LISTA DE EXERCÍCIOS 3

Essa lista trata dos conceitos de **torque**, **momento angular**, **momento de inércia** e **dinâmica e estática de corpos rígidos**. Tais conceitos são abordados nos capítulos 11 (todas as seções) e 12 (todas as seções) do livro-texto:

- Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 1. - Mecânica.

Momento angular e forças centrais

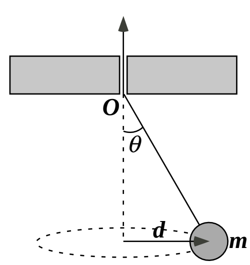
1. Um satélite de massa m está em órbita circular de raio r ao redor do planeta Terra.

   a) Qual o momento angular, calculado em referência ao centro da órbita, deste satélite? (use massa da Terra igual a M).

   b) Para $m = 100$ kg, qual o valor numérico do momento angular se o raio da órbita é duas vezes o raio da Terra? (você não precisa usar o valor numérico para o raio da Terra)

2. Um satélite de massa m e órbita circular de raio r_0 em torno da Terra possui momento angular L. Expresse as suas energias cinética K, potencial U e energia mecânica total E em termos de L, m e r_0.

3. (**) (Ex. 12, cap. 11 - HMN) Uma bolinha presa a um fio de massa desprezível gira em torno de um eixo vertical com velocidade escalar constante, mantendo-se a uma distância $d = 0,5\ m$ do eixo; o ângulo θ entre o fio e a vertical é igual a $30°$. O fio passa sem atrito através de um orifício O numa placa, e é puxado lentamente para cima até que o ângulo θ passa a ser de $60°$.



   (a) Que comprimento do fio foi puxado?

   (b) De que fator variou a velocidade de rotação?

4. (Ex. 6, cap. 11, HMN) Considere o movimento de uma partícula de massa m num campo de forças centrais associado à energia potencial $U(r)$, onde r é a distância da partícula ao centro de forças O. Neste movimento, a magnitude $\ell = |\vec{\ell}|$ do momento angular da partícula em relação a O se conserva.

   Sejam (r, θ) as componentes em coordenadas polares do vetor de posição r da partícula em relação à origem O.

   (a) Mostre que as componentes em coordenadas polares do vetor velocidade $\vec{v}$ da partícula são $v_r = \frac{dr}{dt}$ (velocidade radial) e $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$ (velocidade transversal). Mostre que $\ell = mrv_\theta$.

   (b) Mostre que a energia total E da partícula é dada por

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + V_{ef}(r)$$
$$V_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

5. (Ex. 7, cap. 11, HMN) Usando os resultados do problema anterior e por analogia com a discussão do movimento unidimensional de com energia E,

   (a) Calcule, para so sistema de duas partículas em interação gravitacional a distância r_0 associada ao mínimo de $V_{ef}(r)$ e a energia E_0 correspondente. Mostre que r_0 é o raio da órbita circular da partícula em torno do centro de forças,associada à energia E_0.

   (b) Mostre que, para $0 > E > E_0$, a distancia r ao centro de forças oscila entre dois valores r_p e r_a. Estes valores correspondem ao periélio e ao afélio da órbita elíptica de energia E. Calcule o semi-eixo maior a dessa órbita elíptica e mostre que E só depende de a.

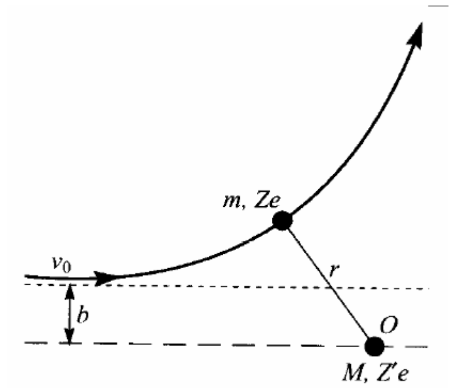
   (c) Calcule a velocidade da partícula numa órbita elíptica se semi-eixo maior a, quando se encontra à distância r do centro de forças.

   (d) Calcule a excentricidade e da órbita em função do a, E e do momento angular l.

6. (Ex. 9, cap. 11, HMN) O *espalhamento Rutherford* é a deflexão de uma partícula carregada (massa m, carga Ze) por outra partícula (massa M, carga $Z'e$), sob ação da força coulombiana. Supomos $M \gg m$, de modo que a partícula de massa M pode ser tratada como um centro de forças fixo. Para Z e Z' de mesmo sinal (ex.: partículas alfa defletidas por um núcleo) e sendo a partícula de massa m lançada a partir de uma velocidade inicial v_0 e parâmetro de choque b a órbita de m é uma hipérbole do tipo ilustrado na figura.

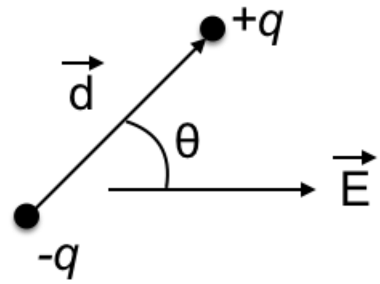
   (a) Escreva o potencial efetivo $V_{ef}(r)$ em função de b e v_0.

   (b) Calcule a distância r_0 de máxima aproximação entre as duas partículas, como função de b e v_0.



Rotações

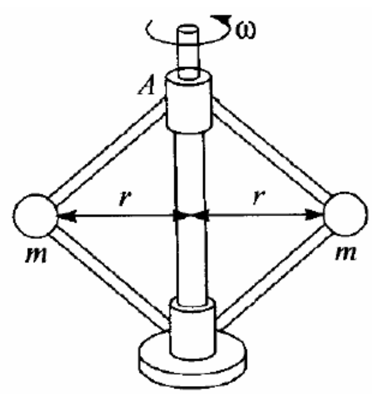
7. (Ex. 2, cap. 11 - HMN) Um dipolo elétrico é um par de cargas iguais e opostas, $+q$ e $-q$, separadas por uma distância d. O momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ associado ao dipolo é o vetor $\vec{p} = q\vec{d}$ onde $|\vec{d}| = d$ e $\vec{d}$ aponta de $-q$ para $+q$. Considere um dipolo elétrico situado num campo elétrico $\vec{E}$ uniforme, e que a força exercida sobre uma carga elétrica é dada por $\vec{F} = q\vec{E}$.



   (a) Mostre que a resultante das forças elétricas aplicadas ao dipolo é nula, mas que o torque resultante é dado por $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ (em relação a qualquer ponto).

   (b) Mostre que a energia potencial do dipolo no campo é dada por $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Identifique as situações de equilíbrio estável e instável do dipolo no campo.

8. (Ex. 14, cap. 11 - HMN) No sistema da figura, análogo a um regulador centrífugo, o anel A de massa desprezível, pode deslizar ao longo do eixo vertical. Inicialmente as duas bolas iguais de massa $m = 200$ g estão numa distância $r = 15$ cm do eixo e o sistema gira com velocidade angular $\omega = 6$ rad/s. Pressiona-se para baixo o anel A até que a distância das bolas ao eixo aumenta para $r = 25$ cm.



   (a) Qual é a nova velocidade angular de rotação? (2,16 rad/s)

   (b) Qual é o trabalho realizado sobre o sistema? (-0,104 J)

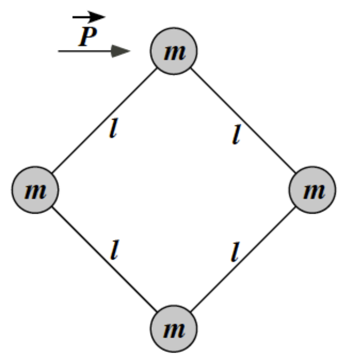
Colisões

9. (Ex. 4, cap. 11 - HMN) Dois patinadores de massa 60 kg, deslizando sobre uma pista de gelo com atrito desprezível, aproximam-se com velocidades iguais e opostas de 5 m/s, segundo retas paralelas, separadas por uma distância de 1,40 m.

   (a) Calcule o vetor momento angular do sistema e mostre que é o mesmo em relação a qualquer ponto e se conserva. (L = 420 kg m^2/s perpendicularmente à pista)

   (b) Quando os patinadores chegam a 1,40 m um do outro, estendem os braços e dão-se as mãos, passando a girar em torno do centro de massa comum. Calcule a velocidade angular de rotação. ($\omega = 7,1$ rad/s)

10. (Ex. 15, cap. 11 - HMN) Quatro discos iguais de massas m ocupam os vértices de uma armação quadrada formada por quatro barras rígidas de comprimento l e massa desprezível. O conjunto está sobre uma mesa de ar horizontal, podendo deslocar-se sobre ela com atrito desprezível. Transmite-se um impulso instantâneo $\vec{P}$ a uma das massas, na direção de uma das diagonais do quadrado (ver figura). Descreva completamente o movimento subsequente do sistema. ($\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{4m}$ e $\vec{\omega} = \frac{\sqrt{2}\vec{P}}{4ml}$)



11. No instante anterior a uma colisão totalmente elástica contra uma partícula-alvo, a velocidade e a posição de uma partícula de massa $m = 3$ kg são medidas em relação ao referencial do laboratório. Sua velocidade inicial é $\vec{v} = 2,0\hat{x}$ m/s e sua posição é $\vec{r} = 5\hat{x} + 2\hat{y}$ m. No instante logo após a colisão, verifica-se que a partícula tem velocidade $\vec{v} = -1,0\hat{x}$ m/s.

    a) Faça um esquema cuidadoso da situação apresentada no problema. Indique os vetores posição e velocidade final e inicial.

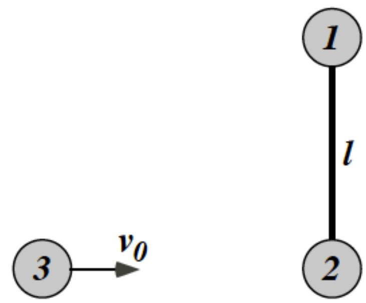
    b) Calcule a variação de momento linear da partícula e, supondo que a colisão durou 10^{-3} s, calcule a força que agiu sobre a partícula durante a colisão.

    c) Determine o momento angular inicial e final da partícula.

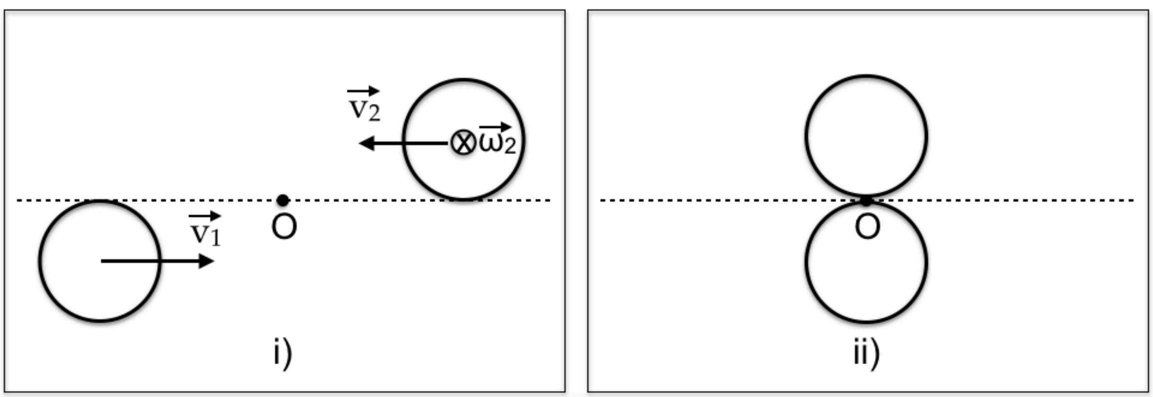
    d) Também considerando que a colisão durou 1 ms, determine o torque que agiu sob a partícula.

    e) Se a partícula-alvo estava inicialmente em repouso em relação ao mesmo referencial, determine os momentos linear e angular final da partícula alvo.

12. (Ex. 16, cap. 11 - HMN) Um haltere formado por dois discos 1 e 2 iguais de massas m unidos por uma barra rígida de massa desprezível e comprimento $l = 30$ cm repousa sobre uma mesa de ar horizontal. Um terceiro disco 3 de mesma massa m desloca-se com atrito desprezível e velocidade $v_0 = 3$ m/s sobre a mesa, perpendicularmente ao haltere, e colide frontalmente com o disco 2, permanecendo colado a ele. Descreva completamente o movimento subsequente do sistema. ($v_{cm} = 1$ m/s na direção de $\vec{v}_0$ e $\omega = 5$ rad/s)



13. Dois discos de massas $m_1 = m_2 = 2,0$ kg e raios $r_1 = r_2 = 10$ cm movem-se sem atrito sobre uma mesa horizontal com velocidades (em módulo) $v_1 = v_2 = 1$ m/s, conforme a parte i) da figura abaixo. O disco 2 gira com velocidade angular $\omega_2 = 10$ rad/s no sentido horário, enquanto o disco 1 gira com velocidade ω_1 desconhecida. Os discos colidem no ponto O e grudam formando um conjunto que permanece estático após a colisão, com velocidade angular do conjunto igual a zero, conforme figura ii).



Determine:

(a) O vetor momento angular, direção e sentido do disco 2 em relação ao seu centro de massa, antes da colisão. ($-0,1$ kg m^2/s, o sinal indica que o vetor está entrando no plano da mesa)

(b) O vetor momento angular do disco 2 em relação ao centro O, antes da colisão. ($+0,1$ kg m^2/s)

(c) A velocidade angular $\vec{\omega}_1$ e sentido do disco 1, antes da colisão. (-30 rad/s, ou seja, girando no sentido horário.)

Momento de Inércia

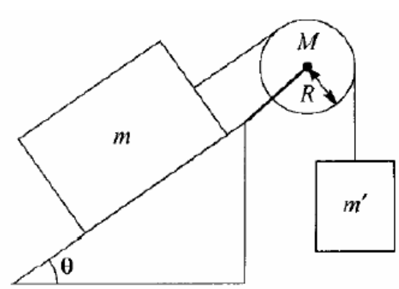
14. (Ex. 1, cap. 12 - HMN). Demonstre o seguinte *teorema dos eixos perpendiculares*: O momento de inércia de uma placa (lâmina delgada) plana de forma arbitrária em relação a um eixo Oz perpendicular a seu plano, com

a origem O no plano da placa, é a soma dos momentos de inércia da plana em relação aos eixos Ox e Oy, que formam com Oz um sistema de eixos ortogonais.

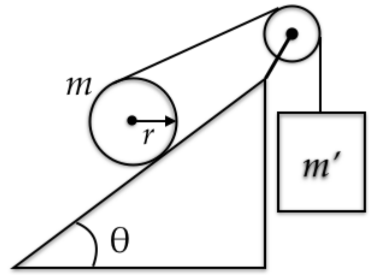
15. (Ex. 2, cap. 12 - HMN) Como aplicação do teorema dos eixos perpendiculares, calcule:
    (a) O momento de inércia de uma plana retangular homogênea de massa M e lados a e b em relação a um eixo perpendicular a seu plano, que passa pelo centro da placa. ($\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$)
    (b) O momento de inércia de um disco circular de massa M e raio R, em torno de qualquer de um seus diâmetros. ($\frac{1}{4}MR^2$)
16. (Ex. 3, cap. 12 - HMN) Calcule o momento de inércia de uma lâmina homogênea de massa M em forma de anel circular, de raio interno r_1 e raio externo r_2.
    (a) Em relação a um eixo perpendicular ao plano do anel, passando pelo seu centro. $\left(\frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2)\right)$
    (b) Em relação a um diâmetro do anel. Verifique o resultado, nos casos limites de um disco e um aro circular. $\left(\frac{1}{4}M(r_1^2 + r_2^2)\right)$

Dinâmica de Corpos Rígidos

17. (Ex. 6, cap. 12 - HMN) Uma porta de 15 kg e 70 cm de largura, suspensa por dobradiças bem azeitadas, está aberta de 90°, ou seja, com seu plano perpendicular ao plano do batente. Ela leva um empurrão na beirada aberta, com impacto equivalente ao de uma massa de 1 kg, com velocidade de 2,5 m/s. Quanto tempo ela leva para fechar-se? (2,2 s)
18. (Ex. 7, cap. 12 - HMN) Uma mesa de coquetéis tem um tampo giratório, que é uma tábua circular de raio R e massa M, capaz de girar com atrito desprezível em torno do eixo vertical da mesa. Uma bala de massa $m \ll M$ e velocidade v, disparada por um convidado que abusou dos coquetéis, numa direção horizontal, vai-se encravar na periferia da tábua.
    (a) Qual é a velocidade angular de rotação adquirida pela tábua? $\left(\omega = \frac{2mv}{MR}\right)$
    (b) Que fração da energia cinética inicial é perdida no impacto? $\left(1 - \frac{2m}{M}\right)$
19. (Ex. 10, cap. 12 - HMN) Um bloco de massa m, que pode deslizar com atrito desprezível sobre um plano inclinado de inclinação θ em relação à horizontal, está ligado por um fio, que passa sobre polia de raio R e massa M, a uma massa $m' > m$ suspensa. O sistema é solto em repouso. Calcule, por conservação da energia, a velocidade v de m' após cair uma altura h. $\left(v^2 = \frac{2gh(m'-m\sin\theta)}{m+m'+M/2}\right)$



20. (Ex. 12, cap. 12 - HMN) Uma fita leve está enrolada em volta de um disco circular de massa m e raio r, que rola sem deslizar sobre um plano inclinado áspero de inclinação θ. A fita passa por uma roldana fixa de massa desprezível e está presa a um corpo suspenso de massa m'.

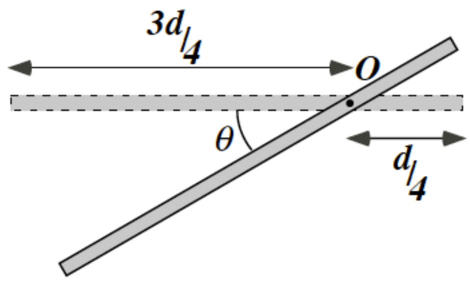


Calcule

(a) A aceleração a da massa m'. ($a = \frac{g(m' - \frac{m}{2}\sin\theta)}{m' + \frac{3}{8}m}$)

(b) A tensão T na fita. ($T = \frac{mm'g(\frac{3}{4} + \sin\theta)}{2m' + \frac{3}{4}m}$)

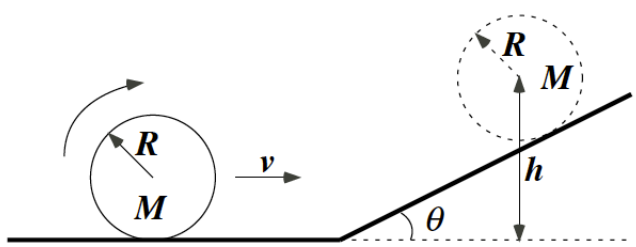
21. (Ex. 13, cap. 12 - HMN) Uma haste metálica delgada de comprimento d e massa M pode girar livremente em torno de um eixo horizontal, que a atravessa perpendicularmente, à distância $d/4$ de uma extremidade. A haste é solta a partir do repouso, na posição horizontal.



(a) Calcule o momento de inércia I da haste com respeito ao eixo em torno do qual ela gira. ($I = \frac{7}{48}Md^2$)

(b) Calcule a velocidade angular ω adquirida pela haste após ter caído de um ângulo θ (figura), bem como a aceleração angular α. ($\omega = \left[\frac{24g}{7d}\sin\theta\right]^{1/2}$ e $\alpha = \frac{12g}{7d}\cos\theta$)

22. (Ex. 14, cap. 12 - HMN) Uma roda cilíndrica homogênea, de raio R e massa M, rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade v, e sobe sobre um plano inclinado de inclinação θ, continuando a rolar sem deslizar (figura ao lado).



Até que altura h o centro da roda subirá sobre o plano inclinado? ($h = R + \frac{3}{4}\frac{v^2}{g}$)

23. (Ex. 17, cap. 12 - HMN) Uma bola de boliche esférica uniforme é lançada, com velocidade inicial v_0 horizontal e sem rotação inicial, sobre uma cancha horizontal, com coeficiente de atrito cinético, μ_c.

(a) Que distancia d a bola percorrerá sobre a prancha até que comece a rolar sem deslizar? ($d = \frac{12v_0^2}{49\mu_c g}$)

(b) Quanto tempo t depois do lançamento isso ocorre? ($t = \frac{2v_0}{7\mu_c g}$)

(c) Qual é a velocidade v da bola nesse instante? ($v = \frac{5}{7}v_0$)

24. (MIT) Um aro de bicicleta de raio R e massa m está girando inicialmente com velocidade angular $\vec{\omega}_0$ (ver figura) em torno de um eixo perpendicular ao plano do aro e passando pelo seu centro de massa. O aro é baixado até o chão e o toca sem ricochete (sem quicar). Tão logo o aro toca o chão, começa a mover-se na horizontal até que rola sem deslizar com velocidade angular final (desconhecida) ω_f e velocidade do centro de massa (desconhecida) v_{cmf}. A figura mostra dois instantes de tempo: aquele em que o aro toca o chão e aquele em atinge a velocidade angular final.

(a) Esboce o diagrama de forças atuando sobre o aro enquanto esse se move na horizontal.

(b) Qual a relação entre a velocidade angular de rotação ω_f e a velocidade do centro de massa v_{cmf} quando o aro passa a rolar sem deslizar? ($v_{cmf} = R\omega_f$)

(c) Determine a velocidade do centro de massa do aro quando ele começa a rolar sem deslizar. ($v_{cmf} = \frac{1}{2}R\omega_0$)

Giroscópio

25. (Ex. 18, cap. 12 - HMN) Um giroscópio, construído por um disco de 5 cm de raio, colocado no centro de uma haste de 10 cm de comprimento e massa desprezível, gira em torno de seu eixo a 1500 rpm. Ele é colocado com seu eixo horizontal e um extremo apoiado num suporte. Calcule a velocidade angular de precessão, em rpm. (23,8 rpm)