NRBHK@ÇÕDR D NMC@R , OQNU@ RTARSHSTSHU@

Formulário:

Oscilador Simples

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \qquad x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad \omega_0^2=k/m$$

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\theta \qquad \theta(t)=\theta_{\max}\cos(\Omega t+\varphi) \qquad \Omega^2=g/L$$

Oscilador Amortecido

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-b\frac{dx}{dt} \qquad x(t)=Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t) \quad \omega^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}$$

$$\gamma=\frac{b}{m} \qquad x(t)=e^{-\gamma t/2}\left[Ae^{-\beta t}+Be^{-\beta t}\right] \quad \beta^2=\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2$$

$$x(t)=e^{-\gamma t/2}\left[A+Bt\right]$$

Oscilador Forçado Amortecido

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-b\frac{dx}{dt}+F_0\cos(\omega t) \qquad x(t)=A(\omega)\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right] \qquad tg\varphi=-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$A(\omega)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}$$

Em condições normais de temperatura e pressão do ar; B=1,42x10^5 Pa e a densidade é igual a 1,20 kg/m^3. Considere a velocidade de propagação do som igual a 340 m/s.

A escala em deciBell é definida por β=10log (I/I_0) onde $I_0=10^{-12}$ W/m^2 e I é a intensidade do som em W/m^2 .

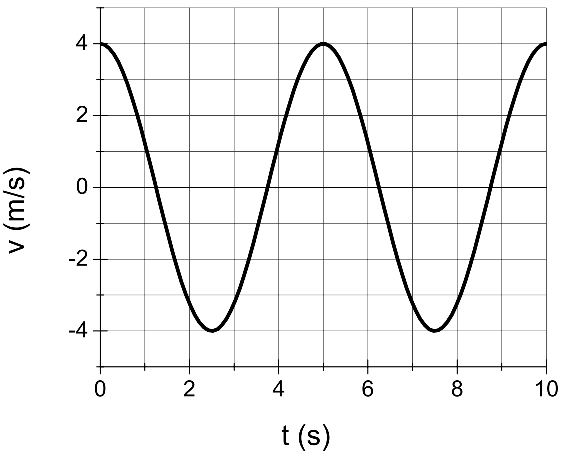
$$kv=\omega \qquad v=\lambda f \qquad f=1/T$$

Onda estacionária: $y_n(x,t)=A\,\mathrm{sen}(k_n x)\,\mathrm{sen}(\omega_n t)$

corda: $y(x,t)=y_0\cos(kx-\omega t+\varphi)$ $\quad v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\quad \bar{P}=\frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v$

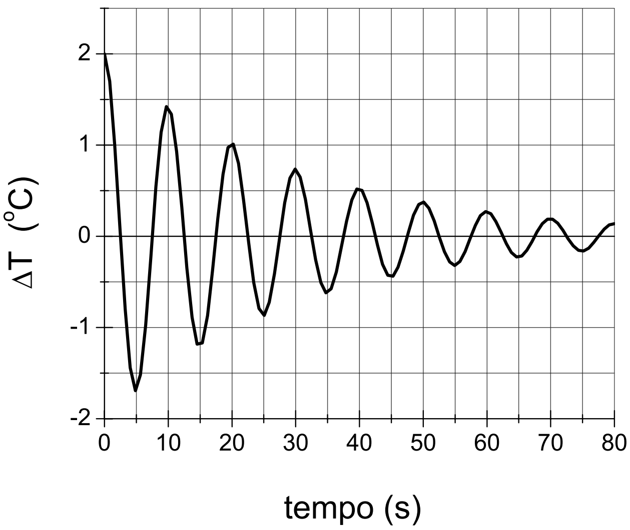
Som: $u(x,t)=u_0\cos(kx-\omega t+\varphi)$ $\quad \Delta P=-B\frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad v=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$ $\quad \bar{I}=\frac{1}{2}\rho\omega^2u_0^2v$

1. A figura ao lado representa a velocidade de um bloco de massa igual a 8 kg que oscila ligado a uma mola. A velocidade do bloco é descrita por uma função do tipo; $v(t)=v_{max}\ \text{sen}(2t/T+\phi)$, onde T é o período e ϕ é a fase.



a) Determine os valores de T, v_{max} e ϕ.
b) Em que instante(s) a energia potencial elástica da mola é máxima e qual é o seu valor?
c) Obtenha a função que descreve a posição do bloco em função do tempo; x(t).
d) Indique o sentido da força atuando sobre o bloco para os instantes; t=1 s; t=4s e t=7 s.

2. O compressor de ar de um aparelho de ar condicionado é controlado por um circuito de modo a temperatura da sala estável em torno de 23°C, podendo oscilar no máximo 2°C. Quando a temperatura da sala sobe e atinge 25oC, o compressor entra em ação e observa-se que a temperatura oscila de acordo com o gráfico ao lado.



a) Determine o fator de amortecimento do circuito γ.
b) Escreva a função $\Delta T(t)$ que descreve o comportamento observado no gráfico ao lado, identificando numericamente todas as variáveis.
c) Suponha que o circuito seja modificado para que a retorne ao valor de equilíbrio sem oscilar e o mais rapidamente possível. Que tipo de amortecimento seria desejável e qual deveria ser o novo valor do fator de amortecimento?

3. Uma onda propaga-se em uma corda, de densidade linear igual 20 g/cm, com amplitude de 2 mm, comprimento de onda de 10 cm e frequência de 220 Hz. Em t=0, e x=0, y=0.
a) Determine a tensão na corda e a velocidade de propagação da onda.
b) Escreva a equação de onda y(x,t), com os valores numéricos correspondentes e indicando as unidades para x e t.
c) Qual é a potencia média transmitida pela corda?
d) Qual o comprimento de onda do som produzido pela corda no ar?

4. Um alto falante emite ondas sonoras com potência média de 6,0 W. A que distância do alto faltante
a) o som está no limiar de produzir dor?
b) o som é dificilmente audível?
c) Qual é a variação de pressão no ouvido no limiar da dor? Compare esse valor com a pressão atmosférica; 1 atm=10^5 Pa.

Dados: limiar da audição 10^{-12} W/m², e limiar da dor 1W/m².

1ª QUESTÃO

a) $v_{max} = 4\,m/s$ $T = 5s \Rightarrow v = v_{max}\, sen\left[\frac{2\pi t}{T} + \phi\right]$

Em $t=0 \Rightarrow v(0) = v_{max}\, sen\,\phi = v_{max} \Rightarrow sen\,\phi = 1 \Rightarrow \phi = \pi/2$

$v(t) = v_{max}\, sen\left[\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$\boxed{v = \left(4\frac{m}{s}\right) sen\left[\frac{2\pi t}{5} + \pi/2\right]}$ ou $\boxed{v = \left(4\frac{m}{s}\right) cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)}$

b) $U_{max} \to$ quando $K=0 \Rightarrow$ ou seja quando $v=0$

isso ocorre para: $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}$, com $T = 5\,s$ $\boxed{t = \frac{5}{4}s, \frac{15}{4}s, \frac{25}{5}s \ldots}$

Energia mecânica $\Rightarrow E_{mec} = K(t) + U(t) = cte$

$E_{mec} = K_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \Rightarrow E_{mec} = \frac{1}{2}(8\,kg)\left(4\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow E_{mec} = 64\,J$

$\boxed{U_{max} = 64\ J}$

c) $x(t) = \int v(t)dt \rightarrow x(t) = \int 4\cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right)dt$

$x(t) = 4 \cdot \left(\frac{5}{2\pi}\right) \cdot sen\left(\frac{2\pi t}{5}\right) \Rightarrow \boxed{x(t) = 10\pi\, sen\left(\frac{2\pi t}{5}\right)}$

d) $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$ $t = 1s$ $\frac{dv}{dt} < 0 \Rightarrow F$ negativa

$t = 2s$ $\frac{dv}{dt} > 0 \Rightarrow F$ positiva

$t = 7s$ $\frac{dv}{dt} < 0 \Rightarrow F$ negativa

2ª QUESTÃO

Do gráfico: período = 10s $t = 0s$ $\Delta T = 2°C$ $\Delta T_{max} = 2°C$

$w = \frac{2\pi}{10s} \Rightarrow w = 0{,}2\pi\, s^{-1}$ $t = 10s$ $\Delta T = 1°C$

$t = 20s$ $\Delta T = 0{,}5°C$

O gráfico é equivalente ao movimento de oscilação c/ amortecimento fraco:

$$\Delta T(t) = \underbrace{\Delta T_{max}\, e^{-\frac{\gamma t}{2}}}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \text{amplitude decai exponencialmente}$$

a) usando um dos valores lidos no gráfico:

$$\Delta T(10) = (2°C)\, e^{-\frac{\gamma}{2}(10s)} = 1°C$$

$$\frac{1°C}{2°C} = e^{-10\gamma} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -10\gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = 7 \times 10^{-2}\, s}$$

b) $\Delta T = (2°C)\, e^{-0{,}035t} \cos(0{,}2t)$

c) Para que a temperatura retorne ao valor de equilíbrio o mais rápido possível sem oscilar, o amortecimento deve ser crítico $\Rightarrow$

$$\beta = w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = 0$$

$w_0 \cong \frac{2\pi}{T} = 0{,}2\pi\, s^{-1}$ $\frac{\gamma}{2} = w \Rightarrow \gamma = 2w_0 \Rightarrow \boxed{\gamma \cong 1{,}2\, s^{-1}}$

3ª QUESTÃO

Dados: $\mu = 20\frac{g}{cm} = \frac{20 \times 10^{-3}}{10^{-2} m} kg \Rightarrow \mu = 2\ kg/m$ $\qquad \lambda = 0,1\,m$

amplitude $\Rightarrow a = 2\ mm$ $\qquad f = 220\,Hz$

a) $v = \lambda f \Rightarrow v = (1\,0m)(220\,Hz) \Rightarrow \boxed{v = 22\,m/s}$

$v^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = \mu . v^2 = \left(2\frac{kg}{m}\right)\left(22\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow \boxed{T = 968\,N}$

b) $y(x,t) = y_0 \cos(kx - wt + \varphi)$ $\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,1m} \Rightarrow k = 20\pi\ m^{-1}$

$w = k.v = 20\pi . 22 = 444\pi\ s^{-1}$

$y(0,0) = y_0 \cos\varphi = 0 \rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$

$$\boxed{y(x,t) = (2 \times 10^{-3} m) \cos \pi [20t - 440x + \pi/2]}$$

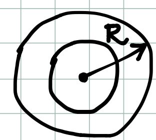
c) $\overline{P} = \frac{1}{2}\mu . w^2 A^2 v = \frac{1}{2}\left[2\frac{kg}{m}\right]\left[440\pi\, s^{-1}\right]^2\left[2 \times 10^{-3} m\right]^2\left[22\frac{m}{s}\right]$

$\boxed{\overline{P} = 168\ W}$

d) $v_{som} = \lambda_{som} . f \Rightarrow \lambda_{som} = \frac{340 m/s}{220\,Hz} \Rightarrow \boxed{\lambda_{som} = 1,5m}$

4ª QUESTÃO

$I = \frac{\text{Potencia}}{\text{Área}}$



$\text{Área} = 4\pi R^2$

a) No limiar da audição $I = 10^{-12} \frac{W}{m^2} = \frac{6\,W}{4\pi R^2}$ $\boxed{R = 6{,}9 \times 10^{5}\, m}$

b) No limiar da dor: $I = 1 \frac{W}{m^2} = \frac{6\,W}{4\pi R'^2} \Rightarrow \boxed{R' = 0{,}7\, m}$

c) $I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 v$

relação entre u_0 e ΔP_{max}

$$\Delta P(x,t) = -B \frac{\partial u}{\partial x} = B k u_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \Rightarrow \Delta P_{max} = B k u_0$$

$$u_0 = \frac{\Delta P_{max}}{Bk} \quad e \quad k = \frac{\omega}{v} \qquad u_0 = \frac{\Delta P_{max}}{B\ \omega} v$$

$$I = \frac{1}{2} \rho \cancel{\omega^2} v \frac{\Delta P_{max}^2}{B^2 \cancel{\omega^2}} v^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \rho v^3 \frac{\Delta P_{max}^2}{B^2}$$

$$\Delta P_{max}^2 = \frac{2 I B^2}{\rho v^3} \Rightarrow \Delta P_{max} = \frac{2 (1\,W/m^2)(1.42 \times 10^5)^2}{(1{,}2\, kg/m^3)(340\, m/s)^3}$$

$$\boxed{\Delta P_{max} = 2{,}9 \times 10^{1}\, Pa}$$

$\Delta P_{max} \simeq 10^{-4}$ vezes a pressão atmosférica.