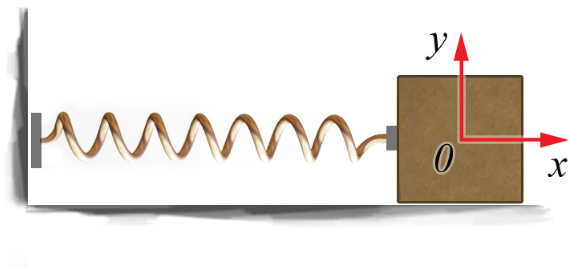
Questão 1 Imagine que você prenda um objeto de 250 g numa mola cuja constante elástica vale 4 N/m. Em seguida, você o puxa, esticando a mola, até 50 cm da sua posição de equilíbrio, quando então o joga com velocidade inicial de 2 m/s, no sentido positivo do eixo x (conforme a figura abaixo, na qual x representa o deslocamento a partir da posição de equilíbrio).

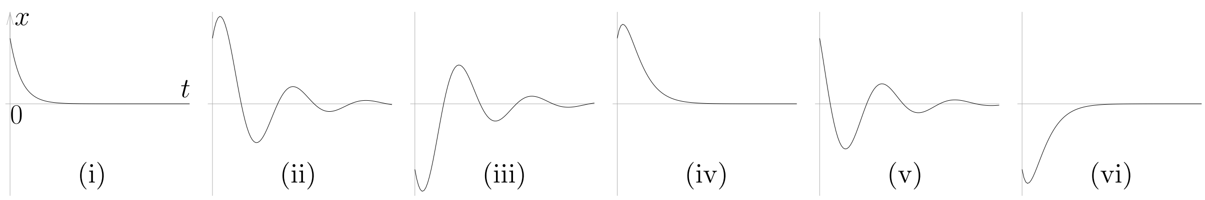


Para a oscilação livre:

(a) Determine a frequência angular do movimento oscilatório, em rad/s. 0,25
(b) Determine o período da oscilação, em segundos. 0,25
(c) Determine a amplitude da oscilação, em metros. 0,5
(d) Determine a fase, em radianos. 0,5
(e) Determine a energia potencial elástica em $t = 0$, em joule. 0,5
(f) Determine a energia mecânica, em joule. Ela é conservada durante a oscilação? Por quê? 0,5
(g) Escreva a expressão horária $x(t)$. 0,5
(h) Se a velocidade inicial do objeto fosse nula, quais seriam a energia mecânica e o período da oscilação? 0,5

Questão 2 Considere novamente o oscilador da questão 1.

(a) Ao medir o período da oscilação, você obteve 2 s, em discordância do esperado (questão 1b). O que você pode concluir disso? 0,5
(b) Se a oscilação fosse amortecida, com $b = 0.5$ kg/s, qual dos gráficos abaixo representaria $x(t)$? 0,5

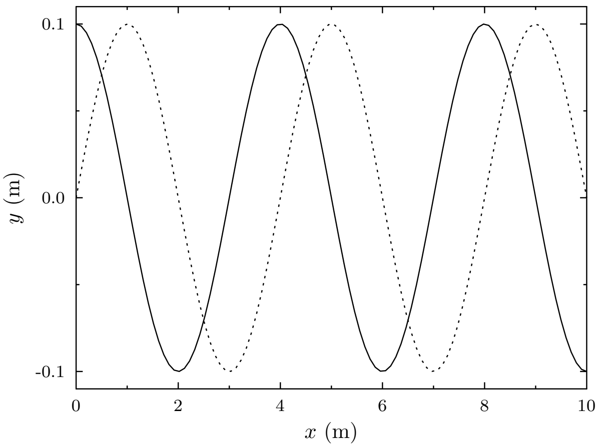


(c) Se esse movimento fosse amortecido, com $b = 2$ kg/s, qual seria a expressão de $x(t)$? 0,5
(d) Ainda para $b = 2$ kg/s, determine a taxa de variação instantânea da energia mecânica do oscilador para um instante de tempo t qualquer. 0,5

Questão 3 Considere novamente o oscilador da questão 1, agora amortecido ($b = 1$ kg/s) e sujeito a uma força que oscila harmonicamente, com amplitude $F_0 = 4$ N, para $t \gg 0$.

(a) Qual é a frequência de ressonância? 0,5
(b) Qual é a amplitude da oscilação na ressonância? 0,5
(c) Esboce o gráfico da amplitude na ressonância em função do fator de amortecimento b. 0,5
(d) Qual seria a amplitude na ressonância se não houvesse amortecimento? 0,5

Questão 4 A figura abaixo mostra duas fotografias tiradas em instantes de tempo diferentes de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo de x, uma onda harmônica transversal $y(x,t)$. A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo $t = 0$ e a segunda fotografia (linha tracejada), no instante $t = 0.5$ s.



(a) Determine a velocidade de propagação da onda na corda, em m/s. 0,5

(b) Determine a amplitude da onda, em metros. 0,5

(c) Determine o comprimento de onda, em metros, e o número de onda, em m^{-1}. 0,5

(d) Determine a frequência angular, em rad/s. 0,5

(e) Determine a constante de fase, em rad. 0,5

(f) Escreva a expressão de $y(x,t)$. 0,5

(g) Determine a velocidade transversal máxima de um ponto da corda, em m/s. 0,5

Formulário

$$y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + B) = A\,\mathrm{sen}(kx \pm \omega t + C),$$

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T = kv, \quad v = \lambda/T = \lambda f, \quad f = 1/T,$$

$$U(x) = kx^2/2 \quad (\Leftrightarrow F = -kx), \quad K(v) = mv^2/2, \quad E = U + K, \quad \text{Potência} = Fv,$$

$$F_r = -kx \quad \text{e} \quad F_d = -b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{cases} Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + B) & \text{se } \gamma/2 < \omega_0 \\ (A + Bt)e^{-\gamma t/2} & \text{se } \gamma/2 = \omega_0 \\ e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right) & \text{se } \gamma/2 > \omega_0, \end{cases}$$

$$\gamma = b/m, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2, \quad \beta^2 = -\omega^2,$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0\cos(\varpi t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathscr{A}(\varpi)\cos(\varpi t) \text{ para } t \gg 0, \text{ com } \mathscr{A}(\varpi) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (\gamma\varpi)^2}},$$

A, B e C são constantes, $\pi/2 \approx 1{,}6$.

Resolução

Questão 1

(a) $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{4}{1/4}} = 4\,\mathrm{rad/s}$.

(b) $T = 2\pi/\omega_0 = \pi/2\,\mathrm{s}$.

(c) Há duas formas de resolver: a primeira é assumir $x(t) = A\cos(\omega_0 t + B)$ e ajustar as constantes de integração A e B às condições iniciais. Neste caso, determinamos primeiramente $\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + B)$. Em seguida aplicamos $t = 0$ em $x(t)$ e em $\dot{x}(t)$ e confrontamos com as condições iniciais dadas:

$$x(0) = A\cos(B) = x_0 \tag{1}$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 A\,\mathrm{sen}(B) = v_0 \quad \Rightarrow \quad A\,\mathrm{sen}(B) = -\frac{v_0}{\omega_0}, \tag{2}$$

onde $x_0 = 0.5\,\mathrm{m}$ e $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ são as condições iniciais dadas (atenção para os sinais).
A, que é a amplitude do movimento oscilatório livre, pode ser determinado elevando cada uma das duas equações acima ao quadrado e somando-as:

$$A^2\cos^2(B) + A^2\,\mathrm{sen}^2(B) = A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{m}.$$

A outra maneira de obter A é pela conservação da energia mecânica: em $t = 0$ a energia mecânica é

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{3}$$

Por outro lado, em algum instante $t > 0$, o oscilador estará em $x = A$. Nessa situação, toda a energia mecânica está na forma potencial elástica: $E = kA^2/2$. Mas como a única força que atua na direção do movimento é a elástica, que é conservativa, a energia mecânica é conservada. Logo,

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 = x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2,$$

como antes.

(d) Para obter a fase B, dividimos (2) por (1), de modo a eliminar A:

$$\frac{A\,\mathrm{sen}(B)}{A\cos(B)} = \tan(B) = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} = -1 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}.$$

(e) Em $t = 0$, $x = x_0$. Assim, $U = kx_0^2/2 = 1/2\,\mathrm{J}$.

(f) Em $t = 0$, $v = v_0$. Assim, $K = mv_0^2/2 = 1/2\,\mathrm{J}$. Finalmente, $E = U + K = 1\,\mathrm{J}$. A energia mecânica é conservada porque a única força que age na direção do movimento é a força elástica, que é conservativa.

(g) Usando os resultados dos itens anteriores,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + B) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right).$$

(h) Se $v_0 = 0$, de (3) obtemos $E = kx_0^2/2 = 0.5\,\mathrm{J}$. Entretanto, o período da oscilação não muda, já que ele depende apenas de k e m. Essa é uma característica do oscilador harmônico.

Questão 2

(a) A partir do período medido, concluímos que a frequência angular do movimento oscilatório é $\pi\,\mathrm{rad/s}$, que é menor que ω_0 obtido no item (a) da questão anterior. Isso significa que há amortecimento.

(b) Para $b = 0.5\,\mathrm{kg/s}$, obtemos $\gamma = b/m = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Como $\gamma/2 < \omega_0$, concluímos que o movimento sofre amortecimento subcrítico. Nesse regime, o gráfico de $x(t)$ é uma função harmônica cuja amplitude decresce exponencialmente com o tempo. Dos gráficos apresentados, apenas (ii), (iii) e (v) são assim. Para distinguir entre eles, olhamos para as condições iniciais: segundo o enunciado do exercício anterior, $x(0) > 0$. Ou seja, em $t = 0$, o valor de x deve ser positivo. (ii) e (v) satisfazem essa condição. Além disso, a condição $\dot{x}(0) > 0$ diz que também a inclinação de $x(t)$ em $t = 0$ deve ser positiva, o que só ocorre para (ii). Esse é, portanto, o gráfico procurado.

(c) Para $b = 2\,\mathrm{kg/s}$, obtemos $\gamma = b/m = 8\,\mathrm{s}^{-1}$. Como $\gamma/2 = \omega_0$, concluímos que o movimento sofre amortecimento crítico. Nesse regime, $x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t/2} = (A + Bt)e^{-4t}$. Consequentemente, $\dot{x}(t) = Be^{-4t} - 4(A + Bt)e^{-4t}$. Impondo as condições iniciais:

$$\begin{aligned} x(0) &= A = x_0 = \frac{1}{2} \\ \dot{x}(0) &= B - 4A = v_0 \quad \Rightarrow \quad B = v_0 + 4x_0 = 4. \end{aligned}$$

Assim, $x(t) = \left(\frac{1}{2} + 4t\right)e^{-4t}$.

(d) A única força dissipativa nesse sistema é a aquela proporcional à velocidade: $F_r = -b\dot{x}$. Logo, a taxa de variação da energia mecânica do sistema é a potência exercida por essa força:

$$\frac{dE}{dt} = F_r\,\dot{x} = (-b\,\dot{x})\,\dot{x} = -b(\dot{x})^2 = -8(1-8t)^2 e^{-8t},$$

onde utilizamos, na última passagem, $\dot{x}(t) = 2(1-8t)e^{-4t}$.

Questão 3

(a) A frequência angular de ressonância é simplesmente a frequência angular das oscilações livres, isto é, $\omega_0 = 4\,\mathrm{rad/s}$ ($\equiv 2/\pi\,\mathrm{Hz}$). Deste modo, se $\varpi = \omega_0$, haverá ressonância entre o sistema oscilante e a força externa.

(b) A amplitude da oscilação forçada é dada por (veja o formulário):

$$\mathscr{A}(\varpi) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (\gamma\varpi)^2}}.$$

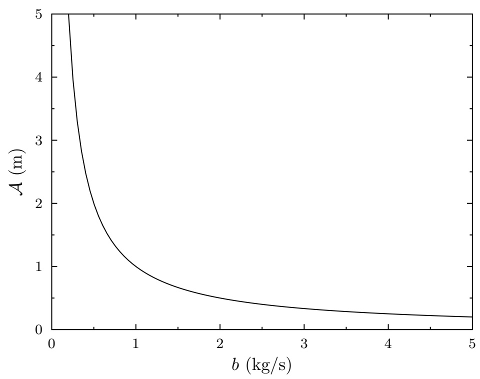
obs. sobre a condição $t \gg 0$: nessa situação, as oscilações amortecidas $x_H(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + B)$ [solução geral da equação homogênea para o caso de amortecimento subcrítico: $b = 1 \Rightarrow \gamma/2 < \omega_0$] tendem a zero, pois $e^{-\gamma t/2} \to 0$ quando $t \to \infty$. Assim, resta apenas a solução particular da equação não homogênea, dada no formulário.

Mas na ressonância, $\varpi = \omega_0$, de tal forma que

$$\mathscr{A}(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\frac{b}{m}\omega_0} = \frac{1}{b}. \tag{4}$$

Portanto, se $b = 1\,\mathrm{kg/s}$, $\mathscr{A}(\omega_0) = 1\,\mathrm{m}$.

(c) A equação 4 exibe a relação desejada: $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}(b) = 1/b$ para $b > 0$.



(d) Quando não há amortecimento (caso hipotético), a amplitude da oscilação (na ressonância) torna-se infinita. Matematicamente:

$$\lim_{b\to 0} \mathscr{A}(b) = \infty.$$

Questão 4

(a) A velocidade da onda é a velocidade de fase da onda, ou seja, a velocidade de um ponto imaginário cuja fase $\phi(x,t) = kx \pm \omega t + \phi$ permaneça constante. Tomemos, por exemplo, a crista da onda, cuja fase é zero se escolhermos usar cosseno para representar $y(x,t)$ (ou $\pi/2$ se escolhermos usar seno): Em $t = 0$, a posição da (primeira) crista é $x = 0$; em $t = 0.5\,\mathrm{s}$, a crista da onda desloca-se para $x = 1\,\mathrm{m}$. Ou seja, a crista da onda sofreu um deslocamento $\Delta x = 1\,\mathrm{m}$ no intervalo $\Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$. Consequentemente, sua velocidade (constante) será $v = \Delta x/\Delta t = 2\,\mathrm{m/s}$.

(b) Observando o gráfico, concluímos que a amplitude é de 0.1 m, de tal forma que $y(x,t)$ oscila harmonicamente entre -0.1 m e 0.1 m.

(c) O comprimento de onda λ é a distância (em x) mínima para a qual $y(x,t)$ começa a repetir. No gráfico, observamos que a distância entre duas cristas (ou dois vales, ou quaisquer dois pontos equivalentes) é $\lambda = 4\,\mathrm{m}$. Logo, $k = 2\pi/\lambda = \pi/2\,\mathrm{m}^{-1}$.

(d) Usando $\omega = kv$, concluímos que $\omega = \pi\,\mathrm{rad/s}$.

(e) Se escolhermos usar cosseno, $y(x,t) = A\cos(kx \pm vt + \phi)$, então para determinar a constante de fase ϕ, olhamos para o ponto $y(0{,}0) = 0{,}1$:

$$y(0{,}0) = A\cos\phi = 0{,}1 \quad\Rightarrow\quad \cos\phi = 1 \quad\Rightarrow\quad \phi = 0.$$

Se, por outro lado, escolhermos usar $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx \pm vt + \phi)$,

$$y(0{,}0) = A\,\mathrm{sen}\,\phi = 0{,}1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}\,\phi = 1 \quad\Rightarrow\quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Com os resultados dos itens anteriores, temos:

$$y(x,t) = 0{,}1\cos\left[\pi\left(\frac{x}{2} - t\right)\right] \qquad \text{ou} \qquad y(x,t) = 0{,}1\,\mathrm{sen}\left[\pi\left(\frac{x}{2} - t + \frac{1}{2}\right)\right],$$

dependendo da escolha feita para representar $y(x,t)$: seno ou cosseno. Note ainda que o sinal que antecede a parcela dependente do tempo é o negativo, haja vista que a onda progride no sentido positivo de x.

(g) Como $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ representa o deslocamento transversal de um ponto x da corda no instante t, a velocidade transversal desse ponto é:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) = \omega A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t),$$

cujo valor máximo ocorre quando o seno for igual à unidade:

$$\max[v_y(x,t)] = \omega A = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{m/s}.$$

O mesmo resultado será obtido se você tiver escolhido representar $y(x,t)$ com a função seno, ainda que a derivada acima seja diferente.