Max Bill e a Matemática ou Brevíssima introdução à classificação topológica das superfícies como recurso para um outro nível de compreensão da *Unidade Tripartida*

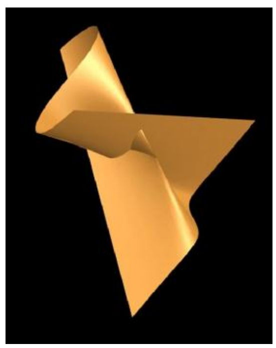
Ton Marar[1]

Introdução

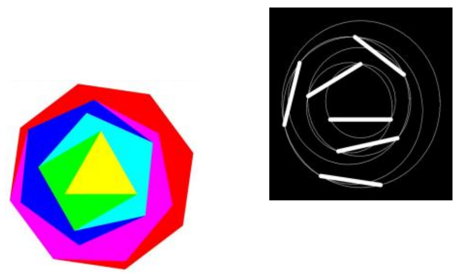
Em 1951, Max Bill recebeu o prêmio internacional da 1ª Bienal Internacional de São Paulo com a escultura *Unidade Tripartida* (Fig. 1(i)).

Expoente da assim chamada *arte concreta*, Max Bill sugeria uma abordagem matemática para a arte contemporânea. Se por um lado ele negava uma expressão artística através de fórmulas (e.g. Fig. 1(ii)), por outro defendia o uso de princípios racionais na formulação de temas que poderiam concretizar abstrações e proposições artísticas (e.g. Fig. 1(iii)).

(i)



(ii) [2]



(iii)

Fig. 1

“Estou convencido de que é possível desenvolver uma nova forma de arte na qual o trabalho do artista poderia basear seu conteúdo num grau bastante substancial na linha de abordagem matemática.” ([1])

Max Bill deixou uma interessante coleção de artigos escritos desde os anos 30. Títulos como *Forma, Função e Beleza* ou *Beleza Proveniente da Função e Beleza como Função* ou ainda *Arte como Realidade Não Variável* demonstram sua preocupação com os fundamentos da arte contemporânea.

Sobre a arte concreta, Max Bill ressalta que nela idéias abstratas que inicialmente se manifestam apenas como conceitos tornam-se visíveis. Em última análise, arte concreta é a expressão pura da harmonia da medida e da regra. Contudo deixa claro que não pretende criar um novo formalismo nem resumir a arte a um ramo da filosofia metafísica. Antes, ele acredita na arte como um veículo para transmissão direta de idéias, sem o perigo de o significado ser distorcido por

[1] Professor livre docente do departamento de matemática do ICMC-USP

[2] Singularidade H_2, da tese de Ph.D. do autor, orientada por David Mond, University of Warwick, 1989

qualquer interpretação falaciosa. Desta forma, o espaço da arte torna-se mais universal, isto é uma expressão direta e sem ambivalência.

Sob este prisma, a matemática o atrai e isso fica claro na fundamentação de sua expressão, embora, segundo ele próprio, seu conhecimento se reduzia às lições de cálculo para arquitetura, desde os tempos da Bauhaus.

Topologia das superfícies

Esta seção contém material básico sobre *topologia* geométrica; em particular serão tratados alguns aspectos da classificação topológica das superfícies. O leitor interessado poderá aprofundar-se no assunto consultando a bibliografia indicada (v. [2], [4], [9]).

Assumiremos que o leitor conheça as *definições* de ponto, linha, linha reta, superfície, superfície plana, e outras do tipo, segundo Euclides (300 a.C.) ([5]), não aquelas de Kandinsky ([6]), que também devem ser úteis, mas não servem aos propósitos deste texto. Assumiremos também que o leitor esteja informado de que a geometria euclidiana é um sistema dedutivo baseado em um conjunto de postulados e noções comuns. E também de que diferentes conjuntos de postulados podem gerar diferentes geometrias, como por exemplo as chamadas geometrias não-euclidianas (v. [7]).

Segundo Euclides, um *ponto* é aquilo que não tem partes; *linha*, aquilo que só tem comprimento; e *superfície*, aquilo que só tem comprimento e largura. Existe aqui material suficiente para grandes discussões filosóficas, porém não nos deixaremos seduzir.

Observemos que das definições transparecem o caráter zero dimensional do ponto, unidimensional da linha e bidimensional das superfícies. Ponto, linha e superfície são conceitos e não há nenhuma chance de encontrá-los como objetos na natureza. Contudo, podemos, sim, representá-los através de certos objetos tridimensionais, como de fato todos os objetos ao nosso redor o são, e que possuam características semelhantes àquelas descritas nos conceitos. Assim, podemos tratar esses conceitos como objetos da geometria. Por exemplo, a chapa de metal que Max Bill usou para sua *Unidade Tripartida* tem espessura tão reduzida em comparação à largura e ao comprimento que serve como uma representação de uma superfície no sentido de Euclides (v. [8]).

Existe um erro freqüente entre os não familiarizados com o texto de Euclides em pensar que superfícies torcidas e linhas curvadas são não-euclidianas. Linhas podem ser objetos da geometria euclidiana como também da não-euclidiana. O que determinará uma coisa ou outra são certas propriedades relacionais.

Com efeito, em linguagem moderna, particularmente depois de Felix Klein (1870), a geometria euclidiana é o estudo do espaço cujos objetos possuem propriedades que não se alteram quando a eles é aplicado um movimento rígido (e.g.

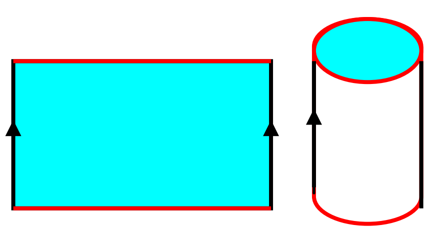
translações e rotações). Em outras palavras, a geometria euclidiana é aquela na qual a relação de congruência entre os objetos mantém suas características métricas: comprimentos, áreas, ângulos, etc. Analogamente caracterizam-se as geometrias não-euclidianas por meio de outro tipo de relação de congruência.

Sob este ponto de vista, a saber, da caracterização de geometrias através da relação de congruência entre os seus objetos, a topologia é a geometria cuja relação de equivalência entre os objetos é dada pelos *homeomorfismos*, isto é, pelas transformações contínuas que podem ser continuamente desfeitas. Devido a isso, os objetos na topologia podem ser representados por objetos feitos de um material perfeitamente deformável. Logo, em topologia não se fala em comprimentos, áreas, ângulos etc., porém se esticarmos ou encolhermos o objeto, suas, digamos, características topológicas não se alteram. O que se mantém é a *essência* da forma, um conceito difícil de explicar, mas que se deve esclarecer abaixo.

Cria-se com a topologia um universo bastante curioso. Nele, por exemplo, um triângulo e um círculo são iguais, quer dizer, homeomorfos; de fato qualquer polígono é homeomorfo a um círculo. Portanto, na topologia só existem dois objetos unidimensionais, a saber, a linha fechada, que pode ser representada pelo círculo, e a linha aberta, representada, por exemplo, pela reta.

Os objetos bidimensionais, isto é as superfícies, são também classificados sob a óptica topológica e se dividem em duas classes, a saber, as superfícies orientáveis e as não-orientáveis. As orientáveis são aquelas que possuem dois lados (como no caso do plano euclidiano). Já as não-orientáveis possuem apenas um lado (assim, nem tudo na vida tem dois lados!).

Na construção de todas as superfícies topológicas, duas superfícies são essenciais, a saber, o cilindro (Fig. 2(ii)) e a *faixa de Moebius* (Fig. 3(ii)). Ambas são topologicamente obtidas a partir de um retângulo (portanto, um pedaço de plano euclidiano, ou melhor, uma película de borracha perfeitamente deformável), identificando-se um par de arestas opostas diretamente (Fig. 2(i)) ou após um giro de 180 graus (Fig. 3(i)). Note que o cilindro tem dois círculos como borda enquanto na *faixa de Moebius* a borda é uma única curva fechada (e, portanto, é topologicamente um círculo).



(i) (ii)

Fig.2

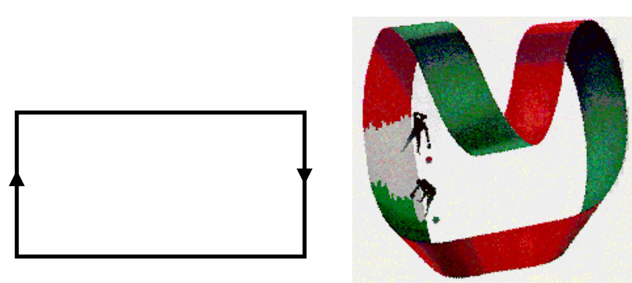


Fig. 3 (ii)

Este modo de representar uma superfície (na topologia) por meio de um polígono (neste caso o retângulo) identificando-se pares de arestas é denominado *modelo plano* da superfície.

A classificação das demais superfícies em topologia se dá através de um processo de identificação ao longo das linhas de borda ou por meio de fusões de duas ou mais superfícies. Aquelas que contêm ao menos uma *faixa de Moebius* são as superfícies não-orientáveis.

A lista de superfícies na topologia começa assim:
A esfera (Fig. 4 (i)), que é topologicamente um cilindro com as circunferências de dois discos coladas nas suas bordas; o toro (Fig. 4 (ii)), que é um cilindro com as duas bordas identificadas; o plano projetivo (Fig. 4 (iii)), que é uma *faixa de Moebius* com um disco colado ao longo da borda; e a *garrafa de Klein* (Fig. 4 (iv)), que são duas faixas de Moebius identificadas ao longo da borda (Fig. 4(v)). Alternativamente pode-se ver a *garrafa de Klein* como um cilindro cujas bordas são identificadas, porém com sentidos opostos (Fig. 4 (vi)).

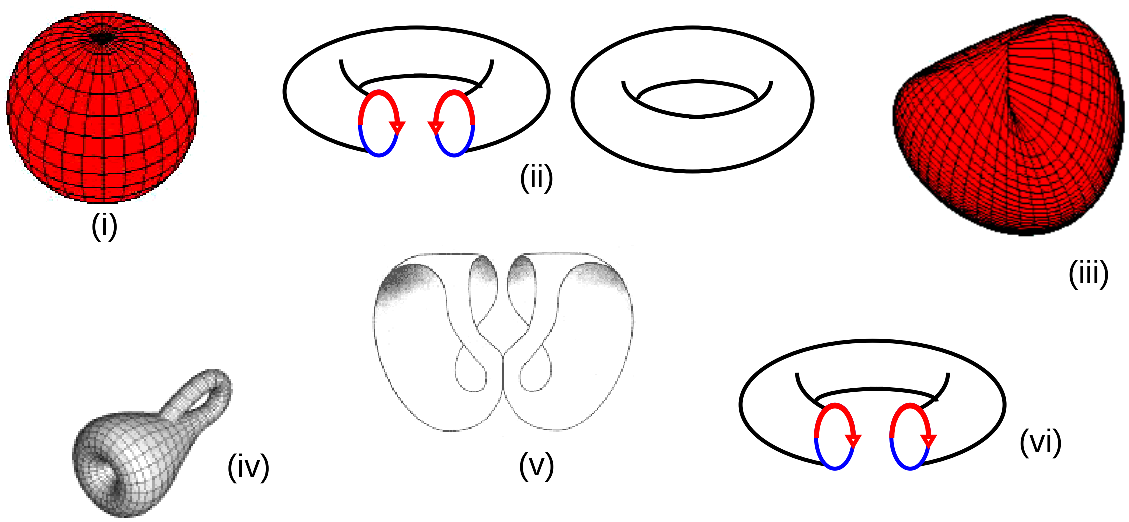


Fig. 4

A partir dessas superfícies e operações adequadas, obtêm-se todas as superfícies na topologia.

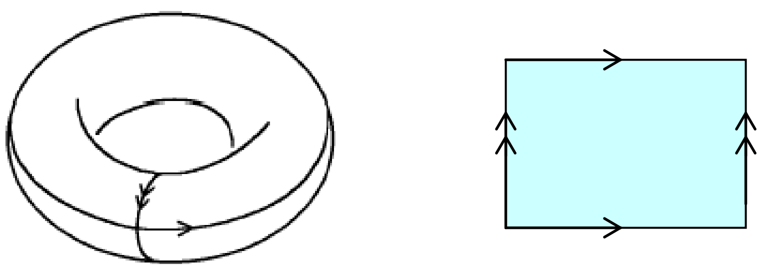
A *faixa de Moebius* foi a superfície que mais fascinou Max Bill, inclusive *redescobrindo-a* através de sua escultura *Faixa Sem Fim* (Fig. 5), em 1932. Anos mais tarde, quando soube que Moebius já havia apresentado tal superfície em um encontro de matemáticos, em 1872, Bill se desculpou pela ignorância (v. [3] p. 121).

Fig. 5

Vimos que na confecção das superfícies utilizamos certas regras de identificação entre superfícies mais simples, começando com o cilindro e a *faixa de Moebius*. Essas duas têm um modelo plano bem simples, baseado num retângulo.

Para se obter o modelo plano de qualquer superfície procedemos da maneira inversa, isto é, cortamos a superfície a ser modelada ao longo de curvas até que seja possível planificar a superfície. Um procedimento bastante comum na culinária (concordarão os familiarizados com esta atividade).

Vejamos no caso do toro. Cortando-o ao longo das linhas indicadas (Fig.6 (i)), obtemos o seu modelo plano (Fig.6 (ii)):



(i) (ii)

Fig. 6

No caso da *garrafa de Klein*, o modelo plano é bastante parecido ao do toro (o que era de esperar já que ambos são provenientes de um cilindro com bordas identificadas), basta inverter uma das setas (Fig. 7).

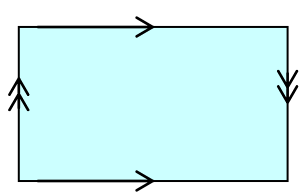


Fig. 7

Fig. 8

Note que os modelos planos do toro e da *garrafa de Klein* são ainda retângulos, com as setas orientando as identificações dos dois pares de arestas opostas.

Podemos simplificar esses modelos planos, evitando pares de setas com duas pontas e pares de setas com uma única ponta, se usarmos letras para ressaltar os pares de setas a serem identificados (Fig. 8).

Chegamos aqui a um ponto crucial da representação das superfícies em topologia.

Criaremos uma seqüência de letras, percorrendo-se o bordo do modelo plano, por exemplo, no sentido horário. Ao encontrar uma letra neste percurso ela fará parte da seqüência de letras, caso o sentido do percurso coincida com o sentido da seta à qual a letra esta associada. Se o sentido da seta for contrário ao do percurso, então a letra com um expoente –1 fará parte da seqüência de letras. Esta seqüência é denominada *palavra* associada à superfície. Através das palavras chegamos a uma descrição altamente sintética da superfície. O mínimo, sem qualquer redundância, sem espaço para qualquer desvio de significado, enfim o máximo da beleza descritiva de uma idéia.

Portanto, $\mathbf{aba^{-1}b^{-1}}$ é um toro na topologia!

Se neste ponto a sensibilidade topológica do leitor estiver suficientemente desenvolvida, a frase acima deveria lhe trazer lágrimas aos olhos, ou reações análogas.

Superfícies com a mesma palavra são homeomorfas. Várias palavras podem representar a mesma superfície; por exemplo, basta começar a construção da palavra em diferentes vértices do modelo plano. Deste modo, $\mathbf{ba^{-1}b^{-1}a}$ é ainda um toro. Percorrendo a seqüência no sentido anti-horário obtemos outro *sinônimo* para o toro, digamos $\mathbf{ab^{-1}a^{-1}b}$. Podemos também trocar as letras por outras ainda não usadas na palavra, e.g., trocando a letra **b** pela letra **x** na palavra $\mathbf{aba^{-1}b^{-1}}$ obtemos $\mathbf{axa^{-1}x^{-1}}$**,** a qual também representa um toro.

O processo de fusão de duas superfícies gerando uma terceira também pode ser observado nas palavras que as representam. Com efeito, retornemos ao exemplo da *faixa de Moebius* e da *garrafa de Klein* (Fig. 8).

A palavra associada à *faixa de Moebius* é **aa** (ou **bb**, tanto faz) e da *garrafa de Klein* é **bab^{-1}a**. Justificaremos abaixo que a *garrafa de Klein* também pode ser representada pela palavra **aabb**. Daí que a fusão das superfícies se traduz na concatenação das palavras. Neste caso, **aa** e **bb** representando as duas faixas de Moebius que compõem a *garrafa de Klein*.

Várias são as operações possíveis de se fazer com palavras e ainda obter a mesma superfície. Para o propósito deste texto destacaremos apenas uma dessas operações da *gramática topológica*:

<u>**Operação Fundamental**</u>: se numa palavra uma letra está entre duas letras iguais então aquela que está no meio pode ser deslocada invertendo-se o sinal de seu expoente, e.g. **...ab^{-1}a...** é sinônimo de **...baa...** De fato, suponha inicialmente que seja dado o modelo plano da superfície cuja palavra contém a seqüência **ab^{-1}a** (Fig. 9(i)). Corta-se o modelo ao longo da linha pontilhada (Fig. 9(ii)). Giram-se as partes identificando-se as setas indicadas por **a** (Fig. 9(iii) e (iv)). O resultado é um modelo que agora tem a seqüência **bcc** (Fig. 9(v)) no lugar de **ab^{-1}a**. Como a letra **a** não é usada na palavra resultante **...bcc...,** podemos trocar a letra **c** pela letra **a**, obtendo-se portanto a palavra **...baa...**, como havíamos afirmado.

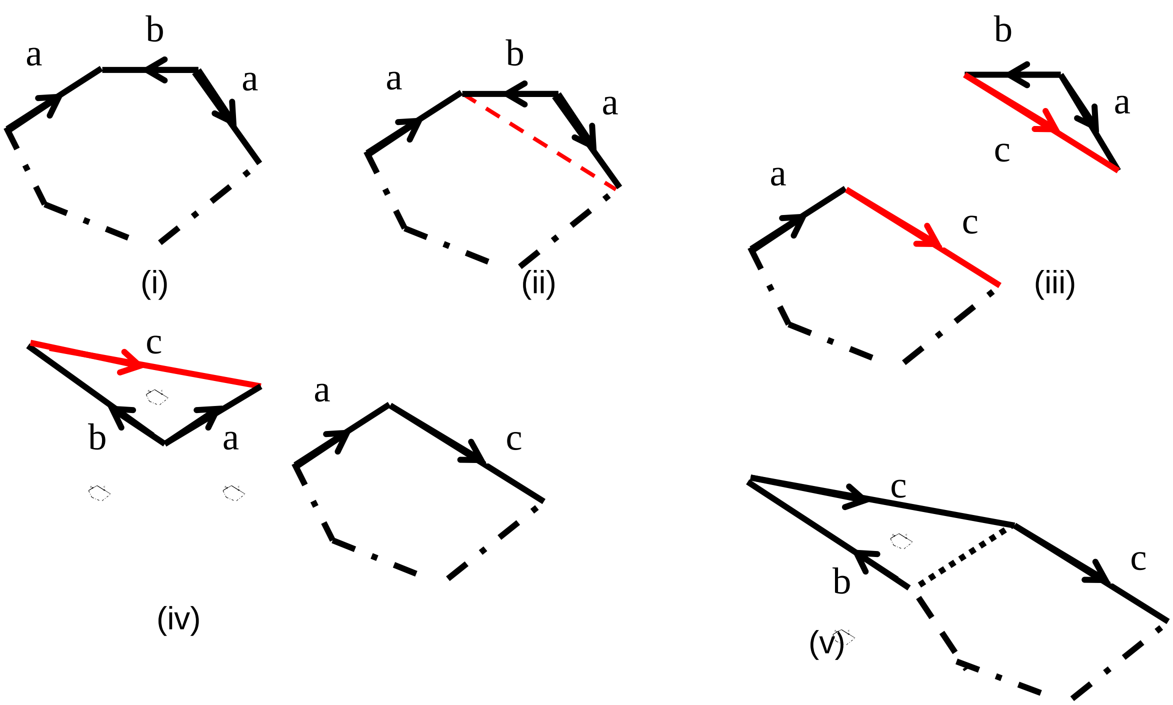


Figura 9

Aplicando-se esta operação na palavra **bab^{-1}a,** a qual representa a *garrafa de Klein*, obtemos **bbaa.** Isto ressalta a fusão das duas faixas de Moebius **aa** e **bb** na confecção da *garrafa de Klein*.

Ainda sobre o processo de corte e colagem das superfícies, podemos obter superfícies aparentemente diferentes, porém de fato topologicamente iguais. Em outras palavras, depois de cortar a superfície ao longo de uma linha, podemos deformá-la e em seguida colá-la ao longo da mesma linha, tomando-se o cuidado de manter a orientação original das linhas de corte. Veja o exemplo na figura 10.

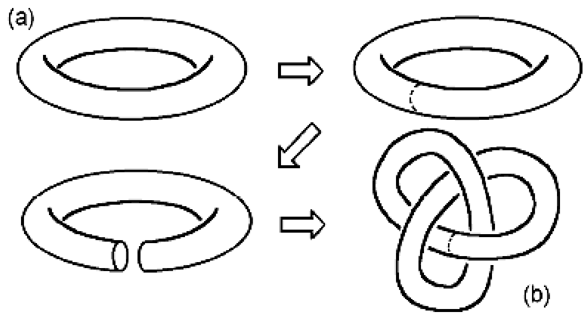


Figura 10

Iniciamos com um toro (Fig. 10(a)). Escolhemos uma curva, neste caso um anel envolvendo o toro. Cortamos a superfície ao longo desta curva. Enodamos a superfície e ao final colamos a superfície (Fig. 10(b)) identificando a linha de corte. As superfícies inicial (toro) e final (toro enodado) são homeomorfas, isto é, topologicamente são iguais.

Análise topológica da *Unidade Tripartida*

Em *Quinze variações sobre um mesmo tema* (Fig. 1(iii)), Max Bill produziu um texto bastante minucioso a respeito dos detalhes do processo de criação e confecção da obra. Ressaltou que embora as variações tenham sido feitas pelo método geométrico, a idéia controladora seguia o jogo puro da forma e da cor e cujo único objetivo era despertar um sentimento prazeroso.

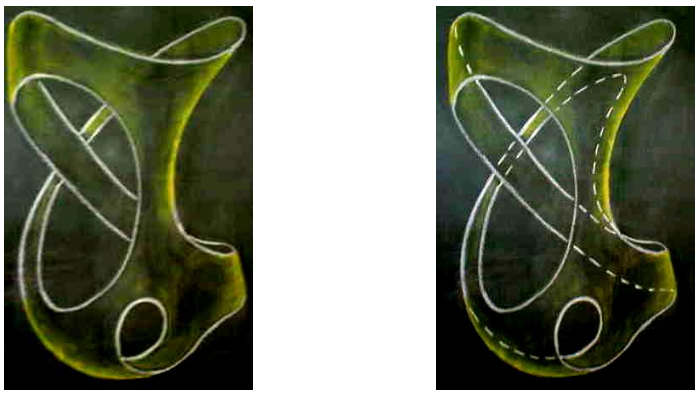
Fig. 11

A rica descrição que acompanha as *Quinze variações* contrasta com uma única frase codificada sobre a *Unidade Tripartida* (Fig. 11). Segundo ele, sua *Unidade Tripartida* é composta de um sistema de círculos cujos centros estão nos vértices de um triângulo equilátero ([3] p. 122).

De fato, se esta opaca descrição da *Unidade Tripartida* não está errada, também não ajuda na compreensão dos princípios concretos da obra.

Os possíveis tópicos de matemática subjacentes às duas obras diferem. No caso das *Quinze Variações sobre o Mesmo Tema* o discurso se apóia na tradicional geometria euclidiana, enquanto a *Unidade Tripartida* requer alguma familiaridade com a topologia no nível apresentado na seção anterior.

Passaremos agora à análise da *Unidade Tripartida* (Fig. 12(i)), mais precisamente vamos mostrar que a superfície que representa esta escultura é topologicamente equivalente a uma superfície obtida da fusão de três faixas de Moebius, o que é o mesmo que dizer que a palavra associada é da forma **aabbcc**.

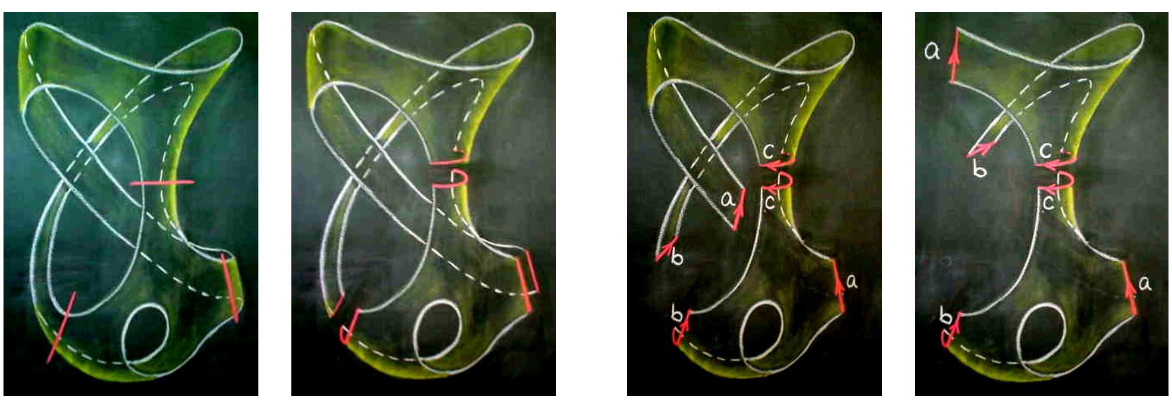


(i) (ii)

Fig. 12

Na Figura 12 (ii) indicamos a borda da superfície para facilitar a visualização.

Com o propósito de obter o modelo plano, inicialmente cortamos a superfície ao longo de três linhas dividindo-a em duas partes (Fig. 13 (i), (ii)). Em seguida procedemos com deformações adequadas (Fig. 13 (iii), (iv)).



(i) (ii) (iii) (iv)

Fig. 13

Nota-se que a parte superior é uma superfície (com borda) topologicamente equivalente a um triângulo com arcos (correspondentes à borda) em cada um dos três vértices (Fig. 14).

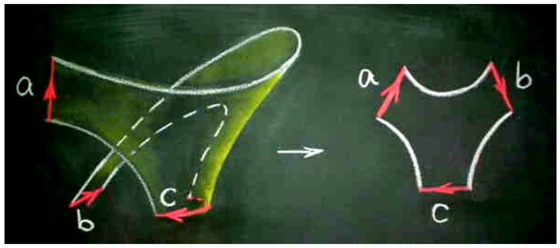
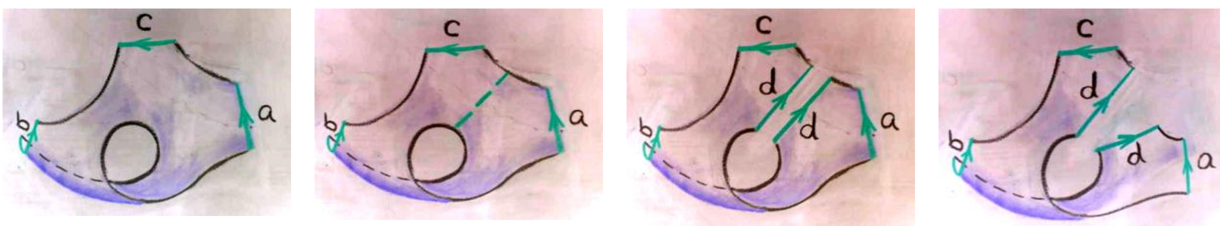


Fig. 14

Já a parte inferior (Fig. 15(i)) merece mais um corte ao longo de uma linha apropriada a fim de ser planificada (Fig. 15(ii)). Uma deformação (Fig. 15(iii) e (iv)) mostra que esta parte é topologicamente equivalente a um pentágono com arcos correspondentes à borda em cada um dos cinco vértices (Fig. 16).



(i) (ii) (iii) (iv)

Fig. 15

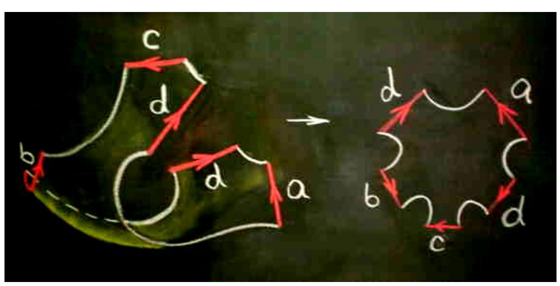
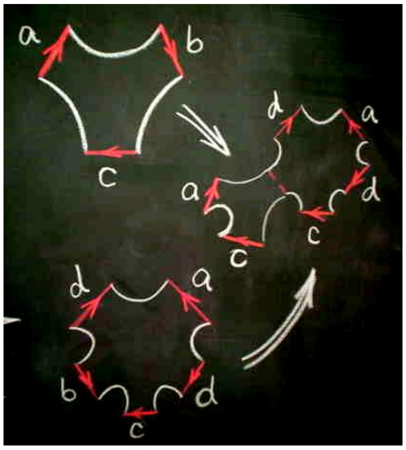


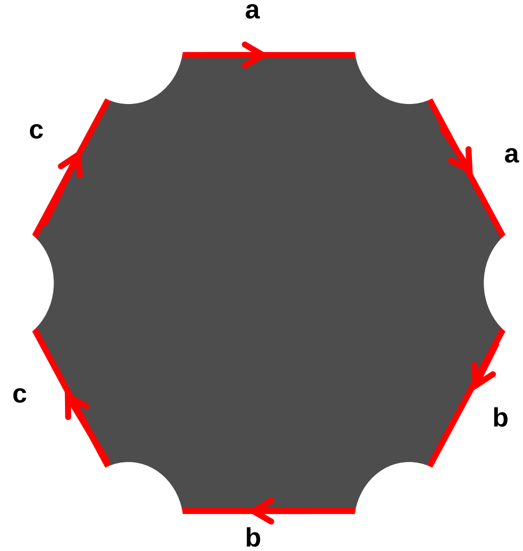
Fig. 16

Finalmente, identificada uma das arestas do triângulo, digamos **b,** com sua correspondente no pentágono obtemos um hexágono (com arcos correspondentes à borda em cada um dos seis vértices) como modelo plano da superfície (Fig. 17(i)).

Este é, portanto, um modelo plano da *Unidade Tripartida* com a palavra associada $\mathbf{ada^{-1}dcc}$. Aplicando-se a esta palavra a operação fundamental descrita na seção anterior, obtemos **aaddcc** como um sinônimo topológico. O que é o mesmo que a palavra **aabbcc** (Fig. 17 (ii)).



(i)

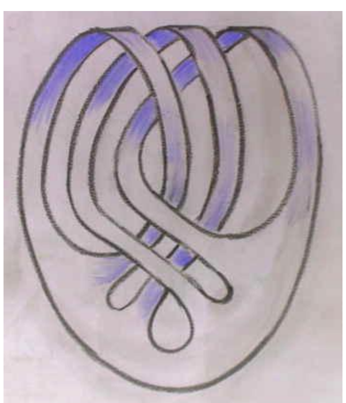


(ii)

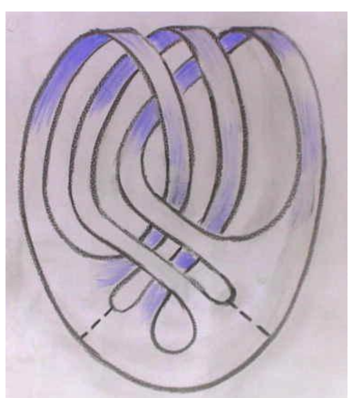
Fig. 17

Sendo assim, identificando-se as setas correspondentes deste modelo obtemos uma superfície homeomorfa à superfície representada pela *Unidade Tripartida*. Em outras palavras, a *Unidade Tripartida* é topologicamente equivalente a uma fusão de três faixas de Moebius.

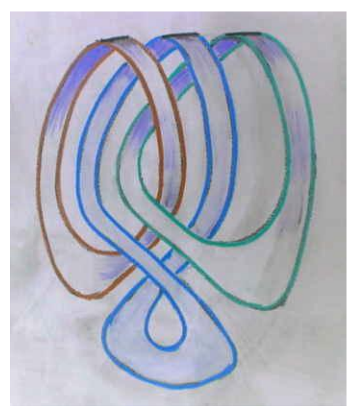
Encerraremos com um exercício que denominaremos *Três Variações sobre o Tema Unidade Tripartida*, com o perdão de Max Bill.



1



2



3

Três variações sobre o tema Unidade Tripartida

Agradecimentos: Aos amigos Agnaldo Farias, Alessandra Pavesi, David Sperling e Marcelo Suzuki, pelos comentários críticos não triviais. A Rejane Cantoni e Daniela Kutschat pelo convite.

Bibliografia

BILL, Max. The mathematical approach in comporary art. *Arts and Architecture*, Los Angeles, n. 8, 1954. Translation Morton Shand.

CARTER, J. Scott. *How surfaces intersect in space.* 2nd edition. New Jersey: World Scientific, 1995. (Series on Knots and Everything, v. 2).

CERRITELLI, Claudio. *Premio internazionale di pintura scultura i arte elettronica dalla Fondazione Marconi a Max Bill*. Bologna: Grafis Edizioni, 1988.

FRANCIS, George. A topological picturebook. New York: Springer-Verlag, 1987.

HEATH, Sir Thomas. *The thirteen books of Euclid's elements of Euclid.* New York: Dover Publications, 1906.

KANDINSKY, Vassily. *Ponto e linha sobre plano.* São Paulo: Martins Fontes, 2001.

MARAR, Ton. To be, and not to be: that is the answer ou brevíssima introdução às geometrias não-euclidianas como recurso para um outro nível de compreensão das obras de Regina Silveira e Eduardo Coimbra. In: DO CONCEITO ao espaço. Curadoria Agnaldo Farias. São Paulo: Instituto Tomie Ohtake, 2002. p. 20-23.

MARAR, Ton; SPERLING, David. *Em matemática, metadesenhos.* São Paulo: ICMC-USP, 2001.

SAMPAIO, João. *Introdução à topologia das superfícies.* São Paulo: UFSCar, 2000.

Vila Pureza, setembro de 2003.

Ton Marar
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo, São Carlos
ton@icmc.usp.br