momento fletor	Traciona as fibras inferiores da barra	Traciona as fibras superiores da barra
Momento de torção[2]	O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua	O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção tranversal em que atua

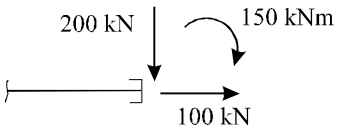
Tabela 5.1

$$N = 100 \text{ kN}$$

$$V = 200 \text{ kN} \qquad (5.2)$$

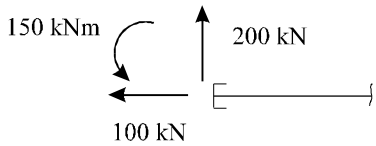
$$M = -150 \text{ kNm}$$

está-se dizendo que se tem nesta seção uma força normal de tração de 100 kN, uma força cortante de 200 kN girando o trecho da barra em que se aplica no sentido horário e um momento fletor de 150 kNm tracionando as fibras superiores da barra.



(a)

[2] Apesar de nos sistemas planos não haver torção, está-se aproveitando a oportunidade para já apresentar a convenção de sinais destes esforços.

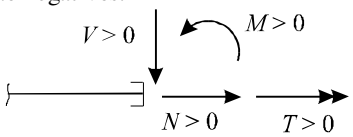


(b)

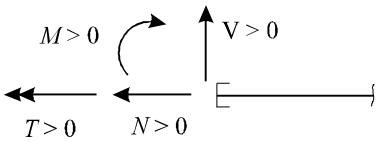
Figura 5.7

Se cortar a barra nesta seção transversal se terá dos dois lados do corte os esforços solicitantes mostrados na Figura 5.7: em (a) os esforços solicitantes à esquerda do corte, em (b), à direita do corte.

Para reforçar melhor a convenção de sinais da Tabela 5.1, apresentam-se na Figura 5.8 os dois trechos de uma estrutura espacial cortada segundo uma seção transversal em que todos os esforços solicitantes são positivos. Na Figura 5.9 faz-se o mesmo relativamente a uma barra cortada em uma seção transversal em que todos os esforços solicitantes são negativos.

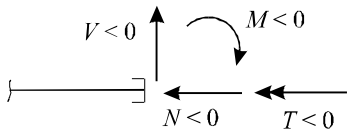


(a)

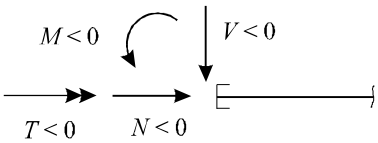


(b)

Figura 5.8



(a)



(b)

Figura 5.9

Os sinais dos esforços solicitantes devem ser considerados ao se traçar seus diagramas.
Forças normais, forças cortantes e momentos de torção positivos são indicados acima do eixo que representa a viga; os negativos, abaixo do eixo.

Além disso, nos diagramas destes esforços indica-se explicitamente seu sinal.

No caso dos momentos fletores, o critério para representá-los é outro: os diagramas são sempre desenhados no lado tracionado da barra.

Como os momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras inferiores da barra e negativos quando tracionam as fibras superiores, os momentos fletores positivos são desenhados abaixo do eixo que representa a viga e os negativos, acima do eixo. Nos diagramas de momentos fletores não se indica o seu sinal.

Na Figura 5.10 os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.6(a) estão traçados de acordo com estas regras, estando indicados explicitamente nesta figura os sistemas de eixos utilizados em seu traçado.

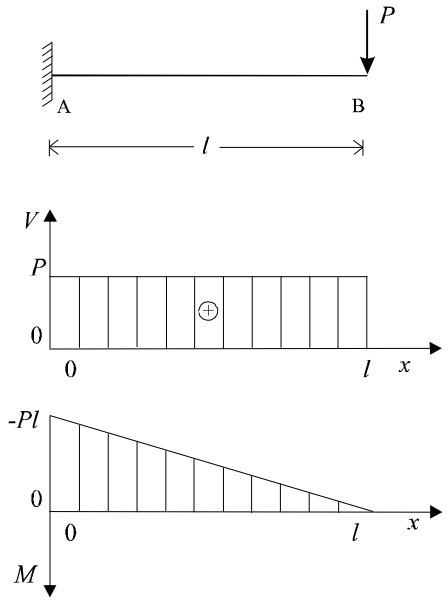


Figura 5.10

Na prática, omitem-se os eixos de referência, ficando os diagramas com o aspecto final mostrado na Figura 5.11.

No caso da viga da Figura 5.6(b), os diagramas de esforços solicitantes são os da Figura 5.12.

Os diagramas das Figuras 5.11 e 5.12 informam claramente quais são as intensidades dos esforços solicitantes e quais são suas ações físicas.

Como já se mencionou, em seções correspondentes destas duas vigas em balanço tem-se esforços solicitantes de mesma intensidade, mas com ações físicas distintas, o que leva a diagramas distintos para estas duas vigas.

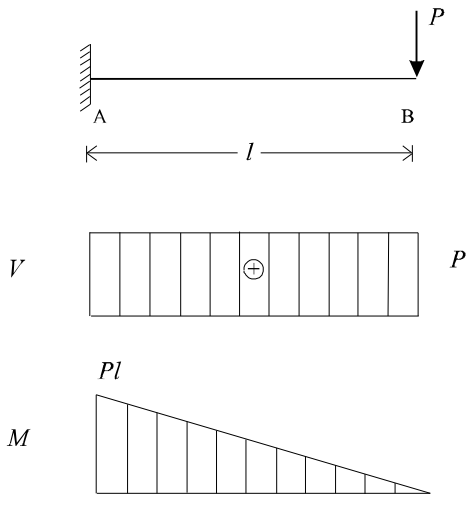


Figura 5.11

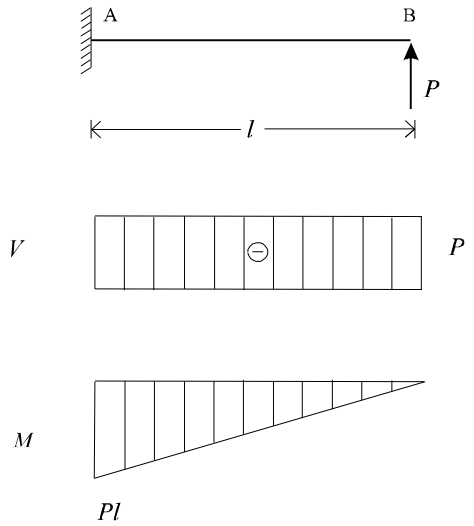


Figura 5.12

Observa-se também que a forma utilizada para representar os momentos fletores é muito eficiente: basta olhar o diagrama de momentos fletores para saber qual é o lado tracionado e qual é o lado comprimido da viga.

5.2.2 Exemplos

Serão agora apresentados vários exemplos de traçado dos diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas, cada vez mais complexas.

<u>Exemplo 5.1</u>

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.13(a).

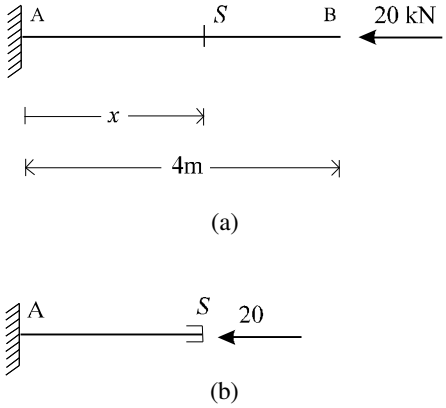


Figura 5.13

Na Figura 5.13(b) mostra-se o único esforço solicitante que atua em uma seção genérica S desta viga. Seus esforços solicitantes têm portanto as seguintes expressões analíticas:

$$\begin{aligned} N(x) &= -20 \\ V(x) &= 0 \\ M(x) &= 0 \\ T(x) &= 0\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga em balanço estão na Figura 5.14.

Nota 5.1

A viga considerada neste exemplo é uma estrutura plana. Como em estruturas planas nunca se tem momentos de torção, os diagramas de torção das estruturas planas, que serão sempre nulos, podem ser omitidos.

É o que se fará nos próximos exemplos.

Nota 5.2

Na viga examinada neste exemplo as forças cortantes e os momentos fletores são nulos em todas as suas seções tranversais. Quando isto ocorrer, estes diagramas inteiramente nulos podem ser omitidos.

É o que normalmente se fará nos próximos exemplos.

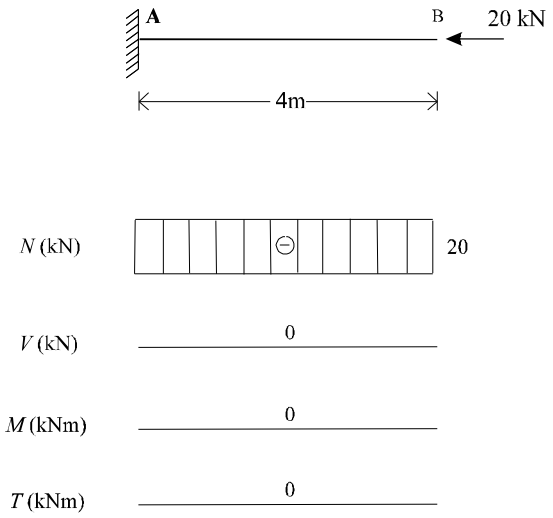


Figura 5.14

Exemplo 5.2

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.15(a).

É fácil verificar que não se tem agora os mesmos esforços solicitantes ao longo de toda a viga.

Como em B há uma força aplicada, os esforços solicitantes serão distintos nos trechos AB e BC.

Na Figura 5.15(b) mostra-se o único esforço solicitante que se tem em uma seção genérica S_2 do trecho BC; na Figura 5.15(c) mostram-se as duas componentes do único esforço solicitante que se tem em uma seção genérica S_1 do trecho AB, decorrentes da redução nesta seção dos dois esforços externos aplicados à sua direita.

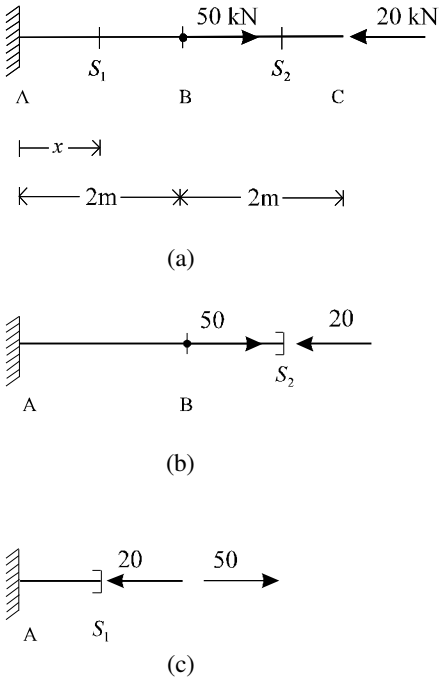


Figura 5.15

Os esforços solicitantes desta viga têm então as seguintes expressões analíticas:

• trecho AB: $0 \le x < 2\text{m}$

$$\begin{aligned} N(x) &= -20 + 50 = 30 \\ V(x) &= 0 \\ M(x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

• trecho BC: $2\text{m} < x \le 4\text{m}$

$$\begin{aligned} N(x) &= -20 \\ V(x) &= 0 \\ M(x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nota-se que estas expressões fornecem os esforços solicitantes em toda a viga, exceto no ponto B.

A determinação dos esforços solicitantes em B apresenta um problema, decorrente do fato de nele estar aplicada uma força concentrada.

Para obter os esforços solicitantes em B deve-se cortar a barra nesta seção e nela reduzir os esforços externos que estão aplicados de um dos lados do corte.

É exatamente aí que reside o problema: ao se cortar a barra em B, de que lado do corte fica aplicada a força concentrada de 50 kN? Ela claramente não se encontra aplicada nem do lado esquerdo, nem do lado direito, nem parte do lado esquerdo e parte do lado direito do corte.

Simplesmente não se consegue dizer onde está aplicada a força concentrada.

Por esta razão, não se consegue definir a força normal em B.

Os valores da força normal à esquerda e à direita do corte são, entretanto, muito bem caracterizados, tendo-se à esquerda do corte $N(B_-) = 30$ kN e à direita do corte $N(B_+) = -20$ kN .

Não é difícil ver que a indefinição da força normal não se estende à força cortante e ao momento fletor, que claramente são nulos em B.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão na Figura 5.16, devendo-se observar que de fato o ponto B está excluído do diagrama de forças normais.

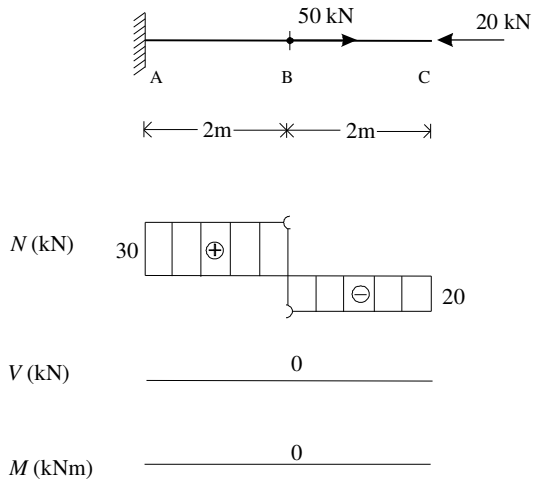


Figura 5.16

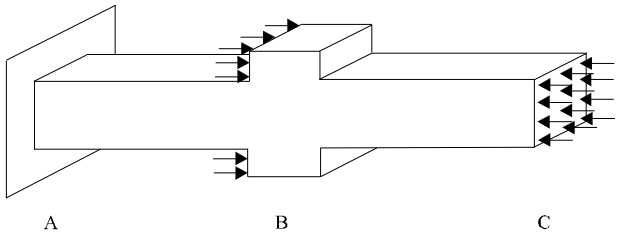
Nota 5.3

A descontinuidade no diagrama de forças normais observada na seção B decorre do modelo matemático empregado para representar esta viga, que admite a existência de uma força concentrada aplicada em B.

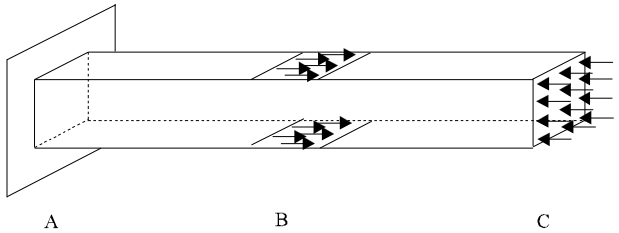
Forças concentradas não existem na natureza. Por menor que seja a região de aplicação de uma força ela será sempre distribuída, nunca concentrada.

É o fato de se admitir que uma força possa ser concentrada que leva à descontinuidade no diagrama de forças normais.

Na Figura 5.17(a) mostra-se uma viga real cujo modelo matemático poderia corresponder à viga em balanço examinada neste exemplo.



(a)



(b)

Figura 5.17

Os esforços externos ativos são aplicados nas faces de dois consolos localizados no ponto B, e na seção de extremidade livre. As forças distribuídas aplicadas nos consolos têm resultante igual a 50 kN e as aplicadas na extremidade livre, resultante igual a 20 kN.

Observa-se claramente na Figura 5.17(a) que os esforços aplicados nos consolos não são transmitidos à viga de forma concentrada, sendo transmitidos de maneira distribuída nas superfícies de contato dos consolos com a viga, como se mostra na Figura 5.17(b).

Um modelo matemático mais preciso para esta viga seria o da Figura 5.18, em que se representa com mais exatidão como os esforços externos são aplicados na viga.

No trecho em que se tem os consolos são aplicadas forças distribuídas com resultante igual à 50 kN.

Os esforços solicitantes desta viga mais exata estão apresentados na Figura 5.18, verificando-se que agora não se tem mais uma descontinuidade no diagrama de forças normais, que variam continuamente de $N = 30$ kN na face esquerda dos consolos a $N = -20$ kN na face direita.

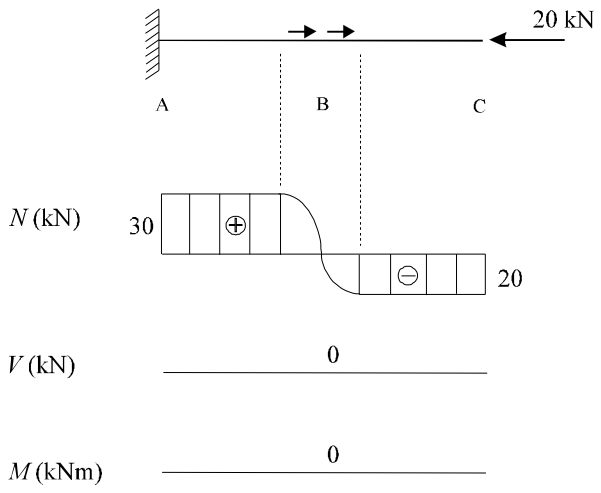


Figura 5.18

Na natureza não se tem descontinuidades, nela não ocorrem saltos. A descontinuidade observada no diagrama de forças normais da Figura 5.16 decorre exclusivamente de um defeito do modelo empregado, decorrente do fato de se substituir as forças distribuídas da natureza por sua resultante aplicada concentradamente.

Apesar de não ser o modelo matemático mais exato, é da forma considerada na Figura 5.16 que se costuma esquematizar uma viga real como a da Figura 5.17.

Comparando os diagramas das Figuras 5.16 e 5.18 verifica-se que a única diferença entre eles reside nas forças normais nas vizinhanças do ponto B.

O modelo mais exato mostra de que forma se dá a variação contínua da força normal desde o valor de 30 kN à esquerda de B ao valor de –20 kN à direita de B; já o modelo menos exato, simplesmente mostra que esta variação ocorre, sem entretanto mostrar como de fato ela se dá.

Como o trecho de viga afetado pelo defeito do modelo matemático menos exato é pequeno e como os valores extremos das forças normais neste trecho são fornecidos corretamente por ele, admite-se que, do ponto de vista de aplicação prática, o modelo matemático da Figura 5.16 seja adequado ao estudo da viga.

É importante, entretanto, que, ao utilizá-lo, se conheçam suas limitações e que se saiba claramente que nas vizinhanças de B se tem de fato uma variação contínua das forças normais de 30 kN a –20 kN.

Uma outra razão que leva a se aceitar o modelo da Figura 5.16 como sendo bom é que, embora conveniente do ponto de vista teórico, o modelo matemático da Figura 5.18 é na prática de obtenção muito difícil. As forças distribuídas que atuam nas superfícies de contato dos consolos com a viga não são constantes, distribuindo-se de forma complexa e de difícil determinação.

Uma maneira de superar essa dificuldade seria considerá-las como sendo constantes nestas superfícies, o que levaria a um modelo matemático intermediário entre os dois examinados.

Volta-se a dizer, entretanto, que não é necessário ter este trabalho, pois apenas em um trecho muito pequeno da viga o modelo matemático mais simples não fornece os esforços solicitantes exatos.

Nota 5.4

O modelo matemático mais simples não permite que se defina o valor da força normal em B, levando ao diagrama de forças normais da Figura 5.16, que mostra claramente que a força normal em B não é conhecida.

Por simplicidade, entretanto, costuma-se traçar o diagrama de forças normais como na Figura 5.19, sem mostrar explicitamente que seu valor em B não é conhecido.

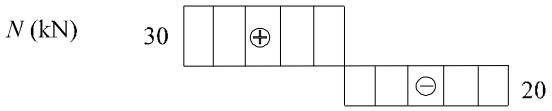


Figura 5.19

Exemplo 5.3

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.20(a).

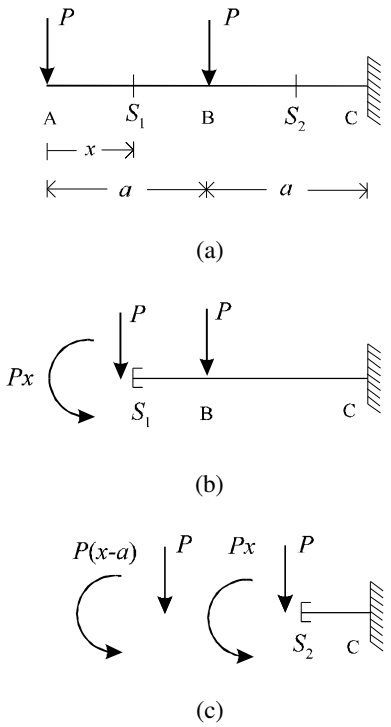


Figura 5.20

Como se tem uma força concentrada aplicada em B, os esforços solicitantes dos trechos AB e BC têm expressões algébricas distintas.

Para determiná-las, deve-se fazer dois cortes na viga, um no trecho AB e outro no trecho BC.

Na Figura 5.20(b) apresentam-se os esforços decorrentes da redução na seção S_1 da força externa aplicada à sua esquerda; na Figura 5.20(c), os esforços decorrentes da redução em S_2 das duas forças externas aplicadas a sua esquerda.

Os esforços solicitantes desta viga têm então as seguintes expressões:

• trecho AB $0 \le x < a$

$$N(x) = 0$$
$$V(x) = -P \qquad (5.6)$$
$$M(x) = -Px$$

• trecho BC $a < x \le 2a$

$$N(x) = 0$$
$$V(x) = -2P \qquad (5.7)$$
$$M(x) = -Px - P(x-a)$$

Nota-se que nestas expressões não estão definidos os esforços solicitantes em B.

O fato de se ter neste ponto uma força concentrada perpendicular ao eixo da barra impede que se consiga determinar o valor da força cortante que nele atua, por não se poder dizer de que lado do corte fica aplicada esta força quando se corta a barra em B.

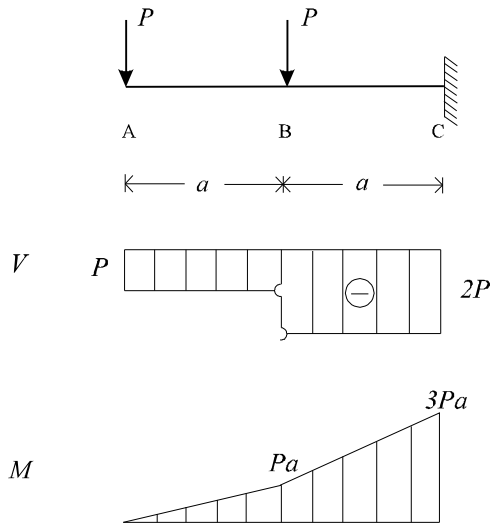


Figura 5.21

Esta indefinição não ocorre, entretanto, com a força normal, que é claramente nula em B, e com o momento fletor, que neste ponto é igual a $-Pa$.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga encontram-se traçados na Figura 5.21. Observa-se que no trecho AB o momento fletor varia linearmente de 0 a $-Pa$ e que no trecho BC varia linearmente de $-Pa$ a $-3Pa$.

<u>Nota 5.5</u>

A descontinuidade que se tem em B no diagrama de forças cortantes decorre do fato de se ter uma força concentrada aplicada neste ponto.

Novamente, este é um defeito introduzido pelo modelo matemático que está sendo empregado para representar uma viga real, na qual, como já se comentou, não ocorrem descontinuidades.

Na Figura 5.22 mostra-se uma viga real carregada em sua face superior por forças uniformemente distribuídas aplicadas próximo à extremidade livre e ao centro da viga, ambas com resultante igual a *P*.

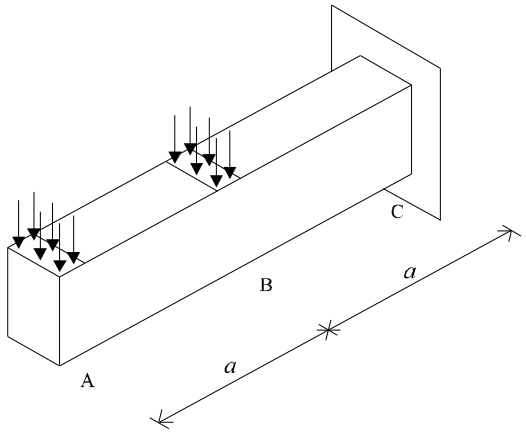


Figura 5.22

Esta viga poderia ter como modelo matemático a viga da Figura 5.20, em que se tem a descontinuidade no diagrama de forças cortantes.

Um modelo matemático mais exato para representar esta viga real é o da Figura 5.23, que leva a forças cortantes que não mais apresentam descontinuidade em B, como se observa no diagrama também apresentado na Figura 5.23.

A razão pela qual opta-se por representar a viga real da Figura 5.22 por meio do modelo matemático da Figura 5.20 é que se trata de um modelo bem simples e que leva a resultados muito próximos dos obtidos usando o modelo matemático mais exato e mais trabalhoso.

Lembra-se, entretanto, que mais uma vez é necessário saber o que se está fazendo ao utilizar o modelo matemático mais simples, tendo consciência de que a descontinuidade a que ele leva decorre de um defeito do modelo.

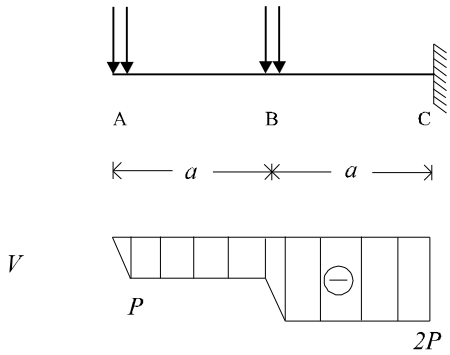


Figura 5.23

<u>Nota 5.6</u>

Das Notas 5.3 e 5.5 obtêm-se as seguintes regras gerais:

a) Uma força concentrada com a direção do eixo da barra leva a se ter no seu ponto de aplicação uma descontinuidade no diagrama de forças normais; esta descontinuidade tem módulo igual ao desta força concentrada.

b) Uma força concentrada perpendicular ao eixo da barra leva a se ter no seu ponto de aplicação uma descontinuidade no diagrama de forças cortantes; esta descontinuidade tem módulo igual ao desta força concentrada.

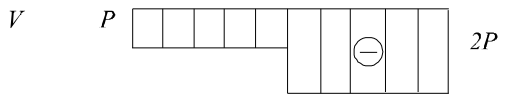


Figura 5.24

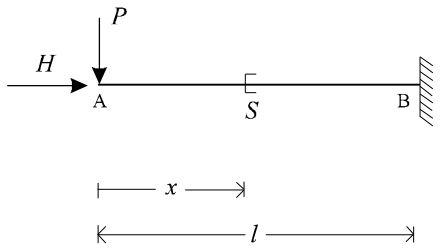
Nota 5.7

Apesar de a força cortante da Figura 5.21 não ser definida em B, habitualmente não se mostra explicitamente este fato no diagrama de forças cortantes, que costuma ter o aspecto que se vê na Figura 5.24.

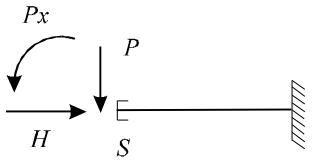
Exemplo 5.4

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.25(a).

Como nesta viga não existe nenhum esforço externo aplicado entre A e B, para determinar os esforços solicitantes basta cortá-la em uma única seção genérica *S*, como se mostra na Figura 5.25(b).



(a)



(b)

Figura 5.25

As expressões analíticas destes esforços são

$$N(x) = -H$$

$$V(x) = -P \qquad (5.8)$$

$$M(x) = -Px\,,$$

tendo-se então os diagramas de esforços solicitantes indicados na Figura 5.26.

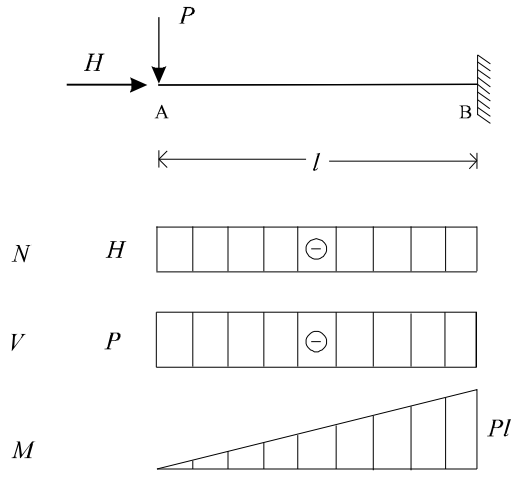


Figura 5.26

Nota 5.8

Deve-se observar que em todos estes exemplos está-se sempre considerando a viga na configuração indeformada, isto é, na configuração que apresenta antes da aplicação dos esforços externos.

Como se sabe, todos os sólidos se deformam quando submetidos a esforços externos; no caso desta viga, a configuração deformada tem o aspecto indicado na Figura 5.27.

Nota-se facilmente que os esforços solicitantes desta viga determinados para a configuração indeformada e para a configuração deformada são distintos.

Figura 5.27

Observa-se, por exemplo, que na configuração indeformada a força horizontal H não produz momentos fletores, ao passo que os produz na configuração deformada.

Para qual destas duas configurações devem ser calculados os esforços solicitantes? O mais correto é determiná-los para a configuração deformada, pois é na estrutura deformada que eles atuam.

O cálculo dos esforços solicitantes na configuração deformada, apesar de mais exato, é entretanto muito complexo. Como se verá à frente, a configuração deformada da viga depende dos momentos fletores, que, por sua vez, dependem da configuração deformada.

Esta dependência mútua entre a configuração deformada da viga e os momentos fletores que nela atuam é que dificulta a obtenção dos esforços solicitantes na estrutura deformada, exigindo que se integre uma equação diferencial para determiná-los.

Por esta razão, nos casos em que se erra muito pouco ao desprezar a deformação da viga na determinação dos esforços solicitantes, opta-se por obtê-los na configuração indeformada. É nesta situação que se enquadra a maior parte das estruturas reais.

No caso de estruturas muito flexíveis, entretanto, o erro cometido ao desprezar sua deformação passa a ser muito grande, devendo-se então levá-la em conta na determinação dos esforços solicitantes, como se mostrará em outra parte deste curso.

Tem-se, portanto, dois modelos matemáticos distintos para representar a estrutura: um em que se despreza sua deformação ao se calcular os esforços solicitantes, e outro em que ela é considerada.

Quando os dois modelos dão resultados bem próximos, opta-se pelo mais simples, que considera a estrutura indeformada, apesar de não ser o que mais se aproxima do que de fato ocorre na estrutura; quando os dois modelos dão resultados muito diferentes, opta-se pelo mais complexo, que leva em conta a deformação da estrutura, por ser aquele que consegue representar adequadamente o comportamento real da estrutura.

Na Figura 5.28 mostram-se duas vigas como a examinada neste exemplo: a da Figura 5.28(a) bastante rígida, isto é, pouco deformável, e a da Figura 5.28(b) muito flexível, isto é, muito deformável.

Do que se acaba de comentar, fica claro que na obtenção dos esforços solicitantes pode-se considerar a viga da Figura 5.28(a) na configuração indeformada, ao passo que a da Figura 5.28(b) deve ser necessariamente considerada na configuração deformada.

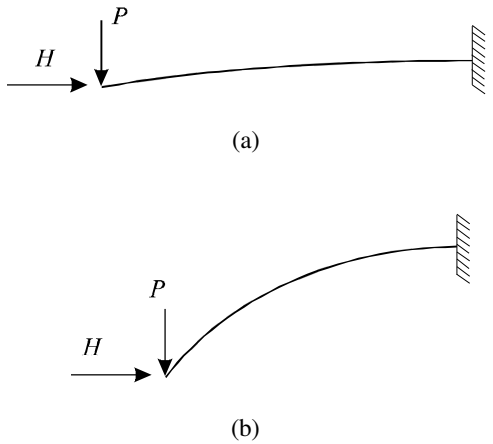


Figura 5.28

A não ser que se faça menção em contrário, neste curso sempre se utilizará o modelo matemático mais simples, em que não se leva em conta a deformação da estrutura na determinação dos esforços solicitantes.

Nota 5.9

O modelo matemático em que se despreza a deformação da estrutura ao se calcular os esforços solicitantes, além de mais simples, possui uma propriedade utilíssima: pode-se aplicar o princípio da superposição de efeitos na obtenção dos esforços solicitantes.

Considere-se novamente a viga deste exemplo. Os esforços solicitantes que nela atuam são a soma dos que se teria se nela atuasse apenas a força horizontal *H* com os que se teria se nela atuasse apenas a força vertical *P*, como se mostra na Figura 5.29.

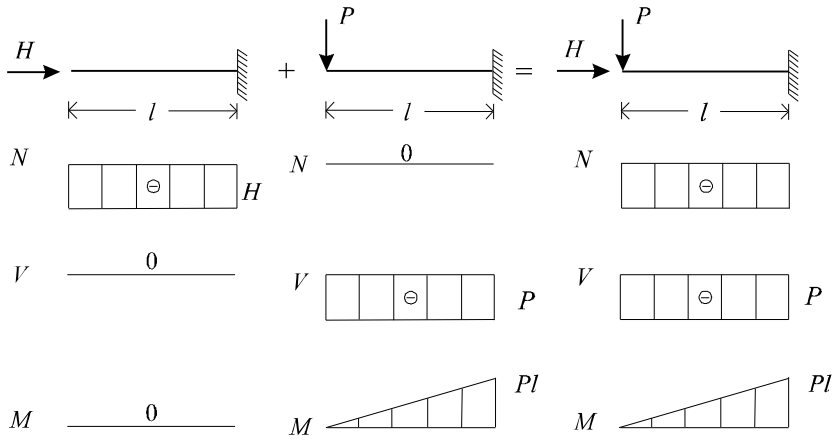


Figura 5.29

É importante notar, entretanto, que o princípio da superposição de efeitos não vale quando, na determinação dos esforços solicitantes, se leva em consideração a deformação da estrutura.

Esta mesma viga em balanço pode ser empregada para mostrar isso. Mesmo que se leve em conta a deformação da estrutura, na viga em que só atua *H* não há momentos fletores, que existem apenas na viga em que atua só *P*. O fato de não se ter momentos fletores na viga em que se tem apenas *H* mostra que o princípio da superposição de efeitos não mais se aplica, já que, quando se leva em conta a deformação da estrutura na determinação dos esforços solicitantes, na viga em que atuam *H* e *P* simultaneamente se tem momentos fletores devidos tanto a *P* como a *H*.

Exemplo 5.5

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.30.

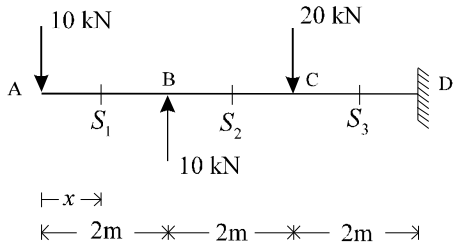


Figura 5.30

Como há forças aplicadas em B e em C, os esforços solicitantes nos trechos AB, BC e CD são dados por equações distintas, devendo-se então cortar a barra nas seções genéricas S_1, S_2 e S_3 para determiná-los.

O corte da barra em S_1, como se mostra na Figura 5.31(a), leva aos esforços solicitantes em AB:

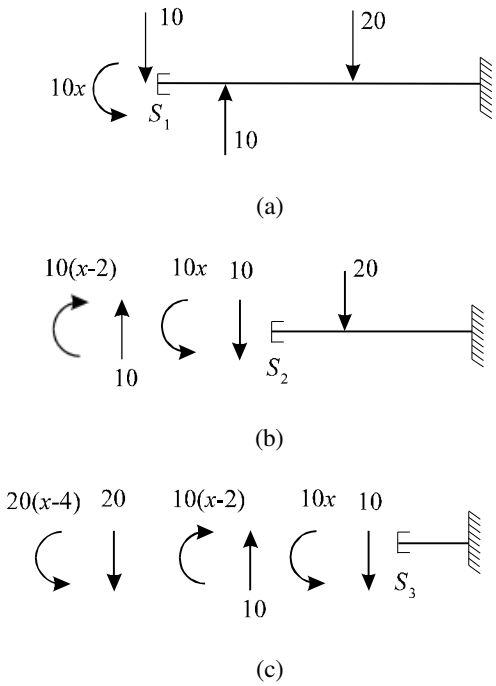


Figura 5.31

• trecho AB

$$
\begin{aligned}
&V(x) = -10, && 0 \le x < 2 \\
&M(x) = -10x, && 0 \le x \le 2 \\
&M(0) = 0 \\
&M(2) = -20
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Os esforços solcitantes em BC são determinados cortando-se a barra em S_2, como se mostra na Figura 5.31(b):

• trecho BC

$$
\begin{aligned}
&V(x) = -10 + 10 = 0, && 2 < x < 4 \\
&M(x) = -10x + 10(x-2) = -20, && 2 \le x \le 4
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Cortando a barra em S_3, obtêm-se os esforços solicitantes em CD, como se mostra na Figura 5.31(c):

• trecho CD

$$V(x) = -10 + 10 - 20 = -20, \qquad 4 < x \le 6$$

$$M(x) = -10x + 10(x-2) - 20(x-4) =$$
$$= -20x + 60, \qquad 4 \le x \le 6 \tag{5.11}$$

$$M(4) = -20$$

$$M(6) = -60$$

Na Figura 5.32 apresentam-se os diagramas de esforços solicitantes desta viga.

Exemplo 5.6

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.33.

No caso desta viga é muito fácil concluir que em suas seções transversais se tem como único esforço solicitante um momento fletor de intensidade M_0 tracionando suas fibras superiores.

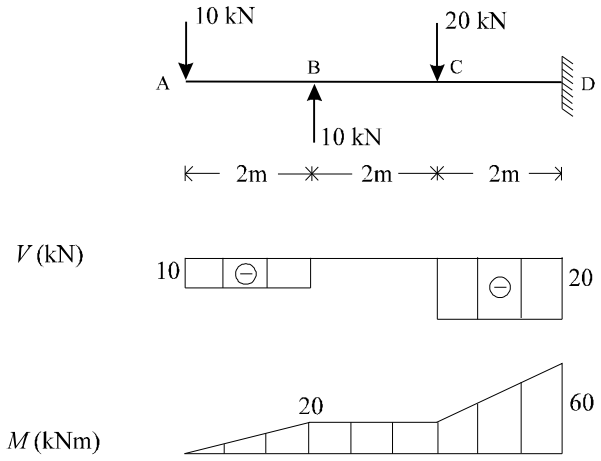


Figura 5.32

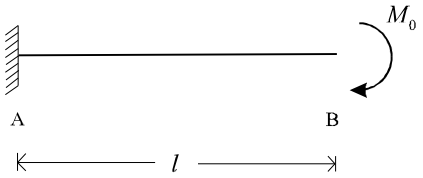


Figura 5.33

Chega-se a este resultado por meio do teorema fundamental, que, no caso desta viga tão simples, pode ser empregado mentalmente.

O diagrama de momentos fletores desta viga é apresentado na Figura 5.34.

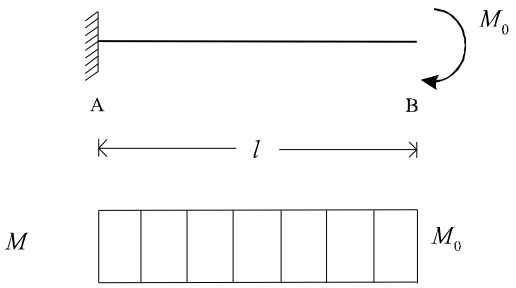


Figura 5.34

Nota 5.10

O carregamento externo ativo desta viga é constituído por um momento M_0 aplicado em sua extremidade livre.

Deve-se observar que, em situações como essa, não se tem de fato um momento M_0 aplicado na viga, mas sim um binário com momento M_0.

Uma viga como a da Figura 5.35, em cuja extremidade atuam duas forças constituindo um binário com momento M_0, pode ser esquematizada como na Figura 5.33.

Frisa-se mais uma vez: não se aplicam momentos em uma estrutura, mas sim forças que geram momentos.

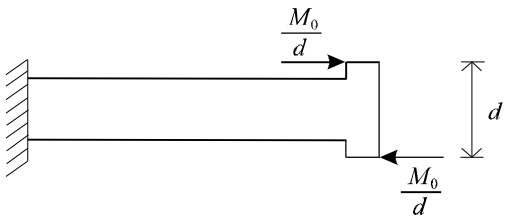


Figura 5.35

Exemplo 5.7

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.36.

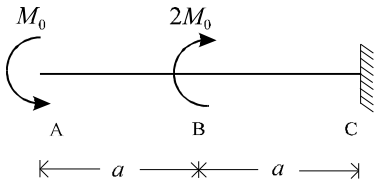


Figura 5.36

Também neste exemplo o diagrama dos únicos esforços solicitantes não nulos - os momentos fletores - pode ser obtido aplicando mentalmente o teorema fundamental. Este diagrama está apresentado na Figura 5.37.

Nota 5.11

Observações semelhantes às das Notas 5.3 e 5.5 podem ser feitas com relação à descontinuidade que se tem em B no diagrama de momentos fletores.

Ela decorre do fato de ter-se admitido a aplicação de um momento fletor concentrado em B, o que efetivamente não ocorre em uma estrutura real.

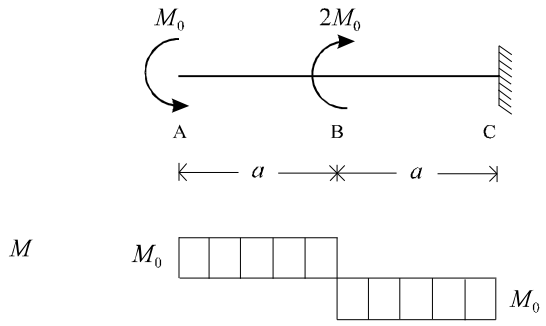


Figura 5.37

Não se define o momento fletor em B: imediatamente à sua esquerda o momento fletor é igual a $-M_0$ e imediatamente à sua direita, é igual a M_0.

Tem-se, então, a seguinte regra geral:

Um momento concentrado aplicado em um ponto de uma barra leva a se ter neste ponto uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores; esta descontinuidade tem módulo igual ao deste momento concentrado.

Exemplo 5.8

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.38.

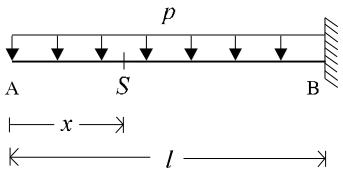
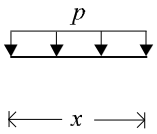
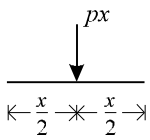


Figura 5.38

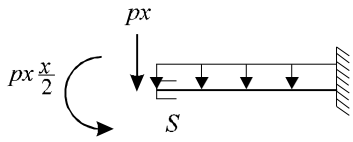
Para determinar os esforços solicitantes corta-se a viga em uma seção genérica S e reduzem-se nesta seção os esforços externos aplicados à sua esquerda, indicados na Figura 5.39(a).



(a)



(b)



(c)

Figura 5.39

Esta redução fica muito facilitada se for feita a determinação da força mecanicamente equivalente a este carregamento, mostrada na Figura 5.39(b).

Sendo as forças das Figuras 5.39(a) e (b) mecanicamente equivalentes, suas reduções em S levam aos mesmos esforços. Como é muito mais fácil reduzir uma força concentrada que uma força distribuída, convém determinar os esforços solicitantes em S reduzindo nesta seção a força concentrada da Figura 5.39(b). Os esforços decorrentes desta redução estão mostrados na Figura 5.39(c), tendo-se então nesta viga os esforços solicitantes:

- $V(x) = -px$

  $V(0) = 0$
  $V(l) = -pl$

- $M(x) = -\dfrac{px^2}{2}$

  $M(0) = 0$

  $M(l) = -\dfrac{pl^2}{2}$

(5.12)

Os diagramas de esforços solicitantes da viga estão apresentados na Figura 5.40.

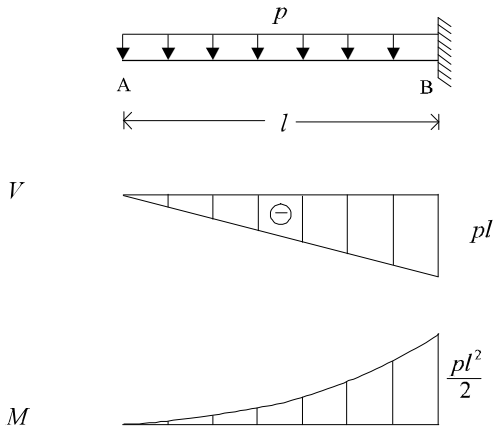


Figura 5.40

Nota 5.12

É extremamente importante salientar que só depois que se tiver cortado a barra é que se pode substituir o carregamento distribuído que será reduzido pela força concentrada mecanicamente equivalente a ele.
Esta substituição não pode em hipótese alguma ser feita antes de cortar a barra, pois caso assim se procedesse se chegaria a outros esforços solicitantes.

Suponha que, antes de cortar a barra, se tivesse decidido substituir o carregamento distribuído que atua na viga pela força mecanicamente equivalente a ele, conforme se mostra na Figura 5.41.

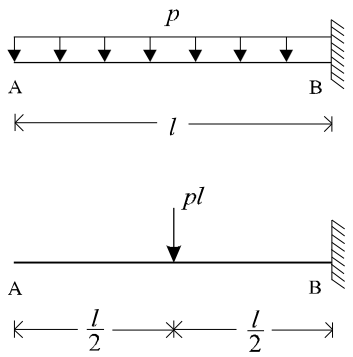


Figura 5.41

Vê-se imediatamente que a substituição da força distribuída pela força concentrada levou a uma viga completamente diferente da viga original, com esforços solicitantes totalmente distintos, comprovando-se então que não se pode fazer esta substituição antes de cortar a estrutura.

Exemplo 5.9

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.42.

Os esforços solicitantes desta viga serão obtidos da mesma forma que no exemplo anterior, cortando-se a barra em uma seção genérica *S* e reduzindo-se nesta seção os esforços externos aplicados à direita do corte.

Para facilitar a resolução, os esforços distribuídos a serem reduzidos serão substituídos pela força concentrada mecanicamente equivalente a eles.

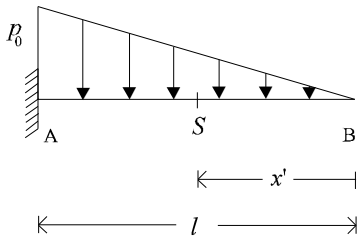


Figura 5.42

Na Figura 5.43 mostram-se os esforços externos aplicados à direita do corte, a força mecanicamente equivalente a eles e os esforços decorrentes da redução desta força em *S*.

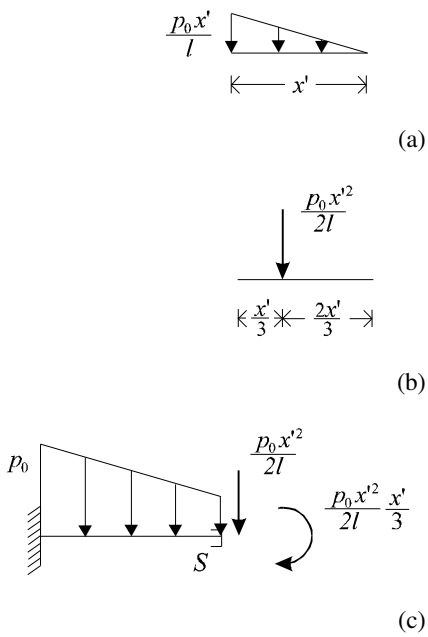


Figura 5.43

Os esforços solicitantes nesta viga são então

$$\bullet\, V(x') = \frac{p_0 x'^2}{2l}$$
$$V(0) = 0$$
$$V(l) = \frac{p_0 l}{2}$$
$$\bullet\, M(x') = -\frac{p_0 x'^3}{6l} \qquad (5.13)$$
$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -\frac{p_0 l^2}{6}$$

Os diagramas de esforços solicitantes estão apresentados na Figura 5.44.

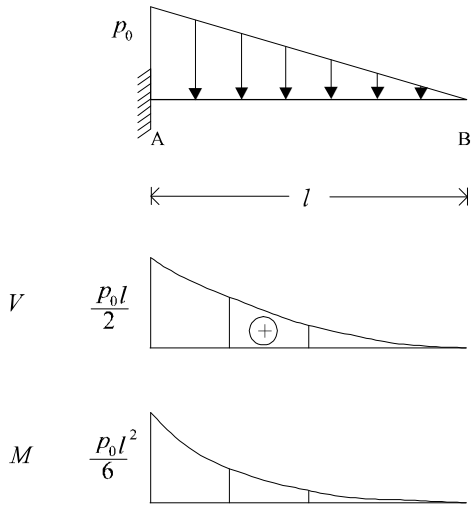


Figura 5.44

5.2.3 Equações diferenciais de equilíbrio

Vai-se agora interromper brevemente esta apresentação de exemplos de traçado de diagramas de esforços solicitantes de figuras planas para introduzir as equações diferenciais de equilíbrio, que serão empregadas na obtenção dos esforços solicitantes de algumas estruturas particulares.

Considere-se uma viga genérica como a da Figura 5.45, em que atua um carregamento distribuído $p = p(x)$.

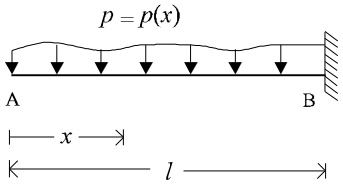


Figura 5.45

Tem-se nesta viga forças cortantes $V = V(x)$ e momentos fletores $M = M(x)$.

As equações diferenciais de equilíbrio estabelecem relações entre o carregamento distribuído $p(x)$, a força cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$.

Para obtê-las, retira-se da barra da Figura 5.45 um trecho de comprimento infinitesimal, cortando-a segundo duas seções transversais muito próximas, de abcissas x e $x + dx$, como se mostra na Figura 5.46.

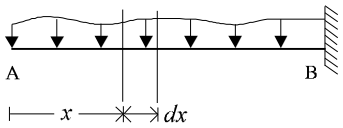


Figura 5.46

Na face esquerda deste trecho de barra, cuja vista lateral se mostra na Figura 5.47, atuam a força cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$; na face da direita atuam a força cortante $V(x + dx) = V(x) + dV(x)$ e o momento fletor $M(x + dx) = M(x) + dM(x)$. Por se tratar de um trecho de barra de comprimento infinitesimal, pode-se admitir que nele a força distribuída seja constante, igual a $p(x)$.

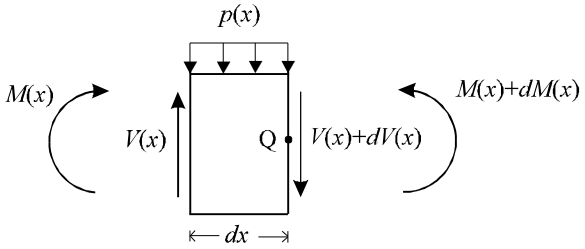


Figura 5.47

Este trecho de barra, tendo sido retirado de uma viga em equilíbrio, encontra-se também em equilíbrio sob a ação dos esforços que nele atuam: os esforços solicitantes na face da esquerda, representando a ação que o trecho da viga à esquerda desta seção tem sobre este elemento infinitesimal, os esforços solicitantes na face da direita, representando a ação que o trecho da viga à direita desta seção tem sobre este elemento, e os esforços distribuídos aplicados em sua face superior.

Os esforços aplicados neste trecho infinitesimal da barra satisfazem portanto a equação de equilíbrio

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) - p(x)dx - [V(x) + dV(x)] = 0, \qquad (5.14)$$

da qual decorre

$$dV(x) = -p(x)dx \qquad (5.15)$$

logo

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \qquad (5.16)$$

Esta equação diferencial, que traduz o equilíbrio das forças verticais que atuam nos elementos infinitesimais da barra, mostra que a derivada da força cortante em relação a x é igual a menos o carregamento distribuído que atua na viga.

Os esforços que atuam no trecho infinitesimal da barra também satisfazem a equação de equilíbrio relativa a momentos. Sendo Q um ponto qualquer da face da direita do elemento, tem-se:

$$\sum M_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad -M(x) - V(x)dx + \frac{p(x)dx^2}{2} + [M(x) + dM(x)] = 0, \quad (5.17)$$

logo

$$dM(x) = V(x)dx - \frac{p(x)dx^2}{2}. \qquad (5.18)$$

Nesta expressão, o termo $-\frac{p(x)dx^2}{2}$ é um infinitésimo de ordem superior ao termo $V(x)dx$, podendo ser desprezado. Tem-se então

$$dM(x) = V(x)dx, \qquad (5.19)$$

de onde se obtém

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x). \qquad (5.20)$$

Esta segunda equação diferencial, que traduz o equilíbrio dos momentos dos esforços que atuam nos elementos infinitesimais da barra, mostra que a derivada do momento fletor em relação a x é igual à força cortante.

As duas equações diferenciais

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

e (5.21)

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

recebem o nome de equações diferenciais de equilíbrio, por traduzirem o equilíbrio dos elementos infinitesimais de uma barra.

Derivando a segunda destas equações, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem que relaciona $M(x)$ e $p(x)$:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -p(x)\,. \qquad (5.22)$$

Esta expressão mostra que a derivada segunda do momento fletor em relação a x é igual a menos o carregamento distribuído que atua na viga.

As expressões das forças cortantes e dos momentos fletores em uma viga, até aqui determinadas por intermédio do teorema fundamental, podem ser alternativamente obtidas através da integração da equação diferencial de segunda ordem (5.22).

De fato, integrando uma vez a equação diferencial

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x), \qquad (5.23)$$

obtém-se a expressão da força cortante:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \int -\,p(x)dx + C_1 \qquad (5.24)$$

Integrando mais uma vez, chega-se a

$$M(x) = \int \left(\int -\,p(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int \left(\int -\,p(x)dx\right)dx + C_1x + C_2\,. \qquad (5.25)$$

As expressões (5.24) e (5.25) fornecem a força cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$ na viga, obtidos por integração da equação diferencial de equilíbrio de segunda ordem.

As constantes de integração C_1 e C_2 que aparecem nas expressões de $V(x)$ e $M(x)$ são determinadas através das condições de contorno, ligadas às condições de vinculação da viga, como se mostrará nos exemplos.

Antes de apresentá-los, deve-se salientar que as equações diferenciais de equilíbrio fornecem relações algébricas entre $p(x)$, $V(x)$ e $M(x)$, isto é, relações válidas em módulo e sinal. Os sinais de $V(x)$ e $M(x)$ nestas equações são os da convenção de sinais introduzida no início deste capítulo.

Quanto ao sinal do carrregamento distribuído, a convenção empregada é a da Figura 5.48: o carregamento distribuído é considerado positivo quando orientado para baixo e negativo quando orientado para cima.

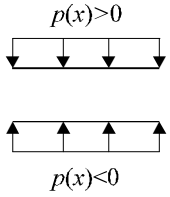


Figura 5.48

Observa-se que na Figura 5.47, da qual foram obtidas as equações diferenciais de equilíbrio, todos os esforços têm os sentidos considerados positivos; por esta razão, os sinais de $p(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ nas equações diferenciais de equilíbrio são os das convenções de sinais da Tabela 5.1 e da Figura 5.48.

Exemplo 5.10

Utilizando as equações diferenciais de equilíbrio, determinar os esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.49.

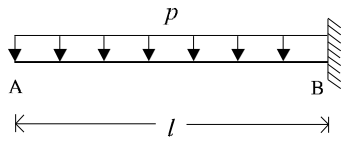


Figura 5.49

Esta é a viga já examinada no Exemplo 5.8, em que os esforços solicitantes foram obtidos por meio do teorema fundamental.

Eles serão agora determinados por intermédio da integração da equação diferencial de equilíbrio de segunda ordem.

Tem-se neste caso

$$p(x) = p \tag{5.26}$$

logo

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p. \tag{5.27}$$

Integrando esta equação, obtém-se

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = \int -p\,dx + C_1 = -px + C_1 \tag{5.28}$$

Integrando mais uma vez, chega-se a

$$M(x) = \int (-px + C_1)dx + C_2 = -\frac{px^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{5.29}$$

Como já se comentou, as constantes de integração C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno, decorrentes da vinculação da estrutura.

Em casos como o desta viga, em que se tem uma extremidade livre, sempre serão conhecidos os esforços solicitantes que atuam nesta extremidade não vinculada.

No caso particular deste exemplo, tem-se na extremidade livre força cortante e momento fletor nulos, logo as condições de contorno são neste caso:

• Condições de contorno

$$\begin{aligned} &V(0) = 0 \\ &M(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

A força cortante dada por (5.28) e o momento fletor dado por (5.29) devem portanto se anular para $x = 0$, condições que permitem obter C_1 e C_2:

$$V(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$
$$M(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \tag{5.31}$$

As expressões analíticas dos esforços solicitantes desta viga são então

$$V(x) = -px$$
$$M(x) = -\frac{px^2}{2} \tag{5.32}$$

Comparando estas expressões com as equações (5.12), verifica-se que foram obtidos exatamente a mesma força cortante $V(x)$ e o mesmo momento fletor $M(x)$ determinados empregando o teorema do corte.

Nota 5.13

Considerem-se as equações diferenciais de equilíbrio

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

e (5.33)

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x).$$

De forma imediata, destas equações decorre a seguinte propriedade:

Propriedade 5.1

Se o carregamento $p(x)$ que atua na viga for dado por um polinômio de grau n, então a força cortante $V(x)$ será dada por um polinômio de grau $n+1$, e o momento fletor, por um polinômio de grau $n+2$.

Em outras palavras, sendo $p(x)$ dado por um polinômio, a força cortante $V(x)$ será dada por outro polinômio um grau maior e o momento fletor, por um polinômio dois graus maior. Assim, se $p(x)$ for linear, $V(x)$ será de segundo grau e $M(x)$, de terceiro grau.

No caso do exemplo que se acaba de examinar verifica-se a validade desta propriedade. Tem-se

$$p(x) = p$$
$$V(x) = -px \tag{5.34}$$
$$M(x) = -\frac{px^2}{2},$$

observando-se então que o carregamento distribuído tem por expressão um polinômio de grau zero, a força cortante, um polinômio de primeiro grau e o momento fletor, um polinômio de segundo grau.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão reapresentados na Figura 5.50.

Observa-se que, sendo o carregamento distribuído uniforme, de grau zero, a força cortante é linear e o momento fletor, dado por uma parábola.

Para traçar o diagrama de forças cortantes basta determinar seus valores em A e B e uní-los por um segmento de reta. Já para traçar o diagrama de momentos fletores, além de determinar seus valores em A e B, deve-se conhecer o lado da concavidade do diagrama: se para cima, ou se para baixo.

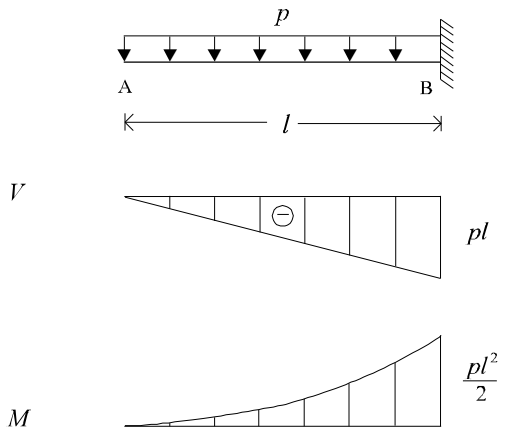


Figura 5.50

A obtenção da concavidade do gráfico de uma função costuma ser feita por meio da derivada segunda da função. Sabe-se, do cálculo diferencial, que o gráfico de uma função $y(x)$ tem concavidade para cima (no sentido de y) nos trechos em que a derivada segunda $y''(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$ é positiva e concavidade para baixo (no sentido contrário ao de y) nos trechos em que a derivada segunda $y''(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$ é negativa; os pontos em que se tem $y''(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = 0$ são pontos de inflexão. Estes resultados estão apresentados na Figura 5.51.

Antes de empregar estes resultados no traçado dos diagramas de momentos fletores, deve-se recordar que, no caso destes diagramas, o eixo das ordenadas é orientado para baixo, como se mostra na Figura 5.52. Nos trechos em que se tem $M'' < 0$ a concavidade é portanto para cima e nos em que se tem $M'' > 0$ ela é para baixo.

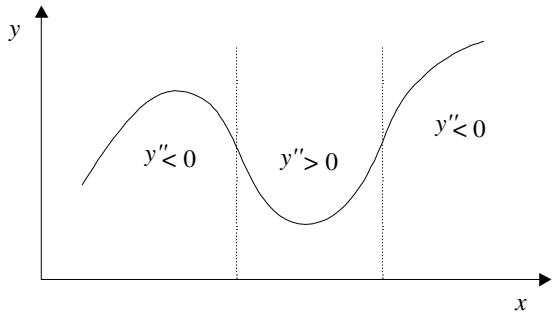


Figura 5.51

Voltando agora à viga em exame, observa-se que se tem

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) < 0, \qquad (5.35)$$

já que $p(x) = p$ é positivo.

Do que se acaba de comentar, conclui-se que a concavidade do diagrama de momentos fletores é então para cima, como indicado na Figura 5.50.

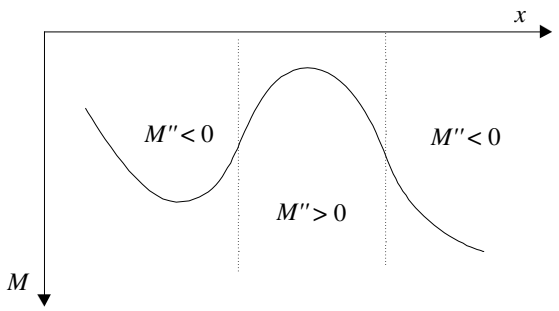


Figura 5.52

Desta análise que se acaba de fazer decorre uma regra muito simples para determinar a concavidade do diagrama de momentos fletores de uma viga, conhecida como a "regra do barbante".

A "regra do barbante" é a seguinte: para obter a concavidade do diagrama de momentos fletores de um trecho de uma barra procede-se da seguinte maneira:

1) Determinam-se os valores dos momentos fletores nas extremidades deste trecho, indicando-os no diagrama de momentos fletores.
   No caso da viga em análise, estes valores são

$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -\frac{pl^2}{2}. \qquad (5.36)$$

2) Imagina-se que um barbante fictício seja estendido entre estes dois momentos fletores nas extremidades do trecho já indicados no diagrama, como se mostra na Figura 5.53(a) para a viga em balanço em estudo.

3) Supõe-se aplicado no barbante o carregamento distribuído que atua neste trecho de viga (Figura 5.53(b)).

4) Sob a ação do carregamento distribuído o barbante se encurva (Figura 5.53(c)).

5) A concavidade do diagrama de momentos fletores é a mesma apresentada pelo barbante fictício curvado pela carga distribuída que o solicita.

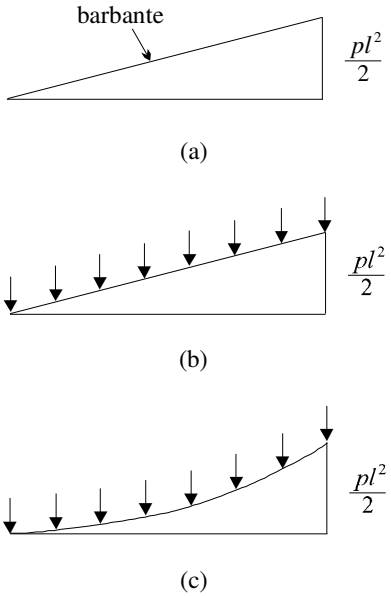


Figura 5.53

□

A demonstração desta regra é muito simples: em um trecho de barra em que $p(x)$ é orientado para baixo, ou seja, positivo, tem-se $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) < 0$, logo neste trecho de barra o diagrama de momentos fletores tem concavidade para cima. Ora, um barbante estendido entre dois pontos e solicitado por um carregamento orientado para baixo se encurva com concavidade para cima, demonstrando-se assim a regra. Para carregamentos distribuídos negativos tem-se uma situação análoga, mas agora com a concavidade para baixo.

Esta regra é extremamente útil, e pode ser utilizada não apenas para barras horizontais, mas também para barras em qualquer outra posição; a única restrição que se impõe é que estas barras sejam retas.

Dada a utilidade da "regra do barbante" optou-se por apresentá-la neste texto. Deve-se lembrar, entretanto, que uma regra só deve ser aplicada depois que se souber de onde ela decorre. Solicita-se portanto ao leitor que só empregue a "regra do barbante" depois de compreender claramente porque ela funciona.

Exemplo 5.11

Utilizando as equações diferenciais de equilíbrio, determinar os esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.54.

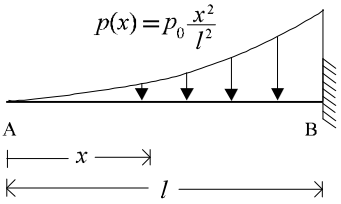


Figura 5.54

Tem-se

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) = -p_0\frac{x^2}{l^2}, \tag{5.37}$$

logo

$$V(x) = \int -p_0\frac{x^2}{l^2}dx + C_1 = -\frac{p_0x^3}{3l^2} + C_1 \tag{5.38}$$

e

$$M(x) = \int -\frac{p_0x^3}{3l^2}dx + C_1x + C_2 = -\frac{p_0x^4}{12l^2} + C_1x + C_2 \tag{5.39}$$

As condições de contorno são

$$V(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

e (5.40)

$$M(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

portanto

$$V(x) = -\frac{p_0x^3}{3l^2}, \quad \therefore \quad \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(l) = -\dfrac{p_0l}{3} \end{cases}$$

(5.41)

$$M(x) = -\frac{p_0x^4}{12l^2}, \quad \therefore \quad \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(l) = -\dfrac{p_0l^2}{12} \end{cases}$$

Observa-se que, sendo $p(x)$ um polinômio de segundo grau, $V(x)$ e $M(x)$ são respectivamente polinômios de terceiro e quarto grau, como se podia prever.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão desenhados na Figura 5.55.

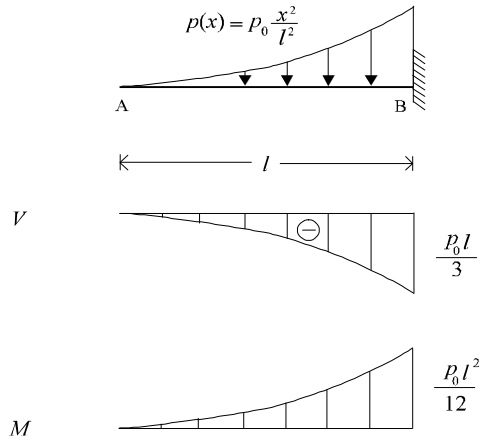


Figura 5.55

Nota 5.14

A concavidade do diagrama de momentos fletores pode ser determinada pela "regra do barbante". Não existe, entretanto, regra semelhante que forneça a concavidade do diagrama de forças cortantes, que deve ser então determinada pela derivada segunda de $V(x)$:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{2p_0x}{l^2}. \qquad (5.42)$$

Para $0<x\leq 1$ tem-se $\frac{d^2V(x)}{dx^2}<0$, e a concavidade do diagrama de forças cortantes é então para baixo.

A concavidade do diagrama de forças cortantes também pode ser obtida por uma análise da viga do ponto de vista físico.

Considerem-se dois pares de seções transversais muito próximas da viga, como indicado na Figura 5.56.

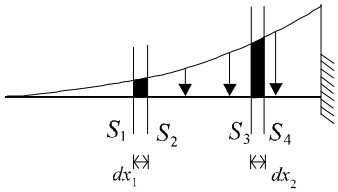


Figura 5.56

Quando se passa da seção S_1 para a seção S_2 a força cortante aumenta em módulo; este acréscimo é igual à resultante do carregamento distribuído que atua no trecho dx_1, dada pela área escura no diagrama. Da mesma forma, quando se passa da seção S_3 para a seção S_4 a força cortante também aumenta em módulo, sendo o acréscimo igual à outra área escura no diagrama.

Fica claro destas considerações que, quanto mais próximo se estiver do engastamento, mais acentuado será o crescimento da força cortante - em módulo -, o que justifica a concavidade para baixo do diagrama de forças cortantes.

Deve-se notar que uma análise física análoga a esta pode ser feita relativamente à concavidade do diagrama de momentos fletores.

Recomenda-se ao leitor que, ao resolver um problema estrutural, procure usar sua intuição física. Ouça o que sua intuição tem a dizer com relação ao comportamento da estrutura em estudo, e procure compreender qualitativamente como ela funciona.

Após ter examinado o problema de forma intuitiva, qualitativa e física, depois de ter procurado entender como funciona a estrutura, passe então a sua resolução quantitativa.

Terminando-a, compare as conclusões obtidas por via matemática com as previsões a que havia chegado por meio da análise qualitativa.

É muito provável que você venha então a se surpreender com a descoberta de que possui uma intuição estrutural bem mais desenvolvida do que a que supunha ter.

Nota 5.15

Foram vistas duas formas de obter os esforços solicitantes de uma barra: pelo teorema fundamental e pela integração das equações diferenciais de equilíbrio.

A determinação pelo teorema fundamental é muito mais física que pela integração das equações diferenciais de equilíbrio, que é matemática e muito abstrata.

Por esta razão, sugere-se ao leitor que só em último caso recorra à integração das equações diferenciais de equilíbrio ao determinar os esforços solicitantes de uma estrutura. Além de este procedimento nada ter de físico, é bastante sujeito a erros, por envolver integrações de equações diferenciais, determinação de constantes de integração, etc..

Em casos como o do Exemplo 5.10, em que os esforços solicitantes podem ser facilmente obtidos pelo teorema fundamental, já que o carregamento distribuído que atua na viga é simples, deve-se sempre utilizar o teorema fundamental na determinação destes esforços.

Já no caso do Exemplo 5.11, em que o carregamento distribuído que atua na viga é complexo, a resolução pelo teorema fundamental torna-se trabalhosa, pela necessidade de determinar a força estaticamente equivalente a um carregamento distribuído parabólico. É em casos como este que se deve obter os esforços solicitantes integrando as equações diferenciais de equilíbrio.

Mesmo nestes casos, entretanto, seria também possível determinar os esforços solicitantes por meio do teorema fundamental.

Na Figura 5.57 reapresenta-se a viga do Exemplo 5.11. Estão indicados agora dois eixos de abcissas: o eixo x, que caracteriza a seção transversal S cujos esforços solicitantes se deseja obter, e o eixo z, utilizado na definição do carregamento distribuído que atua na viga.

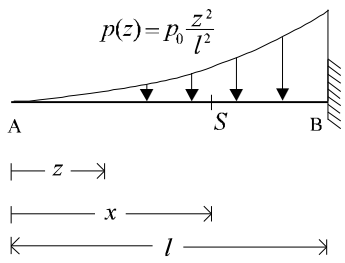


Figura 5.57

Os esforços solicitantes em S podem ser obtidos reduzindo nesta seção o carregamento aplicado à sua esquerda, mostrado na Figura 5.58(a). Em um elemento dz deste trecho da barra atuam os esforços indicados na Figura 5.58(b), cuja redução em S leva à força cortante e ao momento fletor da Figura 5.58(c).

Fica claro da Figura 5.58 que os esforços solicitantes em S se obtêm por meio das expressões

$$V(x) = \int_0^x -p(z)dz = \int_0^x -p_0 \frac{z^2}{l^2} dz = -\frac{p_0 x^3}{3l^2}$$

$$M(x) = \int_0^x -p(z)(x-z)dz = \int_0^x -p_0 \frac{z^2}{l^2}(x-z)dz = -\frac{p_0 x^4}{12l^2} \tag{5.43}$$

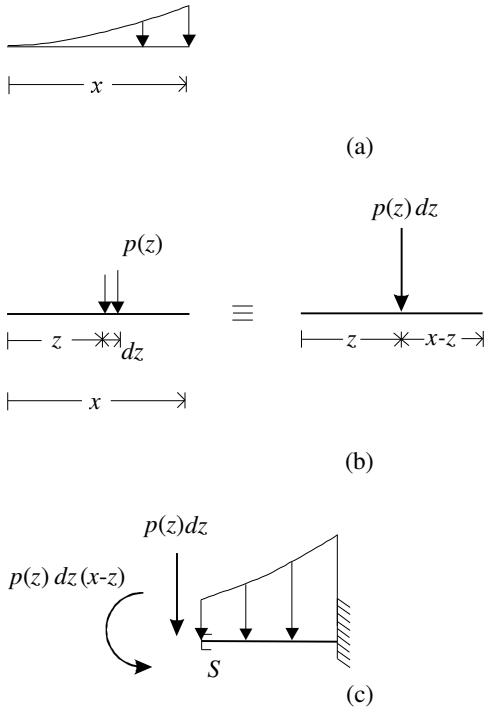


Figura 5.58

Comparando estas expressões com as (5.41) observa-se que se chegou aos mesmos resultados que haviam sido obtidos por meio da integração das equações diferenciais de equilíbrio.

Como já se comentou, é em casos como o desta viga, submetida a um carregamento distribuído complexo, que há interesse em se recorrer às equações diferenciais de equilíbrio para determinar os esforços solicitantes, visto que a resolução do problema por meio do teorema fundamental também é trabalhosa e também exige que se façam algumas integrações.

Volta-se agora aos exemplos de traçado de diagrama de esforços solicitantes de estruturas planas.

5.2.4 Continuando os exemplos

<u>Exemplo 5.12</u>

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.59.

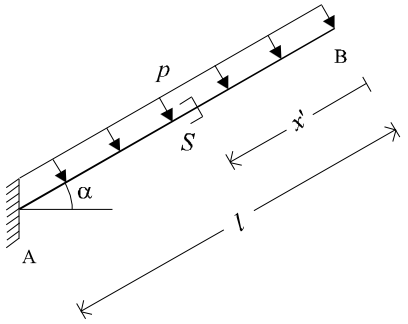


Figura 5.59

Os esforços solicitantes podem ser obtidos pelo teorema fundamental. Na Figura 5.60(a) mostram-se os esforços externos aplicados à direita da seção *S*, na Figura 5.60(b), a força mecanicamente equivalente a esse carregamento e na Figura 5.60(c), os esforços decorrentes da redução desta força em *S*.

Os esforços solicitantes desta viga são então

$$V(x') = px'$$
$$M(x) = -\frac{px'^2}{2}. \tag{5.44}$$

Os diagramas destes esforços estão na Figura 5.61.

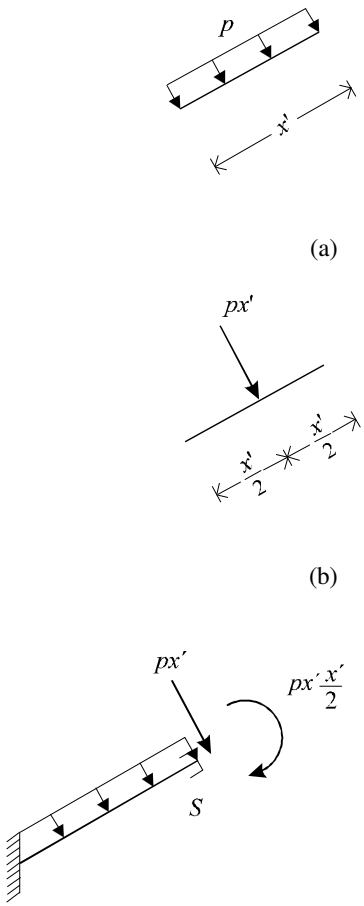


Figura 5.60

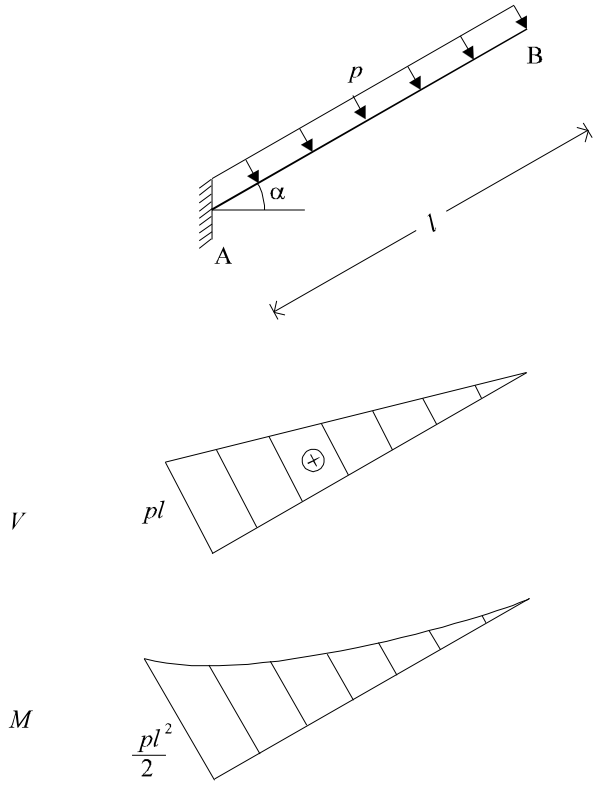


Figura 5.61

Nota 5.16

Nos diagramas de esforços solicitantes, os valores dos esforços que atuam em uma determinada seção transversal são sempre indicados sobre a perpendicular ao eixo da barra que passa por essa seção. Por esta razão, como o eixo da barra deste exemplo é inclinado, os diagramas de esforços solicitantes também ficam inclinados, já que são desenhados perpendicularmente a um eixo inclinado.

Nota 5.17

Comparando esta viga com a do Exemplo 5.8 nota-se que, apesar de uma ser horizontal e a outra inclinada, elas são intrinsicamente muito semelhantes: ambas são vigas em balanço solicitadas por um carregamento distribuído uniforme perpendicular a seu eixo. Por esta razão, os diagramas de esforços solicitantes destas duas vigas também são muito semelhantes.

O que influi nos esforços solicitantes é a posição do carregamento em relação à viga, não a posição da viga em relação a um dado referencial.

É interessante mencionar que um carregamento como o da viga deste exemplo é o devido ao vento: a pressão (ou sucção) do vento sobre um telhado ou uma parede é normal à superfície em que atua.

Exemplo 5.13

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.62. Esta é a viga do exemplo anterior, mas agora solicitada por um carregamento distribuído vertical. O peso próprio da viga é um carregamento deste tipo.

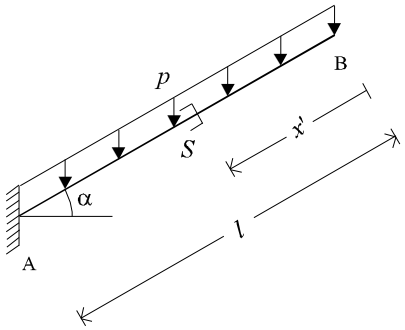


Figura 5.62

Antes de aplicar o teorema fundamental para determinar os esforços solicitantes de uma viga, procure sempre examiná-la qualitativamente, para ter uma primeira idéia de como devem ser seus esforços solicitantes.

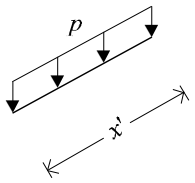
Posteriormente, após ter utilizado o teorema fundamental, confira os esforços solicitantes encontrados, comparando-os com os previstos nesta análise preliminar.

É o que se fará neste exemplo.

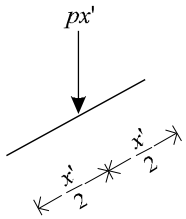
Observando a viga, nota-se que sendo o carregamento distribuído oblíquo em relação ao eixo da barra, pode ser decomposto em uma componente normal ao eixo, que produzirá forças cortantes e momentos fletores, e em uma componente na direção do eixo da barra, que produzirá forças normais. Nesta viga, portanto, além de forças cortantes e momentos fletores, haverá também forças normais.

Para determinar estes esforços utiliza-se o teorema fundamental. Na Figura 5.63(a) indicam-se os esforços externos aplicados no trecho de barra à direita da seção de corte *S*; na Figura 5.63(b) mostra-se a força mecanicamente equivalente a esse carregamento e na Figura 5.63(c), os esforços decorrentes da redução dessa força em *S*.

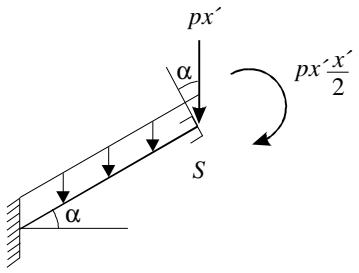
Nota-se que a força px' indicada na Figura 5.63(c) é oblíqua em relação ao eixo da barra, não sendo portanto nem a força cortante nem a força normal. A força cortante em *S* é a componente de px' normal ao eixo da barra e a força normal em *S* é a componente de px' na direção do eixo da barra, mostradas na Figura 5.63(d).



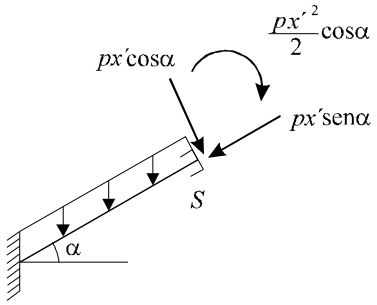
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.63

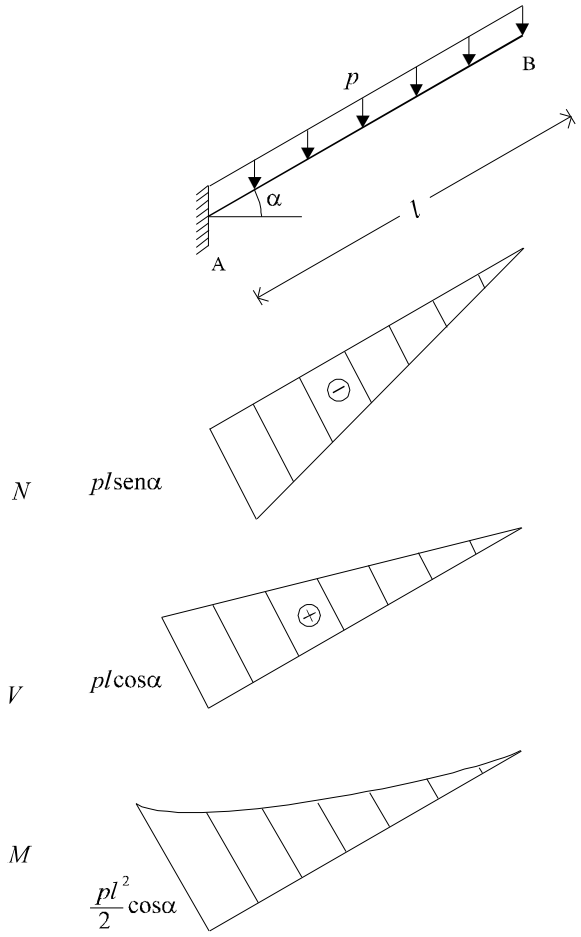


Figura 5.64

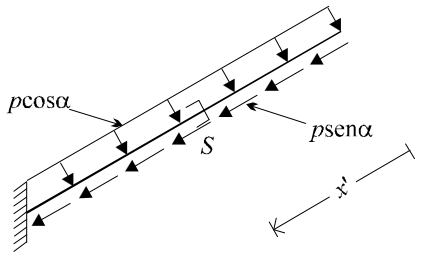
Os esforços solicitantes em S são portanto

$$N(x') = -px'sen\alpha$$

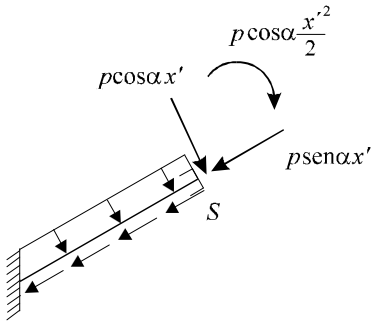
$$V(x') = px'\cos\alpha \qquad (5.45)$$

$$M(x') = -\frac{px'^2}{2}\cos\alpha\,.$$

Os correspondentes diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.64.



(a)



(b)

Figura 5.65

Nota 5.18

Alternativamente, pode-se determinar os esforços solicitantes desta viga decompondo inicialmente o carregamento distribuído em sua componente normal ao eixo da barra e em sua componente na direção do eixo da barra, aplicando em seguida o teorema fundamental.

Na Figura 5.65(a) mostram-se as componentes do carregamento distribuído: a componente $p\cos\alpha$ normal ao eixo da barra e a componente $p\mathrm{sen}\alpha$ na direção do eixo da barra. A redução em S dos esforços externos aplicados à sua direita já leva diretamente aos esforços solicitantes, como se mostra na Figura 5.65(b).

Estes esforços solicitantes, é claro, são os mesmos determinados anteriormente.

Exemplo 5.14

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.66.

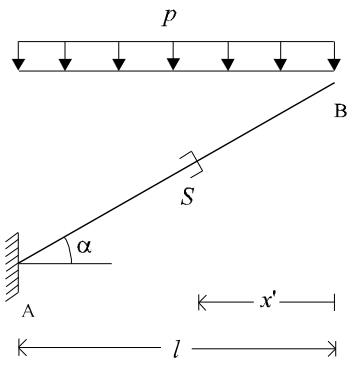


Figura 5.66

Esta viga é como a do exemplo anterior: uma viga inclinada em balanço, solicitada por uma força uniformemente distribuída vertical.

A diferença entre estas duas vigas reside na forma de apresentar o carregamento distribuído: no Exemplo 5.13 dá-se a força distribuída por unidade de comprimento da viga; neste exemplo, ela é dada por unidade de comprimento da projeção horizontal da viga.

Uma situação em que se costuma representar uma viga como neste exemplo é a das escadas, cuja carga distribuída normalmente é dada por unidade de comprimento da projeção horizontal da escada. Isto, porque tanto o peso das pessoas como o do revestimento dos degraus horizontais são conhecidos por unidade de área da projeção horizontal da escada.

Nestes casos também se costuma considerar como comprimento da viga o da sua projeção horizontal.

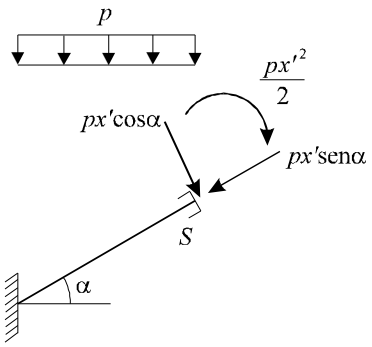


Figura 5.67

É claro que se os esquemas dos exemplos 5.13 e 5.14 forem utilizados para representar uma mesma viga, os valores das cargas distribuídas nos dois esquemas serão distintos, maior no do Exemplo 5.14 que no do Exemplo 5.13. Se se chamar de p_1 a carga distribuída do esquema do Exemplo 5.13 e de p_2 a do esquema deste exemplo, ter-se-á a seguinte relação entre elas:

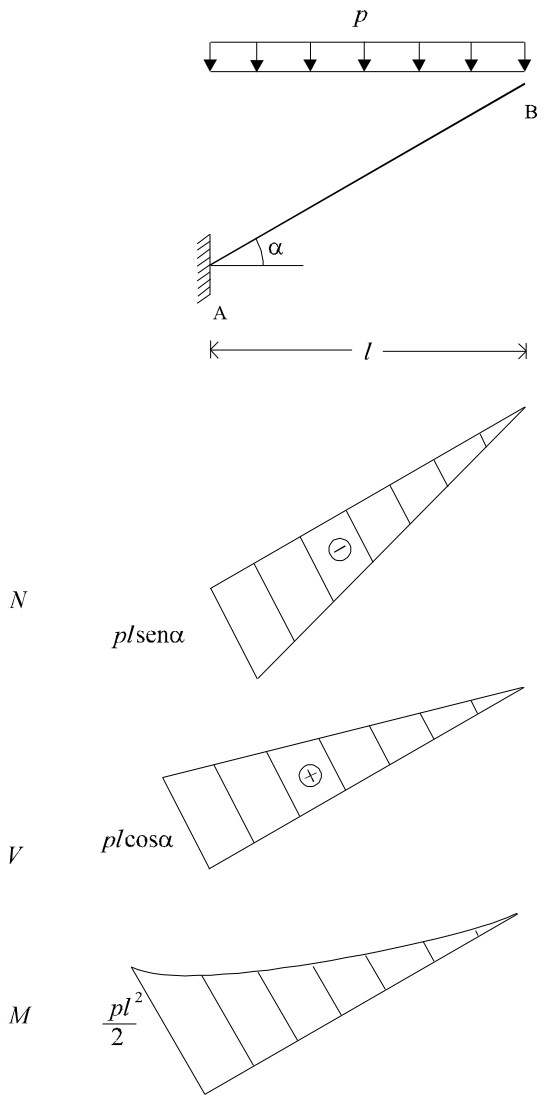


Figura 5.68

$$p_2 = \frac{p_1}{\cos\alpha} \qquad (5.46)$$

A determinação dos esforços solicitantes na seção *S* desta viga é feita por intermédio do teorema fundamental, reduzindo nesta seção os esforços externos aplicados à sua direita, obtendo-se os esforços solicitantes indicados na Figura 5.67. Observa-se que nesta figura a força vertical decorrente da redução do carregamento distribuído já foi decomposta na força cortante e na força normal.

Tem-se então em *S*:

$$N(x') = -px'sen\alpha$$

$$V(x') = px'\cos\alpha \qquad (5.47)$$

$$M(x') = -\frac{px'^2}{2}.$$

Os diagramas correspondentes são os da Figura 5.68.

Exemplo 5.15

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura da Figura 5.69.

Trata-se de uma barra curva, cujo eixo é um segmento de uma circunferência de raio *r*.

O fato desta barra ser curva em nada muda a forma de determinar os esforços solicitantes, que continuarão a ser obtidos por meio do teorema fundamental.

Nesta determinação se alterará apenas o sistema de coordenadas utilizado para caracterizar a seção genérica *S* em que se corta a estrutura. Por se tratar de uma barra de eixo curvo, a solução do problema ficará facilitada se se empregar um sistema coordenadas polares em lugar de um sistema de coordenadas cartesianas para identificar a seção do corte.

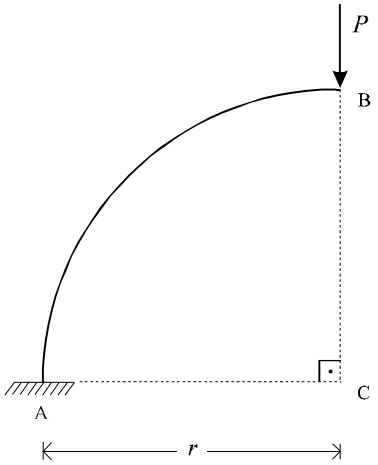


Figura 5.69

Na Figura 5.70(a) mostra-se a seção genérica *S* da barra em que se fará o corte; na Figura 5.70(b) mostra-se o trecho da barra à direita do corte e na Figura 5.70(c), os esforços decorrentes da redução em *S* desta única força aplicada à direita do corte.

A força *P* da Figura 5.70(c) é oblíqua à seção *S*, devendo então ser decomposta em sua componente normal e em sua componente tangencial a esta seção, como mostrado na Figura 5.70(d).

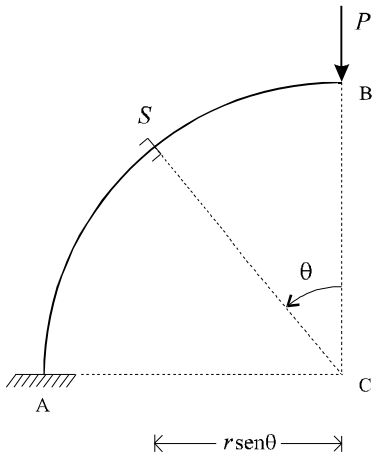
Os esforços solicitantes desta barra são então

$$N(\theta) = -P\text{sen}\theta$$

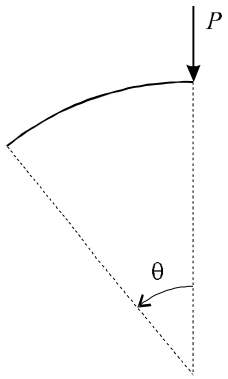
$$V(\theta) = P\cos\theta \qquad (5.48)$$

$$M(\theta) = -Pr\text{sen}\theta$$

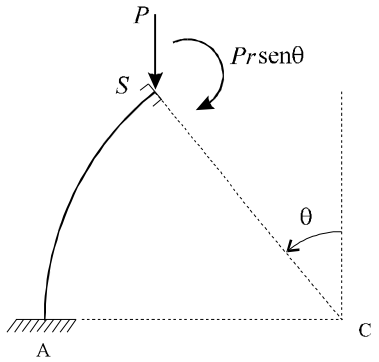
A força normal e o momento fletor são senoidais; a força cortante, cossenoidal.



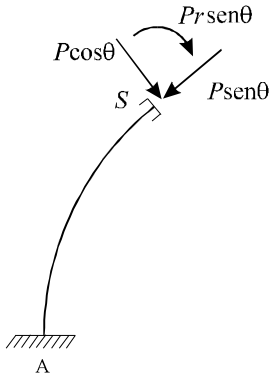
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.70

Os diagramas dos esforços solicitantes desta viga estão traçados na Figura 5.71. Observa-se que os valores dos esforços solicitantes continuam sendo sempre indicados perpendicularmente ao eixo da barra.

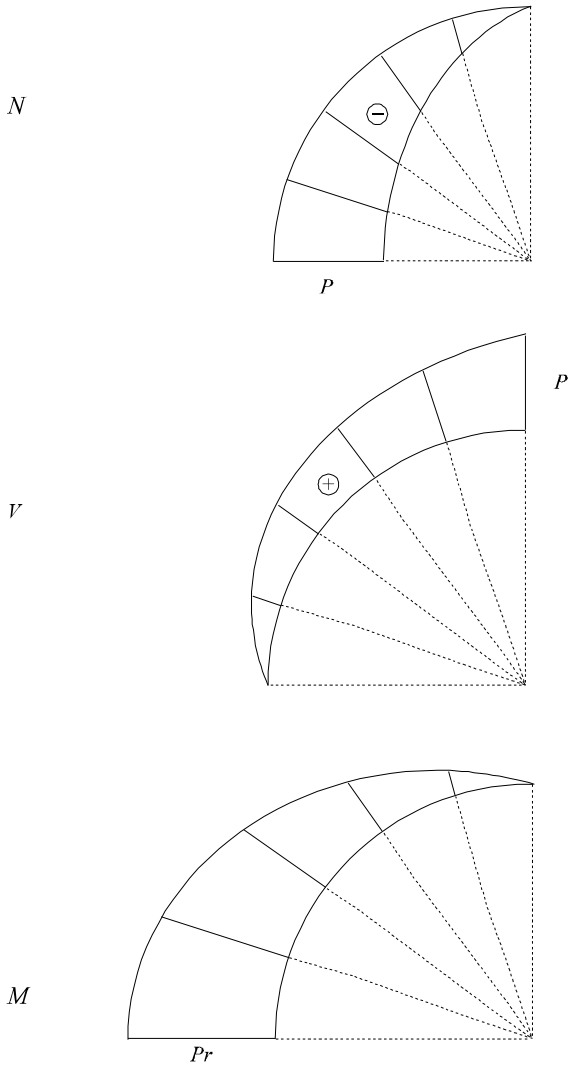


Figura 5.71

Exemplo 5.16

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga poligonal da Figura 5.72.

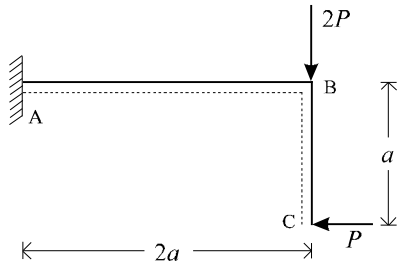


Figura 5.72

Os esforços solicitantes desta viga serão determinados por meio do teorema fundamental.

Como a barra BC é vertical, não existe sentido em se falar em tração das fibras superiores ou inferiores desta barra. Por esta razão, vai-se introduzir uma nova convenção de sinais para os momentos fletores: traceja-se um dos lados das barras da estrutura - como se mostra na Figura 5.72 - e considera-se que os momentos fletores sejam positivos quando tracionam o lado tracejado e negativos no caso contrário. É esta a convenção de sinais que se utilizará para os momentos fletores neste exemplo.

Para determinar os esforços solicitantes do trecho CB, corta-se esta barra em uma seção genérica S_1 - caracterizada pela coordenada y - e transfere-se para esta seção a única força aplicada abaixo do corte (Figura 5.73).

Tem-se então no trecho CB da viga poligonal:

$$N = 0$$

$$V = P \qquad (5.49)$$

$$M = -Py$$

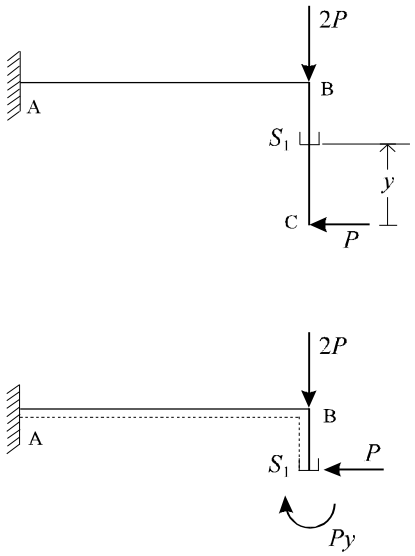


Figura 5.73

Procede-se de forma semelhante para determinar os esforços solicitantes do trecho BA (Figura 5.74).

Tem-se neste trecho da viga:

$$N = -P$$

$$V = 2P \qquad (5.50)$$

$$M = -Pa - 2Px'$$

Os diagramas de esforços solicitantes estão na Figura 5.75.

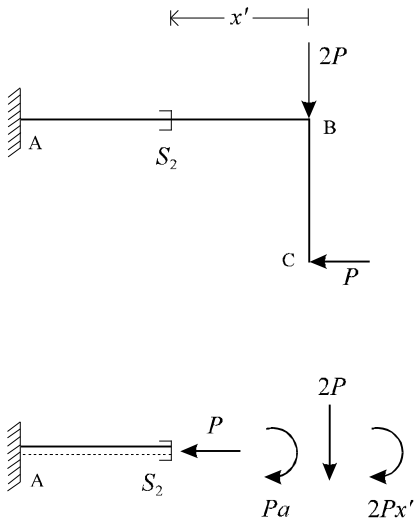


Figura 5.74

Nota 5.19

Na determinação dos momentos fletores desta estrutura foi utilizada uma nova convenção de sinais, ligada ao lado da estrutura que foi trajeçado. Tendo-se neste exemplo tracejado o lado interno da viga, obtiveram-se momentos fletores negativos tanto na barra AB como na BC. Caso se tivesse tracejado o lado externo da estrutura, os momentos nestas duas barras seriam positivos. Chegar-se-ia, entretanto, ao mesmo diagrama de momentos fletores da Figura 5.75, pois continua-se sempre indicando os momentos fletores no lado tracionado da barra.

Tem-se, por isso, total liberdade de escolha do lado que se irá tracejar, já que em qualquer caso se chegará sempre ao mesmo diagrama de momentos fletores.

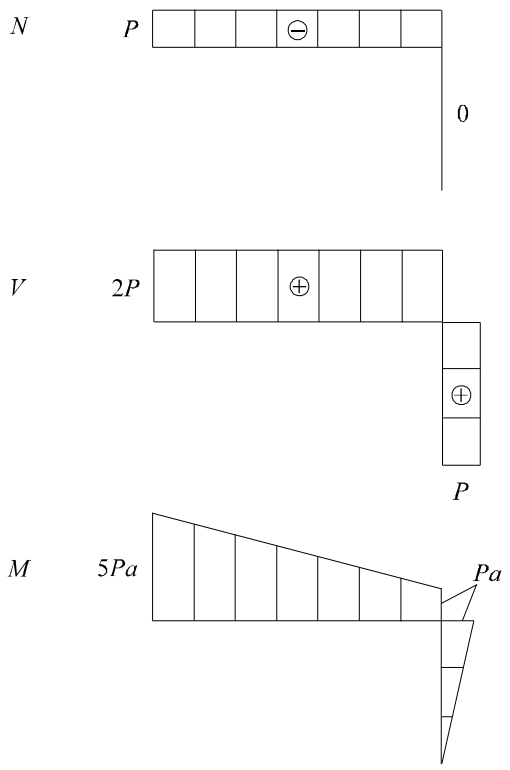


Figura 5.75

Nota 5.20

Nos exemplos anteriores, tanto nos diagramas de forças normais como nos de forças cortantes os valores positivos eram desenhados acima do eixo que representa a estrutura e os valores negativos, abaixo deste eixo.

Isto, porque as estruturas até aqui estudadas eram simples, constituídas por uma única barra, não havendo a possibilidade de se ter superposições de diagramas.

Quando as estruturas forem formadas por mais de uma barra deve-se traçar os diagramas de força normais e de forças cortantes de forma que eles sejam os mais claros possíveis, sem se prender a nenhuma regra rígida com relação ao lado das barras em que valores positivos e negativos devem ser traçados, evitando-se desta maneira superposições que seriam inevitáveis caso não se tivesse esta flexibilidade.

Assim, neste exemplo, as forças normais na barra AB foram desenhadas acima do eixo, apesar de negativas.

Como nos diagramas de forças normais e de forças cortantes sempre se coloca o sinal do esforço, esta maior liberdade no traçado dos diagramas não leva a nenhuma perda de informação.

Nota 5.21

Sugere-se que, à medida que cada trecho de uma estrutura for estudado, sejam traçados os respectivos diagramas de esforços solicitantes. Assim, após obter as expressões (5.49) dos esforços solicitantes da barra BC, deve-se imediatamente traçar os diagramas de esforços solicitantes desta barra, e só depois analisar a barra AB e traçar os respectivos diagramas.

Nota 5.22

Como já se mencionou anteriormente, a função de uma estrutura sempre é permitir que esforços externos ativos aplicados em alguns de seus pontos caminhem até os apoios, onde são equilibrados.

No caso desta viga poligonal, a força P aplicada em C caminha por toda a estrutura até chegar ao apoio A, solicitando tanto a barra BC como a barra AB. Já a força $2P$ aplicada em B só solicita a barra AB, ao caminhar desde seu ponto de aplicação até o engastamento. A força $2P$ não solicita a barra BC, pois não a percorre em seu trajeto até o engastamento.

Exemplo 5.17

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga poligonal da Figura 5.76.

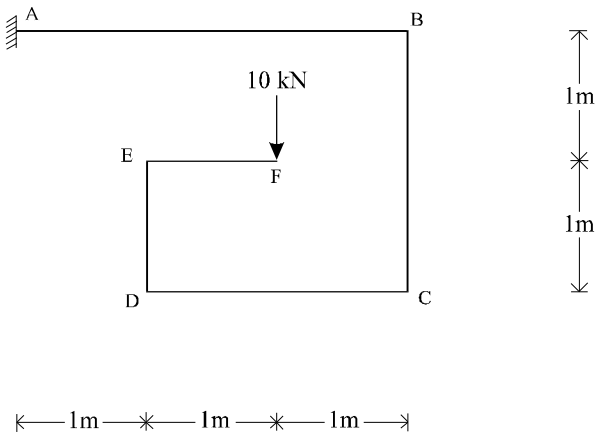


Figura 5.76

Os esforços solicitantes do trecho FE são determinados por intermédio do teorema fundamental, cortando-se esta barra na seção S_1 da Figura 5.77.

Tem-se na barra FE:

$$N = 0$$
$$V = 10 \qquad (5.51)$$
$$M = -10x' \, .$$

Obtidas estas equações, deve-se em seguida traçar os diagramas de esforços solicitantes desta barra.

É importante observar que, sendo estes diagramas muito simples, pode-se traçá-los diretamente, sem a obtenção das expressões analíticas (5.51). É como se deve proceder à medida que se vai adquirindo prática no traçado de diagramas de esforços solicitantes.

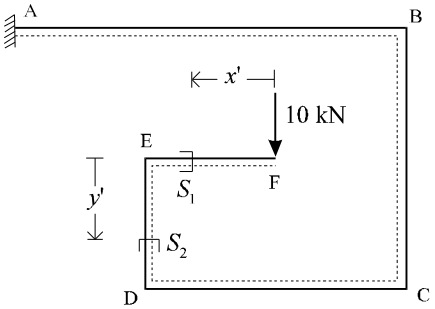


Figura 5.77

Para determinar os esforços solicitantes na barra ED pode-se proceder de duas maneiras. A primeira delas é a tradicional, cortando-se a estrutura na seção S_2 da Figura 5.77 e transferindo-se para ela a força aplicada em F.

Obtém-se para esta barra:

$$N = -10$$
$$V = 0 \qquad (5.52)$$
$$M = -10 .$$

Mais uma vez, deve-se traçar imediatamente os diagramas de esforços solicitantes desta barra.

A outra maneira de determinar os esforços solicitantes em ED é a seguinte:

- Corta-se a barra FE em uma seção imediatamente à direita de E, a seção S_3 da Figura 5.78(a), e reduz-se nesta seção a força aplicada em F.

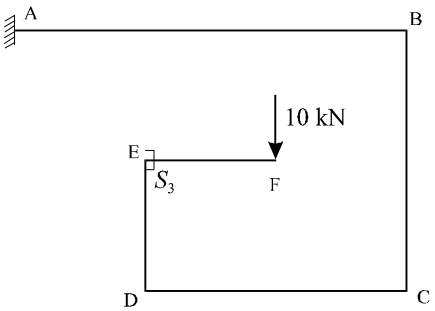
  Os esforços decorrentes desta redução, indicados na Figura 5.78(b), representam a ação que a barra FE tem sobre o restante da viga poligonal.

- Corta-se agora a estrutura na seção genérica S_2 da barra ED, reduzindo-se nesta seção os esforços atuantes em S_3, como se mostra na Figura 5.78(c).

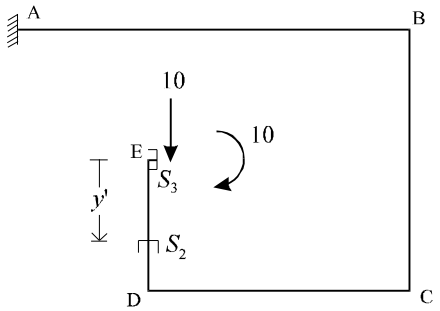
Obtém-se novamente como esforços solicitantes em ED os dados pelas expressões (5.52).

Esta forma de determinar os esforços solicitantes, com a eliminação das partes já analisadas da estrutura, facilita muito a obtenção dos esforços solicitantes de estruturas complexas.

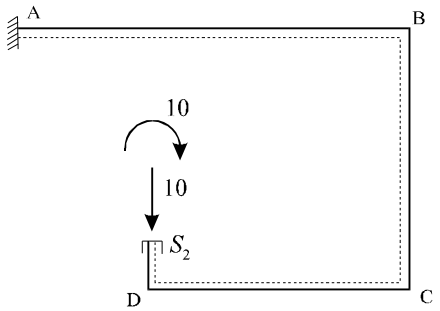
Este procedimento se baseia nos seguinte fato: a ação que a barra FE tem sobre o restante da viga poligonal é representada pelos esforços que a barra FE aplica em ABCDE através da seção S_3.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.78

É por esta razão que se pode retirar a barra FE da estrutura, substituída pelos esforços que aplica em S_3, e prosseguir a determinação dos esforços solicitantes da viga poligonal.

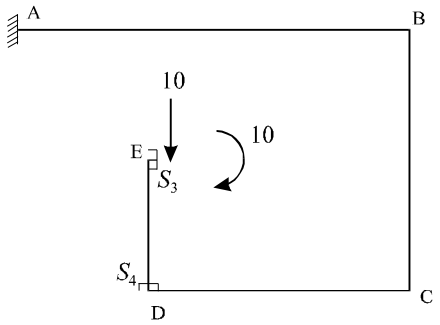
Emprega-se agora este método na determinação dos esforços solicitantes em uma seção genérica da barra DC:

- Corta-se a barra ED em uma seção imediatamente acima de D, a seção S_4 da Figura 5.79(a), e reduzem-se nesta seção os esforços atuantes em S_3. Obtêm-se os esforços indicados na Figura 5.79(b).

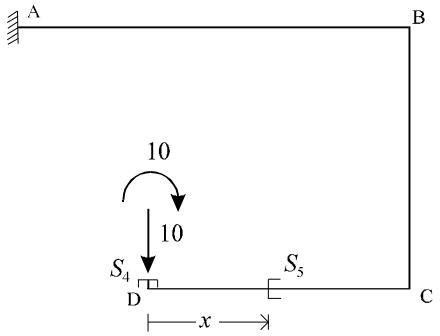
- Corta-se a barra DC em uma seção genérica S_5, reduzindo-se nesta seção os esforços atuantes em S_4, como se mostra na Figura 5.79(c).

Os esforços solicitantes em DC são portanto

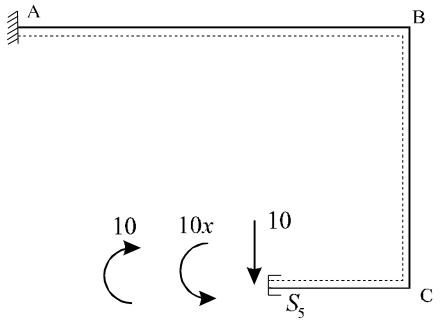
$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V &= -10 \\ M &= 10x - 10 \,. \end{aligned} \tag{5.53}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.79

O mesmo procedimento pode ser utilizado para determinar os esforços solicitantes das barras CB e BA, e sugere-se que o leitor os obtenha como exercício.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga poligonal estão na Figura 5.80.

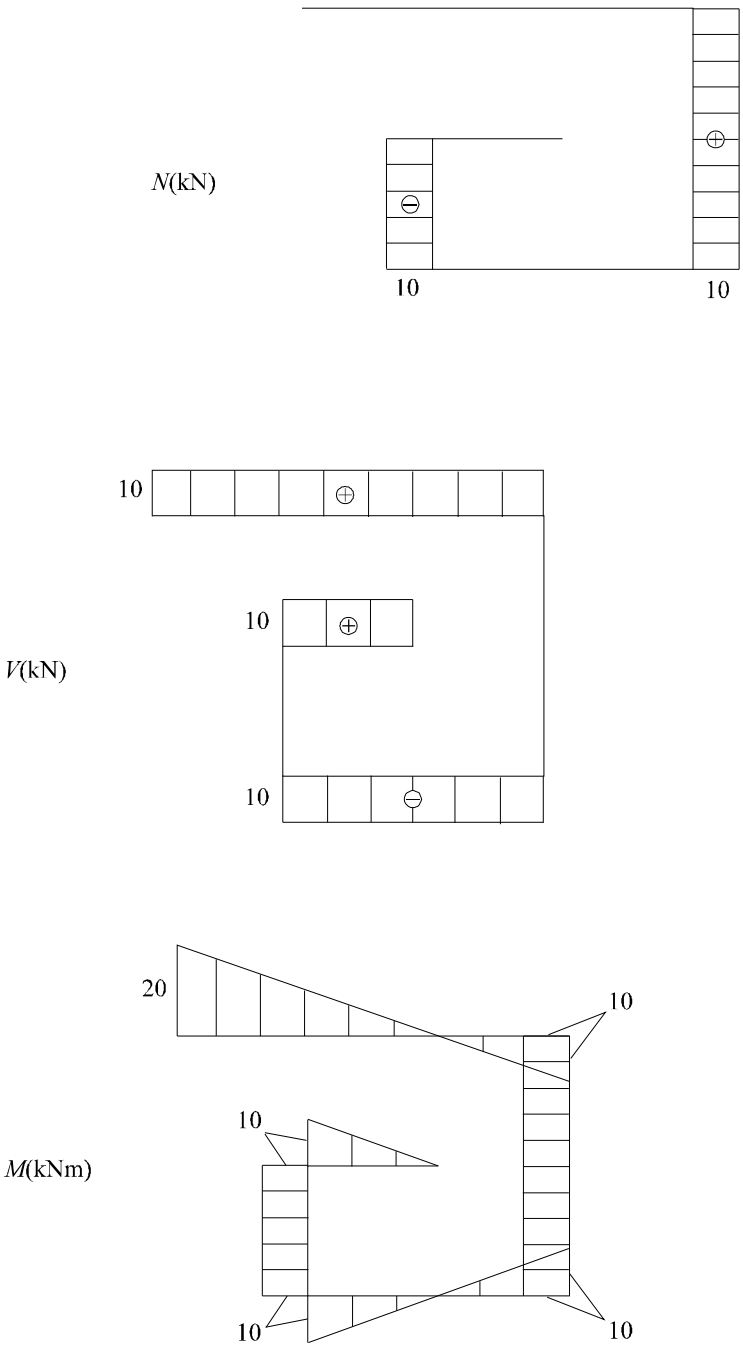


Figura 5.80

Nota 5.23

Observou-se no exemplo anterior que, no caso de estruturas formadas por mais de uma barra, tem-se total liberdade para traçar os diagramas de forças normais e cortantes no lado que se quiser das barras, de forma a evitar superposições de diagramas.

No caso dos diagramas de momentos fletores, entretanto, não existe nenhuma flexibilidade: eles devem ser sempre desenhados no lado tracionado das barras. As superposições observadas no diagrama de momentos fletores da Figura 5.80 são, portanto, inevitáveis.

Exemplo 5.18

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada da Figura 5.81.

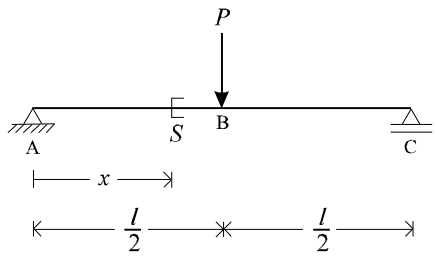


Figura 5.81

Todas as estruturas até aqui examinadas tinham como único apoio um engastamento. Por esta razão, foi possível determinar seus esforços solicitantes sem antes calcular as reações de apoio, visto que sempre de um dos lados de qualquer corte todos os esforços externos aplicados na estrutura eram conhecidos.

No caso das vigas simplesmente apoiadas isto não mais ocorre. Por exemplo, tanto no lado esquerdo como no lado direito da seção S da Figura 5.81 existem aplicadas reações de apoio, que precisam então ser determinadas para se poder utilizar o teorema fundamental e obter os esforços solicitantes nessa seção.

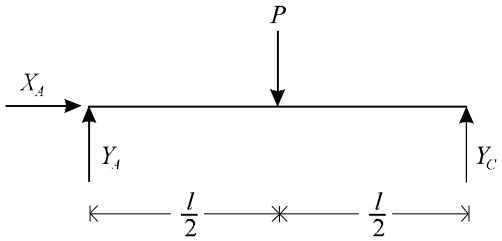


Figura 5.82

Para obter as reações de apoio desta viga, mostradas na Figura 5.82, utilizam-se as três equações de equilíbrio da estática:

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A + Y_C = P \qquad (5.54)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -P\frac{l}{2} + Y_C = 0 .$$

Decorrem destas equações as reações

$$X_A = 0$$

$$Y_A = Y_C = \frac{P}{2} . \qquad (5.55)$$

Os esforços externos que atuam nesta viga simplesmente apoiada estão mostrados na Figura 5.83(a).

Os esforços solicitantes do trecho AB podem ser obtidos cortando a viga em uma seção genérica S_1 deste trecho de barra, e reduzindo nesta seção a única força externa aplicada à esquerda do corte, como se indica na Figura 5.83(b).

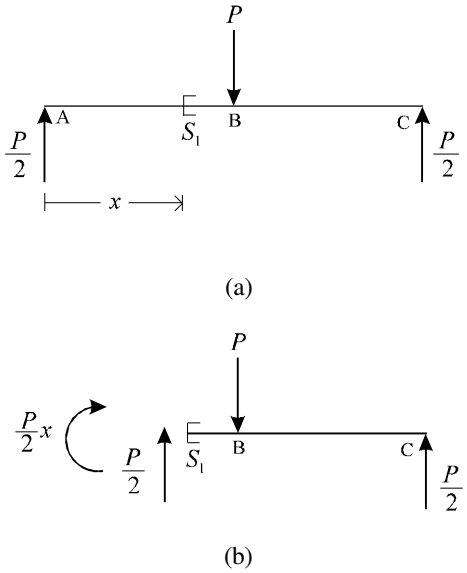


Figura 5.83

Tem-se então no trecho AB

$$N = 0$$

$$V = \frac{P}{2} \qquad (5.56)$$

$$M = \frac{P}{2}x\,.$$

A obtenção dos esforços solicitantes do trecho CB é feita de forma análoga, cortando a viga em uma seção genérica S_2 e nela reduzindo a única força externa aplicada à sua direita, como mostrado na Figura 5.84(b).

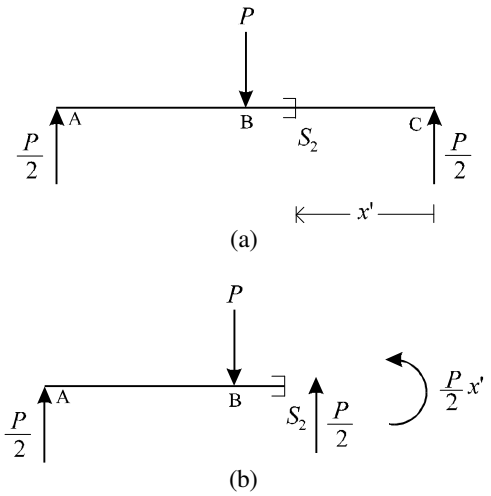


Figura 5.84

Tem-se no trecho CB

$$N = 0$$

$$V = -\frac{P}{2} \qquad (5.57)$$

$$M = \frac{P}{2}x'.$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga simplesmente apoiada estão traçados na Figura 5.85.

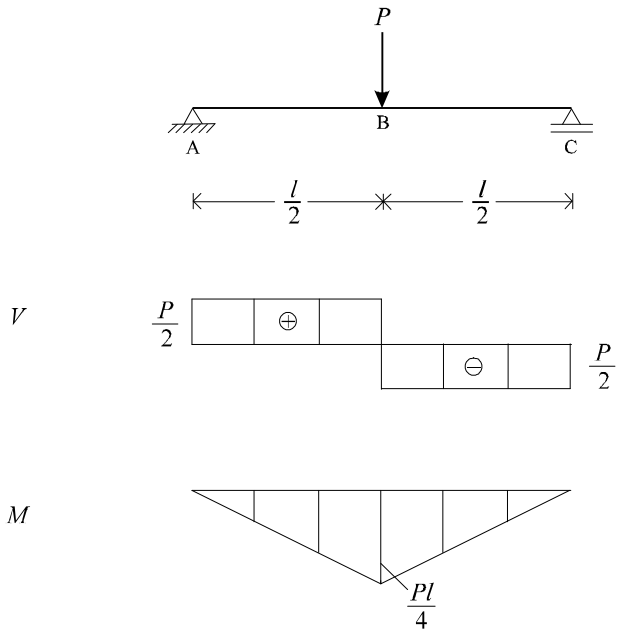


Figura 5.85

Nota 5.24

Para obter os esforços solicitantes na seção S_1 foi reduzida nesta seção a única força externa aplicada à esquerda do corte; é claro que, alternativamente, poderiam ter sido reduzidas nesta seção as duas forças externas aplicadas à sua direita. Optou-se pelo primeiro procedimento, por ser o mais simples.

Observação totalmente análoga se aplica à obtenção dos esforços solicitantes em S_2.

Nota 5.25

Como no ponto B está aplicada uma força concentrada perpendicular ao eixo da viga, nele a força cortante não se define, e nele ocorre uma descontinuidade no diagrama de forças cortantes.

Exemplo 5.19

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada da Figura 5.86.

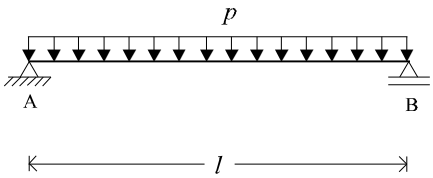


Figura 5.86

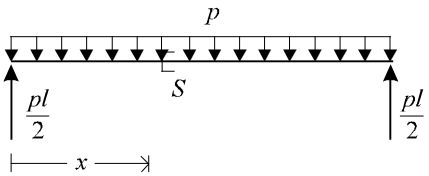
As reações de apoio desta viga estão mostradas na Figura 5.87(a).

Tem-se então nesta viga

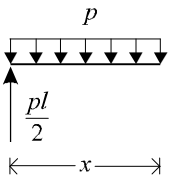
$$V = \frac{pl}{2} - px$$

$$M = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2}\,. \tag{5.58}$$

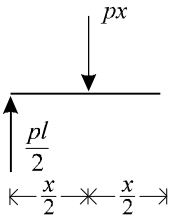
Os diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.88.



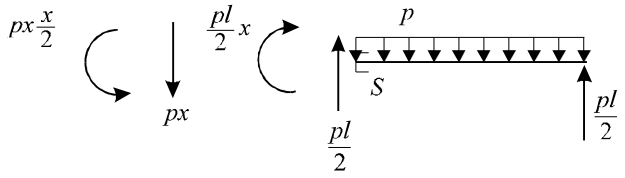
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.87

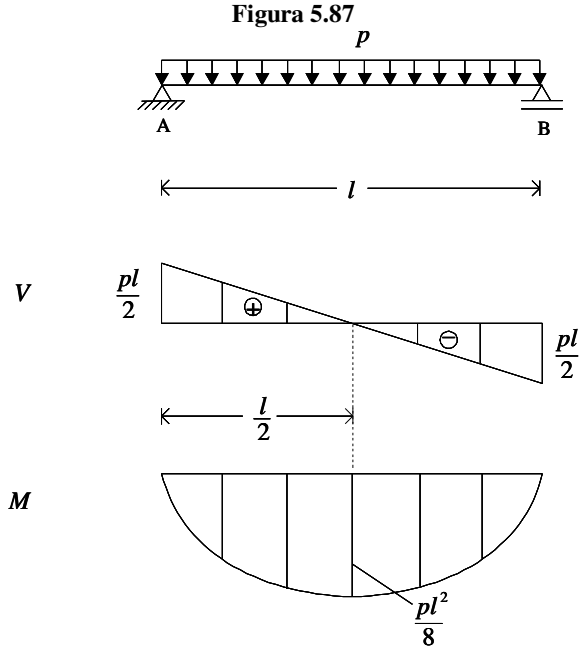


Figura 5.88

Nota 5.26

O máximo momento fletor desta viga se dá no ponto em que se tem

$$\frac{dM}{dx} = 0\,. \tag{5.59}$$

Como $\frac{dM}{dx} = V(x)$, o máximo momento fletor se dá no ponto em que a força cortante se anula.

Isto ocorre no meio do vão, logo

$$\max M(x) = M(\frac{l}{2}) = \frac{pl^2}{8}\,. \tag{5.60}$$

Nota 5.27

No exemplo anterior o momento máximo também se dá no meio do vão. Embora a força cortante neste ponto não seja definida, pode-se considerar que nele ela se "anula", já que passa de um valor positivo em uma seção imediatamente à sua esquerda para um negativo imediatamente à sua direita.

Como se observou anteriormente, o fato da força cortante no centro da viga do Exemplo 5.18 não ser definida decorre de um defeito do modelo matemático empregado para representar a viga real, com a substituição de um carregamento distribuído aplicado em uma área muito pequena por uma força concentrada. Se se utilizasse um modelo matemático mais exato, com consideração do carregamento distribuído, como se mostrou na Nota 5.5, verificar-se-ia que a força cortante se anularia de fato no centro da viga ou muito próximo a ele.

Pode-se então afirmar que nos pontos em que o momento fletor apresenta um extremo - máximo ou mínimo - a força cortante se anula de fato ou figuradamente, como no Exemplo 5.18.

No caso dos Exemplos 5.18 e 5.19, os pontos em que a força cortante se "anula" são pontos de máximo.

Nota 5.28

Os esforços solicitantes da viga deste exemplo foram determinados por meio da aplicação direta do teorema fundamental.

Alternativamente, poderiam ter sido obtidos por intermédio da integração das equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) = -p$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -px + C_1 \tag{5.61}$$

$$M(x) = -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2 .$$

As condições de contorno desta viga, que permitem determinar as constantes de integração C_1 e C_2, são:

$$\begin{aligned} M(0) &= 0 \\ M(l) &= 0 , \end{aligned} \tag{5.62}$$

visto que os apoios articulados nas extremidades desta viga não introduzem momentos como reações de apoio.

Destas condições de contorno, obtém-se

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{pl}{2} \\ C_2 &= 0 , \end{aligned} \tag{5.63}$$

logo

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{pl}{2} - px \\ M(x) &= \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} , \end{aligned} \tag{5.64}$$

que coincidem com as expressões (5.58) obtidas anteriormente.

Como já se comentou, em situações como a desta viga deve-se obter os esforços solicitantes pelo teorema fundamental, não por meio da integração das equações diferenciais de equilíbrio.

Exemplo 5.20

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.89.

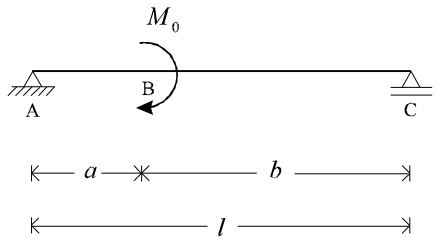


Figura 5.89

As reações de apoio desta viga estão indicadas na Figura 5.90.

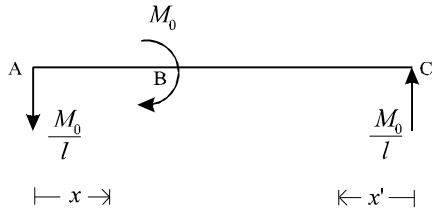


Figura 5.90

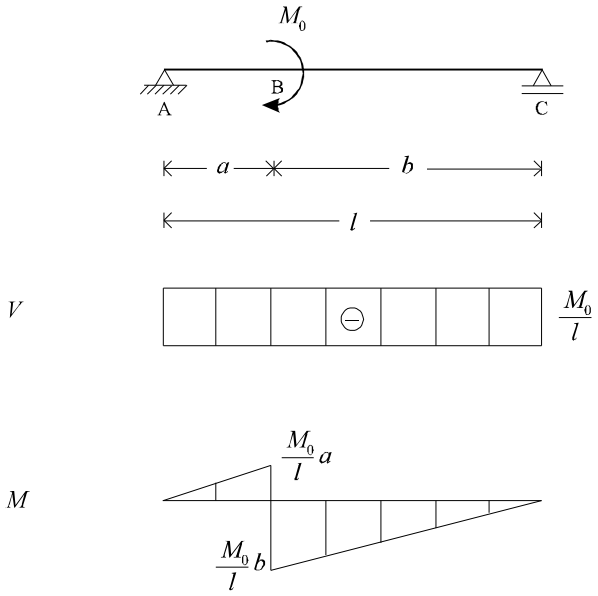


Figura 5.91

Os esforços solicitantes do trecho AB são

$$V(x) = -\frac{M_0}{l}$$

$$M(x) = -\frac{M_0}{l}x \tag{5.65}$$

e os do trecho CB são

$$V(x') = -\frac{M_0}{l}$$

$$M(x') = \frac{M_0}{l}x'. \tag{5.66}$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga simplesmente apoiada estão traçados na Figura 5.91.

Nota 5.29

No ponto B desta viga é aplicado um momento concentrado, o que introduz no diagrama de momento fletores uma descontinuidade com módulo igual ao do momento aplicado M_0, como se observa na Figura 5.91. O momento fletor em B não se define.

Exemplo 5.21

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da Figura 5.92.

O momento M_0 aplicado em A é um esforço externo ativo introduzido, por exemplo, como se mostra na Figura 5.93.

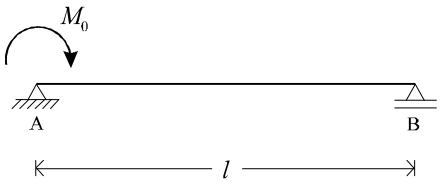


Figura 5.92

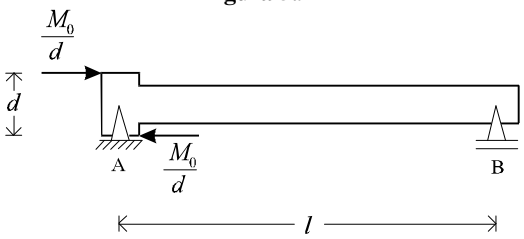


Figura 5.93

Figura 5.94

As reações de apoio desta viga estão mostradas na Figura 5.94.

Os esforços solicitantes são

$$V(x) = -\frac{M_0}{l}$$
$$M(x) = M_0 - \frac{M_0}{l}x\,. \tag{5.67}$$

Os diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.95.

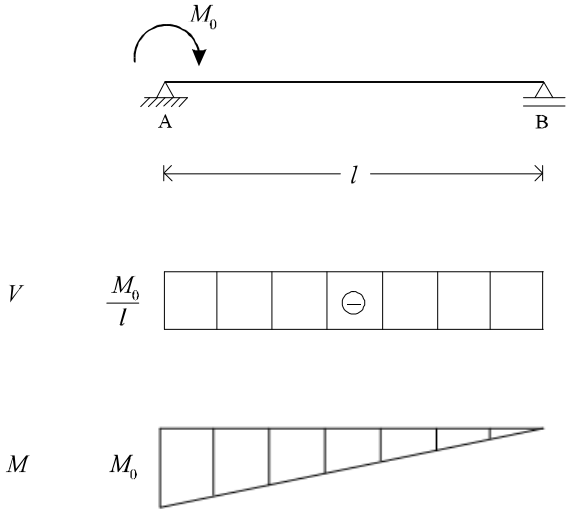


Figura 5.95

Nota 5.30

Observou-se há pouco que o momento M_0 aplicado em A é um momento externo ativo, introduzido, por exemplo, como se indica na Figura 5.93.

É extremamente importante perceber que tanto em A como em B não podem atuar momentos externos reativos. Isto, porque tanto a articulação fixa em A como a articulação móvel em B são apoios que

permitem a livre rotação da viga em torno dos pontos vinculados, não introduzindo portanto momentos como reações de apoio.

Na Figura 5.96 mostra-se como se deforma a viga deste exemplo, ficando claro que as rotações de suas extremidades são livres, não sendo impedidas pelos apoios. O ângulo de rotação da extremidade esquerda da viga é φ_A, no sentido horário, e o da extremidade direita é φ_B, no sentido anti-horário.

Figura 5.96

Sempre que não houver momentos externos ativos aplicados nas extremidades articuladas de uma estrutura, os momentos fletores nestas extremidades serão nulos. É o que ocorre em ambas as extremidades das vigas simplesmente apoiadas dos Exemplos 5.18, 5.19 e 5.20 e na extremidade direita da viga simplesmente apoiada deste exemplo.

Na extremidade articulada de uma estrutura o momento fletor só poderá ser diferente de zero se nesta extremidade for aplicado um momento externo ativo, como no caso da extremidade esquerda da viga deste exemplo.

Estes comentários são importantíssimos, e podem ser resumidos na seguinte frase:

Na extremidade articulada de uma estrutura o momento fletor só não será nulo se nela for aplicado um momento externo ativo. Neste caso, o momento fletor nesta extremidade terá módulo igual ao deste momento externo aí aplicado.

Exemplo 5.22

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada da Figura 5.97.

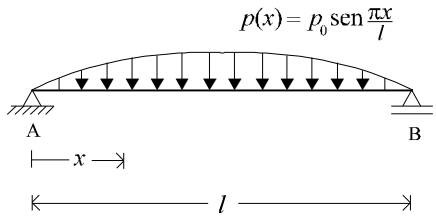


Figura 5.97

Esta viga é daquelas que devem ter os esforços solicitantes determinados por meio da integração das equações diferenciais de equilíbrio, visto que o carregamento distribuído que nela atua é senoidal.

Tem-se, então,

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p(x) = -p_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = p_0 \frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} + C_1 \tag{5.68}$$

$$M(x) = p_0 \frac{l^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + C_1 x + C_2 .$$

As constantes de integração são determinadas por meio das condições de contorno:

$$\begin{matrix} M(0) = 0 & & C_1 = 0 \\ & \Rightarrow & \\ M(l) = 0 & & C_2 = 0 \end{matrix} \tag{5.69}$$

Tem-se, portanto,

$$\begin{aligned} V(x) &= p_0 \frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} \\ M(x) &= p_0 \frac{l^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} . \end{aligned} \tag{5.70}$$

Os diagramas de esforços solicitantes estão traçados na Figura 5.98.

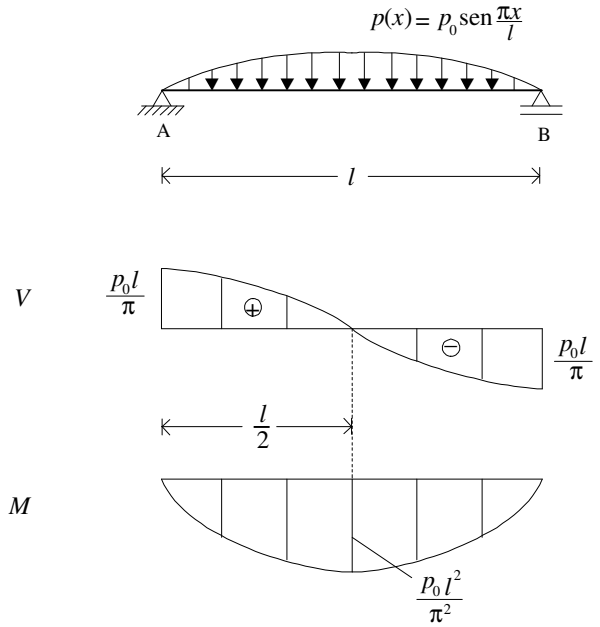


Figura 5.98

O máximo momento fletor se dá no meio do vão, onde a força cortante se anula.

$$\max M = M(\frac{l}{2}) = \frac{p_0 l^2}{\pi^2}. \qquad (5.71)$$

Nota 5.31

Observa-se neste exemplo que a determinação dos esforços solicitantes pela integração das equações diferenciais de equilíbrio não exige o cálculo prévio das reações de apoio.

Ao contrário, são as reações de apoio que podem ser obtidas a partir das expressões dos esforços solicitantes. Tem-se nas extremidades desta viga $V(0) = \frac{p_0 l}{\pi}$ e $V(l) = -\frac{p_0 l}{\pi}$, o que mostra que nestas duas extremidades atuam forças verticais orientadas para cima, como se indica na Figura 5.99. Estas duas forças verticais nas extremidades da barra são as reações de apoio, ou seja, $Y_A = Y_B = \frac{p_0 l}{\pi}$.

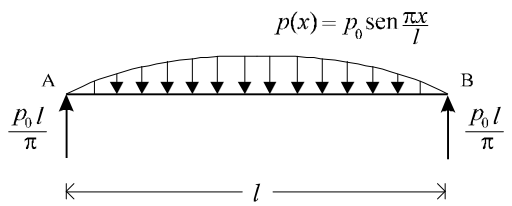


Figura 5.99

Exemplo 5.23

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada com um balanço à esquerda indicada na Figura 5.100.

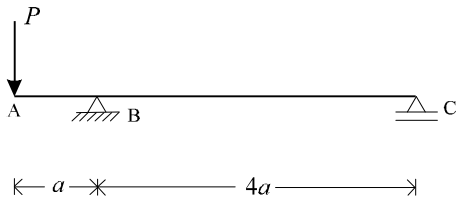


Figura 5.100

As reações de apoio desta viga estão apresentadas na Figura 5.101.

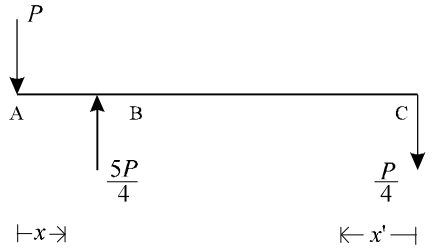


Figura 5.101

Os esforços solicitantes do trecho AB são

$$V(x) = -P$$
$$M(x) = -Px \tag{5.72}$$

e os do trecho CB são

$$V(x') = \frac{P}{4}$$
$$M(x') = -\frac{P}{4}x'. \tag{5.73}$$

Os correspondentes diagramas estão traçados na Figura 5.102.

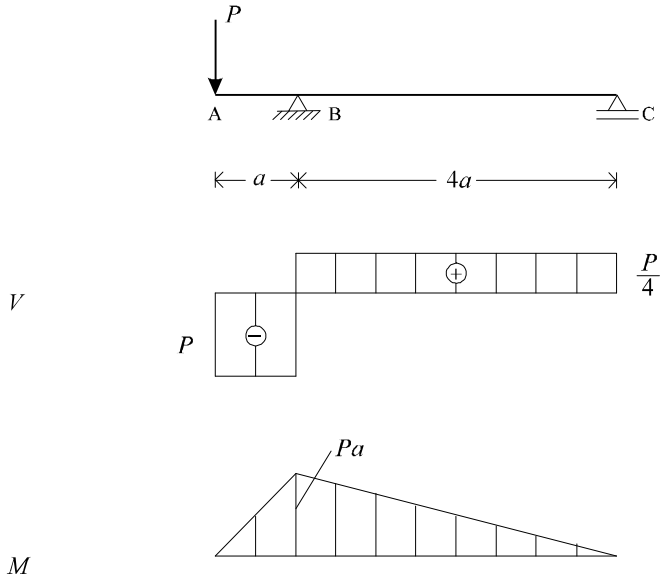


Figura 5.102

Nota 5.32

Observa-se que neste exemplo há momento fletor em B, apesar de se ter neste ponto uma articulação.

A explicação para este fato é muito simples, e para entendê-la observe-se a Figura 5.103, em que se apresenta uma vista lateral bidimensional desta viga.

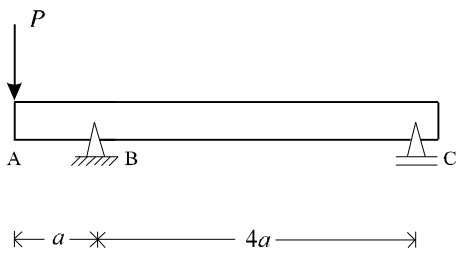


Figura 5.103

Cortando esta barra em uma seção imediatamente à esquerda de B e nela reduzindo a força externa *P* aplicada à sua esquerda, obtêm-se os esforços indicados na Figura 5.104.

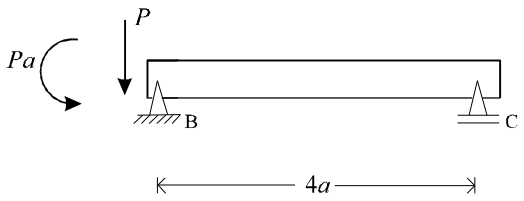


Figura 5.104

Como se observa, o momento fletor em B é o momento transferido pelo trecho em balanço AB ao trecho simplesmente apoiado BC da viga.

Nota 5.33

O esquema de representação desta viga mostrado na Figura 5.100 é uma simplificação da representação mais rigorosa da Figura 5.105.

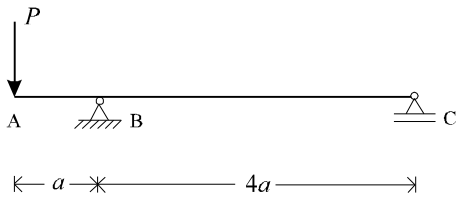


Figura 5.105

Observa-se que neste último esquema as articulações estão explicitamente indicadas, tendo-se colocado a articulação em B abaixo do eixo da viga, para mostrar que existe continuidade de rotação entre os trechos AB e BC, ou seja, que nestes dois trechos se tem a mesma rotação em B.

Esta continuidade fica mais clara ao se considerar a viga deformada, mostrada na Figura 5.106.

Figura 5.106

Ter-se-ia situação completamente diferente no caso da viga mostrada na Figura 5.107, em que não existe continuidade de rotação entre os trechos AB e BC, não se tendo nestes dois trechos as mesmas rotações em B.

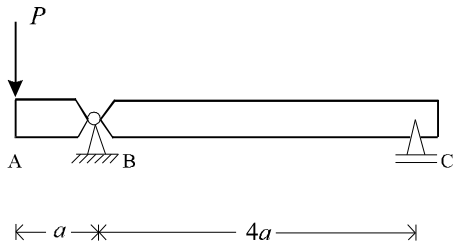


Figura 5.107

O esquema empregado para representar esta última viga é o da Figura 5.108, em que a articulação em B é colocada sobre o eixo da viga, indicando que não existe continuidade de rotação nesse ponto.

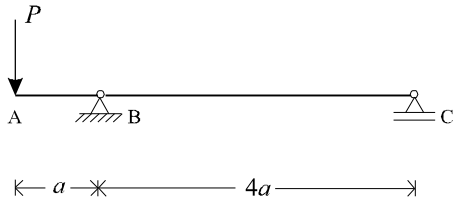


Figura 5.108

Esta viga é hipostática, não fica em equilíbrio, apresentando o movimento sugerido na Figura 5.109.

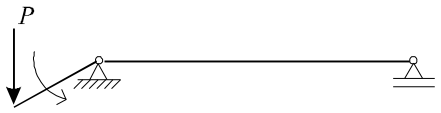


Figura 5.109

Recomenda-se ao leitor que mais uma vez observe as vigas das Figuras 5.103 e 5.107, analise as diferenças de seu comportamento físico, e compare seus esquemas de representação das Figuras 5.105 e 5.108.

As vigas em que existe continuidade de rotação em B costumam ser indicadas da forma mais simples apresentada na Figura 5.100; aquelas em que não existe continuidade de rotação em B são indicadas como na Figura 5.108.

Exemplo 5.24

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga simplesmente apoiada com dois balanços da Figura 5.110, determinando a seção em que se tem o máximo momento fletor positivo e calculando o seu valor.

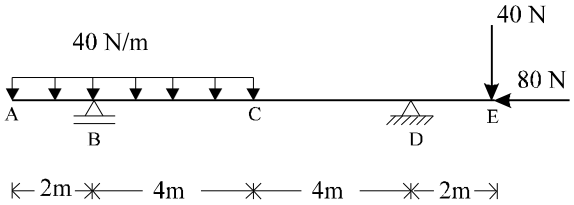


Figura 5.110

As reações de apoio desta viga estão indicadas na Figura 5.111.

No balanço da esquerda, isto é, entre A e B, tem-se

$$N = 0$$

$$V = -40x \tag{5.74}$$

$$M = -\frac{40x^2}{2}$$

e no da direita, isto é, entre E e D, tem-se

$$N = -80$$

$$V = 40 \tag{5.75}$$

$$M = -40x'.$$

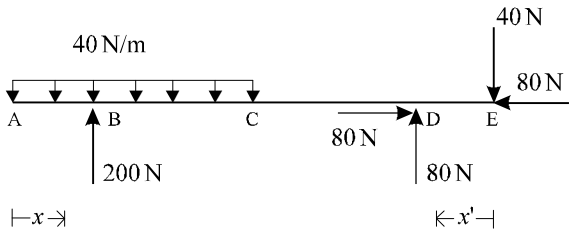


Figura 5.111

Como já se comentou, convém traçar os diagramas de esforços solicitantes de um trecho de barra assim que suas expressões analíticas tenham sido obtidas.

Já se deve, portanto, traçar os diagramas correspondentes aos dois balanços, como se mostra na Figura 5.112.

A obtenção dos esforços solicitantes do trecho simplesmente apoiado desta viga fica facilitada se se utilizar o procedimento apresentado no Exemplo 5.17.

Como os dois balanços desta viga já foram estudados, eles podem ser retirados da barra, cortando-a em uma seção imediatamente à esquerda de B e em uma seção imediatamente à direita de D, aplicando-se nestas seções os esforços transmitidos por estes balanços, como mostrado na Figura 5.113.

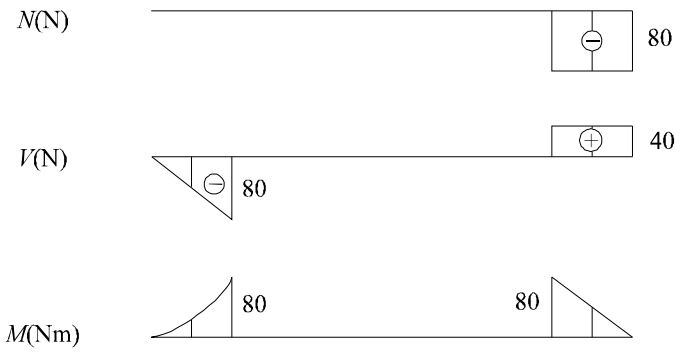


Figura 5.112

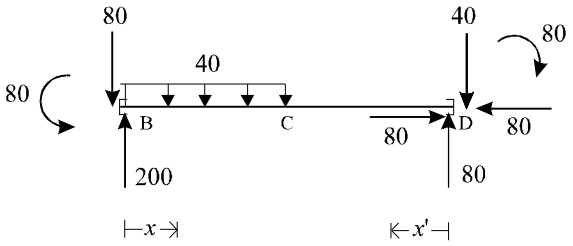


Figura 5.113

Os esforços solicitantes entre B e C são

$$N = 0$$

$$V = 120 - 40x \qquad (5.76)$$

$$M = -80 + 120x - \frac{40x^2}{2}$$

e entre D e C são

$$N = 0$$

$$V = -40 \qquad (5.77)$$

$$M = -80 + 40x'.$$

Pode-se agora terminar o traçado dos diagramas de esforços solicitantes, o que se faz na Figura 5.114.

Nos diagramas de momentos fletores deve-se sempre indicar onde se dão e que valor têm os máximos momentos fletores. A razão para isto é muito simples, e já foi mencionada no início deste capítulo: via de regra, as seções críticas de uma estrutura, isto é, aquelas em que se tem as máximas tensões e nas quais ela poderia vir a romper-se, são aquelas em que se tem os máximos esforços solicitantes, motivo pelo qual se deve sempre obtê-los e indicá-los nos diagramas.

Para determinar as seções em que se tem os momentos fletores máximos, lembra-se que $\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$, logo que se tem $V(x) = 0$ nos pontos em que os momentos fletores apresentam um extremo.

Observa-se no diagrama de forças cortantes da Figura 5.114 que no trecho BC da barra há uma seção em que a força cortante se anula. Tem-se então nesta seção um extremo do momento fletor. A posição desta seção crítica pode ser determinada por meio de (5.76):

$$V(x) = 120 - 40x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\text{m}\,. \qquad (5.78)$$

A 3m à direita do ponto B tem-se então um momento fletor extremo, cujo valor também é obtido através de (5.76):

$$M(3) = -80 + 120.3 - \frac{4.3^2}{2}\,. \qquad (5.79)$$

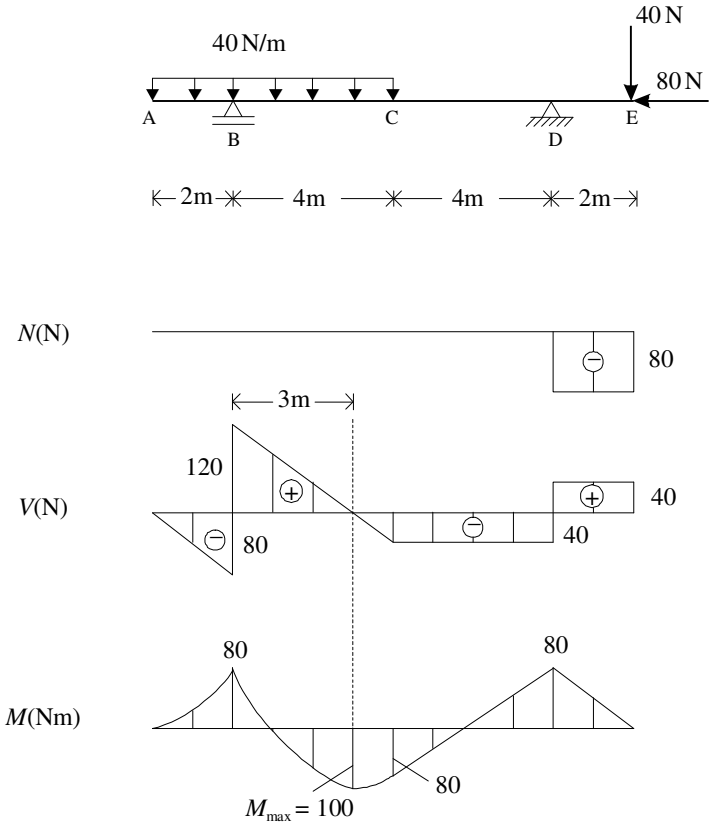


Figura 5.114

Este extremo é portanto um máximo, o máximo momento fletor positivo nesta viga. Sua posição e seu valor estão indicados nos diagramas da Figura 5.114.

Nota 5.34

Nas expressões (5.74) e (5.75) dos esforços solicitantes nos balanços faz-se referência às abcissas x e x' indicadas na Figura 5.111; nas expressões (5.76) e (5.77) dos esforços solicitantes no trecho simplesmente apoiado da viga faz-se referência às abcissas x e x' indicadas na Figura 5.113. Apesar de se tratar de dois conjuntos de referenciais com origens diferentes, por simplicidade optou-se por identificá-los com a mesma letra, para não introduzir outras duas abcissas adicionais.

Nenhuma confusão irá ocorrer, desde que sempre se associe cada um dos dois conjuntos de expressões à figura a ele relacionada.

Nota 5.35

Apresenta-se nesta nota uma forma alternativa de determinar os esforços solicitantes do trecho CD da viga.

A Figura 5.113 mostra o trecho simplesmente apoiado da viga, tendo-se a partir dela obtido os esforços solicitantes em BC e em DC - expressões (5.76) e (5.77).

Cortando a viga em C e aplicando nesta seção os esforços transferidos pelo trecho da barra à esquerda deste corte, tem-se o segmento de viga mostrado na Figura 5.115.

Tem-se então como esforços solicitantes no trecho CD:

$$N = 0$$

$$V = -40 \qquad (5.80)$$

$$M = 80 - 40x$$

As expressões (5.80) apresentam os esforços solicitantes em CD como funções de x, enquanto as expressões (5.77) os apresentavam como funções de x'.

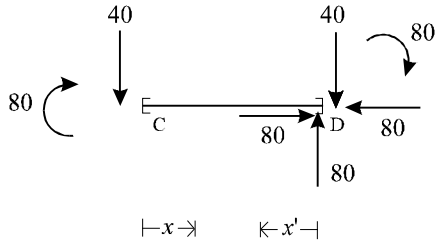


Figura 5.115

É claro que um procedimento análogo a este pode ser também utilizado para obter as expressões dos esforços solicitantes em CB como funções de x'.

Deixa-se a critério do leitor optar por uma ou outra forma de chegar às expressões dos esforços solicitantes no trecho central desta viga, lembrando que nesta opção deve-se sempre escolher a mais simples e menos sujeita a erros.

Exemplo 5.25

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada da Figura 5.116.

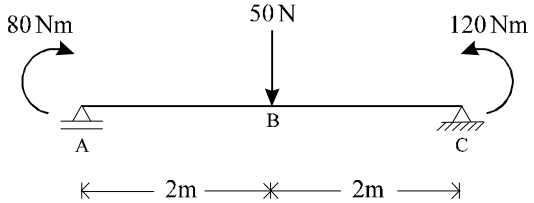


Figura 5.116

Neste exemplo pede-se apenas o diagrama de momentos fletores. Em seu traçado se utilizará o princípio da superposição de efeitos, decompondo-se o carregamento externo ativo que atua na viga conforme indicado na Figura 5.117.

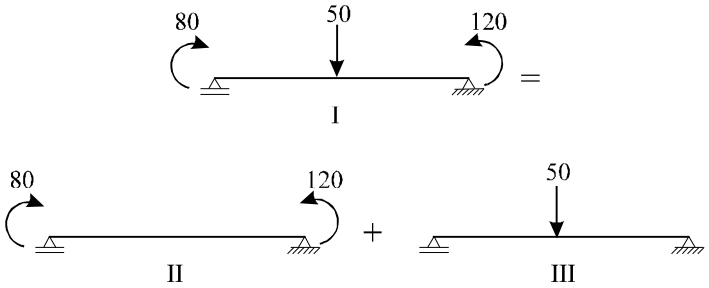


Figura 5.117

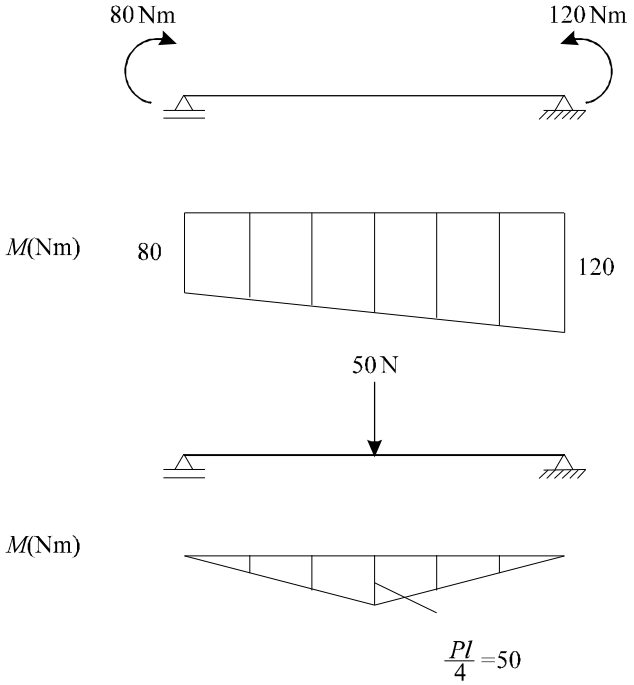


Figura 5.118

De acordo com o princípio da superposição de efeitos, pode-se obter os efeitos da viga I somando os das vigas II e III. Em particular, os momentos fletores da viga I podem ser determinados somando os das vigas II e III. Os diagramas de momentos fletores destas duas vigas estão apresentados na Figura 5.118.

Somando estes dois diagramas, obtém-se o diagrama de momentos fletores procurado. Esta soma pode ser feita graficamente, por meio do procedimento abaixo, ilustrado na Figura 5.119:

a) Traça-se inicialmente o diagrama de momentos fletores da viga II, que é um segmento de reta unindo os momentos fletores nas extremidades da barra.

   Este segmento de reta que liga os momentos fletores nas extremidades da barra - o segmento $\overline{OP}$ da Figura 5.119 - recebe o nome de linha de fecho da viga I.

b) Dependura-se na linha de fecho o diagrama de momentos fletores da viga III. Este diagrama dependurado encontra-se hachurado na Figura 5.119.

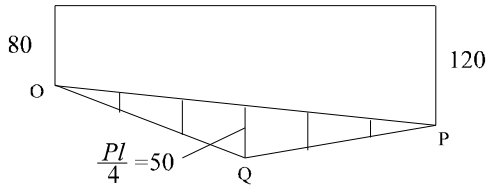


Figura 5.119

c) O diagrama de momentos final é o diagrama OQP da Figura 5.119.

Na Figura 5.120 apresenta-se o diagrama de momentos fletores pedido neste exemplo.

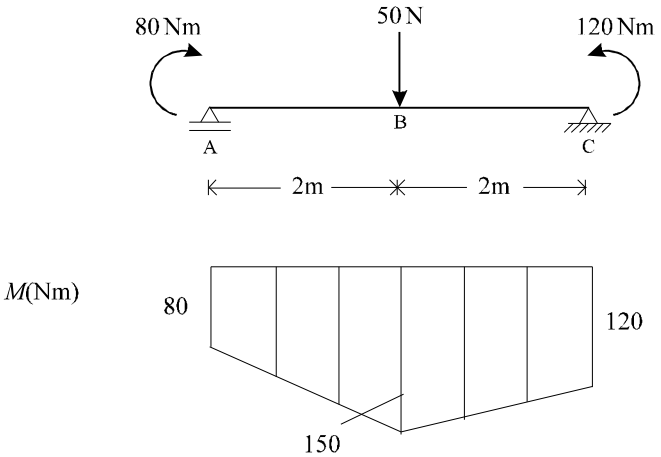


Figura 5.120

Exemplo 5.26

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada da Figura 5.121.

A resolução deste problema será feita empregando o mesmo procedimento que no exemplo anterior.

O carregamento ativo da viga é decomposto conforme se indica na Figura 5.122, separando-se os momentos aplicados nas extremidades da viga do restante do carregamento.

Os diagramas de momentos fletores das vigas II e III estão na Figura 5.123; observa-se que os momentos fletores da viga II são negativos e os da viga III, positivos.

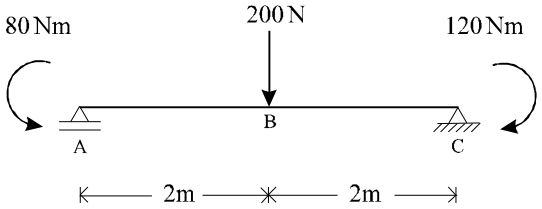


Figura 5.121

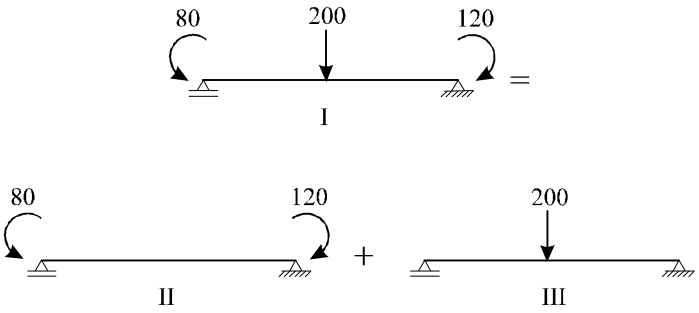


Figura 5.122

Para obter o diagrama de momentos fletores procurado devem-se somar os dois diagramas da Figura 5.123, o que se fará graficamente, dependurando o diagrama de momentos fletores da viga III na linha de fecho da viga I. Esta construção é mostrada na Figura 5.124, em que o diagrama dependurado encontra-se hachurado.

O diagrama de momentos fletores que se está querendo obter, isto é, o diagrama de momentos fletores da viga I, é o delimitado pelo diagrama dependurado OQP e pelo eixo das abcissas, hachurado na Figura 5.125

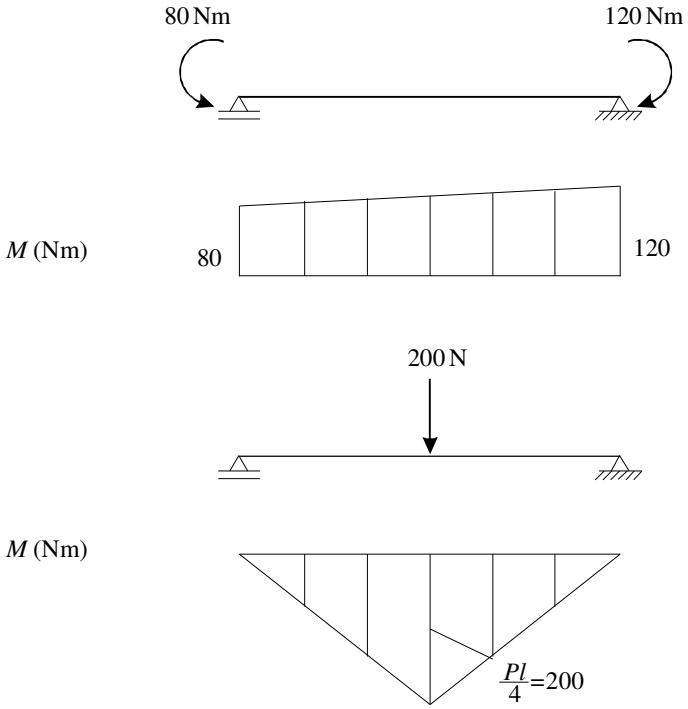


Figura 5.123

Não é difícil mostrar que o diagrama da Figura 5.125 é o diagrama procurado. Lembrando que $M_I = M_{II} + M_{III}$, que M_{II} é negativo e M_{III} é positivo, verifica-se que, na região central da viga, como $|M_{II}| < M_{III}$, então $M_I > 0$, devendo ser desenhado abaixo do eixo das abcissas. Na Figura 5.126(a) evidencia-se claramente que na região central da viga I o diagrama de momentos fletores é o delimitado pelo diagrama dependurado e pelo eixo das abcissas.

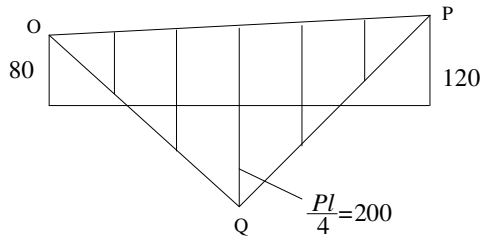


Figura 5.124

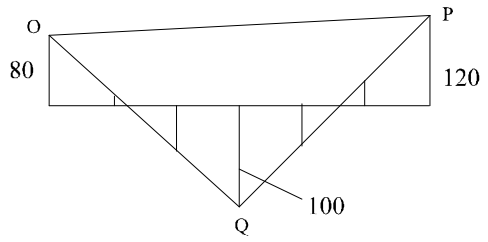
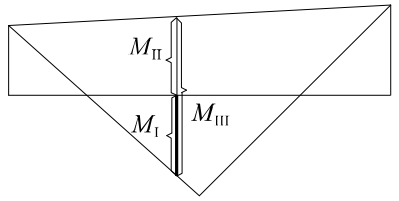


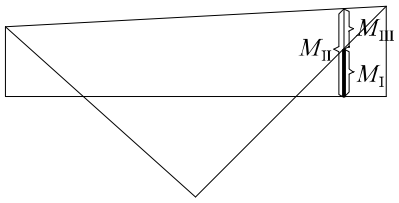
Figura 5.125

Nas laterais da viga tem-se $|M_{II}| > M_{III}$, logo $M_I < 0$, devendo então ser desenhado acima do eixo das abcissas. A Figura 5.126(b) mostra que novamente o diagrama de momentos fletores da viga I é o delimitado pelo diagrama dependurado e pelo eixo das abcissas.

O diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.121 é portanto o apresentado na Figura 5.127.



(a)



(b)

Figura 5.126

Nota 5.36

Nestes dois últimos exemplos utilizou-se uma mesma técnica para traçar o diagrama de momentos fletores de uma viga simplesmente apoiada, que consiste em dependurar na linha de fecho da viga o diagrama de momentos fletores dos esforços aplicados entre os apoios agindo isoladamente na viga, obtendo como diagrama de momentos fletores final o delimitado pelo diagrama dependurado e pelo eixo das abcissas.

A grande utilidade desta técnica fica bem mais patente neste último exemplo que no anterior.

O próximo exemplo ilustra mais uma vez o emprego desta técnica.

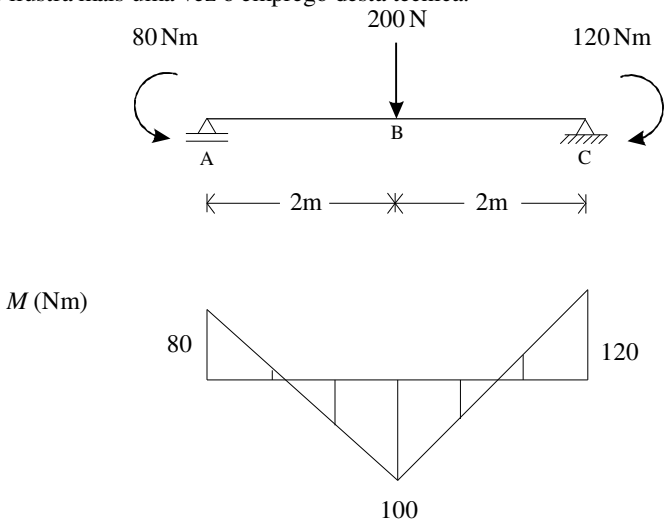


Figura 5.127

Exemplo 5.27

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.128

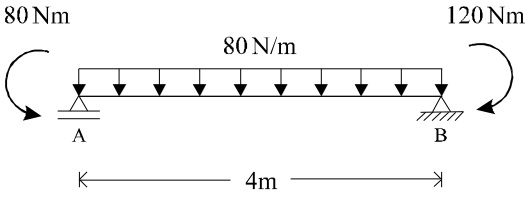


Figura 5.128

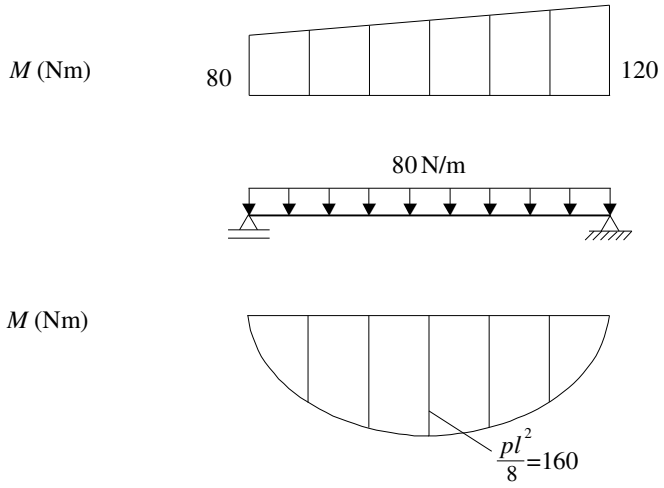


Figura 5.129

Na Figura 5.129 apresentam-se a linha de fecho da viga da Figura 5.128 e o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada submetida exclusivamente ao carregamento distribuído.

O diagrama de momentos fletores procurado é então o hachurado na Figura 5.130.

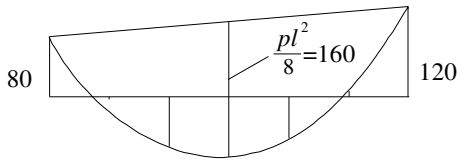


Figura 5.130

O diagrama de momentos pedido neste exemplo é assim o da Figura 5.131.

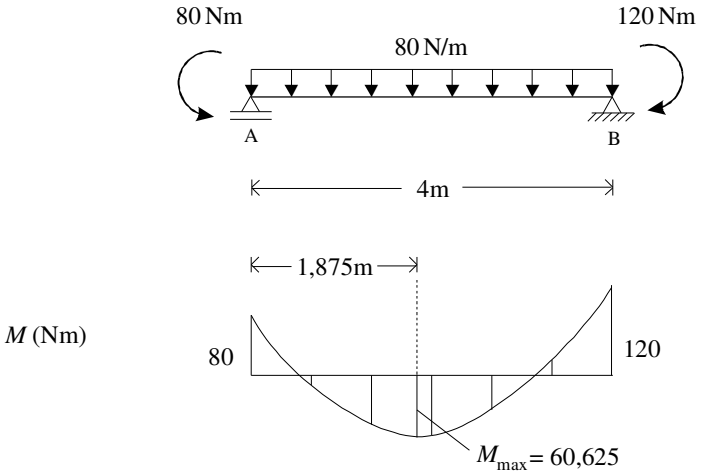


Figura 5.131

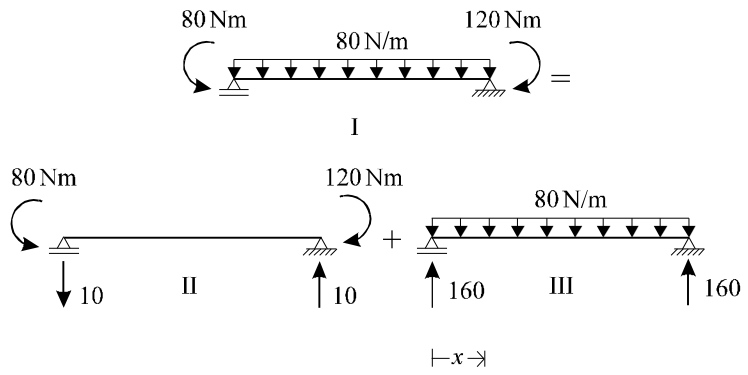


Figura 5.132

Como já se comentou, no diagrama de momentos fletores deve-se indicar o máximo momento fletor positivo.

Sua obtenção se faz determinando inicialmente o seção em a força cortante se anula.

Para isto, pode-se utilizar a mesma superposição de efeitos empregada para chegar ao diagrama de momentos fletores, indicada na Figura 5.132, em que também figuram as reações de apoio das vigas II e III.

Tem-se então

$$\begin{gathered} V_{II} = -10 \\ V_{III} = 160 - 80x \\ V_I = V_{II} + V_{III} = 150 - 80x \\ V_I = 150 - 80x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}875\text{m} \end{gathered} \tag{5.81}$$

A seção em que se tem o máximo momento fletor está portanto a 1,875m à direita do apoio da esquerda. Tem-se nesta seção:

$$\begin{gathered} M_{II} = -80 - 10.1{,}875 \\ M_{III} = 160.1{,}875 - 80.\frac{1{,}875^2}{2} \\ \max\ M_I = M_{II} + M_{III} = 60{,}625 \text{ Nm} \end{gathered} \tag{5.82}$$

<u>Nota 5.37</u>

Para obter com precisão um diagrama de momentos fletores como o da Figura 5.131 deve-se traçá-lo por pontos: quanto mais pontos forem empregados, tanto mais preciso ele será.

Uma forma alternativa de traçar um diagrama de momentos fletores parabólico, bastante simples e com boa precisão, será apresentada a seguir.

Ela consiste em traçá-lo utilizando como guia seis parâmetros: os momentos fletores em três pontos e as tangentes ao diagrama nestes mesmos três pontos.

Sua apresentação se faz na Figura 5.133, em que se considera uma viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

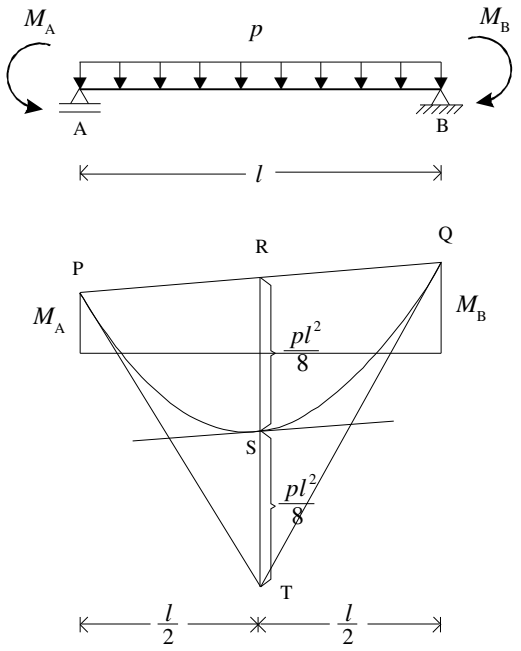


Figura 5.133

Os três pontos pelos quais passa o diagrama de momentos fletores são os pontos P, Q e S da Figura 5.133(b). Nas extremidades da viga, os momentos fletores são M_A e M_B; no centro do vão, como se viu há pouco, obtém-se o momento fletor dependurando na linha de fecho PQ o segmento RS, de valor $\frac{pl^2}{8}$.

Pode-se demonstrar que as retas TP e TQ são as tangentes ao diagrama em suas extremidades, e que no ponto S a tangente ao diagrama é paralela à linha de fecho PQ. Observa-se que o ponto T está sobre a mesma vertical que o ponto S, a uma distância $\frac{pl^2}{8}$ deste.

Conhecidos os momentos fletores nas extremidades da barra e no meio do vão e as tangentes ao diagrama nestes mesmos pontos, fica fácil traçá-lo de forma aproximada, como se faz na Figura 5.133(b).

Como normalmente se determina analiticamente a posição do máximo momento fletor positivo e seu valor, tem-se assim outro parâmetro adicional para o traçado aproximado do diagrama de momentos fletores da viga.

Exemplo 5.28

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.134.

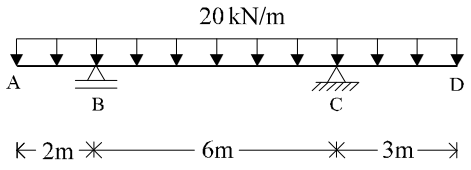


Figura 5.134

No traçado do diagrama de momentos fletores desta viga serão utilizadas as técnicas apresentadas nos últimos exemplos.
Os momentos fletores nos apoios são provenientes dos dois balanços da viga, tendo-se $M_B = -40$ kNm e $M_C = -90$ kNm.

Definiu-se anteriormente a linha de fecho de uma viga simplesmente apoiada: é a linha que une os momentos fletores nas extremidades da viga. Generaliza-se agora esta definição para uma viga qualquer: linha de fecho de uma viga é a linha que une os momentos fletores nas extremidades e nos apoios da viga.

A linha de fecho da viga que está sendo analisada é então a linha OPQR mostrada na Figura 5.135.

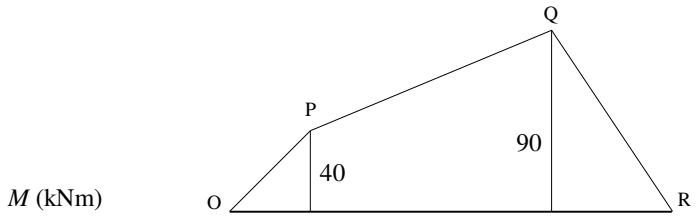


Figura 5.135

O diagrama de momentos fletores do trecho central desta viga se obtém dependurando na linha de fecho PQ o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada da Figura 5.136(a).

Não é difícil mostrar que a mesma construção pode ser utilizada para traçar os diagramas de momentos fletores dos balanços, ou seja, que eles podem ser obtidos dependurando respectivamente nas linhas de fecho OP e QR os diagramas de momentos fletores das vigas simplesmente apoiadas das Figuras 5.136(b) e (c).

Vai-se demonstrar esta afirmação para o balanço da esquerda. Para isto, retira-se da viga este balanço, cortando-a em uma seção transversal imediatamente à esquerda do apoio B e aplicando na seção do corte os esforços que nela atuam. Na Figura 5.137(a) apresenta-se o balanço assim retirado da viga.

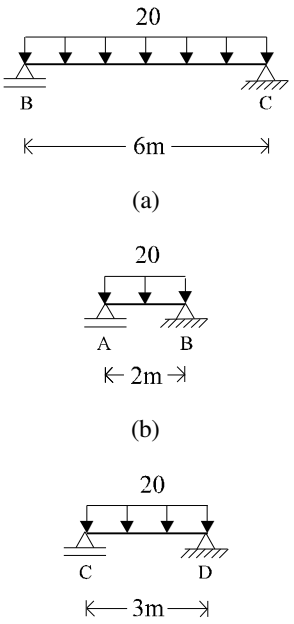
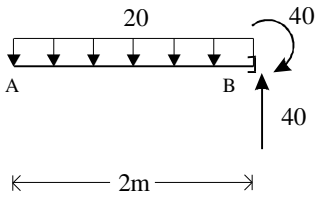


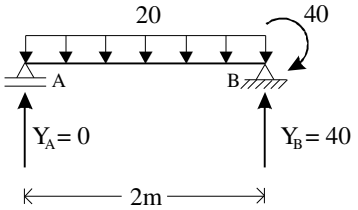
Figura 5.136

O que se deseja provar é que o diagrama de momentos fletores deste balanço é igual ao da viga simplesmente apoiada da Figura 5.137(b); este, por sua vez, pode ser obtido empregando as técnicas apresentadas nos últimos exemplos.

Determinando as reações de apoio da viga da Figura 5.137(b), obtém-se $Y_A = 0$ e $Y_B = 40$, como se indica na figura. Uma comparação das duas barras da Figura 5.136 mostra que nela atuam exatamente os mesmos esforços, logo que nelas se tem os mesmos esforços solicitantes.



(a)



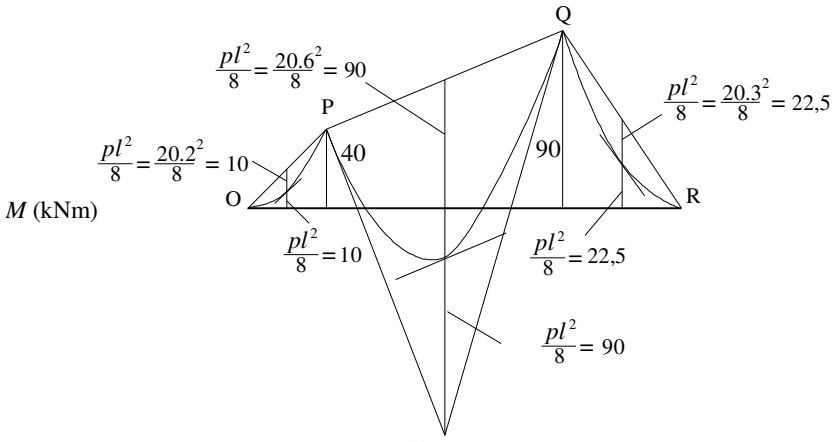
(b)

Figura 5.137

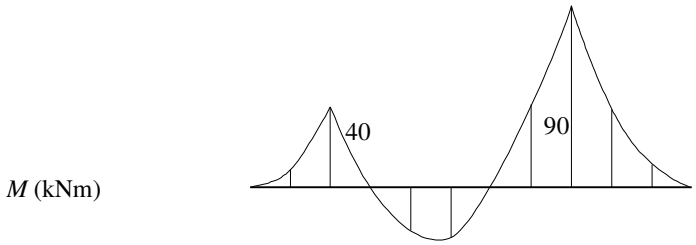
Fica assim demonstrado que se pode obter o diagrama de momentos fletores do balanço esquerdo dependurando na linha de fecho OP o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.136(b). O mesmo se pode provar relativamente ao balanço da direita.

A técnica que acaba de ser descrita será agora empregada para obter o diagrama de momentos fletores procurado, conforme se mostra na Figura 5.138(a). Como nos três trechos os momentos fletores são parabólicos, utiliza-se em seu traçado o procedimento descrito na Nota 5.37.

O diagrama de momentos fletores da viga deste exemplo é então o da Figura 5.138(b).



(a)



(b)

Figura 5.138

Exemplo 5.29

Traçar o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 5.139.

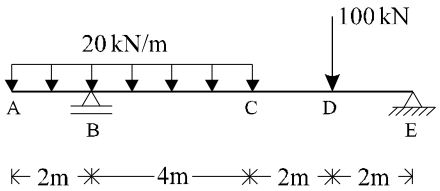


Figura 5.139

Todas as técnicas vistas nos últimos exemplos serão aplicadas na resolução deste problema. Na verdade, os Exemplos 5.25 a 5.28 foram propostos como uma forma de se ir introduzindo aos poucos a técnica geral que será empregada na resolução deste exemplo, e que pode ser utilizada para resolver qualquer outra viga.

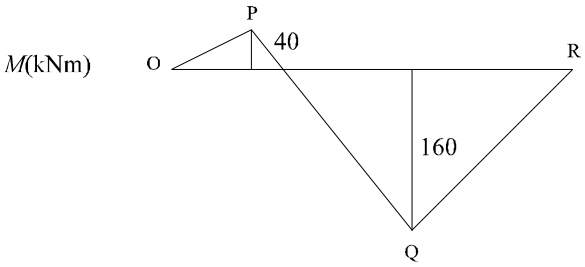


Figura 5.140

As reações de apoio da viga são $Y_B = 130\,\text{kN}$ e $Y_E = 90\,\text{kN}$; os momentos fletores em B e em C são respectivamente – 40 kNm e 160 kNm.
Nos pontos A, B, C e E desta viga os momentos fletores são então 0, – 40 kNm, 160 kNm e 0; a linha de fecho correspondente a estes momentos é a linha OPQR da Figura 5.140.

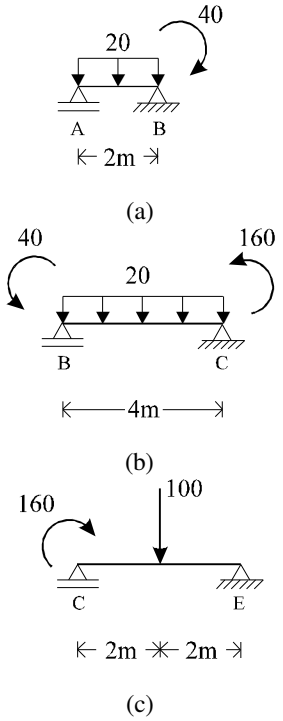


Figura 5.141

Observa-se que o conceito de linha de fecho já apresentado está sendo agora ainda mais generalizado, pois, além dos momentos fletores nas extremidades da viga e nos apoios, está sendo considerado em seu traçado um ponto interno de um tramo. Chega-se assim à definição mais abrangente de linha de fecho de uma viga: é a linha que une as ordenadas dos momentos fletores nas extremidades dos trechos sucessivos em que se supõe dividida esta viga; os momentos fletores nas extremidades e nos apoios da viga devem obrigatoriamente figurar na linha de fecho.

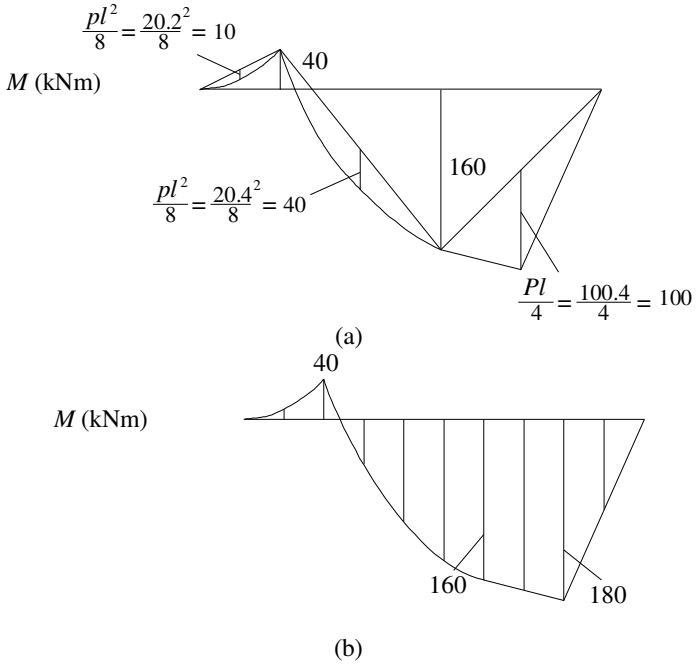


Figura 5.142

A técnica que será utilizada para traçar o diagrama de momentos fletores desta viga é uma generalização da empregada no exemplo anterior, e consiste em se dependurar respectivamente nos trechos OP, PQ e QR da linha de fecho os diagramas de momentos fletores das vigas simplesmente apoiadas das Figuras 5.141(a), (b) e (c), chegando-se assim ao diagrama procurado.

A demonstração de que esta técnica leva aos diagramas de momentos fletores do balanço já foi feita no exemplo anterior; a demonstração de que ela também se aplica aos trechos BC e CE da viga segue caminho inteiramente análogo, e por isso não será feita aqui. Sugere-se que o leitor a faça como exercício.

Na Figura 5.142(a) mostra-se como traçar o diagrama de momentos fletores da viga, que é apresentado na Figura 5.142(b).

Nota 5.38

A técnica geral para o traçado de diagramas de momentos fletores que se acaba de apresentar pode ser resumida da seguinte forma:

a) Divide-se a viga cujo diagrama de momentos fletores se pretende obter em n trechos delimitados por suas extremidades e por $n-1$ pontos internos.

b) Determinam-se os momentos fletores nas extremidades da viga e nos $n-1$ pontos internos que a dividem em n trechos.

c) Constrói-se a linha de fecho da viga, que une os momentos fletores nas suas extremidades e nos $n-1$ pontos internos.

d) Dependura-se em cada um dos trechos da linha de fecho o diagrama de momentos fletores da viga simplesmente apoiada de mesmo vão e com carregamento igual ao que atua neste trecho da viga.

e) O diagrama de momentos fletores procurado é então o delimitado pelo eixo das abcissas e pelos diagramas dependurados na linha de fecho.

Exemplo 5.30

A partir dos diagramas de esforços solicitantes, determinar os esforços externos que atuam na viga da Figura 5.143.

Neste exemplo tem-se um problema "ao contrário", em que se procuram os carregamentos externos a partir dos esforços solicitantes que eles produzem.

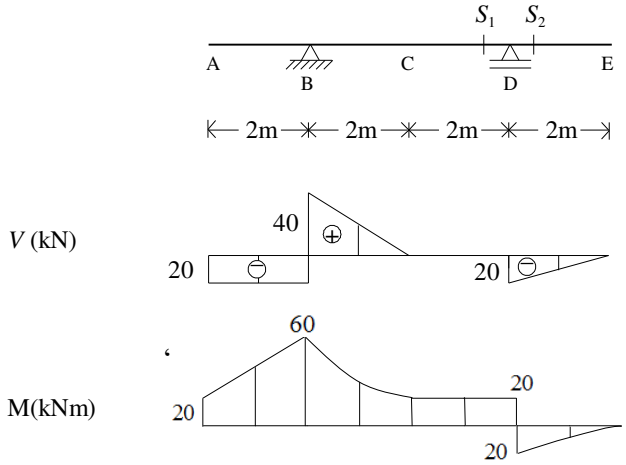


Figura 5.143

Do diagrama de forças cortantes obtêm-se as forças transversais aplicadas na barra. Lembrando que uma descontinuidade no diagrama de forças cortantes indica que neste ponto é aplicada uma força concentrada, verifica-se que existe uma força concentrada para cima de 60 kN aplicada em B e uma de 20 kN para baixo aplicada em D.

Observa-se ainda que na extremidade esquerda da barra há uma força cortante de −20 kN. Isto indica que neste ponto é aplicada uma força concentrada para baixo de 20 kN.

O diagrama de forças cortantes apresenta dois trechos lineares, indicando que neles se tem forças uniformemente distribuídas. Observando que no trecho BC a força cortante varia 40 kN em 2m - de 40 kN em B a 0 kN em C-, conclui-se que nele a força distribuída aplicada é de 20 kN/m. Raciocínio análogo mostra que em DE a força uniformemente distribuída é de 10 kN/m.

Como já se mostrou ao apresentar a "regra do barbante", os sentidos das forças distribuídas se ligam às concavidades do diagramas de momentos fletores.

Analisando o diagrama de momentos fletores desta viga, verifica-se que no trecho BC o carregamento distribuído é para baixo e que no trecho DE, é para cima.

No trecho BC da viga atua portanto uma força uniformemente distribuída para baixo de 20 kN/m e no trecho DE, uma força uniformemente distribuída para cima de 10 kN/m.

Passando agora ao diagrama de momentos fletores, pergunta-se: que informações ele pode dar que o diagrama de forças cortantes não é capaz de fornecer?

A resposta a esta pergunta é simples: os momentos concentrados aplicados na viga.

Como se sabe, uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores indica que neste ponto existe aplicado um momento concentrado. Assim, tem-se no ponto D da viga um momento concentrado de 40 kNm.

Para determinar o sentido deste momento, retira-se da barra o ponto D e examina-se o seu equilíbrio. Para retirá-lo, corta-se a barra em duas seções imediatamente próximas do ponto D, uma à sua esquerda e outra à sua direita, as seções S_1 e S_2 indicadas na Figura 5.143. Os momentos fletores que atuam nestas duas seções em que se fizeram os cortes são respectivamente − 20 kNm e 20 kNm, como se depreende do diagrama de momentos fletores e se indica na Figura 5.144.

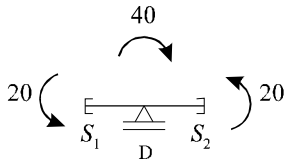


Figura 5.144

Qualquer trecho de uma estrutura em equilíbrio encontra-se em equilíbrio, portanto o trecho de barra indicado na Figura 5.144 está em equilíbrio. Os momentos que nele atuam - os momentos fletores em S_1 e S_2 e o momento externo de 40 kNm aplicado em D - estão então em equilíbrio, de onde se conclui que o momento externo aplicado em D tem o sentido horário, como mostrado na Figura 5.144.

Além do momento aplicado em D, o diagrama de momentos fletores revela que existe um momento de 20 kNm aplicado em A, já que nele se tem um momento fletor tracionando as fibras superiores da barra; este momento aplicado em A tem sentido anti-horário.

Está assim encerrada a determinação dos esforços externos que atuam na viga da
Figura 5.143, mostrados na Figura 5.145.

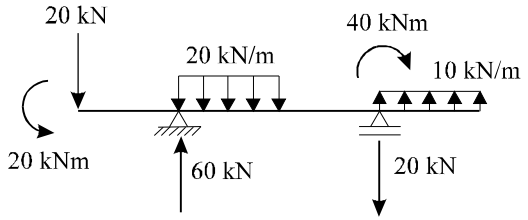


Figura 5.145

Exemplo 5.31

Traçar os diagrams de esforços solicitantes da viga poligonal da Figura 5.146.

As reações de apoio desta viga estão indicadas na Figura 5.147.

Tem-se em AB

$$N = -50$$
$$V = -60 \qquad (5.83)$$
$$M = -60y$$

e em ED

$$N = 10$$
$$V = 0 \qquad (5.84)$$
$$M = 0;$$

obtidas estas expressões, já se deve traçar os respectivos diagramas.

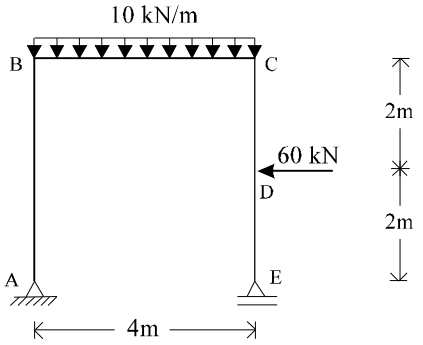


Figura 5.146

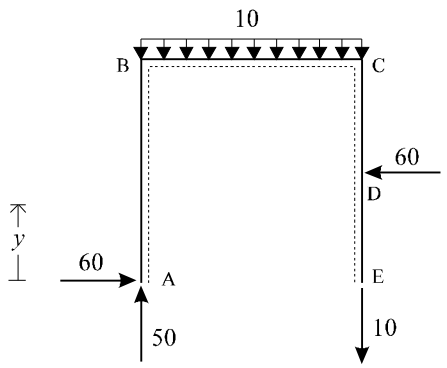


Figura 5.147

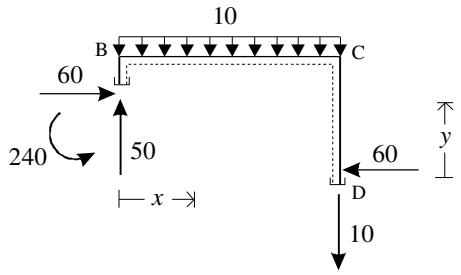


Figura 5.148

Cortando agora as barras verticais nas seções imediatamente abaixo de B e D, tem-se o trecho de estrutura apresentado na Figura 5.148.

Tem-se então em BC

$$N = -60$$

$$V = 50 - 10x \qquad (5.85)$$

$$M = -240 + 50x - \frac{10x^2}{2}$$

e em DC

$$N = 10$$

$$V = 60 \qquad (5.86)$$

$$M = -60y\,.$$

Observa-se que no trecho BC a força cortante não se anula, sendo sempre positiva, indicando que nesta barra o momento não apresenta um extremo, sendo então uma função crescente ou decrescente. Analisando as expressões (5.85), verifica-se que ele é sempre crescente, variando de −240 kNm em B para −120 kNm em C.

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga poligonal estão na Figura 5.149.

Nota 5.39

Acredito que neste ponto o leitor já esteja sendo capaz de determinar de cabeça alguns dos diagramas dos esforços solicitantes, sem a necessidade de obter suas expressões analíticas.

É o que naturalmente acaba ocorrendo depois que se adquire alguma prática no traçado de diagramas de esforços solicitantes.

Se este já for seu caso, trace de cabeça os diagramas que puder, continuando a utilizar as expressões analíticas nos casos mais complicados.

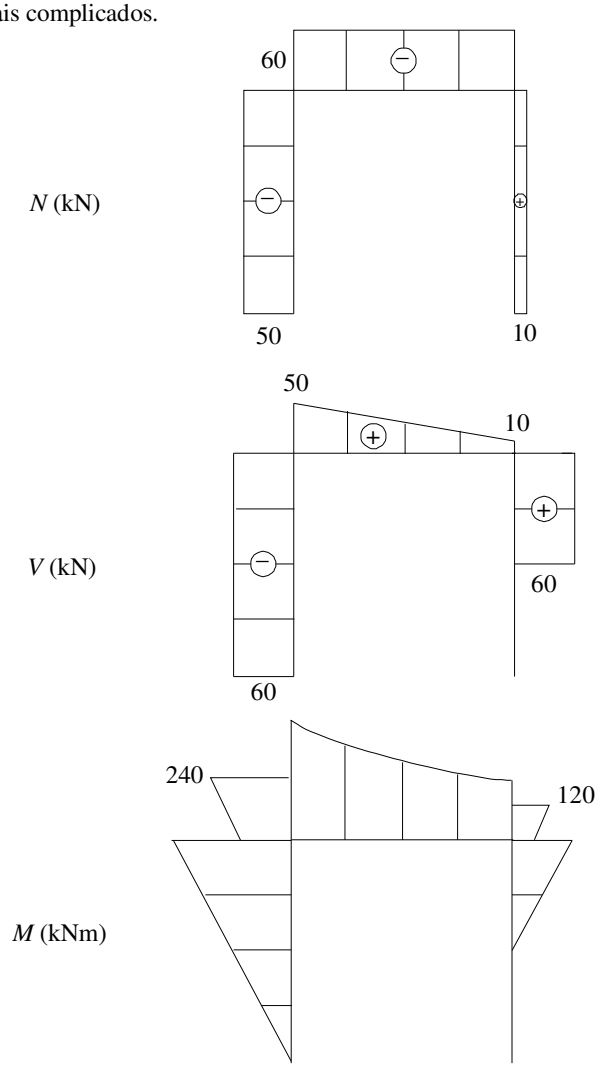


Figura 5.149

Exemplo 5.32

A partir dos diagramas de esforços solicitantes da Figura 5.151, determinar os esforços externos que atuam na estrutura da Figura 5.150.

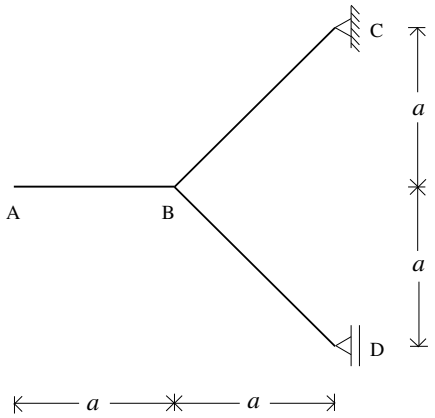


Figura 5.150

Como nos diagramas de forças normais, forças cortantes e momentos fletores não há descontinuidades, não existem esforços concentrados aplicados entre os pontos extremos das três barras que constituem a estrutura.

Como as forças normais e cortantes nestas três barras são constantes, não existem forças distribuídas aplicadas na estrutura.

Nela só podem atuar portanto esforços aplicados nas extremidades de suas barras.

Do diagramas de forças normais verifica-se que em A, C e D estão aplicadas as forças concentradas indicadas na Figura 5.152(a); analogamente, do diagrama de forças cortantes conclui-se que nestes pontos estão aplicadas as forças concentradas mostradas na Figura 5.152(b). Finalmente, do diagrama de momentos fletores nota-se que nas extremidades A, C e D não há momentos aplicados.

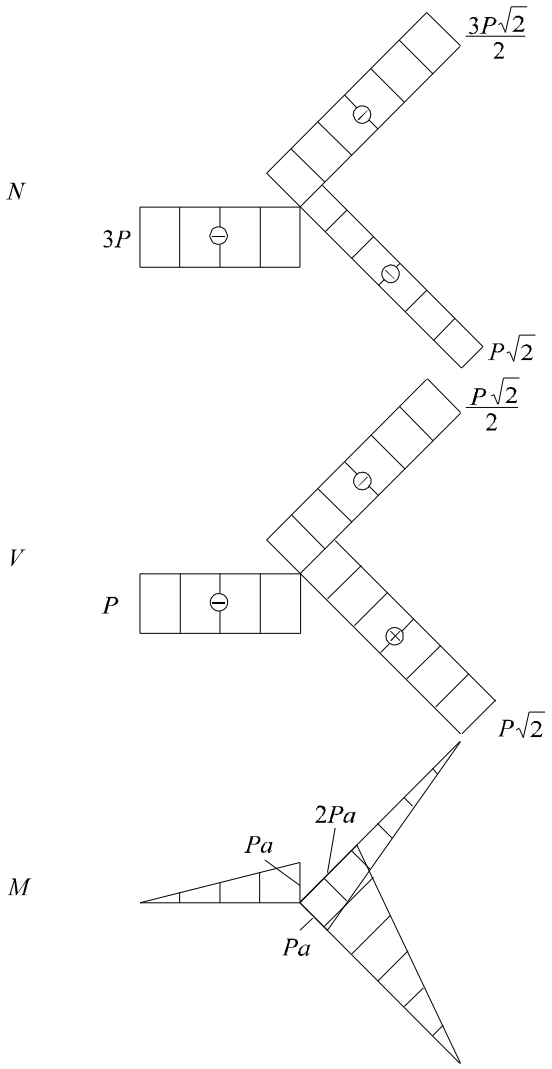


Figura 5.151

As componentes horizontais e verticais dos esforços aplicados nos pontos A, C e D estão apresentadas na Figura 5.152(c).

Resta agora verificar se existem esforços aplicados no nó B.

Há duas formas de se fazer isto: analisando o equilíbrio global da estrutura ou o equilíbrio do nó B. Pode-se, ainda, empregar os dois métodos combinados, encontrando alguns esforços por um deles e os demais pelo outro. Este é o procedimento que será adotado aqui.

Como a estrutura analisada está em equilíbrio, os esforços externos nela aplicados satisfazem as equações de equilíbrio da estática. Examinando a estrutura da Figura 5.152(c), nota-se que para que haja equilíbrio das forças horizontais é necessário aplicar em B uma força horizontal P orientada para a direita; da mesma forma, para que haja equilíbrio das forças verticais, é necessário aplicar em B uma força vertical $2P$ orientada para cima. Estas duas forças estão mostradas na Figura 5.152(d).

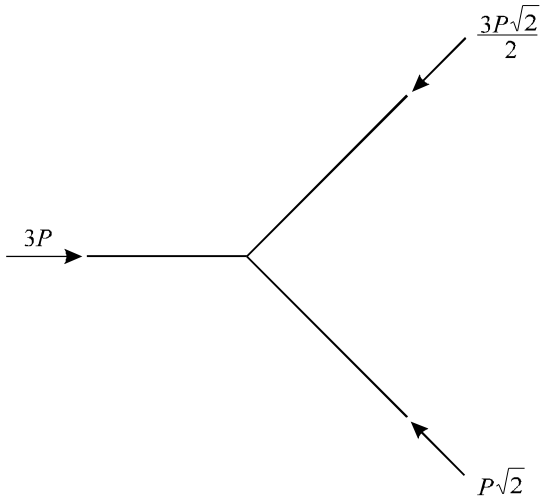
O momento aplicado em B - se houver - pode ser obtido analisando o equilíbrio de momentos em relação a um ponto qualquer. Alternativamente, pode ser determinado por meio do equilíbrio do nó B; é como se irá proceder.

O nó B pode ser retirado da estrutura cortando as três barras que nele chegam em seções imediatamente vizinhas a ele. Em B atuam os esforços mostrados na Figura 5.153.

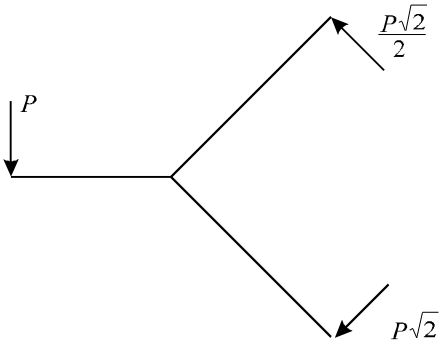
A análise do equilíbrio das forças horizontais e verticais que atuam neste nó leva às forças já obtidas da Figura 5.152(d).

O equilíbrio de momentos mostra que os esforços indicados na Figura 5.153 já equilibram o nó, nele atuando dois momentos Pa com sentido anti-horário e um momento $2Pa$ com sentido horário. Não há, portanto, um momento externo aplicado em B.

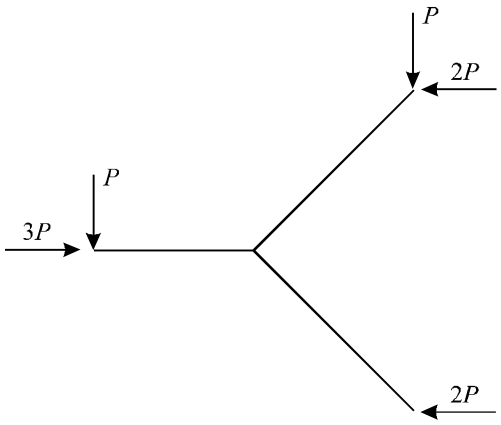
Os esforços externos que atuam na estrutura examinada são então os mostrados na Figura 5.154.



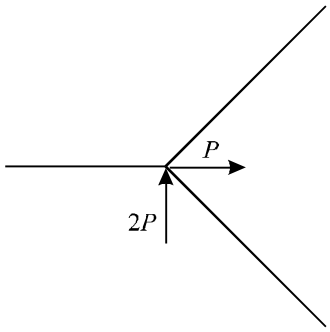
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.152

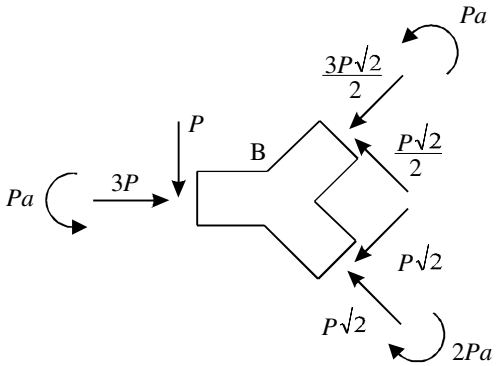


Figura 5.153

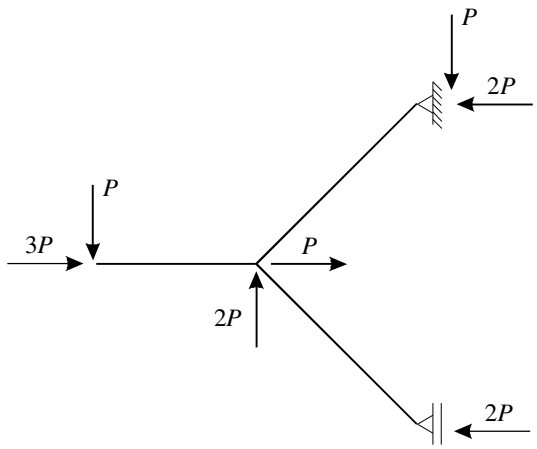


Figura 5.154

Está-se chegando quase ao fim desta apresentação dos diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas. Nela optou-se por apresentá-los de forma gradual e didática, procurando esclarecer algumas das dúvidas que costumam surgir sobre o assunto.

É claro que existem estruturas muitíssimo mais complexas que as examinadas neste capítulo, com barras curvas, carregamentos distribuídos complicados etc., cujos diagramas de esforços solicitantes, embora trabalhosos e demorados, são traçados empregando exatamente os procedimentos aqui apresentados.

Para ilustrar esta afirmação, considere-se o problema abaixo.

Exemplo 5.33

Determinar os esforços solicitantes na seção C da estrutura da Figura 5.155.

Trata-se de uma estrutura mais complicada que as vistas anteriormente: o carregamento linearmente distribuído em AB é inclinado, o trecho BD é curvo, etc..

O primeiro passo para resolver este problema é a determinação das reações de apoio, mostradas na Figura 5.156. Sugere-se que o leitor obtenha estas reações como exercício.

Obtidas as reações de apoio, para chegar aos esforços solicitantes em C basta aplicar o teorema fundamental. Antes de fazê-lo, observa-se que em C está aplicada uma força concentrada; ela tem uma componente normal a essa seção transversal e uma componente situada nessa seção transversal. Por esta razão, tanto o diagrama de forças normais como o de forças cortantes apresentam uma descontinuidade em C, sendo então necessário determinar os valores destes esforços em uma seção imediatamente acima de C (seção C^+) e em uma seção imediatamente abaixo deste ponto (seção C^-).

É claro que neste problema é mais fácil usar o teorema fundamental reduzindo na seção C a única força aplicada abaixo dela que reduzindo todos os esforços aplicados acima de C. Na Figura 5.157(a) representa-se em tamanho maior o trecho inferior da barra BD.

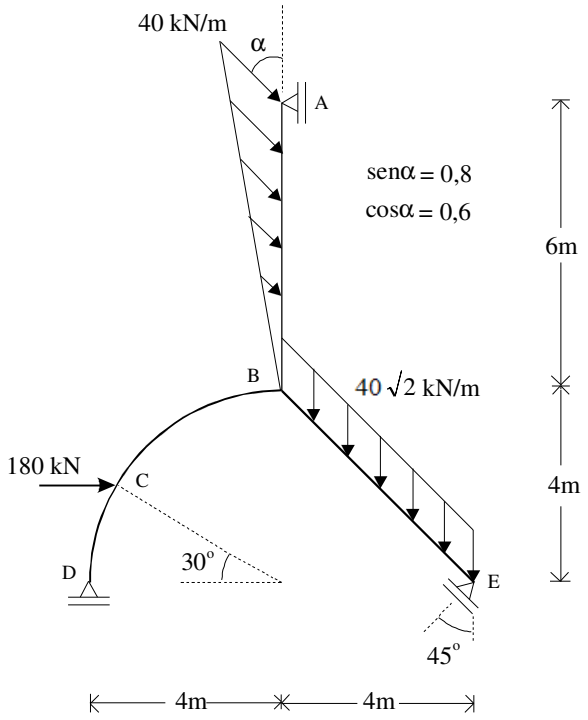


Figura 5.155

Na Figura 5.157(a) reapresenta-se em tamanho maior o trecho inferior da barra BD.

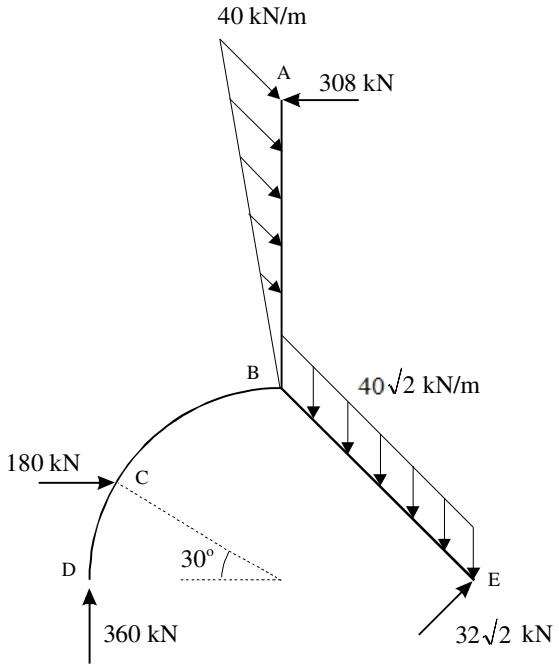
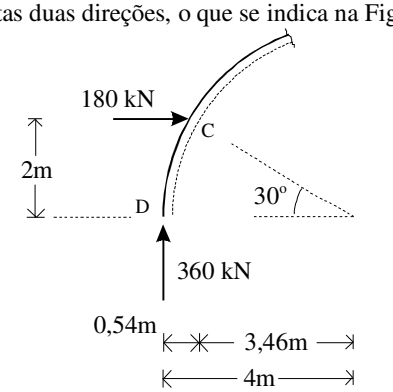


Figura 5.156

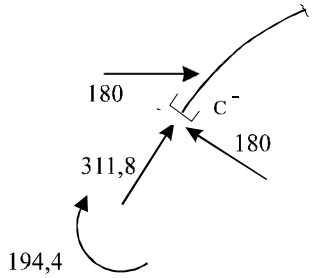
Os esforços solicitantes na seção C^- são obtidos cortando a barra nesta seção, nela reduzindo a única força aplicada abaixo do corte. Os esforços solicitantes decorrentes desta redução estão mostrados na Figura 5.157(b). Nota-se que a força de 180 kN não solicita a seção C^-, por estar aplicada acima dela.

A força de 360 kN na seção C^- (Figura 5.157(b)) não é nem normal nem tangente a essa seção, devendo então ser decomposta segundo estas duas direções, o que se indica na Figura 5.157(c).

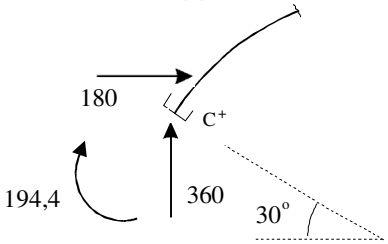


(a)

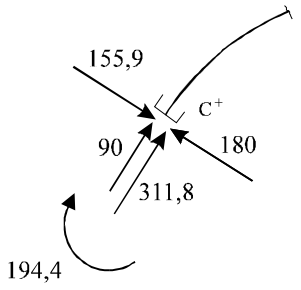
(b)



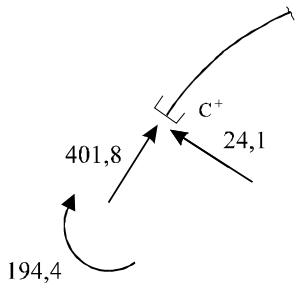
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.157

Os esforços solicitantes na seção C^- são então

$$N = -311{,}8 \text{ kN}$$

$$V = 180 \text{ kN} \qquad (5.87)$$

$$M = 194{,}4 \text{ kNm}$$

Na Figura 5.157(d) apresentam-se os esforços decorrentes da redução em C^+ das forças aplicadas abaixo desta seção, observando-se que ela é solicitada pela força de 180 kN.

A decomposição das duas forças que atuam em C^+ em suas componentes normal e tangente é apresentada na Figura 5.157(e).

Tem-se então na seção C^+ os esforços solicitantes

$$N = -401{,}8 \text{ kN}$$

$$V = 24{,}1 \text{ kN} \qquad (5.88)$$

$$M = 194{,}4 \text{ kNm}$$

mostrados na Figura 5.157(f).

Como se previra, em C tanto a força normal como a força cortante apresentam uma descontinuidade.

Neste exemplo foram pedidos os esforços solicitantes em uma única seção transversal da estrutura. Se tivessem sido pedidos os diagramas de esforços solicitantes, utilizar-se-ia o teorema fundamental para obtê-los. Não seria difícil de fazê-lo, mas seria bastante trabalhoso.

Como observação final para encerrar o estudo dos diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas, volta-se a mencionar que, à medida que se ganha experiência, pode-se e deve-se passar a traçar os diagramas ou parte deles de cabeça. Regras simples como "onde não existe carregamento distribuído a força cortante é constante e o momento fletor linear", "o momento fletor na extremidade de uma barra é nulo, a não ser que nela esteja aplicado um momento externo ativo", "o diagrama de forças cortantes apresenta descontinuidades nos pontos em que são aplicadas forças transversais concentradas" ajudam a traçar os diagramas de cabeça.

Ressalta-se, finalmente, que ao traçar um diagrama de cabeça está-se na verdade usando de cabeça o teorema fundamental.

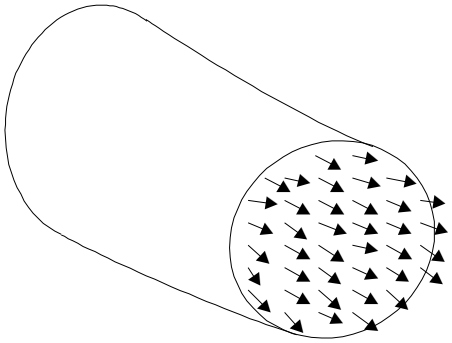
5.3 Diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais

Nesta seção serão estudados os diagramas de esforços solicitantes das estruturas espaciais, que, como se verá, são mais trabalhosos que os das estruturas planas, por se ter um número maior de esforços solicitantes a determinar.

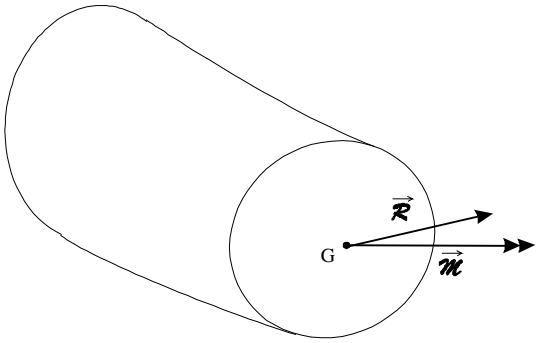
A apresentação dos esforços solicitantes foi feita no Capítulo 3; os pontos mais importantes para esta seção serão rapidamente reapresentados.

Considere-se uma seção transversal de uma barra em que atuam as tensões indicadas na Figura 5.158(a). A redução dessas tensões no centro de gravidade G desta seção transversal leva aos esforços solicitantes: uma força concentrada $\vec{\mathcal{R}}$ e um momento concentrado $\vec{\mathcal{M}}$ aplicados em G, indicados na Figura 5.158(b). A decomposição da resultante $\vec{\mathcal{R}}$ em suas componentes normal $\vec{N}$ e cortante $\vec{V}$ é mostrada na Figura 5.158(c); a do momento $\vec{\mathcal{M}}$ em suas componentes de torçao $\vec{T}$ e de flexão $\vec{M}$, na Figura 5.158(d). A força cortante pode ser ainda decomposta em suas componentes $\vec{V}_y$ e $\vec{V}_z$ segundo os eixos *y* e *z* situados na seção transversal da barra; na Figura 5.158(e) estão indicadas as três componentes de $\vec{\mathcal{R}}$. Da mesma forma, o momento fletor $\vec{M}$ pode ser decomposto em suas componentes $\vec{M}_y$ e $\vec{M}_z$; as três componentes de $\vec{\mathcal{M}}$ estão indicadas na Figura 5.158(f).

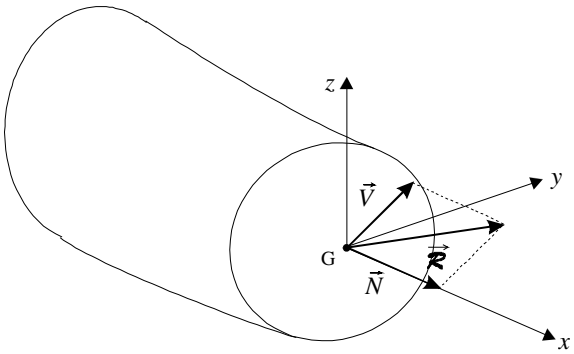
Tem-se então, no caso geral, seis esforços solicitantes a determinar: as três componentes de $\vec{\mathcal{R}}$ e as três componentes de $\vec{\mathcal{M}}$, isto é, a força normal $\vec{N}$, as forças cortantes $\vec{V}_y$ e $\vec{V}_z$, o momento de torçao $\vec{T}$ e os momentos fletores $\vec{M}_y$ e $\vec{M}_z$.



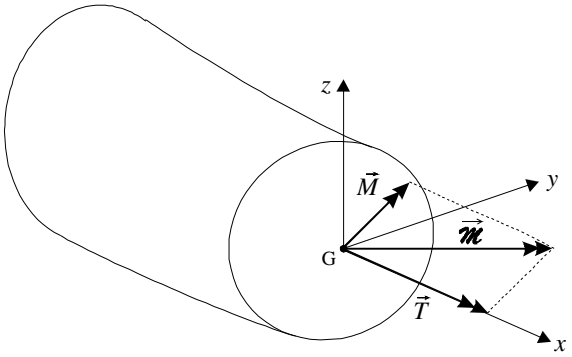
(a)



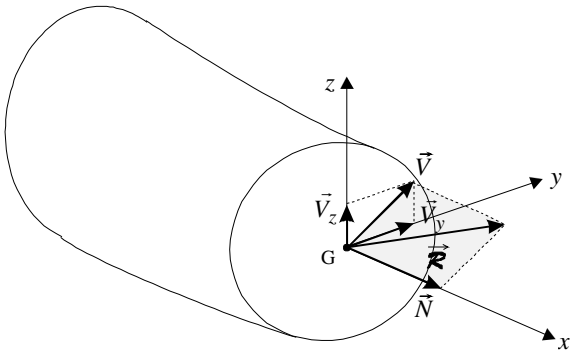
(b)



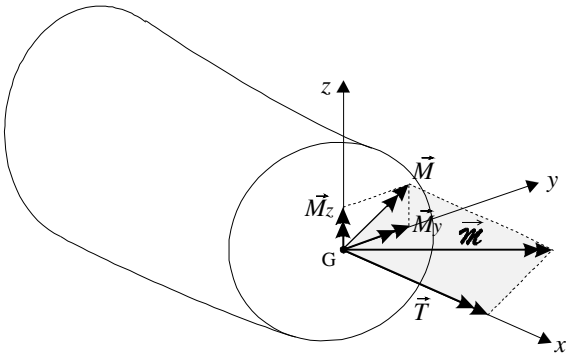
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.158

O estudo das estruturas planas - aquelas em que os eixos das barras e os esforços externos que nela atuam pertencem a um mesmo plano - é bastante simplificado pelo fato de nelas só atuarem esforços situados no plano da estrutura.

Adotando como referência dois eixos *x* e *y* situados no plano da estrutura, *x* na direção do eixo da barra e *y* perpendicular a ele, tem-se para as estruturas planas $\vec{V}_z = \vec{0}$, $\vec{M}_y = \vec{0}$ e $\vec{T} = \vec{0}$ (lembra-se que, embora $\vec{M}_y$ e $\vec{T}$ sejam representados por vetores situados no plano da estrutura, atuam fisicamente em planos perpendiculares a estes vetores).

Os esforços solicitantes das estruturas planas são então a força normal $\vec{N}$, a força cortante $\vec{V}_y$ e o momento fletor $\vec{M}_z$. Não havendo perigo de confusão, por simplicidade costuma-se omitir os índices de $\vec{V}_y$ e $\vec{M}_z$, dizendo-se então que em uma estrutura plana se tem três esforços solicitantes: a força normal $\vec{N}$, a força cortante $\vec{V}$ e o momento fletor $\vec{M}$.

5.3.1 Convenção de sinais

No caso geral das estruturas espaciais tem-se as seis componentes de esforços solicitantes, e os diagramas desses esforços devem retratar graficamente estas seis componentes.

Da mesma forma que para as estruturas planas, a determinação dos esforços solicitantes das estruturas espaciais é feita através do teorema fundamental, que é absolutamente geral e se aplica a qualquer estrutura.

Repetindo o que se fez no caso das estruturas planas, atribuem-se sinais aos esforços solicitantes das estruturas espaciais, ligados às ações físicas desses esforços.

Mais uma vez, consideram-se positivas as forças normais de tração e negativas as de compressão.

Também se mantém a convenção de sinais das forças cortantes: são positivas as forças cortantes que giram o trecho de barra em que atuam no sentido horário e negativas as que o giram no sentido anti-horário.

Há, entretanto, um comentário importante a ser feito com relação aos sinais das forças cortantes.

No caso das estruturas planas, como se confunde o plano da estrutura com o do papel em que ela é esquematizada, sabe-se claramente se uma força cortante gira a barra no sentido horário ou no anti-horário.

No caso das estruturas espaciais, como as estruturas são desenhadas em perspectiva, para definir o sentido de rotação impresso por uma força cortante é preciso indicar a posição do observador que a vê.

A Figura 5.159 mostra uma viga espacial, que - conforme se procede no caso das estruturas espaciais - está representada em perspectiva.

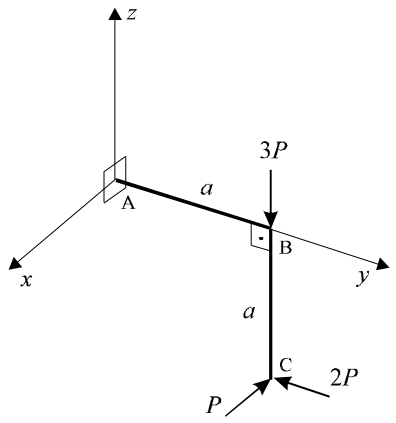


Figura 5.159

Considere-se a barra CB desta viga. Nas suas seções transversais tem-se duas componentes de força cortante, V_x e V_y, decorrentes das duas forças transversais aplicadas em C.

Na Figura 5.160 associam-se dois planos à barra CB: o plano α, paralelo a *xz*, definido pelo eixo da barra e pela força *P*, e o plano β, coincidente com *yz*, definido pelo eixo da barra e pela força 2*P*. Indicam-se ainda nesta figura dois observadores: o observador I, cuja linha de visão é perpendicular ao plano β, e o observador II, cuja linha de visão é perpendicular ao plano α.

O observador I claramente vê a força 2*P* girar a barra no sentido horário, logo para ele $V_y = +2P$; o observador II também não terá nenhuma dúvida em afirmar que a força *P* gira a barra no sentido anti-horário, logo que $V_x = -P$.

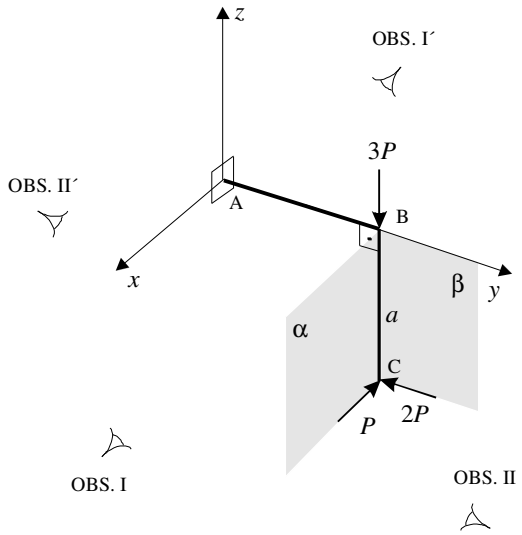


Figura 5.160

Considerem-se agora os observadores I´ e II´ também indicados na Figura 5.160, cujas linhas de visão também são perpendiculares aos planos β e α, mas que enxergam o outro lado destes planos. O observador I´ claramente dirá que a força $2P$ gira a barra no sentido anti-horário, logo que $V_y = -2P$, e o observador II´, que P gira a barra no sentido horário, logo que $V_x = P$.

Os observadores I e II e os observadores I´ e II´ atribuirão portanto sinais opostos às forças cortantes da barra CB.

Por esta razão, ao analisar uma estrutura espacial, deve-se escolher um observador para cada direção, indicá-los na perspectiva que representa a figura e referir a eles os sinais das forças cortantes.

Recomenda-se que sejam evitados observadores pouco naturais, como I´ e II´, escolhendo-se aqueles que a simples visão da estrutura em perspectiva naturalmente sugere.

Considere-se agora a barra AB. Nas suas seções transversais tem-se duas componentes de forças cortantes: V_x e V_z.

Na Figura 5.161 apresenta-se a estrutura cortada em uma seção genérica da barra BA, e as forças que atuam nesta seção; os momentos que a solicitam não foram indicados para não carregar o desenho. Nesta figura associam-se dois planos à barra BA: o plano β, coincidente com yz, definido pelo eixo da barra e pela força $3P$, e o plano γ, coincidente com xy, definido pelo eixo da barra e pela força P. Indicam-se também dois observadores: o observador I, cuja linha de visão é paralela ao eixo x, e o observador III, cuja linha de visão é paralela ao eixo z. Nota-se que tanto o plano β como o observador I são os já considerados no estudo das forças cortantes da barra CB.

O sinal da força cortante V_x é atribuído pelo observador III, que a vê girar a barra no sentido anti-horário, logo que se tem $V_x = -P$; o da força cortante V_z, pelo observador I, que a vê girar a barra no sentido horário, logo que $V_z = 3P$. Os observadores I´ e III´, também indicados na Figura 5.161, atribuiriam a estas forças cortantes sinais contrários a esses.

Os sinais das forças cortantes das barras de uma estrutura espacial são portanto atribuídos por observadores que devem ser indicados na representação em perspectiva, voltando-se a recomendar que na escolha destes observadores se elejam os naturalmente sugeridos pela visão da perspectiva da estrutura.
Quanto aos momentos fletores, seus sinais serão fixados por um regra diferente da empregada para as estruturas planas. Como se viu, no caso destas atribuem-se os sinais dos momentos convencionando como positivos os que tracionam um dos lados de uma barra e como negativos os que tracionam o outro lado desta barra.

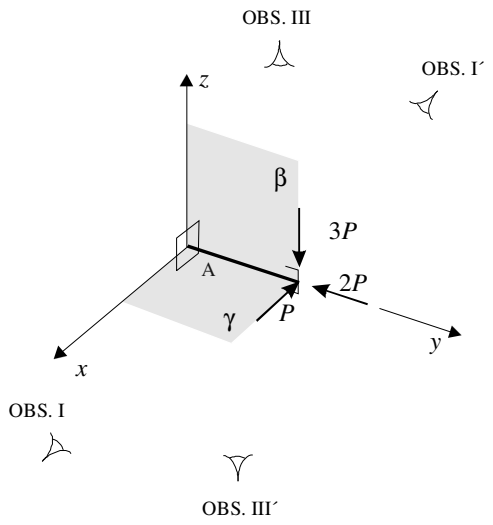


Figura 5.161

Esta convenção de sinais não funciona bem no caso das estruturas espaciais, pois, como em suas barras normalmente se tem duas componentes de momentos fletores, tem-se então que definir duas convenções de sinais. Considere-se, por exemplo, o caso de uma barra em que atuam dois momentos fletores, um no plano vertical e outro no plano horizontal. Relativamente aos momentos fletores no plano vertical, pode-se convencionar como positivos os que tracionam as fibras inferiores e como positivos os que tracionam as fibras superiores; com referência aos momentos fletores no plano horizontal, pode-se convencionar como positivos os que tracionam o lado direito e como negativos os que tracionam o lado esquerdo.

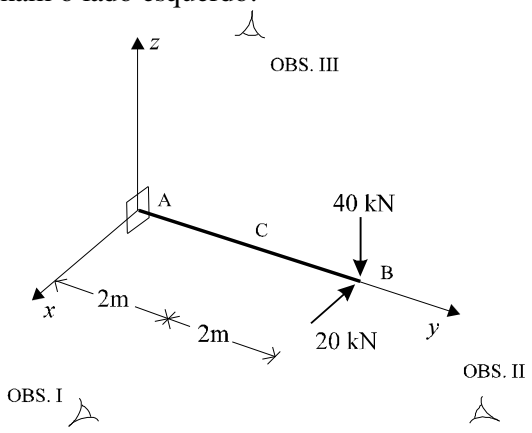


Figura 5.162

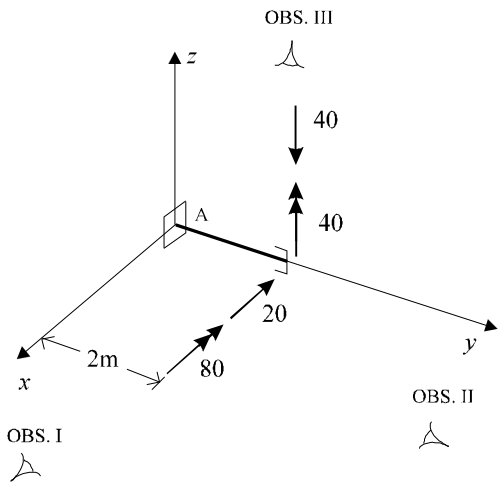


Figura 5.163

No caso das estruturas planas, a convenção de sinais é indicada tracejando-se o lado da barra tracionado pelos momentos positivos. No caso das estruturas espaciais, este tipo de indicação fica inviabilizado, por ser muito difícil tracejar com clareza dois dos lados das barras de uma estrutura desenhada em perspectiva.

Por esta razão, opta-se por outra convenção de sinais, ligada aos eixos coordenados. Esta convenção será introduzida através de um exemplo.

Considere-se a viga da Figura 5.162.

Procuram-se os esforços solicitantes na seção C. Cortando a viga nesta seção e nela reduzindo as forças aplicadas à sua direita, tem-se os esforços mostrados no Figura 5.163.

Tem-se em C duas forças cortantes, $V_x = -20$ kN e $V_z = 40$ kN; tem-se também dois momentos fletores, M_x e M_z. O momento fletor M_x atua no plano vertical e M_x, no plano horizontal.

A convenção de sinais que se adotará para os momentos fletores das estruturas espaciais é a seguinte: consideram-se positivos os momentos fletores que têm os sentidos dos eixos coordenados e negativos os que têm sentidos contrários aos dos eixos coodenados.

De acordo com esta convenção, tem-se em C os momentos fletores $M_x = -80$ kNm e $M_z = 40$ kNm.

Esta convenção de sinais não está ligada à ação física dos momentos fletores, mas sim a sua orientação relativamente aos eixos coordenados. Por esta razão, ela não leva os momentos fletores à esquerda e à direita de um corte a apresentar os mesmos sinais.

Cortando a viga da Figura 5.162 em C e reduzindo nesta seção os esforços aplicados à esquerda do corte, chega-se aos esforços indicados na Figura 5.164.

Tem-se em C os esforços solicitantes $V_x = -20$ kN, $V_z = 40$ kN, $M_x = 80$ kNm e $M_z = -40$ kNm.

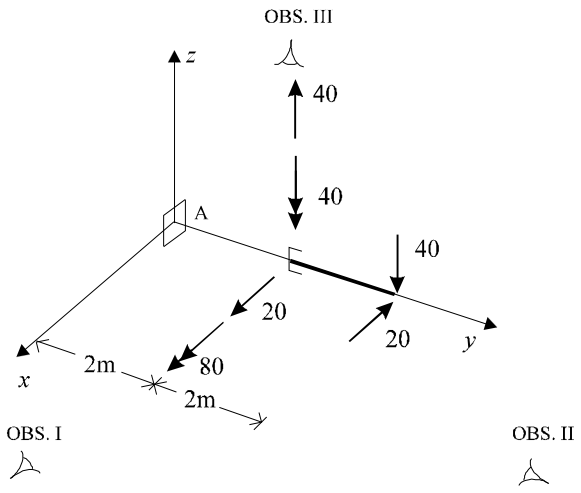
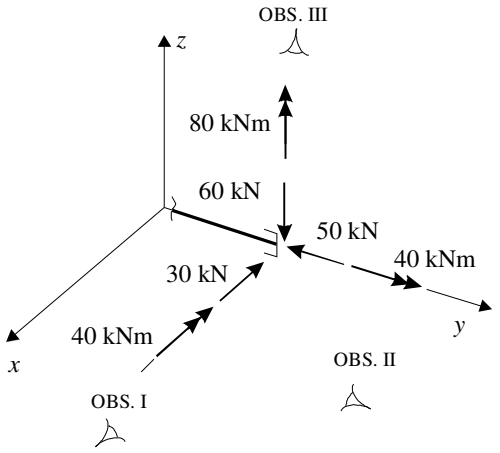


Figura 5.164

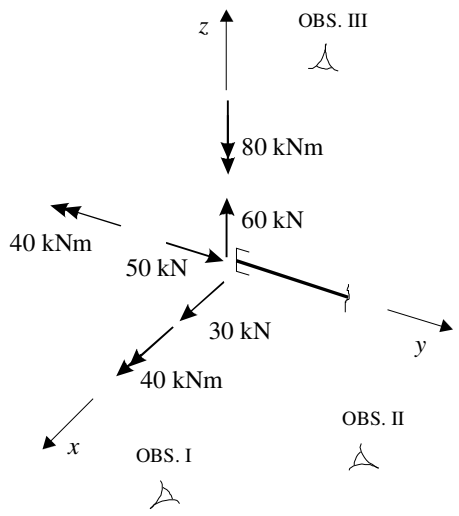
Como a convenção de sinais das forças cortantes se prende a sua ação física, tanto à esquerda como à direita do corte em C obtiveram-se exatamente as mesmas forças cortantes, em valor e em sinal. O mesmo não se dá com os momentos fletores, que apresentam sinais opostos nos dois lados do corte.

Esta convenção de sinais de momentos fletores não goza então de uma propriedade que caracteriza as convenções de sinais ligadas às ações físicas dos esforços solicitantes: a de se obter exatamente os mesmos esforços - em valor e em sinal - nos dois lados de um corte.

Não satisfazer esta propriedade não é entretanto uma ocorrência grave no caso dos momentos fletores, já que nos diagramas de momentos fletores não se indica seu sinal, identificando-se o lado tracionado ao desenhar nesse lado o diagrama de momentos fletores da barra.



(a)



(b)

Figura 5.165

Os sinais dos momentos fletores servirão então para determinar os lados tracionados de uma barra, desenhando-se nestes lados os correspondentes diagramas.

Estas idéias deverão ficar mais claras mais adiante, quando forem apresentados alguns exemplos de traçado de diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais.

Com relação aos momentos de torção, a convenção de sinais que se adotará é a já apresentada na Tabela 5.1: os momentos de torção serão considerados positivos quando o vetor momento tiver o sentido da normal externa à seção transversal em que atua, e negativos quando o vetor momento tiver o sentido contrário ao da normal externa à seção transversal em que atua.

Para ilustrar estas convenções de sinais, mostram-se na Figura 5.165 os esforços solicitantes que atuam em uma seção tranversal de uma barra de uma estrutura espacial: na Figura 5.165(a) indicam-se os esforços que atuam no trecho da barra à esquerda do corte e na Figura 5.165(b), os que atuam na parte da barra à direita do corte.

À esquerda do corte tem-se os esforços solicitantes

$$
\begin{aligned}
N &= -50 \text{ kN} \\
V_x &= -30 \text{ kN} \\
V_z &= 60 \text{ kN} \\
M_x &= -40 \text{ kNm} \\
M_z &= 80 \text{ kNm} \\
T &= 40 \text{ kNm}
\end{aligned}
\tag{5.89}
$$

e à direita do corte, os esforços solicitantes

$$
\begin{aligned}
N &= -50 \text{ kN} \\
V_x &= -30 \text{ kN} \\
V_z &= 60 \text{ kN} \\
M_x &= 40 \text{ kNm} \\
M_z &= -80 \text{ kNm} \\
T &= 40 \text{ kNm}
\end{aligned}
\tag{5.90}
$$

Observa-se que nos dois lados do corte se tem exatamente as mesmas forças normais e cortantes, com as mesmas intensidades e sinais, já que as convenções de sinais destes dois esforços estão ligados às suas ações físicas. O mesmo não se dá com a convenção de sinais dos momentos fletores, que leva a se ter nos dois lados do corte esforços solicitantes com as mesmas intensidades, mas sinais opostos.

Nota-se também que se tem exatamente os mesmos momentos de torção nos dois lados do corte, iguais em intensidade e em sinal. Isto, porque a convenção de sinais dos momentos de torção também se prende à sua ação física, embora isto não tenha sido explicitamente mencionado.

Apresentando de outra maneira a convenção de sinais adotada para os momentos de torção, seu significado físico fica bem claro: considera-se positivo o momento de torção que, para um observador olhando externamente a seção transversal em que ele atua, gira esta seção no sentido anti-horário e negativo o momento de torção que, para este observador, gira a seção no sentido horário.

Preferiu-se apresentar esta convenção de sinais da forma vista anteriormente, por ser de mais fácil aplicação que esta outra mais relacionada a seu sentido físico.

5.3.2 Exemplos

Serão vistos agora alguns exemplos de traçado de diagramas de esforços solicitantes de estruturas espaciais.

Exemplo 5.34

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga em balanço da Figura 5.166.

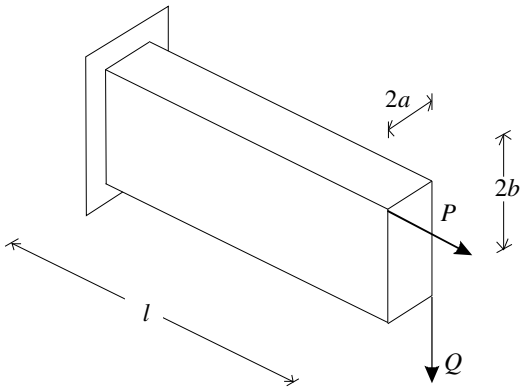


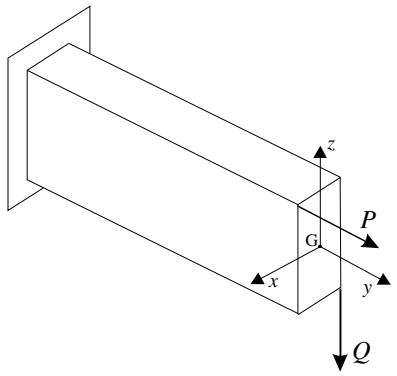
Figura 5.166

Esta viga é uma estrutura espacial, pois não existe um plano que contenha seu eixo e o carregamento que nela atua.

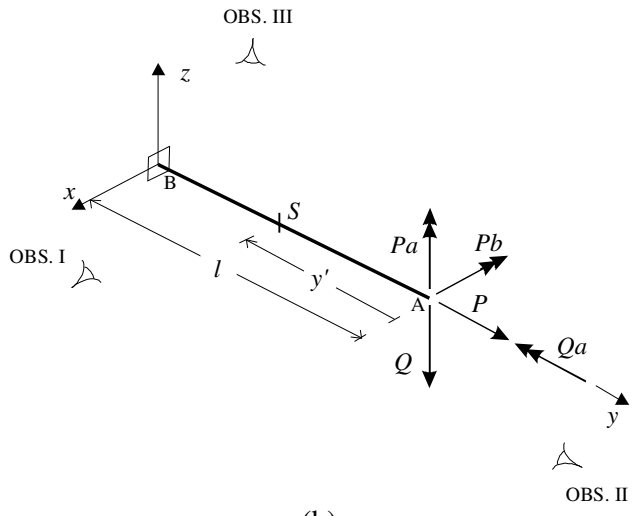
Nos exemplos examinados anteriormente, as barras eram sempre esquematizadas por seus eixos. Neste, está-se apresentando uma perspectiva da viga.

O primeiro passo que se deve dar neste problema é esquematizar a viga por meio de seu eixo e transferir para ele os esforços ativos aplicados, como se mostra na Figura 5.167(b). Lembra-se que reduzir no centro de gravidade G da seção de extremidade livre os esforços nela aplicados é aplicar em G estes esforços e seus momentos em relação aos eixos *x*, *y* e *z* indicados na Figura 5.167(a).

Para determinar as expressões analíticas dos esforços solicitantes desta viga, corta-se a barra em uma seção transversal genérica *S*, transferindo-se para ela os esforços aplicados à sua direita, como se mostra na Figura 5.168.



(a)



(b)

Figura 5.167

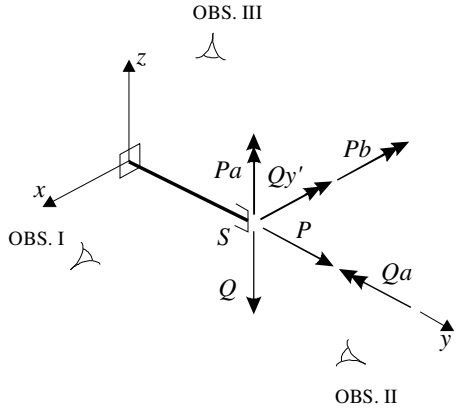


Figura 5.168

Em uma estrutura espacial pode-se ter seis componentes de esforços solicitantes: força normal, duas componentes de força cortante, duas componentes de momento fletor e momento de torção.

Como esta viga tem a direção do eixo y, os esforços solicitantes que se pode ter em S são N, V_x, V_z, M_x, M_z e T.

Da Figura 5.168, obtêm-se suas expressões analíticas:

$$N = P$$

$$V_x = 0$$

$$V_z = Q$$

$$M_x = -Pb - Qy' \tag{5.91}$$

$$M_z = Pa$$

$$T = -Qa.$$

O sinal de V_z é dado pelo observador I; os sinais dos momentos fletores, pelos eixos coordenados.

Os diagramas de esforços solicitantes das estruturas espaciais são desenhados em perspectiva. O das forças normais pode ser colocado em qualquer posição: no plano vertical - acima ou abaixo do eixo -, no plano horizontal - à esquerda ou à direita do eixo - ou mesmo em um plano oblíquo; optou-se neste exemplo por traçá-lo no plano vertical, acima do eixo, como se mostra na Figura 5.169. Lembra-se que nos diagramas de forças normais o sinal deve ser indicado.

Os diagramas das forças cortantes devem ser desenhados nos planos em que elas atuam. No caso desta viga, caso a força cortante V_x não fosse nula, seu diagrama deveria ser traçado no plano horizontal; já o da força cortante V_z, deve ser desenhado no plano vertical. Estes diagramas podem ser desenhados em qualquer um dos lados do eixo, desde que no plano em que atua a correspondente força cortante. Neste exemplo, opta-se por traçar o diagrama de V_z acima do eixo, como se observa na Figura 5.169. Lembra-se que nos diagramas de forças cortantes também se indica seu sinal.

Mais uma vez, o único diagrama que não permite nenhuma flexibilidade de traçado é o dos momentos fletores. Os diagramas dos momentos fletores devem ser desenhados no plano em que atuam, e no lado tracionado da barra.

No caso desta viga, o diagrama do momento fletor M_x deve ser desenhado no plano vertical e, como traciona as fibras superiores da barra, acima do eixo. O do momento fletor M_z, no plano horizontal; como traciona o lado esquerdo da barra, neste lado do eixo.

Não se indicam os sinais nos diagramas de momentos fletores. O diagrama de momentos fletores da viga analisada está apresentado na Figura 5.169.

No caso do diagrama de momentos de torção, tem-se a mesma liberdade que no das forças normais: pode ser indicado em qualquer posição. Opta-se neste exemplo por desenhá-lo no plano horizontal, como se mostra na Figura 5.169. Nos diagramas de momentos de torção indica-se seu sinal.

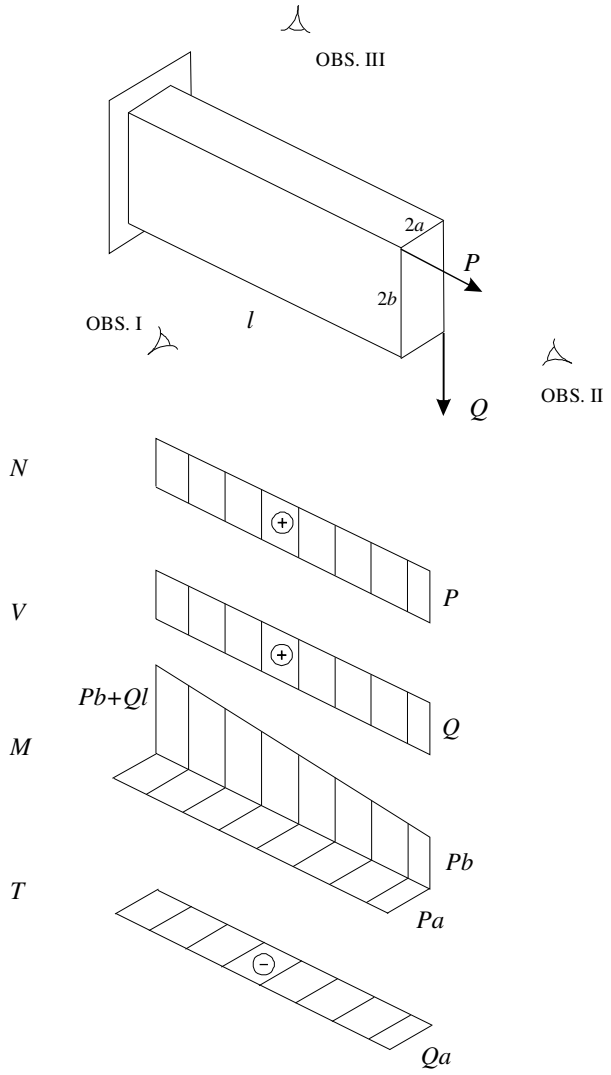


Figura 5.169

Nota 5.40

Como se comentou, no caso das estruturas espaciais tem-se duas componentes de força cortante e de momento fletor. Deve-se traçar os gráficos de ambas componentes da força cortante em um mesmo diagrama de forças cortantes; da mesma forma, deve-se traçar os gráficos das duas componentes do momento fletor em um mesmo diagrama.

Isto, porque dessa maneira torna-se mais fácil determinar as seções mais perigosas da estrutura, aquelas em que se tem as combinações mais desfavoráveis de esforços solicitantes.

Nota 5.41

No esquema da estrutura que precede os diagramas de esforços solicitantes e sob o qual estes são apresentados, deve-se indicar os observadores utilizados para atribuir os sinais das forças cortantes, pois é essa identificação que confere sentido aos sinais presentes no diagrama de forças cortantes. É o que se fez na Figura 5.169.

A fim de não congestionar o desenho, quando forem utilizados os observadores naturais - como nestes exemplos - se passará a omitir a identificação dos observadores no esquema da estrutura que precede os diagramas de esforços solicitantes.

Exemplo 5.35

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga engastada da Figura 5.170.

Sugere-se ao leitor que, antes de obter as expressões analíticas dos esforços solicitantes de uma estrutura como essa, examine-a mentalmente, procurando chegar a seus esforços solicitantes. Na situação particular desta estrutura, que é muito simples, talvez o leitor já possa até traçar todos os diagramas diretamente. Não é difícil ver que nas duas barras desta viga não há forças normais, que se tem apenas forças cortantes verticais, que os momentos fletores também atuam nos planos verticais, que só há torção na barra AB.

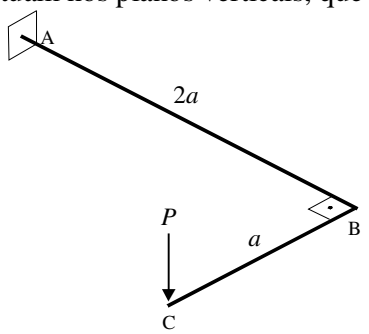


Figura 5.170

À medida que se for adquirindo maior experiência, os diagramas ou partes deles poderão ser obtidos diretamente, sem o auxílio de expressões analíticas.

Mais uma vez, entretanto, apresenta-se a resolução sistematizada.

Para determinar os esforços solicitantes no trecho CB corta-se a barra em uma seção genérica S_1, transferindo-se para a seção do corte a força aplicada à sua esquerda, como se mostra na Figura 5.171.

Sendo a barra paralela ao eixo x, nela pode-se ter os esforços solicitantes N, V_y, V_z, M_y, M_z e T.

Da Figura 5.171, obtêm-se suas expressões analíticas:

$$N = 0$$

$$V_y = 0$$

$$V_z = -P$$

$$M_y = Px' \qquad (5.92)$$

$$M_z = 0$$

$$T = 0.$$

Como de hábito, os gráficos desses esforços já devem ser traçados, passando-se em seguida à barra BA. Cortando-a em uma seção genérica S_2 e transferindo para esta seção a única força aplicada à sua direita, obtêm-se os esforços solicitantes indicados na Figura 5.172.

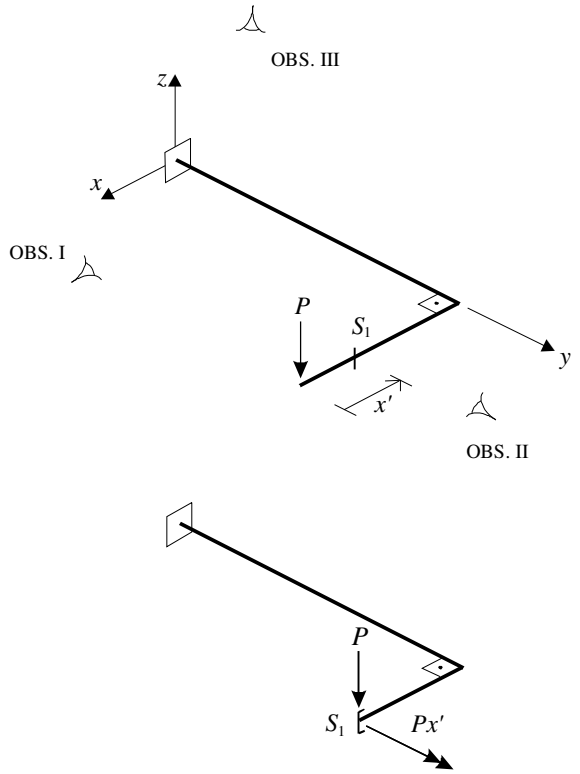


Figura 5.171

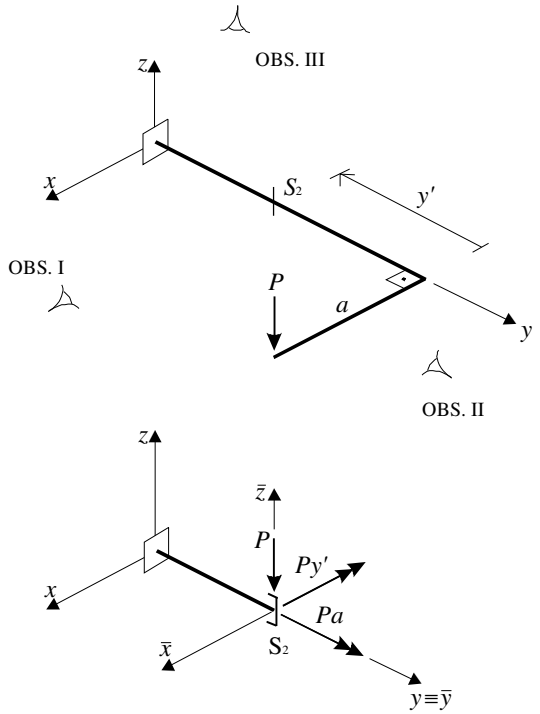


Figura 5.172

Lembra-se que reduzir em S_2 a força P aplicada em C é aplicar em S_2 esta força e os seus momentos em relação aos eixos $\bar{x}$, $\bar{y}$ *e* $\bar{z}$ indicados na Figura 5.172.

As expressões analíticas dos esforços solicitantes em BA são

$$
\begin{aligned}
N &= 0 \\
V_x &= 0 \\
V_z &= P \\
M_x &= -Py' \\
M_z &= 0 \\
T &= Pa.
\end{aligned}
\tag{5.93}
$$

Os diagramas de esforços solicitantes desta viga estão na Figura 5.173.

<u>Nota 5.42</u>

Também no caso das estruturas espaciais pode-se simplificar a obtenção dos esforços solicitantes empregando um procedimento já aplicado às estruturas planas.

Uma vez obtidos os esforços solicitantes da barra CB e traçados seus diagramas, pode-se retirar esta barra da estrutura, cortando-a em uma seção imediatamente à esquerda de

B, nela reduzindo a única força aplicada à sua esquerda, como se mostra na Figura 5.174.

Pode-se, agora, obter com facilidade os esforços solicitantes da barra BA.

Observa-se que o momento *Pa* em B, que é fletor na barra CB, se transfere para a barra BA como momento de torção.

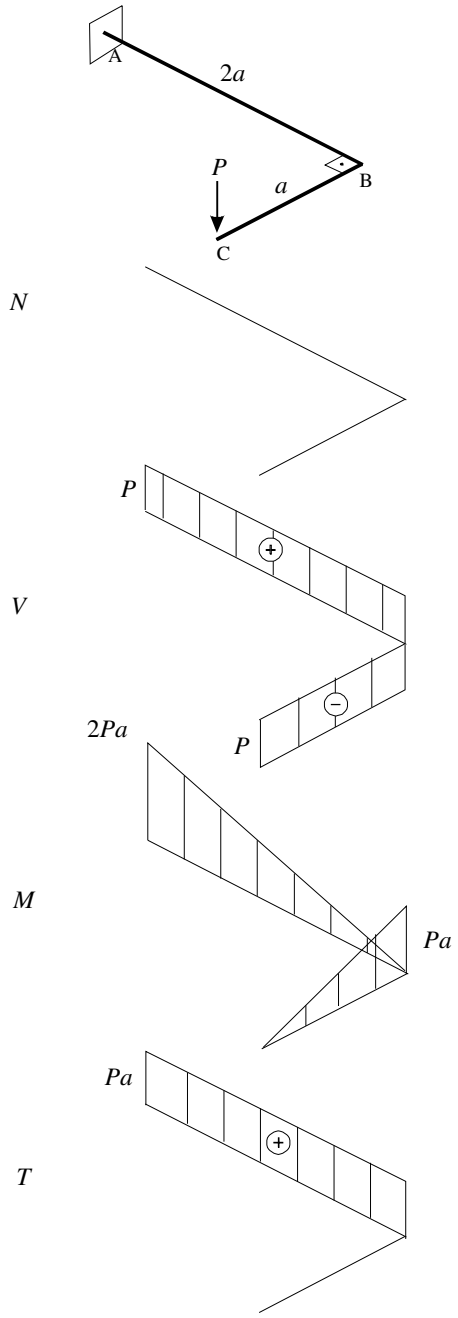


Figura 5.173

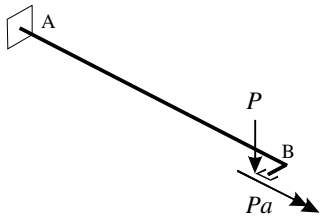


Figura 5.174

Exemplo 5.36

Determinar os esforços solicitantes na seção *E* da estrutura da Figura 5.175.

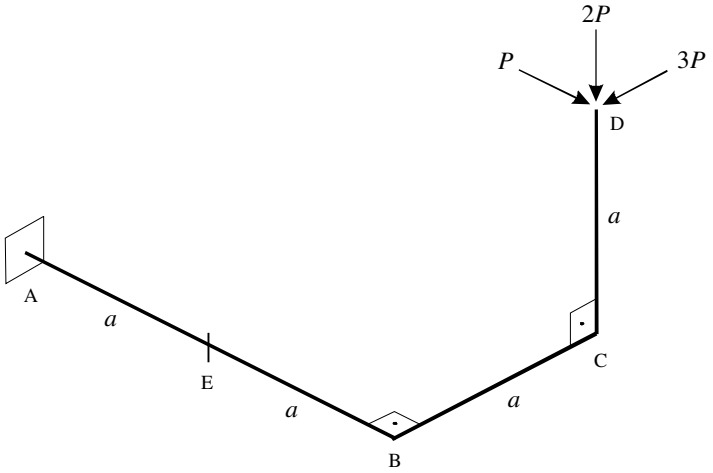


Figura 5.175

Como se procuram os esforços solicitantes apenas na seção *E*, basta cortar a estrutura nesta seção, nela reduzindo todos os esforços aplicados de um dos lados do corte.

Tratando-se de uma viga engastada, pode-se transferir para a seção do corte os esforços aplicados no trecho que contém a extremidade livre, pois assim não se terá que determinar as reações de apoio da viga. É o que se fará.

Na Figura 5.176(a) mostra-se a estrutura cortada em *E*: o trecho à esquerda do corte com linha cheia e o trecho à direita com linha tracejada.

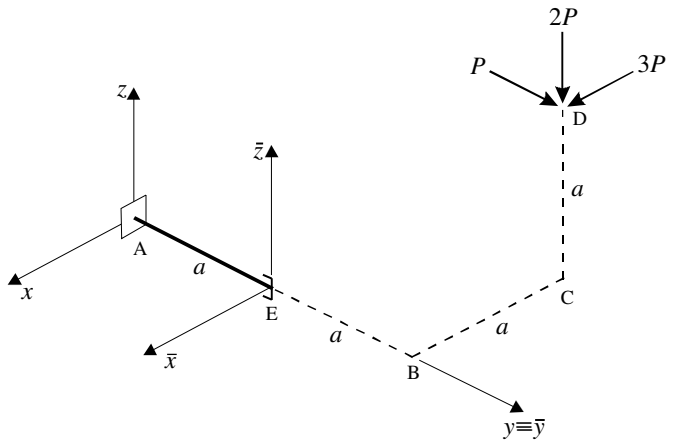
Reduzir na seção *E* as forças que atuam em D é nela aplicar estas forças e seus momentos em relação aos eixos $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ da Figura 5.176(a).

Esta redução leva aos esforços da Figura 5.176(b).

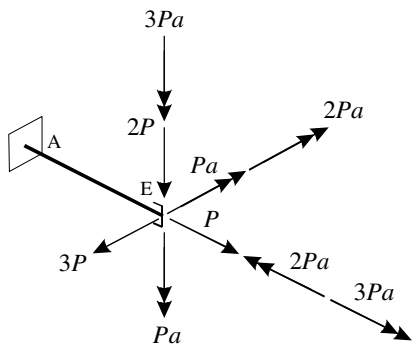
Tem-se então na seção E:

$$
\begin{aligned}
N &= P \\
V_x &= 3P \\
V_z &= 2P \\
M_x &= -3Pa \\
M_z &= -4Pa \\
T &= Pa.
\end{aligned}
\tag{5.94}
$$

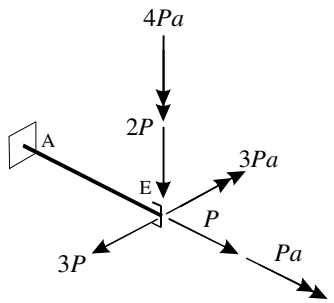
Estes esforços estão na Figura 5.176(c).



(a)



(b)



(c)

Figura 5.176

Nota 5.43

Neste exemplo - e também nos dois anteriores -, por se tratar de uma viga engastada, optou-se por reduzir na seção do corte os esforços aplicados no trecho da estrutura que contém a extremidade livre, pois assim não é preciso calcular as reações de apoio.

É claro que se poderia ter feito o contrário: reduzir na seção do corte os esforços aplicados no trecho que contém o engastamento, o que exigiria a determinação das reações de apoio, demandando algum trabalho adicional.

No caso particular desta viga, as reações de apoio foram determinadas no Exemplo 1.15. Sugere-se que, como exercício, o leitor obtenha os esforços solicitantes na seção *E* nela reduzindo os esforços externos aplicados à sua esquerda, comparando os esforços encontrados com os da Figura 5.176(c).

Exemplo 5.37

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura da Figura 5.177.

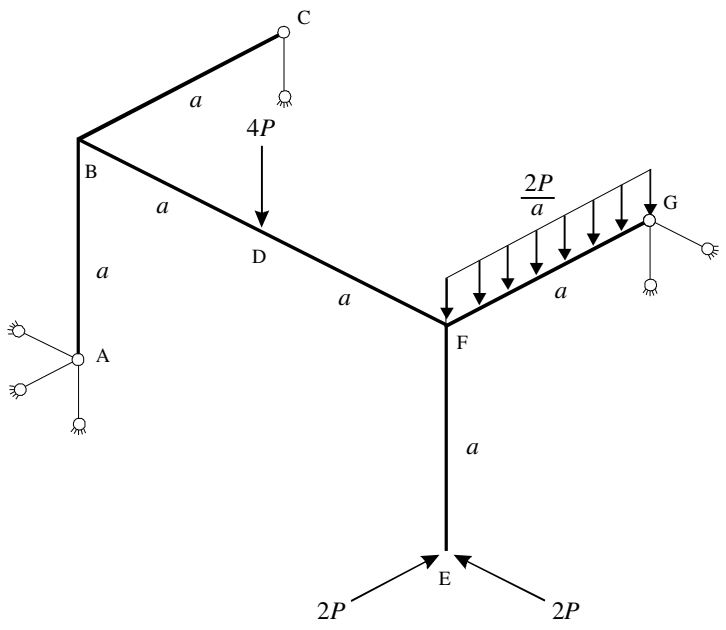


Figura 5.177

No caso desta estrutura não se pode obter os esforços solicitantes sem determinar as reações de apoio; só os esforços solicitantes da barra EF podem ser encontrados sem conhecer as reações de apoio.

Estas reações foram determinadas no Exemplo 1.16, estando reproduzidas na Figura 5.178.

Os diagramas de esforços solicitantes das barras AB, CB e EF são muito simples, podendo ser obtidos mentalmente. Pede-se ao leitor que procure determiná-los desta forma, verificando suas conclusões por meio dos diagramas apresentados na Figura 5.182.

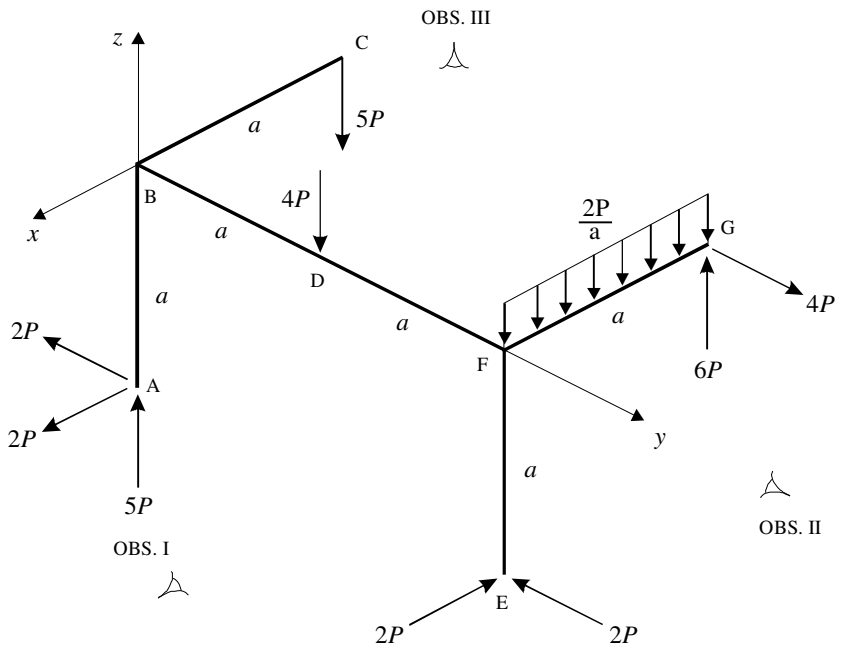


Figura 5.178

A análise da barra GF é um pouco mais complexa. Embora ela também possa ser feita mentalmente, será aqui apresentada de forma explícita.

Cortando a barra GF em uma seção genérica S_1 e nela reduzindo as forças aplicadas à sua direita, chega-se aos esforços mostrados na Figura 5.179(b).

Tem-se então na barra GF:

$$
\begin{aligned}
N &= 0 \\
V_y &= 4P \\
V_z &= \frac{2P}{a}\bar{x} - 6P \\
M_y &= 6P\bar{x} - \frac{P\bar{x}^2}{a} \\
M_z &= -4P\bar{x} \\
T &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.95}
$$

Os correspondentes diagramas estão mostrados na Figura 5.182. Como a força cortante vertical não se anula neste trecho de barra, o momento fletor vertical não apresenta extremo entre G e F.

Falta agora examinar a barra BF. Antes de fazê-lo analiticamente, vai-se proceder a uma análise qualitativa dos esforços solicitantes.

Observando as forças aplicadas nas barras AB e CB depreende-se que:

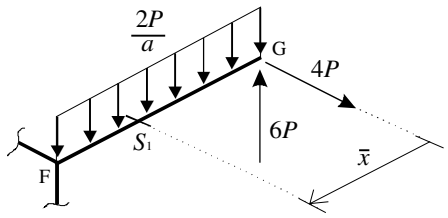
- na barra BF há uma força de tração $2P$, decorrente da força $2P$ paralela a y aplicada em A;

- na barra BF há torção, decorrente da força $5P$ aplicada em C e da força $2P$ paralela a x aplicada em A;

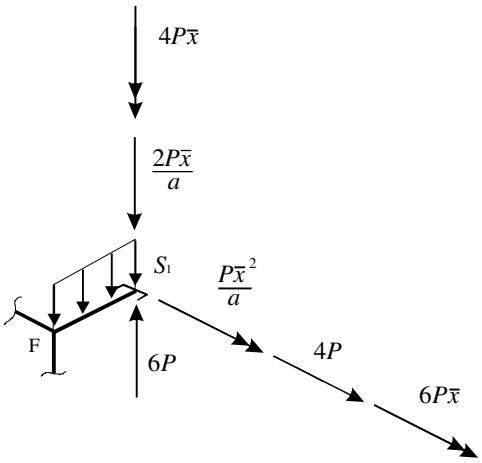
- a força $2P$ paralela a x aplicada em A produz flexão horizontal da barra BF, tracionando as fibras opostas ao observador I;

- a força $2P$ paralela a y aplicada em A produz flexão vertical da barra BF, tracionando suas fibras inferiores;
- as forças $5P$ aplicadas em A e C produzem individualmente flexão vertical em BF; estas flexões, que são iguais em intensidade, são opostas em sua ação física, cancelando-se mutuamente: a força $5P$ aplicada em C traciona as fibras superiores de BF, enquanto que a força $5P$ aplicada em A traciona suas fibras inferiores;

- só há, portanto, flexão vertical em BF decorrente da ação da força $2P$ paralela a y aplicada em A.



(a)



(b)

Figura 5.179

Análise semelhante a esta também poderia ser feita considerando as forças aplicadas em EF e GF. Basta, entretanto, fazer uma delas para ter uma idéia de como são os esforços solicitantes em BF.

Passa-se agora a sua determinação analítica. Como as barras AB e CB já foram examinadas, serão retiradas da estrutura, cortando-se a barra AB imediatamente abaixo de B e a barra CB imediatamente à direita de B, transferindo-se para estas seções os esforços externos aplicados nas barras removidas, como indicado na Figura 5.180(a).

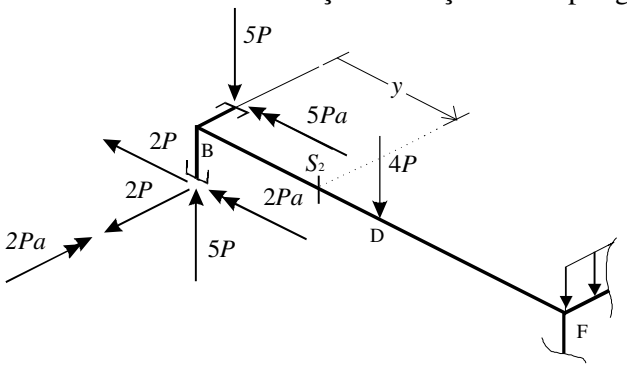
Reduzindo os esforços aplicados em B na seção genérica S_2 da barra BD - Figura 5.180(b) -, determinam-se os esforços solicitantes nesta barra - Figura 5.180(c).

Tem-se em BD:

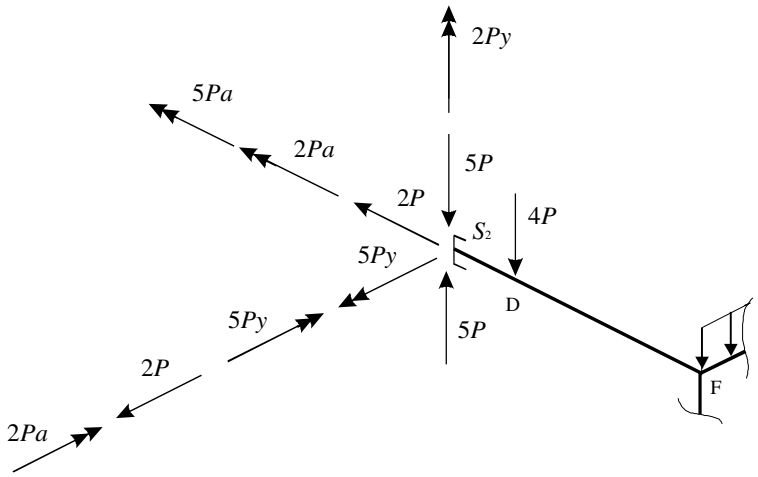
$$
\begin{aligned}
N &= 2P \\
V_y &= -2P \\
V_z &= 0 \\
M_y &= -2Pa \\
M_z &= 2Py \\
T &= 7Pa.
\end{aligned}
\tag{5.96}
$$

Os correspondentes diagramas estão na Figura 5.182.

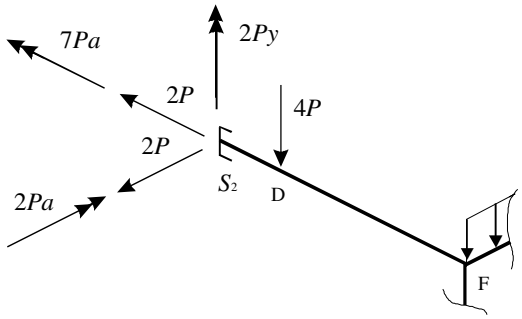
Como regra geral, deve-se ter um único diagrama para cada um dos esforços solicitantes, no qual se indicam os esforços atuantes em todas as suas barras. Isto, porque este procedimento facilita a identificação das seções mais perigosas da estrutura.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.180

Existem, entretanto, situações em que, por motivo de clareza, prefere-se desmembrar os diagramas. Os diagramas mais congestionados são os de forças cortantes e momentos fletores, visto que para cada uma das barras se pode ter duas componentes destes esforços. No caso das forças cortantes, como se tem liberdade de escolher o lado em que se traça o diagrama, em geral consegue-se chegar a um diagrama claro e legível. Isto nem sempre ocorre com os diagramas de momentos fletores, em que não se tem nenhuma flexibilidade de traçado. Por esta razão, estes diagramas às vezes se tornam confusos e ilegíveis, dada uma grande superposição de gráficos apresentados em perspectiva. Nestes casos, convém separá-los em mais de um desenho. É o que se faz na Figura 5.182; nela os diagramas de momentos fletores das barras AB, CB, EF e GF estão em um desenho e os da barra BF, em outro.

Neste desmembramento dos diagramas, os gráficos das duas componentes de momento fletor ou força cortante em uma mesma barra devem estar sempre juntos, no mesmo desenho, a fim de facilitar a determinação das seções críticas.

Obtidos os esforços solicitantes em BD, pode-se remover esta barra da estrutura, cortando-a em uma seção imediatamente à esquerda de D, nela aplicando os esforços

solicitantes que aí atuam - Figura 5.181(a). Para chegar aos esforços solicitantes em DF utiliza-se mais uma vez o teorema fundamental, cortando a barra DF em uma seção genérica S_3 , nela reduzindo os esforços aplicados em D - Figura 5.181(b). Determinam-se assim os esforços solicitantes em DF, cujas expressões analíticas são

$$
\begin{aligned}
N &= 2P \\
V_x &= -2P \\
V_z &= -4P \\
M_x &= 4P\bar{y} - 2Pa \\
M_z &= 2Pa + 2P\bar{y} \\
T &= 7Pa.
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

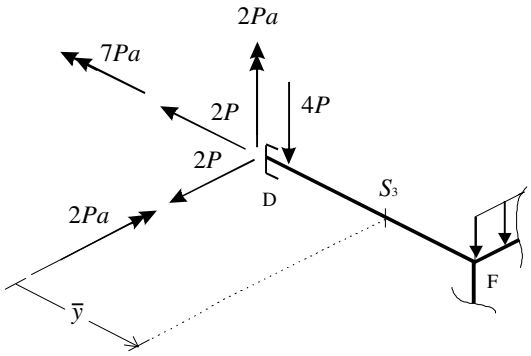
Os correspondentes diagramas estão na Figura 5.182.

Com este exemplo encerra-se o estudo do traçado dos diagramas de esforços solicitantes de uma estrutura reticulada. Considera-se desnecessária a apresentação de outros exemplos, por se acreditar que os principais pontos relativos a eles tenham sido adequadamente abordados.

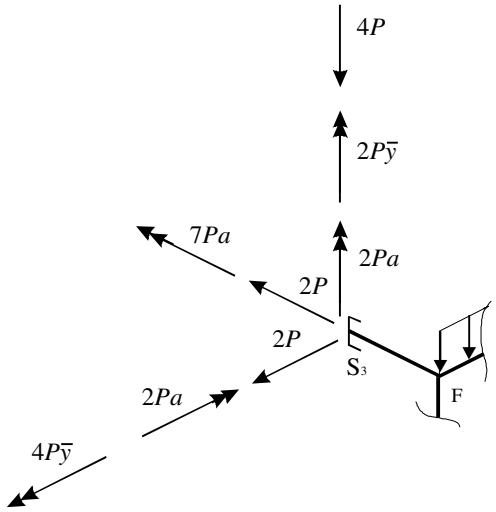
É importante comentar que, na verdade, toda esta longa apresentação poderia ter sido condensada em um ou dois exemplos, já que nada mais se fez ao longo deste capítulo que aplicar o teorema fundamental. Este é o caminho seguido por boa parte dos livros de Resistência dos Materiais, em que os diagramas de esforços solicitantes são apresentados conceitualmente e ilustrados por uns poucos exemplos.

Dada a imensa importância que os diagramas de esforços solicitantes têm em um curso de engenharia de estruturas, e dadas as dificuldades encontradas por aqueles que os estudam, resolveu-se apresentá-los de forma mais lenta e detalhada.

Espero ter tido êxito neste intento, e que o leitor de fato tenha aprendido bem como traçá-los.

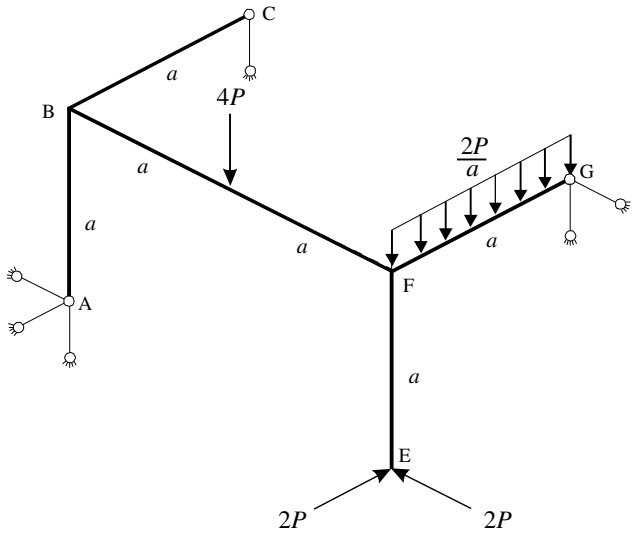


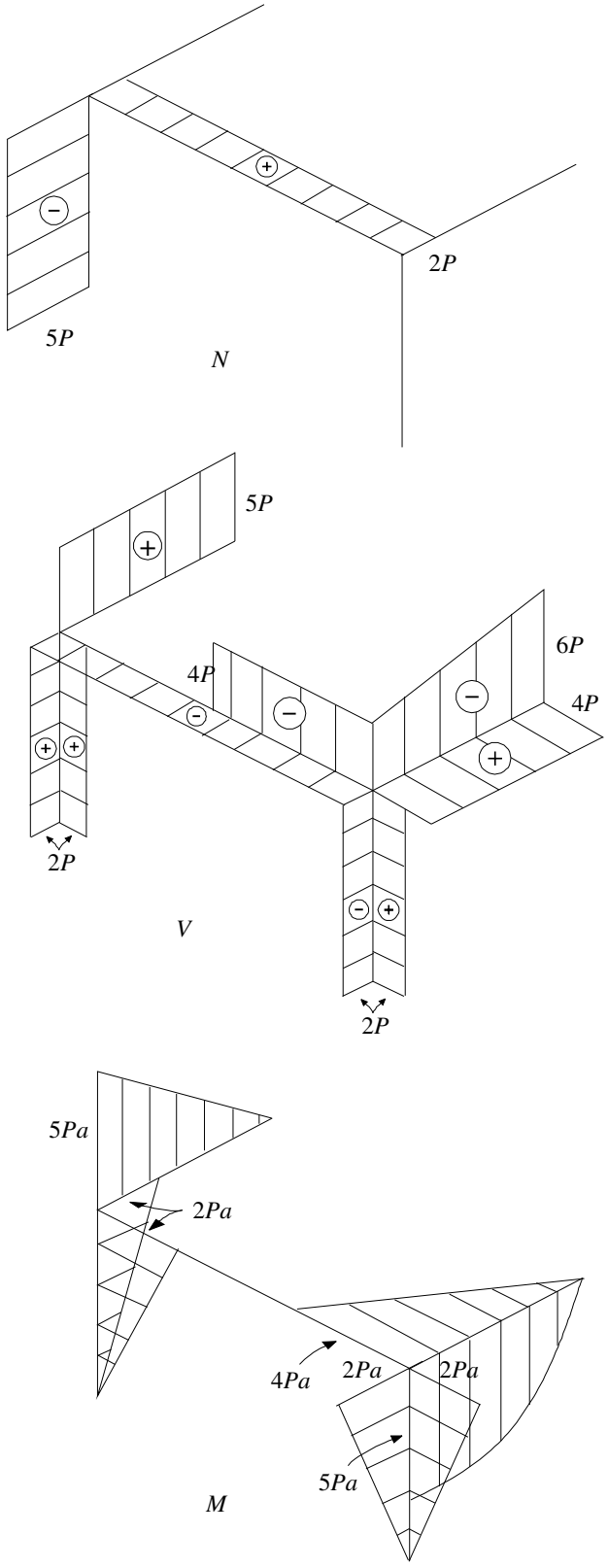
(a)



(b)

Figura 5.181




2P
5P
N
5P
6P
4P
4P
2P
V
2P
5Pa
2Pa
4Pa
2Pa
2Pa
5Pa
M

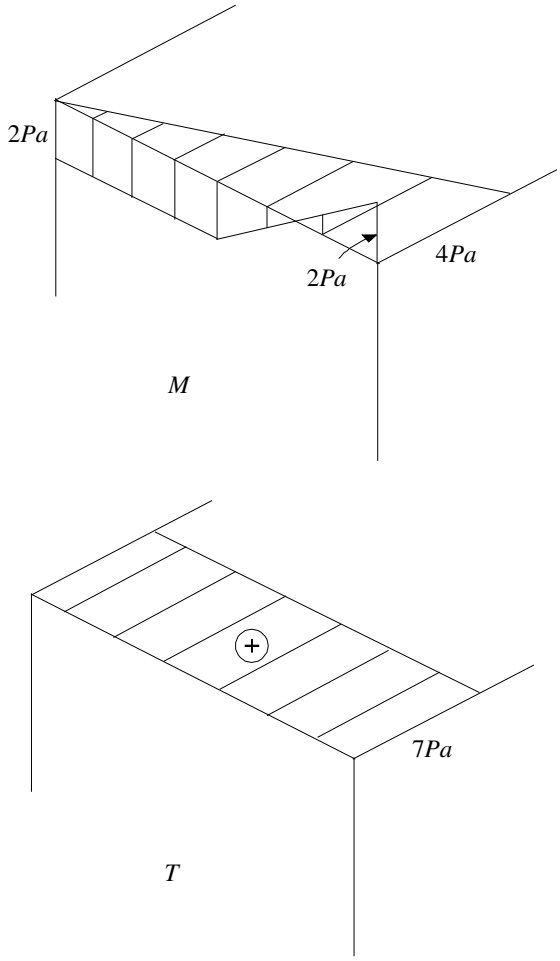


Figura 5.182

É claro que se pode ter estruturas muitíssimo mais complexas que as vistas neste capítulo, em particular as estruturas espaciais. Imagine uma estrutura com barras helicoidais submetidas a cargas distribuídas não uniformes! Apesar de extremamente trabalhosa, a obtenção dos diagramas de esforços solicitantes dessa estrutura seguiria exatamente os mesmos passos empregados para as estruturas mais simples aqui examinadas.

Como última reflexão, volta-se a afirmar: traçar os diagramas de esforços solicitantes é sempre aplicar o teorema fundamental.