

Física 4

Maria José Bechara
José Luciano Miranda Duarte
Manoel Roberto Robilotta
Suzana Salem Vasconcelos
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

São Paulo, 3 de junho de 2014

Sumário

1 circuitos: elementos	1
2 circuito RLC	15
3 circuitos LC, RL,RC	27
4 circuitos com corrente alternada	39
5 circuitos com corrente alternada: ressonância	47
6 circuitos com corrente alternada: impedância	55
7 circuito LC infinito	67
8 linha de transmissão	79
9 linha de transmissão: cargas, correntes e campos	89
10 linha de transmissão: energia	101
11 ondas no vácuo	109
12 ondas no vácuo:	

propagação e energia	119
13 ondas eletromagnéticas: superposição e polarização	129
14 interferência	139
15 difração	147
16 difração em fendas largas	155
17 relatividade: impacto e princípios	163
18 dilatação do tempo	175
19 contração do espaço e quebra da simultaneidade	187
20 transformações de Lorentz	199
21 transformações de Lorentz: exemplos	211
22 transformações de Lorentz: mais exemplos	229
23 adição de velocidades	241
24 relatividade: transformações de campos e densidades	253
25 eletromagnetismo: mudanças de referencial	267
26 eletromagnetismo: mudanças de referencial II	277

27 os campos de uma carga em movimento uniforme	291
28 radiação I	307
29 radiação II	319
30 radiação: o espelho	329
31 campos magnéticos na matéria: diamagnetismo e paramagnetismo	337
32 ferromagnetismo	347
33 campos elétricos estáticos na matéria I	355
34 campos elétricos estáticos na matéria II	363
35 ondas em meios materiais: condutores	367
36 ondas em meios materiais: o caso da prata	383
37 ondas em meios materiais: dielétricos	391
38 ondas planas - notação	401
39 interfaces	413
40 interfaces	421
41 ondas em interfaces	437
42 interação da luz com a matéria: fenômenos	445

Capítulo 1

circuitos: elementos

- introdução

O estudo de circuitos elétricos, tema inicial deste curso, consiste em uma aplicação da teoria eletromagnética. Todo o conhecimento teórico sobre o eletromagnetismo clássico está sintetizado em um sistema formado pelas quatro equações de Maxwell e pela força de Lorentz. As equações de Maxwell descrevem como cargas e correntes elétricas criam campos elétricos e magnéticos. A expressão da força de Lorentz, por sua vez, descreve a ação de campos elétricos e magnéticos sobre cargas e correntes. Um circuito elétrico consiste em uma associação de dispositivos nos quais cargas podem se mover e se organizar devido à ação de campos elétricos e magnéticos. Por isso, os seus comportamentos são determinados pelas equações de Maxwell. A seguir, apresentamos um brevíssimo resumo da teoria.

equações de Maxwell			
nome	conceito	forma integral	forma diferencial
Gauss elétrica	$q \rightarrow \mathbf{E}$	$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$
Faraday	$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \leftrightarrow \mathbf{E}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$	$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Ampère Maxwell	$I \leftrightarrow \mathbf{B}$ $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \leftrightarrow \mathbf{B}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left[\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
Gauss magnética	$\cancel{\neq} q_{MAG}$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

As quatro **equações de Maxwell**, já estudadas em curso anterior, estão representadas no quadro e expressam, de modo formal, as seguintes idéias:

Lei de Gauss: carga elétrica q gera campo elétrico \vec{E}

Lei de Faraday: campo magnético \vec{B} dependente do tempo gera campo elétrico \vec{E}

Lei de Ampère-Maxwell: corrente elétrica I e campo elétrico \vec{E} dependente do tempo geram campo magnético \vec{B}

Lei de Gauss do magnetismo: não existe carga magnética.

Quando uma carga q , com velocidade \vec{v} , está em uma região do espaço onde há campo elétrico \vec{E} e campo magnético \vec{B} , ela sente uma força \vec{F} , denominada **força de Lorentz**, dada por

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Uma outra idéia muito importante incorporada no eletromagnetismo é a da conservação da carga elétrica. Ela é expressa pela **equação da continuidade**, que pode ser obtida a partir das equações de Maxwell.

equação de continuidade		
conceito	forma integral	forma diferencial
conservação da carga elétrica	$\oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$	$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Para completar este resumo, lembramos que os campos são portadores de energia. Onde há campo elétrico \vec{E} , há energia elétrica, com densidade volumétrica u_E dada por

$$u_E = \frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.1)$$

O campo magnético \vec{B} é também responsável pela existência de energia magnética, com densidade volumétrica u_B dada por

$$u_B = \frac{dU_B}{dV} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}. \quad (1.2)$$

• elementos de circuitos elétricos

Neste curso estudamos circuitos elétricos simples, formados por associações de fontes de tensão, resistores, capacitores e indutores. Fontes de tensão são sistemas que produzem energia eletromagnética a partir de energia mecânica, química, luminosa ou outras. Resistores são elementos do circuito onde ocorre dissipação de energia eletromagnética que se transforma em calor. Capacitores e indutores são dispositivos que podem armazenar, respectivamente, energia elétrica e energia magnética.

• capacitores

De modo geral, efeitos capacitivos ocorrem quando dois condutores quaisquer são colocados próximos entre si. Os capacitores mais comuns são formados por dois objetos metálicos separados por distâncias relativamente pequenas. Existem, entretanto, muitas outras possibilidades, tal como um ser humano próximo a uma antena de rádio. Em um capacitor carregado, os condutores têm cargas elétricas iguais e de sinais opostos, $+Q$ e $-Q$, que dão origem a um campo elétrico \vec{E}_C . De acordo com as equações de Maxwell, o campo \vec{E}_C é proporcional a Q e a eq. (1.1) nos permite concluir que a energia U_C armazenada nesse campo deve ser proporcional a Q^2 . Por isso, associamos a um capacitor uma grandeza chamada *capacitância* que, como veremos, depende apenas de suas características geométricas. A capacitância C é definida pela relação

$$U_C = \frac{Q^2}{2C}, \quad (1.3)$$

sendo o fator 2 no denominador o "mesmo" da eq.(1.1).

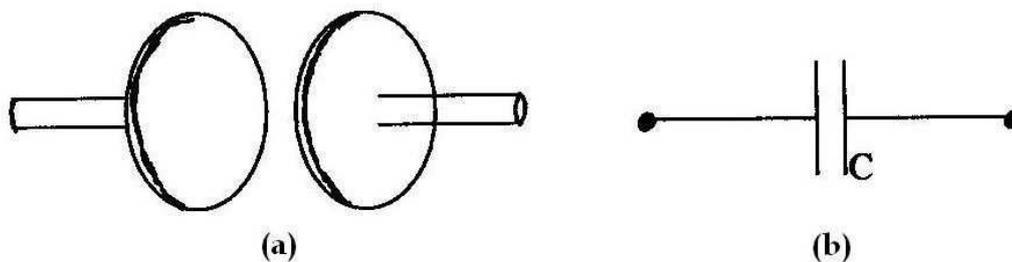


Figura 1.1: (a) Capacitor de placas planas e circulares; (b) Representação esquemática de um capacitor.

Uma outra definição de capacitância, totalmente equivalente, pode ser produzida notando que entre os condutores há uma f.e.m.¹ $\varepsilon_C = \int \vec{E}_C \cdot d\vec{c}$, com a integral calculada sobre um caminho matemático ligando os dois condutores. Como \vec{E}_C é proporcional a Q ,

¹Em geral, chamamos de força eletromotriz (f.e.m.) ε entre dois pontos a integral de $\vec{E} \cdot d\vec{c}$ entre esses dois pontos: $\varepsilon_{BA} \sim \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{c}$. Apenas no caso em que o campo \vec{E} é produzido por cargas em repouso a f.e.m. ε_{BA} corresponde a uma diferença de potencial eletrostático entre os dois pontos. No S.I., o volt (V) é a unidade para ambas as grandezas.

o mesmo acontece com ε_C e escrevemos

$$\varepsilon_C = \frac{Q}{C}. \quad (1.4)$$

• **exemplo 1:**

Cálculo da capacitância C de um capacitor formado por duas placas metálicas planas, circulares de raio a , paralelas, separadas por uma distância d , entre as quais há vácuo. Temos duas alternativas para calcular C , baseadas nas eqs. (1.3) e (1.4). Em ambos os casos precisamos, inicialmente, obter o campo elétrico \vec{E}_C . Para tanto, supomos que o capacitor esteja carregado com a carga Q e recorremos à lei de Gauss.

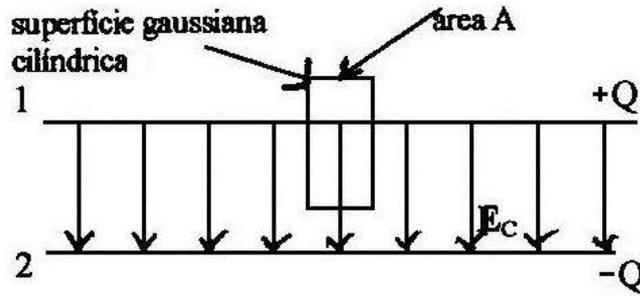


Figura 1.2: Determinação do campo \vec{E}_C através da lei de Gauss.

Usando a superfície gaussiana mostrada na fig. 1.2, escrevemos

$$\oiint_S \vec{E}_C \cdot \vec{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E_C A = \frac{Q}{\pi a^2} \frac{A}{\epsilon_0} E_C = \frac{Q}{\pi a^2 \epsilon_0}. \quad (1.5)$$

alternativa 1: a densidade volumétrica de energia elétrica é dada pela eq. (1.1) e a energia total no interior do capacitor é:

$$U_C = \iiint_V \left(\frac{\epsilon_0 E_C^2}{2} \right) dV = \left(\frac{\epsilon_0 E_C^2}{2} \right) \pi a^2 d = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 \pi a^2}. \quad (1.6)$$

Para obter este resultado, usamos o fato de que \vec{E}_C não varia no interior do capacitor. Comparando com (1.1), obtemos

$$C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}. \quad (1.7)$$

alternativa 2: A f.e.m. é dada por:

$$\varepsilon_C = \int_1^2 \vec{E}_C \cdot d\vec{c} = E_C d = \frac{Q}{\pi a^2 \epsilon_0} d, \quad (1.8)$$

onde usamos o fato de que \vec{E}_C é uniforme na região entre as placas. A capacitância é obtida comparando esse resultado com a eq. (1.4). Assim,

$$C = \frac{Q}{\varepsilon_C} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}, \quad (1.9)$$

que coincide com (1.7)

• indutores

São, usualmente, sistemas formados por fios enrolados em formas cilíndricas ou toroidais mas, é importante ressaltar que mesmo um fio retilíneo pode ser considerado um indutor, ainda que muito ineficiente. De modo geral, um indutor é um sistema pelo qual se faz passar uma corrente elétrica I , que produz um campo magnético \vec{B}_L o qual, por sua vez, dá origem um acúmulo de energia magnética, por meio da eq. (1.2). As equações de Maxwell afirmam que \vec{B}_L é proporcional a I e, usando (1.2), podemos concluir que a energia magnética acumulada no campo é proporcional a I^2 . Por isso, a auto-indutância L do indutor é definida pela relação

$$U_L = \frac{LI^2}{2} \quad (1.10)$$

e o fator 2 do denominador é o "mesmo" da eq.(1.2). A grandeza L , depende apenas das características geométricas do indutor.

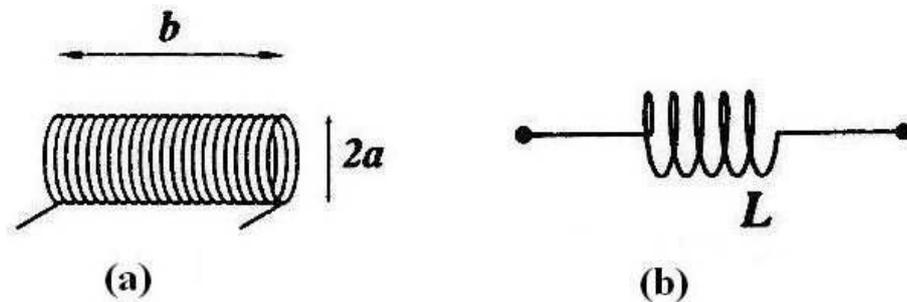


Figura 1.3: (a) Solenóide cilíndrico de raio a e comprimento b ; (b) Representação esquemática de um indutor.

A auto-indutância também pode ser definida e partir da f.e.m. Para tanto notamos que, ao variar com o tempo, o campo magnético dá origem, de acordo com a lei de Faraday, a um campo elétrico induzido \vec{E}_L :

$$\oint_C \vec{E}_L \cdot d\vec{c} = - \iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}_L}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS \quad (1.11)$$

Tomando o caminho C no interior do circuito, associamos uma força eletromotriz ε_L ao campo elétrico \vec{E}_L , dada por

$$\varepsilon_L = \oint_C \vec{E}_L \cdot d\vec{c}. \quad (1.12)$$

Como \vec{B}_L é proporcional a I , a f.e.m. ε_L é proporcional à derivada da corrente elétrica I com relação ao tempo e escrevemos

$$\varepsilon_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (1.13)$$

• **exemplo 2:**

Cálculo da auto-indutância L de um solenóide cilíndrico, muito longo, de raio a , comprimento $b \gg a$, com n espiras por unidade de comprimento. O valor de L pode ser obtido tanto a partir da eq. (1.2) como da eq. (1.13) e, em ambos os casos, é preciso conhecer o campo magnético \vec{B}_L . Supondo que o solenóide seja percorrido por uma corrente I e aplicando a lei de Ampère ao caminho C da fig. 1.4, temos

$$\oint_C \vec{B}_L \cdot d\vec{c} = \mu_0 I \rightarrow |\vec{B}_L| d = \mu_0 n d I \rightarrow |\vec{B}_L| = \mu_0 n I. \quad (1.14)$$

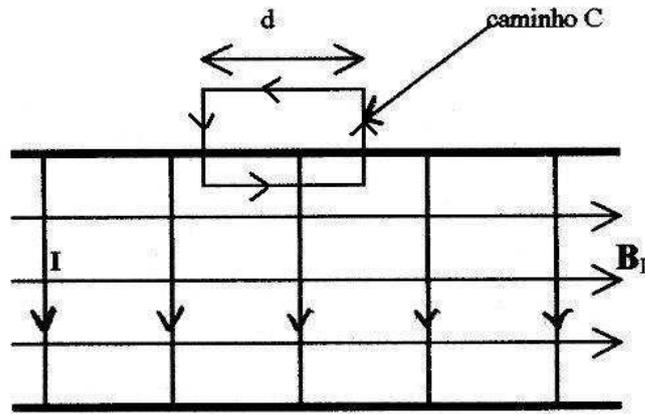


Figura 1.4: Determinação do campo \vec{B}_L através da lei de Ampère.

alternativa 1: A energia acumulada no campo magnético é dada por

$$U_B = \iiint_V \left(\frac{\vec{B}_L^2}{2\mu_0} \right) dV, \quad (1.15)$$

sendo V o volume da região ocupada pelo campo. No presente exemplo, o fato de o solenóide ser muito longo permite-nos supor que o campo no seu exterior seja desprezível e que o campo no seu interior seja uniforme. Essas aproximações permitem-nos escrever

$$U_L = \frac{\vec{B}_L^2}{2\mu_0} \pi a^2 b = (\mu_0 n I)^2 \frac{\pi a^2 b}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi a^2 b I^2. \quad (1.16)$$

Comparando com a eq. (1.10), obtemos

$$L = \mu_0 n^2 \pi a^2 b. \quad (1.17)$$

alternativa 2: A f.e.m. associada ao campo induzido \vec{E}_L é dada por

$$\varepsilon_L = \oint_C \vec{E}_L \cdot d\vec{c} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}_L}{\partial t} \cdot \vec{n} dS, \quad (1.18)$$

onde o caminho C passa pelo interior de todo o circuito. Para efetuar o cálculo, supomos que o campo \vec{E}_L exista apenas na região do indutor e que este seja equivalente a um conjunto de (nb) espiras circulares. Com essa aproximação, podemos tomar o caminho C no interior de uma das espiras, o que faz com que \vec{n} seja paralelo ao eixo do solenóide e, portanto, $\vec{B}_L = B_L \vec{n}$.

Como \vec{B}_L é uniforme no interior do solenóide, para uma espira, podemos escrever

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}_L}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = \frac{\partial B_L}{\partial t} \pi a^2. \quad (1.19)$$

Usando o resultado (1.14), obtemos

$$\frac{\partial B_L}{\partial t} = \mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1.20)$$

e, portanto,

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}_L}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} \pi a^2. \quad (1.21)$$

O solenóide de comprimento b e n espiras por unidade de comprimento, tem nb espiras e, a f.e.m. total é dada por

$$\varepsilon_L = \mu_0 n^2 \frac{\partial I}{\partial t} \pi a^2 b. \quad (1.22)$$

Comparando com (1.13), obtemos novamente

$$L = \mu_0 n^2 \pi a^2 b. \quad (1.23)$$

• resistores

Resistores são sistemas condutores, metálicos ou não, que dissipam energia eletromagnética quando percorridos por correntes elétricas. Se no interior de um condutor existir um campo elétrico \vec{E}_R haverá, devido a este campo, uma corrente elétrica que o percorre. Em muitas situações, vale uma relação linear entre a densidade de corrente \vec{j} que percorre o condutor e o campo elétrico \vec{E}_R . Tal relação, conhecida como lei de Ohm microscópica, pode ser escrita como:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}_R}{\rho} \quad (1.24)$$

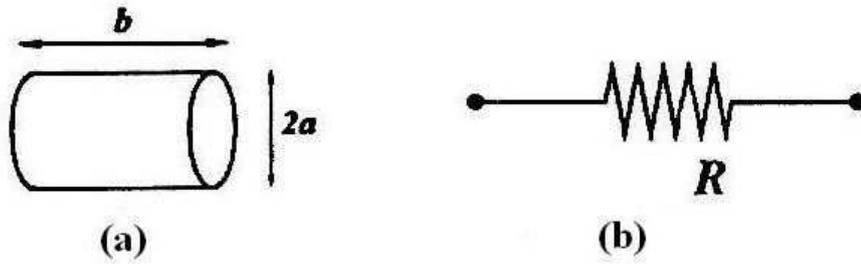


Figura 1.5: (a) Um fio metálico cilíndrico de raio a e comprimento b ; (b) Representação esquemática de um resistor.

onde ρ é a resistividade elétrica do condutor, que depende do material e da temperatura.

A f.e.m. ε_R existente entre dois pontos do condutor é dada por

$$\varepsilon_R = \int \vec{E}_R \cdot d\vec{c} \quad (1.25)$$

com a integral calculada sobre um caminho que ligue os dois pontos. Desta forma, para condutores ôhmicos, vale a relação:

$$\varepsilon_R = \int \rho \vec{j} \cdot d\vec{c} \quad (1.26)$$

Como $|\vec{j}|$ é proporcional à corrente I que percorre o condutor, para situações em que vale a lei de Ohm, o mesmo vale para ε_R , o que permite escrever

$$\varepsilon_R = RI, \quad (1.27)$$

onde R é a resistência do condutor, que depende da resistividade do material e de sua geometria. Esta relação expressa a lei de Ohm na forma macroscópica e a potência dissipada no trecho do fio correspondente à f.e.m. ε_R é dada por

$$P_R = \varepsilon_R I = R I^2. \quad (1.28)$$

• exemplo 3:

Cálculo da potência dissipada em um fio metálico cilíndrico, de raio a , comprimento b e resistividade ρ , submetido a uma f.e.m. ε_R , mostrado na fig. 1.6, supondo válida a lei de Ohm microscópica $\vec{j} = \vec{E}_R/\rho$.

Um modo fácil de resolver este problema consiste em usar a relação $P_R = \varepsilon_R I$, dada pela eq. (1.28), depois de obter R e I a partir dos dados do problema. A f.e.m. está relacionada ao campo \vec{E}_R no interior do resistor por

$$\varepsilon_R = \int \vec{E}_R \cdot d\vec{c}. \quad (1.29)$$

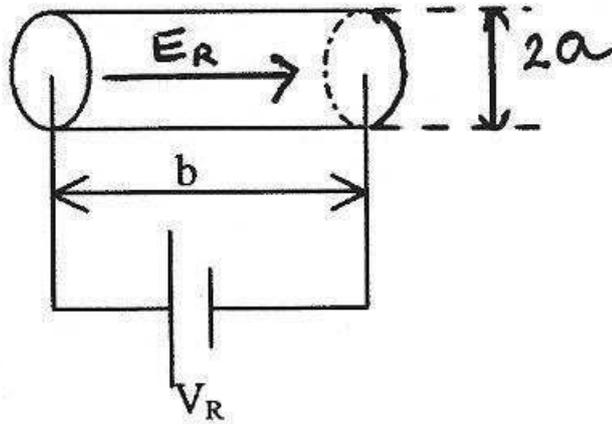


Figura 1.6: Fio de resistividade ρ , comprimento b e raio a submetido a diferença de potência V_R .

Como o campo elétrico \vec{E}_R é uniforme no interior do fio, temos

$$|\vec{E}_R| = \frac{\varepsilon_R}{b} \quad (1.30)$$

A corrente I está relacionada a $|\vec{j}|$ por

$$I = j \pi a^2 \quad (1.31)$$

e a lei de Ohm microscópica permite escrever

$$\frac{I}{\pi a^2} = \frac{\varepsilon_R}{\rho b}. \quad (1.32)$$

A potência dissipada vale, portanto,

$$P_R = \varepsilon_R I = \frac{\pi a^2}{\rho b} (\varepsilon_R)^2. \quad (1.33)$$

• fontes de tensão

Fontes de tensão são sistemas capazes de transformar outras formas de energia em energia eletromagnética. Neste curso, consideramos dois tipos de fonte de tensão, as contínuas e as oscilantes. Ao primeiro tipo está associada uma força eletromotriz ε constante, e ao segundo, forças eletromotrizes que variam com o tempo. Em ambos os casos, a fonte fornece, ao circuito a ela conectada, uma potência P dada por

$$P_V = \varepsilon_V I, \quad (1.34)$$

onde I é a corrente na fonte.

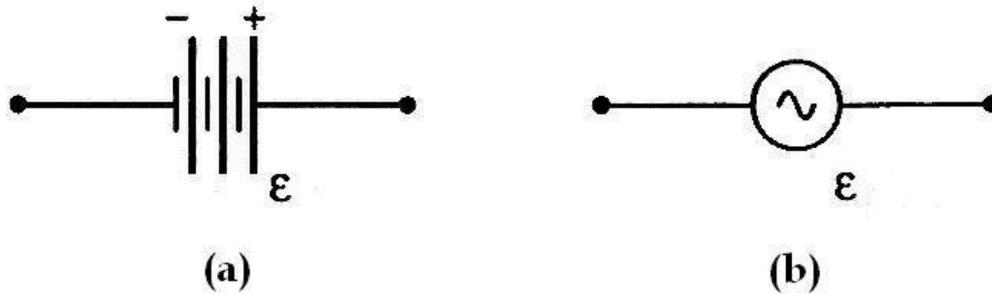


Figura 1.7: (a) Representação de uma fonte de tensão constante. (b) Representação de uma fonte de tensão variável.

• um exemplo de circuito

Um circuito corresponde a uma particular combinação de elementos, tais como capacitores, indutores, resistores e fontes. Existem, portanto, inúmeras possibilidades à nossa disposição. Um circuito particularmente simples é mostrado na fig. 1.8, que representa uma associação em série de um capacitor de capacitância C , um indutor de indutância L , um resistor de resistência R e uma fonte de tensão com força eletromotriz V . Ele é conhecido como circuito RLC . O circuito é simples, mas a física que rege o seu funcionamento não é nada simples. Mas ela é bonita e, por isso, muito interessante. E nós, também, somos parte do problema.

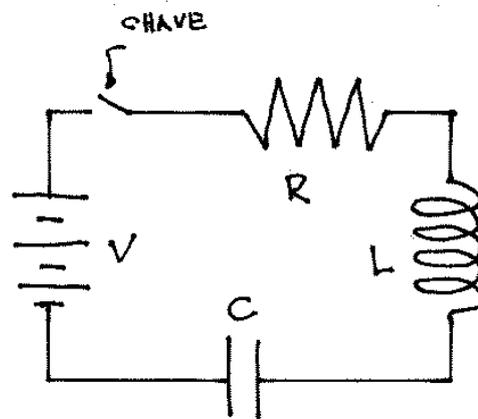


Figura 1.8: Um resistor, um capacitor, um indutor e um gerador de tensão, associados em série; a chave permite que o circuito seja aberto ou fechado.

Olhe, com força, a figura 1.8. Ela pode sugerir que alguém foi a uma loja e comprou uma pilha, um resistor, um capacitor, um indutor e juntou todos esses elementos, na ordem indicada na figura, por meio de fios sem resistência. A menos dos fios sem resistência, essa seria uma possibilidade. Mas não a única. A razão é que a figura 1.8 corresponde a um *símbolo* e, não, a uma fotografia do circuito. Ela não tem a intenção de representar o circuito no espaço tridimensional. Ela representa o circuito num espaço de conceitos e a sua intenção é indicar que, neste particular caso, o sistema recebe energia eletromagnética

externa (V), irradia parte dela de volta para o ambiente externo (R) e acumula outras partes, na forma de campos elétrico (C) e magnético (L). A figura indica *que* esses processos acontecem mas *não onde*, no espaço tridimensional, eles ocorrem.

No interior de metais, as cargas móveis são os seus elétrons livres. Se a temperatura do sistema não for muito próxima de $0K$, cada elétron pode ser pensado como uma entidade individual e o seu comportamento é regido pela força de Lorentz, $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Nos circuitos comuns, as velocidades dos elétrons livres são baixas em comparação à da luz e as forças de origem magnética podem ser desprezadas. Por isso, o comportamento do circuito é determinado pelos campos elétricos no interior do fio.

Com o circuito aberto, o campo resultante no interior do metal é nulo. Esse campo é devido à superposição de dois tipos de efeitos. Um deles é a presença da fonte de tensão V , que cria um campo elétrico no qual todo o circuito está embebido. Esse campo induz cargas nas superfícies dos componentes metálicos do circuito. Os campos devido a essas cargas induzidas se somam vetorialmente ao da bateria, produzindo uma resultante nula *no interior* do metal. Por isso, neste caso, os elétrons executam, no interior do fio, apenas um zigue-zague de origem térmica. Na parte exterior do circuito, os campos da bateria e das cargas induzidas na superfície do metal não se anulam e alguma energia de origem elétrica fica acumulada nessa região. Isso constitui em efeito capacitivo.

Quando o circuito é fechado, todos os seus elementos passam a influir sobre o comportamento do elétron. A equação da continuidade desempenha, então, um papel muito importante, pois a corrente elétrica funciona, no interior do circuito, como um fluido incompressível. Por isso, em cada instante, a corrente I é a mesma em qualquer dos seus pontos, exceto no intervalo aberto entre as placas do capacitor. Mas é ela, também, que permite relacionar a carga Q nessas placas com a corrente, por meio da relação $I = dQ/dt$.

A corrente elétrica corresponde a um movimento ordenado dos elétrons, superposto ao movimento desordenado associado à agitação térmica. No caso de condutores ôhmicos, em cada ponto do interior do metal vale a relação $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ e, portanto, a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico *resultante* nesse ponto.

A fonte de tensão, que pode ser uma pilha, cria campo elétrico à sua volta, devido às cargas acumuladas nas suas extremidades. O mesmo acontece com o capacitor, quando existem cargas acumuladas nas suas placas. E o mesmo também acontece com o indutor, quando ele é percorrido por uma corrente que varia com o tempo. É importante perceber que esses campos existem tanto dentro das partes metálicas que formam o circuito quanto fora delas, no espaço vazio. Para completar o quadro, é preciso mencionar uma quarta fonte de campo elétrico, da qual se fala pouco. Essa fonte de campo são as cargas acumuladas na superfície do metal. O campo que elas criam existe, também, dentro e fora do metal. Entretanto, é dentro do metal que os seus efeitos são mais perceptíveis, pois é ele, que somado aos campos da bateria, do capacitor e do indutor, produz uma resultante que é sempre paralela ao fio. É esse conjunto de fatores que faz com que a corrente siga o caminho indicado pelo fio.

• **exercícios:**

1. Em um circuito eletromagnético real, a resistência, o capacitor e o indutor são sempre elementos distintos?
2. É dado um capacitor cilíndrico, constituído por peças metálicas com as formas das na figura 1.9. Calcule
 - a) o módulo do campo elétrico no seu interior, quando ele está carregado com a carga Q ;
 - b) a sua capacitância.

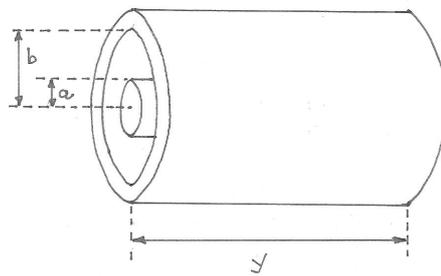


Figura 1.9:

3. Se os elementos da fig.1.9 forem percorridos por uma corrente I , eles podem ser considerados como um trecho de um cabo coaxial. Admitindo isso, calcule
 - a) o módulo do campo magnético na região entre os dois condutores;
 - b) a auto-indutância L deste trecho do cabo.
4. É dado um resistor, formado por dois cilindros de mesmo metal, de resistividade ρ , com a forma dada na figura 1.10, submetido a uma f.e.m. ε . Usando a lei de Ohm microscópica $\mathbf{j} = \mathbf{E}/\rho$, determine:
 - a) a corrente que atravessa o cilindro da esquerda;
 - b) os módulos dos campos elétricos E_E e E_D no interior dos cilindros da esquerda e da direita da figura;
 - c) o campo elétrico no interior do fio é contínuo ou descontínuo sobre a superfície onde os cilindros se tocam? Justifique a sua resposta.

• **respostas:**

1. a) $|\vec{E}_C| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r y}$, para $a \leq r \leq b$
- b) $C = \frac{2\pi y \varepsilon_0}{\ln b/a}$
2. a) $|\vec{B}_L| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, para $a \leq r \leq b$

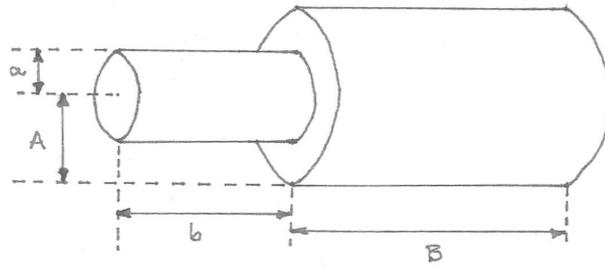


Figura 1.10:

b) $L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} l_n b/a$

3. a) $I = \frac{\pi a^2 A^2}{A^2 b + a^2 B} \frac{\varepsilon}{\rho}$

b) $E_E = \frac{A^2}{A^2 b + a^2 B} \varepsilon$; $E_D = \frac{a^2}{A^2 b + a^2 B} \varepsilon$

c) descontínuo: se a corrente I fluir da esquerda para a direita, na interface existe uma densidade de carga

$$\sigma = \frac{-A^2 + a^2}{A^2 b + a^2 B} \epsilon_0 \varepsilon < 0,$$

calculada por meio da lei de Gauss elétrica. Se a corrente mudar de sentido, a densidade de carga na interface muda de sinal.

Capítulo 2

circuito RLC

As equações de Maxwell permitem-nos determinar como funcionam os circuitos elétricos envolvendo indutores (L), resistores (R), capacitores (C) e fontes de tensão (V). O comportamento de um determinado circuito depende, como veremos, não apenas da maneira como os elementos estão associados, mas também dos valores de R , L , C e V . De modo geral, a tensão V pode ser constante, como no caso de uma pilha ou variável no tempo, como uma tomada elétrica. Nesta aula e na próxima, estudamos o sistema formado por um indutor, um capacitor e um resistor ligados em série a uma fonte de tensão *constante*, conhecido como circuito *RLC* e mostrado na figura 2.1.

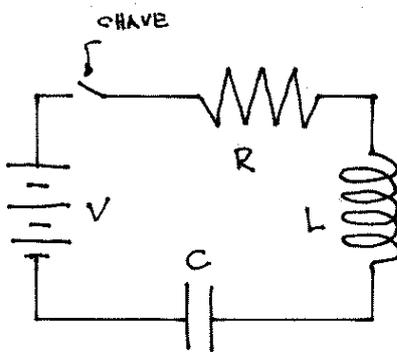


Figura 2.1: Representação de um circuito *RLC* em série, com uma chave.

• equação diferencial

Em geral, estudar e "resolver" um circuito consiste em determinar como as cargas elétricas se localizam e se movem no seu interior, em função do tempo e, o que é complementar, os vários fluxos de energia.

Existem várias maneiras possíveis para resolver o circuito da fig. 2.1 e uma delas é baseada no princípio de conservação de energia. Há quatro formas de energia a serem

consideradas: a energia fornecida pela fonte, a energia dissipada no resistor e as energias armazenadas no capacitor e no indutor. Como a energia do sistema se conserva, a potência P_V fornecida pela fonte pode ser escrita como

$$P_V = \frac{dU_C}{dt} + \frac{dU_L}{dt} + P_R. \quad (2.1)$$

Usando os resultados para P_V , U_C , U_L e P_R obtidos anteriormente, e escrevemos

$$V I = \frac{d\left(\frac{Q^2}{2C}\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{L I^2}{2}\right)}{dt} + R I^2, \quad (2.2)$$

onde I é a corrente que circula através do resistor, do indutor e da fonte de tensão e Q é a carga no capacitor. Como a carga elétrica é uma grandeza conservada, as variações de Q estão diretamente relacionadas às correntes nos fios conectados às placas do capacitor. Por isso, usando a equação da continuidade, temos

$$\frac{dQ}{dt} = I. \quad (2.3)$$

Usando esse resultado e efetuando as derivadas temporais, reescrevemos a eq. (2.2) como

$$V I = \frac{Q I}{C} + L I \frac{dI}{dt} + R I^2 = \left[\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} + R I \right] I. \quad (2.4)$$

Eliminando I , e reordenando os termos, encontramos

$$V = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad (2.5)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem em Q . Resolvendo essa equação, encontramos a função $Q(t)$, a partir da qual I , U_C , U_L , P_L e P_R podem ser obtidos. Os métodos matemáticos para resolver essa equação são discutidos em seguida.

É importante notar que o resultado (2.5) também poderia ser obtido a partir da expressão da força eletromotriz,

$$\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.6)$$

pois ele pode ser reescrito como

$$V = \varepsilon_C + \varepsilon_L + \varepsilon_R. \quad (2.7)$$

• solução da equação diferencial

O comportamento deste sistema é determinado pela equação diferencial (2.5), que reescrevemos como

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V. \quad (2.8)$$

Para conhecer o seu funcionamento, precisamos obter as soluções $Q(t)$ dessa equação. Este é um problema matemático bem conhecido, cujas características principais revemos a seguir.

A equação diferencial considerada é de *segunda ordem*, pois envolve a derivada segunda da carga Q em relação ao tempo; *linear*, pois só contém termos lineares em Q , não envolvendo outras funções tais como Q^2 , $1/Q$, $\sin Q$, $\exp(Q)$, etc. Finalmente, ela é não homogênea, já que, isoladas as funções de Q e suas derivadas no lado esquerdo, o lado direito é não nulo.

No caso em que a tensão V é constante, é possível, através de uma mudança de variável, tornar a equação diferencial homogênea e mais fácil de resolver. Usando a nova variável

$$q \equiv Q - CV, \quad (2.9)$$

reescrevemos a equação diferencial como

$$LC \frac{d^2 q}{dt^2} + RC \frac{dq}{dt} + q = 0. \quad (2.10)$$

Esta equação admite diferentes tipos de solução, dependendo dos valores de R , L e C . Para analisar as possíveis soluções, definimos o discriminante:

$$\Delta \equiv R^2 - \frac{4L}{C}. \quad (2.11)$$

Dependendo dos valores numéricos de R , L e C , o discriminante pode ser negativo, positivo ou nulo e, a cada um destes casos, corresponde um tipo diferente de comportamento do circuito.

• caso 1: $R^2 \neq \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta \neq 0$

Quando o discriminante é não nulo, a solução da equação diferencial para $q(t)$ é uma exponencial do tipo $e^{\lambda t}$, onde λ é uma função de R , L e C , a ser determinada. Substituindo $q(t) = e^{\lambda t}$ na equação (2.10), obtemos:

$$LC\lambda^2 e^{\lambda t} + RC\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0. \quad (2.12)$$

Como este resultado deve ser válido para qualquer valor de t , obtemos a condição

$$LC \lambda^2 + RC \lambda + 1 = 0, \quad (2.13)$$

que fornece

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \equiv -\alpha \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2L}, \quad (2.14)$$

onde

$$\alpha \equiv \frac{R}{2L}. \quad (2.15)$$

Assim, a expressão geral para $q(t)$ pode ser escrita como uma combinação linear das duas possibilidades:

$$q(t) = A \exp \left[\left(-\alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2L} \right) t \right] + B \exp \left[\left(-\alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2L} \right) t \right], \quad (2.16)$$

onde A e B são constantes.

Essas duas constantes, que parecem entrar no problema pela porta dos fundos, são extremamente importantes. A primeira coisa a ser notada, é que elas têm dimensão de carga e no SI , são dadas em coulombs (C). Do ponto de vista puramente matemático, quaisquer valores de A e B são aceitáveis. Assim, por exemplo, o par de valores $A = 1,17C$ e $B = -0,23C$ fornece uma solução tão boa da eq. (2.9) quanto o par $A = 0$ e $B = 5,47C$. Por isso, a função dada pela eq. (2.16) representa, de fato, a *classe* mais geral possível de soluções da equação diferencial homogênea, para o caso $\Delta \neq 0$. Mais um exemplo do admirável poder da matemática. Por outro lado, quando olhamos o problema do ponto de vista do laboratório, notamos que somente existem situações particulares. A carga de um capacitor real não pode variar com o tempo do modo mais geral possível permitido pela matemática! Por isso, em problemas físicos, as constantes A e B precisam ser escolhidas de modo que uma função matemática geral possa descrever um caso específico. Este aspecto do problema voltará a ser abordado por meio de exemplos. Antes disso, retornamos ao problema matemático e estudamos separadamente, as duas situações possíveis para discriminante não nulo: $\Delta < 0$ e $\Delta > 0$.

caso 1a: $R^2 < \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta < 0$

O discriminante Δ , dado pela eq. (2.10), envolve o fator R^2 , associado à dissipação de energia e o quociente $4L/C$, associado à conservação de energia. Por isso, um valor negativo para Δ indica que o circuito é predominantemente conservativo. Para compreender como funciona um sistema conservativo, consideremos um caso limite no qual a resistência pode ser desprezada. Nessa situação, toda a energia contida no sistema não pode sair dele e tem de ficar acumulada, seja no capacitor, seja no indutor. Como consequência, o sistema oscila.

A solução geral $q(t)$ expressa por (2.16) incorpora esse comportamento, mas é preciso manipulá-lo um pouco para tornar isso claro. No caso em que Δ é negativo, reescrevemos a sua raiz como

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-\left(\frac{4L}{C} - R^2\right)} = i \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \quad (2.17)$$

a eq. (2.16) pode ser colocada na forma

$$q(t) = e^{-\alpha t} [A e^{+i\nu t} + B e^{-i\nu t}] , \quad (2.18)$$

onde

$$\nu = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L} . \quad (2.19)$$

A carga elétrica é uma grandeza observável e, portanto, deve ser expressa por uma função real. A eq. (2.18), por outro lado, descreve uma função complexa, o que parece inaceitável. Para evitar esse problema, é preciso escolher as constantes A e B adequadamente.

O fato de a carga ser uma grandeza real corresponde à condição $q = q^*$ e, portanto

$$A e^{+i\nu t} + B e^{-i\nu t} = A^* e^{-i\nu t} + B^* e^{+i\nu t} . \quad (2.20)$$

Para que esta igualdade seja válida para qualquer t , devemos ter

$$A = B^* \leftrightarrow B = A^* \quad (2.21)$$

Usando esse resultado na expressão (2.18) e escrevendo o número complexo A na forma polar

$$A = |A| e^{i\theta} , \quad (2.22)$$

obtemos

$$q(t) = \rho e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta) , \quad (2.23)$$

com $\rho = 2|A|$. Este resultado, apesar de forma diferente, é totalmente equivalente à eq. (2.16). Desta forma, a carga $Q(t)$ no capacitor do circuito em estudo, de acordo com a expressão (2.9), é dada por

$$Q(t) = CV + \rho e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta) . \quad (2.24)$$

Essa função descreve uma oscilação amortecida. A intensidade do amortecimento é representada por

$$\alpha = \frac{R}{2L} , \quad (2.25)$$

que é diretamente proporcional à resistência. Isso indica que, no limite $R = 0$, não há amortecimento. O caráter oscilatório da função é devido à presença do cosseno, sendo a frequência dada por

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2.26)$$

Os parâmetros ρ e θ indicam que a equação (2.21) descreve a classe mais geral possível de soluções com $\Delta < 0$.

Para completar esta discussão, notamos que a expressão da corrente no circuito que é dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\rho e^{-\alpha t} [\alpha \cos(\nu t - \theta) + \nu \sin(\nu t - \theta)] \quad (2.27)$$

• exemplo 1a:

Neste exemplo, estudamos o comportamento de um circuito RLC sem bateria, no caso em que, com a chave aberta, o capacitor está carregado com carga Q_0 . O objetivo é calcular a função $Q(t)$, supondo que a chave tenha sido fechada no instante $t = 0$ e, para isso, precisamos extrair, dos dados do problema, os valores de ρ e θ .

Dois parâmetros requerem duas condições. Uma delas diz respeito à carga inicial do capacitor, que pode ser expressa como $Q(t = 0) = Q_0$. A outra vem do fato de não haver corrente para $t < 0$. Quando a chave é fechada, em $t = 0$, a corrente começa a fluir, a partir do valor $I(t = 0) = 0$. Impondo essas duas condições às eqs. (2.24) e (2.27), obtemos

Neste caso, as condições iniciais são

$$Q(t = 0) = Q_0 \rightarrow Q_0 = \rho \cos \theta, \quad (2.28)$$

$$I(t = 0) = 0 \rightarrow -\alpha \cos \theta + \nu \sin \theta = 0. \quad (2.29)$$

A solução desse sistema fornece

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\alpha}{\nu} \quad (2.30)$$

$$\rho = Q_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\nu} \quad (2.31)$$

Assim, para este circuito sem fonte, a carga Q no capacitor e a corrente I são descritas, para $t \geq 0$, por

$$Q(t) = Q_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\nu} e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta), \quad (2.32)$$

$$I(t) = -Q_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\nu} e^{-\alpha t} [\alpha \cos(\nu t - \theta) - \nu \sin(\nu t - \theta)], \quad (2.33)$$

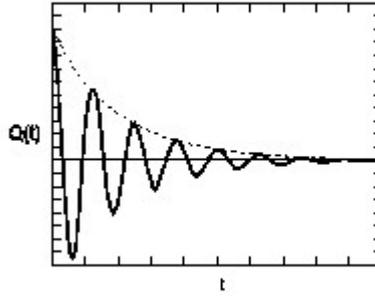


Figura 2.2: A carga Q , em função do tempo t , no capacitor de um circuito RLC série, sem fonte, no caso em que $R^2 < 4L/C$

sendo α , ν e θ dados pelas eqs. (2.25), (2.26) e (2.30)

A expressão da carga envolve um fator que oscila, dado por $\cos(\nu t - \theta)$, multiplicado por uma “amplitude” da forma $Q_0(\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}/\nu)e^{\alpha t}$, que diminui exponencialmente com o tempo. Esta é a expressão característica de um oscilador amortecido, cujo gráfico é mostrado na fig. 2.2. A oscilação está relacionada à transferência de energia que ocorre entre o capacitor e o indutor e o amortecimento é devido à dissipação de energia no resistor. Em um circuito LC sem resistência ocorre, como veremos adiante, apenas oscilação, sem amortecimento. Fisicamente, o caso $\Delta < 0$ corresponde a uma situação onde a resistência R é relativamente pequena, ou seja, onde há pouca dissipação de energia eletromagnética. O fator de amortecimento, $\alpha = -R/2L$, é proporcional à resistência do circuito. Assim, quanto maior for essa resistência, mais rápida será a dissipação de energia e, conseqüentemente, maior será o amortecimento.

Por outro lado, a carga e a corrente oscilam com uma frequência ν que, mantidos L e C fixos, decresce com o aumento da resistência. Quando R é apenas um pouco menor que $\sqrt{4L/C}$, a frequência é muito pequena e o sistema tende a ser apenas amortecido.

O tipo de comportamento do circuito para $\Delta < 0$ é chamado de amortecimento sub crítico.

• **caso 1b:** $R^2 > \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta > 0$

Neste caso, a dissipação de energia é grande e a solução geral para $q(t)$, dada pela expressão (2.16), pode ser escrita como

$$q(t) = A e^{-\beta t} + B e^{\gamma t}, \quad (2.34)$$

onde β e γ são constantes positivas, dadas por

$$\beta = \frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2L}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2L}. \quad (2.35)$$

Assim, a carga $Q(t)$ no capacitor e a corrente $I(t)$ no circuito são descritas pelas classes genéricas de funções

$$Q(t) = CV + A e^{-\beta t} + B e^{-\gamma t} , \quad (2.36)$$

$$I(t) = -A \beta e^{-\beta t} - B \gamma e^{-\gamma t} , \quad (2.37)$$

sendo A e B constantes quaisquer .

• exemplo 1b:

Desejamos determinar as funções que descrevem a carga e a corrente em função do tempo, para um circuito no qual não há gerador e cujo capacitor está inicialmente carregado com carga Q_0 , supondo que a chave seja fechada no instante $t = 0$.

Neste caso, as condições iniciais são $Q(t = 0) = Q_0$ e $I(t = 0) = 0$. Portanto

$$Q(t = 0) = Q_0 \rightarrow A + B = Q_0 , \quad (2.38)$$

$$I(t = 0) = 0 \rightarrow A \beta + B \gamma = 0 . \quad (2.39)$$

o que leva a

$$A = \gamma Q_0 / (\gamma - \beta) , \quad (2.40)$$

$$B = -\beta Q_0 / (\gamma - \beta) . \quad (2.41)$$

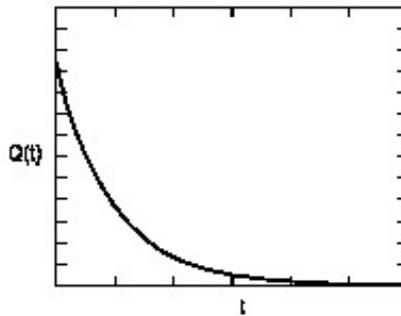


Figura 2.3: A carga Q , em função do tempo t , no capacitor de um circuito RLC série sem fonte no caso em que $R^2 > 4L/C$

As funções desejadas são, portanto,

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\gamma - \beta} (\gamma e^{-\beta t} - \beta e^{-\gamma t}) , \quad (2.42)$$

$$I(t) = \frac{\beta \gamma Q_0}{\gamma - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}) , \quad (2.43)$$

com β e γ dados pelas eqs. (2.34) e (2.35). Como as constantes β e γ têm valores positivos, a carga Q e a corrente I decrescem exponencialmente com o tempo, como mostra a Fig. 2.3. Como a resistência é grande, a dissipação ocorre rapidamente. Sistemas nesta condição são chamados de superamortecidos.

• **caso 2:** $R^2 = \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta = 0$

Quando o discriminante é nulo, a solução geral da equação diferencial (2.16) tem a forma

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}, \quad (2.44)$$

sendo

$$\alpha \equiv \frac{R}{2L}. \quad (2.45)$$

Assim, as soluções genéricas do problema são

$$Q(t) = CV + (A + Bt)e^{-\alpha t}, \quad (2.46)$$

$$I(t) = [B + \alpha(A + Bt)]e^{-\alpha t}. \quad (2.47)$$

• **exemplo 2:**

Consideramos, novamente, o problema de encontrar $Q(t)$ e $I(t)$ para um circuito sem fonte, com um capacitor carregado com carga Q_0 , cuja chave foi fechada no instante $t = 0$. Essa situação corresponde às condições iniciais $Q(t = 0) = Q_0$, $I(t = 0) = 0$. Assim,

$$Q(t = 0) = Q_0 \rightarrow A = Q_0 \quad (2.48)$$

$$I(t = 0) = 0 \rightarrow B = -\alpha Q_0 \quad (2.49)$$

e, portanto,

$$Q(t) = Q_0 \left(1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{-(R/2L)t}, \quad (2.50)$$

$$I(t) = -Q_0 \left(\frac{R}{2L} \right)^2 e^{-(R/2L)t}. \quad (2.51)$$

Neste caso, não há oscilação e a carga no capacitor decresce continuamente, tendendo a zero após um tempo grande, como mostra a figura 2.4.

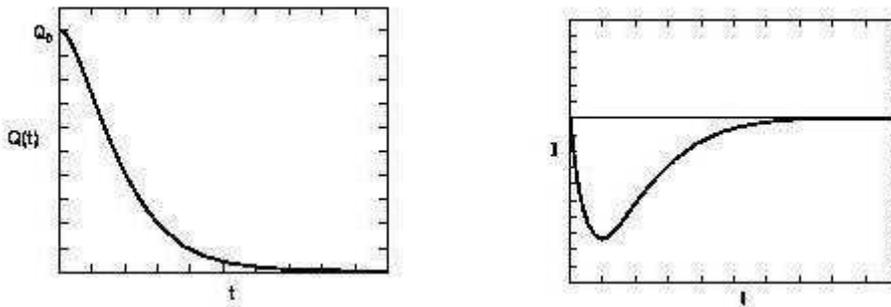


Figura 2.4: a) A carga Q no capacitor e b) a corrente I , em função do tempo t , para um circuito RLC série, sem fonte, no caso em que $R^2 = 4L/C$.

• exercícios:

1. Mostre que a função $Q(t)$, dada pelas eqs. (2.9) e (2.22), satisfaz a equação diferencial (2.8) para quaisquer valores de ρ e θ ;

2. Mostre que a função $I(t)$, dada pela eq. (2.32), pode ser reescrita como

$$I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{LC - R^2C^2/4}} e^{-\alpha t} \text{sen } \nu t.$$

3. Mostre que a constante β , dada pela eq. (2.34), é positiva.

4. Mostre que a função $Q(t)$, dada pelas eqs. (2.9) e (2.46), satisfaz a equação diferencial do circuito para quaisquer valores de A e B .

5. É dado um circuito RLC , ligado a uma fonte de tensão V , constante, como na figura 2.1. Supondo que o capacitor esteja descarregado e que a chave seja fechada no instante $t = 0$,

a) determine as funções que descrevem a carga no capacitor e a corrente no circuito em função do tempo;

b) o que acontece com o sistema para tempos muito grandes?

6. Para a situação descrita no exercício anterior, determine, para tempos muito grandes,

a) a energia acumulada no capacitor;

b) a energia acumulada no indutor;

c) a energia dissipada no resistor;

d) a energia fornecida pela fonte.

Sugestão: procure as integrais relevantes em uma tabela; ou, o que é mais fácil e elegante, efetue as integrais usando o resultado $\text{sen } \phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i$.

• respostas

5. a) $Q(t) = CV [1 - e^{-\alpha t} (\cos \nu t + \frac{\alpha}{\nu} \sin \nu t)]$, $I(t) = \frac{V}{L\nu} e^{-\alpha t} \sin \nu t$.

b) o capacitor fica carregado com carga $Q(t \rightarrow \infty) = CV$ e a corrente se anula.

6. a) $\frac{1}{2} CV^2$; b) zero; c) $\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{1}{2} CV^2$; d) $\int_0^\infty VI dt = CV^2$.

Capítulo 3

circuitos LC, RL, RC

Todos os circuitos eletromagnéticos reais apresentam efeitos resistivos, indutivos e capacitivos. Entretanto, em algumas situações particulares, um ou mais destes efeitos, por serem pouco significativos, podem ser ignorados. Nesta aula, estudamos alguns casos particulares, em que um dos elementos do circuito RLC em série pode ser desprezado.

• circuito LC

Um circuito RLC em série, com fonte de tensão constante e com uma resistência muito pequena, que pode ser ignorada, é descrito matematicamente, fazendo $R \rightarrow 0$ na equação (2.7). Temos, então

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = V. \quad (3.1)$$

A classe geral de soluções desta equação diferencial é dada por

$$Q(t) = CV + \rho \cos(\nu t - \theta) \quad (3.2)$$

e a frequência de oscilação ν pode ser obtida pela substituição da expressão (3.2) na equação diferencial (3.1). Assim,

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (3.3)$$

A corrente no circuito LC é dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\rho \nu \sin(\nu t - \theta). \quad (3.4)$$

Os resultados acima também podem ser determinados a partir das expressões para o circuito RLC estudado na aula anterior. Quando a resistência é nula, de acordo com

(2.10), o discriminante é um número negativo, dado por $\Delta = -4L/C$. Portanto, para um circuito LC , a frequência de oscilação, a carga do capacitor, a corrente, podem ser obtidas fazendo $R = 0$, respectivamente, nas expressões (2.17), (2.21) e (??).

• **exemplo 1:**

É dado um circuito LC , sem fonte de tensão, no qual existe uma chave aberta, e o capacitor está carregado com carga Q_0 , como representado na Fig. 3.1. No instante $t = 0$, a chave é fechada. O nosso objetivo é determinar os comportamentos de cargas, correntes, campos e energias desse circuito, em função do tempo.

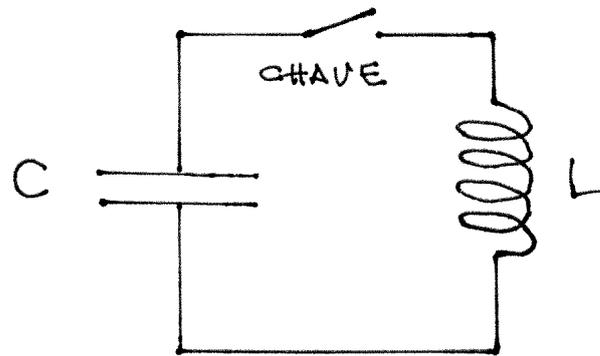


Figura 3.1: Esquema de um circuito LC sem fonte.

Estes resultados mostram que, num circuito LC , a carga e a corrente permanecem oscilando indefinidamente, com frequência $\nu = \sqrt{1/LC}$. Isso ocorre porque, se não há resistência, a energia, que estava inicialmente no capacitor, não tem como escapar do sistema. As eqs. (3.6) e (3.7) mostram, também, que carga e corrente estão fora de fase. A figura 3.2 mostra os comportamentos dessas grandezas neste circuito LC .

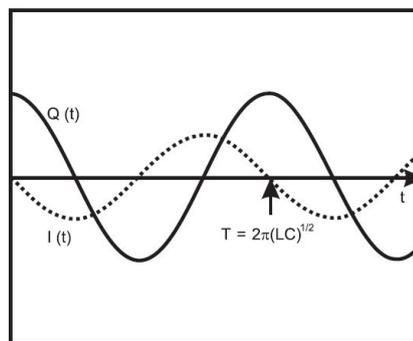


Figura 3.2: A carga $Q(t)$ no capacitor e a corrente $I(t)$ no circuito LC sem fonte

Como já foi enfatizado anteriormente, uma figura como a 3.1 **não** representa uma fotografia do circuito. Ela indica, numa linguagem conceitual, *que* o circuito é capaz de

armazenar energias em campos elétricos e magnéticos. Entretanto, ela não fornece nenhuma pista acerca dos lugares onde esses campos estão, já que ela não menciona as formas e dimensões dos vários componentes. Por exemplo, os acúmulos de campos ocorreriam em regiões diferentes se o capacitor fosse plano ou cilíndrico ou se o indutor fosse cilíndrico ou toroidal.

Em geral, um circuito é eletricamente neutro, já que o número total de íons positivos no seu interior é igual ao número total de elétrons livres. Os íons estão fixos em estruturas bastante rígidas, enquanto que os elétrons livres podem ser empurrados de um lado para outro, por meio de campos elétricos externos. Por isso, em algumas situações excessos de elétrons livres podem aparecer nas superfícies do metal. Quando isso acontece, a neutralidade global do circuito faz com que excessos de cargas positivas apareçam, simultaneamente, em outras regiões da superfície metálica.

É algo desse tipo que acontece no circuito deste exemplo, antes de a chave ser fechada. A informação que o capacitor está inicialmente carregado com carga Q_0 significa que uma das superfícies do capacitor tem um excesso de elétrons que corresponde a uma carga total $-Q_0$ e a superfície oposta, uma falta de elétrons, que corresponde a uma carga total $+Q_0$. Essas cargas expostas dão origem a campos elétricos em torno delas. Esses campos são mais intensos na região entre as placas, mas existem também fora do capacitor, tanto no interior como no exterior dos demais fios metálicos do sistema. A chave aberta funciona como um segundo capacitor. Para nos convenceremos disso, basta lembrar que um capacitor corresponde a uma interrupção do circuito, onde cargas podem se acumular.

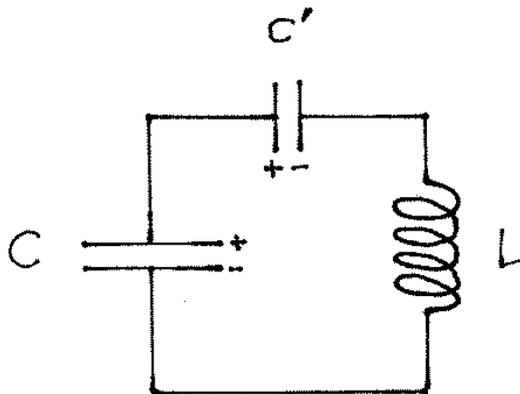


Figura 3.3: As energias armazenadas no capacitor (U_C), no indutor (U_L) e a energia total (U_T) de um oscilador LC

A chave aberta possui, portanto, uma capacitância C' , que depende das suas características geométricas. Assim, o circuito deste exemplo com a chave aberta corresponde à situação mostrada na figura 3.3. Para desenhar a figura, escolhemos uma configuração de cargas para o capacitor C e ela determina a configuração de cargas da chave aberta. Como esses dois sistemas geram campos que tendem a mover os elétrons do fio em direções opostas o resultado é uma corrente nula. O fenômeno é intuitivo, mas a explicação, nem

tanto ...

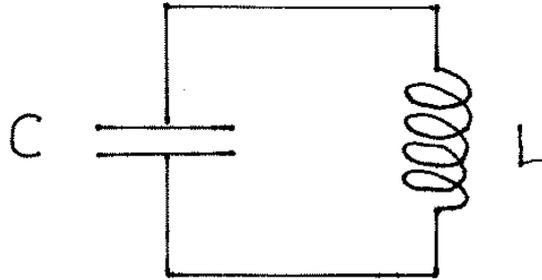


Figura 3.4: Esquema de um circuito LR com fonte de tensão constante

Quando a chave é fechada, temos a situação mostrada na figura 3.4, sendo que a carga no capacitor é, nesse instante, Q_0 . Essas cargas expostas criam campo elétrico em todo o espaço. Normalmente, não prestamos muita atenção aos campos existentes nas regiões externas ao capacitor, mas eles são muito importantes. A tendência do capacitor é começar a se descarregar e, para tanto, é preciso que *todos* os elétrons livres do circuito se ponham em movimento, mesmo os existentes no interior do fio que constitui o indutor ou dos que o conectam ao capacitor. É o campo elétrico existente fora do capacitor que, como um maestro de orquestra, passa a reger simultaneamente os movimentos de todos os elétrons livres do sistema, independentemente de onde eles estejam.

O descarregamento do capacitor requer necessariamente, devido à equação da continuidade, o surgimento de uma corrente nas partes metálicas do circuito. Essa corrente determina o aparecimento de campos magnéticos, descritos pela lei de Ampère. Como a corrente varia com o tempo, o mesmo acontece com o campo magnético e, de acordo com a lei de Faraday, aparecem novos campos elétricos, tanto no interior como no exterior do indutor. Esses campos também agem nos elétrons livres existentes no interior das partes metálicas do circuito. Por isso, as correntes no sistema resultam da competição entre dois campos elétricos de origens diferentes:

- o campo do capacitor \vec{E}_C , proporcional a Q ;
- o campo do indutor \vec{E}_{IND} , proporcional a dI/dt .

As condições iniciais para este circuito são $Q(t = 0) = Q_0$ e $I(t = 0) = 0$. Impondo estas condições às expressões (3.2) e (3.4) e lembrando que, neste caso, $V = 0$, obtemos

$$\rho = Q_0 \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad (3.5)$$

Assim, a carga no capacitor e a corrente no sistema são dadas por

$$Q(t) = Q_0 \cos(\nu t) , \quad (3.6)$$

$$I(t) = -Q_0 \nu \text{sen}(\nu t) . \quad (3.7)$$

Esses resultados permitem-nos calcular as energias U_C e U_L armazenadas, respectivamente, no capacitor e no indutor. Elas são dadas por

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\nu t), \quad (3.8)$$

$$U_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{LQ_0^2}{2} \nu^2 \sin^2(\nu t) = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \nu t. \quad (3.9)$$

A energia total U_T do sistema corresponde à soma das energias elétrica U_C e magnética U_L e vale

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_0^2}{2C}. \quad (3.10)$$

As expressões acima mostram que, inicialmente, toda a energia do sistema está no capacitor e, à medida que o tempo passa, há uma oscilação entre a energia elétrica armazenada no capacitor e a energia magnética, no indutor. A energia total do sistema permanece constante, com valor igual ao da energia inicial, armazenada no campo elétrico do capacitor. Este sistema é conservativo, pois não há resistência no circuito, e, portanto não pode ocorrer dissipação de energia. A figura 3.5 representa o comportamento das energias elétrica, magnética e total em um oscilador LC , em função do tempo.

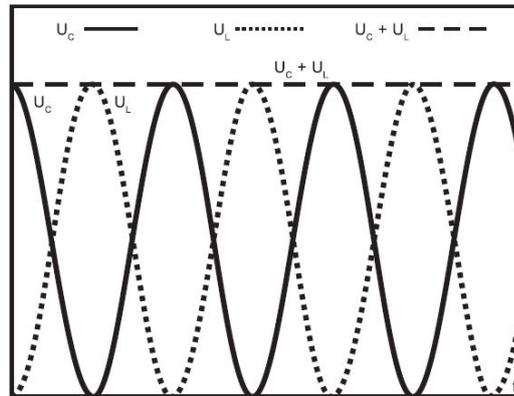


Figura 3.5: As energias armazenadas no capacitor (U_C), no indutor (U_L) e a energia total (U_T) de um oscilador LC

• circuito RL

Fisicamente, um capacitor pode ser eliminado de um circuito colocando “em curto” os dois condutores que o compõem. Nesta situação, a capacitância C passa a ter valor infinito. Portanto, a eliminação do capacitor do circuito RLC é feita tomando o limite $C \rightarrow \infty$ (e não $C \rightarrow 0!$) na equação (2.7), para o circuito RLC . A equação diferencial do circuito RL é, então dada por

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} = V. \quad (3.11)$$

Para este sistema, $Q(t)$ deixa de ter o significado de carga no capacitor, como nos casos anteriores, e o que tem sentido físico é a corrente dQ/dt no circuito. É conveniente, por isso, reescrever a equação (3.11) como

$$\frac{L}{R} \frac{dI}{dt} + I = \frac{V}{R}. \quad (3.12)$$

Como estamos tratando do caso em que V é constante, é possível, através de uma mudança de variável, chegarmos a uma equação diferencial homogênea. Para tanto, definimos

$$i \equiv I - \frac{V}{R} \quad (3.13)$$

e obtemos

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0. \quad (3.14)$$

A classe de soluções dessa equação é dada por

$$i(t) = A e^{-\alpha t} \quad (3.15)$$

onde

$$\alpha = R/L.$$

Assim, a corrente em um circuito RL , com fonte de tensão constante, é escrita como

$$I(t) = \frac{V}{R} + A e^{-\alpha t}. \quad (3.16)$$

sendo a constante A determinada pela condição inicial do problema.

• exemplo 2:

Um resistor R e um indutor L estão ligados em série a uma fonte de tensão constante V , como mostra a fig. 3.6. O objetivo deste exemplo é determinar a corrente no circuito e os fluxos de energia em função do tempo, supondo que a chave tenha sido fechada no instante $t = 0$.

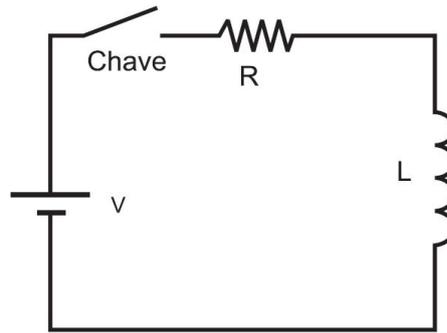


Figura 3.6: Esquema de um circuito LR com fonte de tensão constante

Para este circuito, a condição inicial é $I(t = 0) = 0$. Aplicando-a à eq.(38.15), concluímos que $A = -V/R$.

Assim, a corrente neste circuito RL é dada por

$$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) . \quad (3.17)$$

A potência P_V fornecida ao sistema pela fonte de tensão é

$$P_V = VI(t) = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (3.18)$$

e a potência P_R dissipada no resistor vale

$$P_R = RI^2(t) = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 . \quad (3.19)$$

Num dado instante a energia armazenada no indutor é dada por

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L (1 - e^{-Rt/L})^2 \quad (3.20)$$

e corresponde à potência

$$P_L = \frac{dU_L}{dt} = L I \frac{dI}{dt} = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-Rt/L}) e^{-Rt/L} . \quad (3.21)$$

Para tempos muito grandes, o fator $e^{-Rt/L} \rightarrow 0$ e a corrente tende a um valor constante, dado por $I(\infty) = V/R$. Nesta situação, as potências P_V e P_R tornam-se iguais, toda a energia fornecida pela fonte é dissipada pelo resistor e o sistema funciona como se o indutor não existisse. Esses resultados indicam que o papel do indutor é mais importante nos instantes imediatamente posteriores ao fechamento da chave, pois é ele o responsável pelo fato de a corrente crescer continuamente a partir do valor inicial nulo.

• circuito RC

Quando o efeito indutivo de um circuito RLC , com fonte de tensão constante, é muito pequeno, podemos fazer o limite $L \rightarrow 0$ para a equação diferencial (2.7) e obtemos

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V. \quad (3.22)$$

A sua solução geral é dada por

$$Q(t) = CV + A e^{-t/RC}, \quad (3.23)$$

onde A é uma constante determinada pela condição inicial do circuito.

Este resultado também pode ser obtido a partir da solução encontrada na aula anterior, para o caso do circuito RLC com discriminante $\Delta = R^2 - 4L/C$ positivo. Para tanto, fazemos o limite $L \rightarrow 0$ da expressão (2.32) reproduzida a seguir:

$$Q(t) = CV + A e^{-\beta t} + B e^{-\gamma t},$$

com

$$\beta = \frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

No limite $L \rightarrow 0$, obtemos

$$\beta = \left(\frac{R}{2L} \right) \left(1 - \sqrt{1 - 4L/R^2C} \right) \rightarrow \frac{1}{RC}, \quad (3.24)$$

$$\gamma = \left(\frac{R}{2L} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 4L/R^2C} \right) \rightarrow \frac{R}{L} \rightarrow \infty, \quad (3.25)$$

onde utilizamos o resultado proveniente da expansão em série de Taylor $(1-\epsilon)^{1/2} \approx 1-\epsilon/2$, válido para $\epsilon \ll 1$.

Assim, a carga e a corrente neste circuito são dados por

$$Q(t) = CV + A e^{-t/RC}, \quad (3.26)$$

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{A}{RC} e^{-t/RC}. \quad (3.27)$$

• exemplo 3:

É dado um circuito RC alimentado por uma bateria, como mostra a fig. 3.7. Supondo que o capacitor esteja descarregado e que no instante $t = 0$ a chave seja ligada, desejamos determinar, em função do tempo, a carga no capacitor, a corrente no circuito e os fluxos de energia.

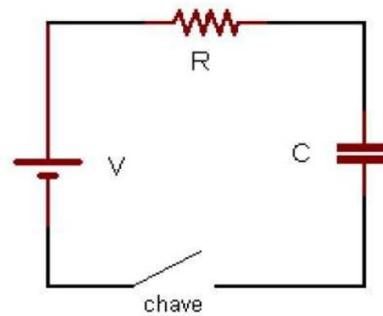


Figura 3.7: Esquema de um circuito RC com fonte de tensão constante

A condição inicial para este problema é $Q(t = 0) = 0$. Aplicando-a na eq.(3.23), obtemos $A = -CV$, o que nos leva a

$$Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC}). \quad (3.28)$$

A corrente é dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/RC}. \quad (3.29)$$

Este resultado mostra que, se a indutância for muito pequena, a corrente "pula" imediatamente, do valor $I = 0$ para $I = V/R$, no instante em que a chave é ligada. A partir daí, a carga no capacitor cresce continuamente, até atingir o valor $Q = CV$, para o qual o sistema se estabiliza. Nessa situação, a corrente se torna nula. Os gráficos das funções $Q(t)$ e $I(t)$ estão apresentados, respectivamente nas figuras 3.8a e 3.8b.

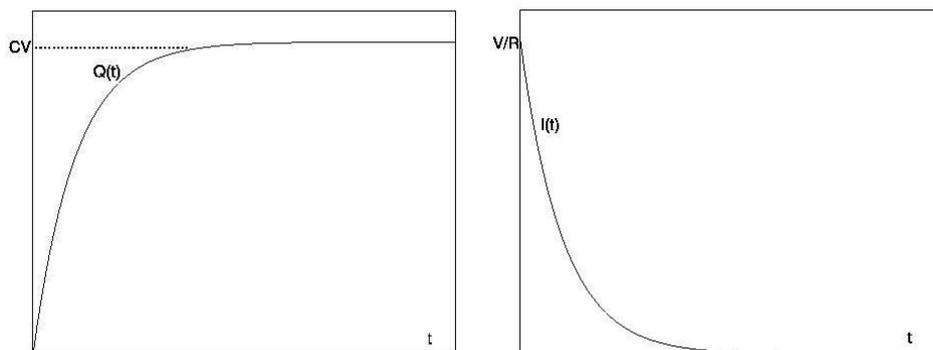


Figura 3.8: a) a carga Q e b) a corrente I de um circuito RC com fonte de tensão constante V .

A energia fornecida pela bateria, num instante genérico t , é dada por

$$U_V = \int_0^t VI(t)dt = \int_0^t \frac{V^2}{R} e^{-t/RC} dt = CV^2 (1 - e^{-t/RC}) \quad (3.30)$$

e a energia dissipada no resistor vale

$$U_R = \int_0^t RI^2(t)dt = \int_0^t \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{CV^2}{2} (1 - e^{-2t/RC}). \quad (3.31)$$

A energia armazenada no capacitor no instante t é

$$U_C = \frac{Q^2(t)}{2} = \frac{CV^2}{2} (1 - e^{-t/RC})^2. \quad (3.32)$$

A partir das eqs.(3.30 - 3.32), podemos verificar explicitamente que a relação $U_V = U_R + U_C$ é válida para qualquer valor de t . Para tempos muito grandes, metade da energia fornecida pela bateria é dissipada pelo resistor e a outra metade fica armazenada no capacitor.

• exercícios

1. No caso do circuito LC , a função $Q(t)$, dada pela eq.(3.6), assume, alternadamente, valores positivos e negativos. Qual o significado de um valor negativo para $Q(t)$?
2. Do ponto de vista físico, o que mudaria qualitativamente no comportamento do circuito LC se nele fosse introduzida uma pequena resistência?
3. Mostre que a grandeza $T = 2\pi\sqrt{LC}$ tem dimensão de tempo. Em seguida, faça desenhos do circuito LC indicando a carga, a corrente e as energias elétrica e magnética para os instantes $t = 0$, $t = T/8$, $t = T/4$, $t = 3T/8$, $t = T/2$, $t = 5T/8$, $t = 3T/2$ e $t = 7T/4$.
4. Considere um circuito LC . O capacitor é formado por duas placas metálicas planas, circulares de raio a , paralelas, separadas por uma distância $d \ll a$, entre as quais há vácuo. O indutor é um solenóide cilíndrico, muito longo, de raio b e comprimento $c \gg b$, com n espiras por unidade de comprimento. Supondo que o circuito possua uma chave, fechada no instante $t = 0$, e que o capacitor esteja inicialmente carregado com carga Q_0 , como no exemplo 1, calcule, em função do tempo:
 - a) o campo elétrico no interior do capacitor;
 - b) a energia elétrica acumulada no interior do capacitor;
 - c) a capacitância C do capacitor;
 - d) o campo magnético no interior do indutor;
 - e) a energia magnética acumulada no interior do indutor;
 - f) a auto-indutância L do indutor;
 - g) a frequência ν de oscilação do circuito;
 - h) mostre que a dimensão de ν é $[tempo]^{-1}$.
5. No caso do circuito RL , discutido no exemplo 2, faça um gráfico da corrente $I(t)$ no circuito e explique porque, para tempos suficientemente grandes, a corrente $I(t)$ tende ao valor constante $I = V/R$.

6. No caso de um circuito RC , explique porque, decorrido um tempo muito grande, a carga no capacitor tende ao valor constante $Q = CV$ e a corrente no circuito tende a zero.

7. Considere o circuito RC discutido no exemplo 3, com o capacitor de placas circulares descrito no exercício 4. Determine, em função do tempo:

- o campo elétrico E_C no interior do capacitor;
- o campo elétrico E_R no interior do resistor, supondo que ele seja constituído por um fio metálico, de comprimento l , seção transversal S e resistividade ρ ;
- os valores de E_C e E_R para tempos muito grandes e interprete-os fisicamente;
- por que o campo E_R no interior do resistor diminui com o tempo, se a ação da bateria é sempre a mesma?

8. Qual é o procedimento que permite eliminar o efeito capacitivo de um circuito RC :

- do ponto de vista físico?
- do ponto de vista matemático?

• respostas

$$4. \text{ a) } E_C = \frac{Q_0}{\pi a^2 \epsilon_0} \cos(\nu t) \quad \text{b) } U_C = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{\pi a^2 \epsilon_0} \right] Q_0^2 \cos^2(\nu t) \quad \text{c) } C = \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{d}$$

$$\text{d) } B_L = -\mu_0 n \nu Q_0 \sin(\nu t) \quad \text{e) } U_B = \frac{1}{2} \left[\mu_0 n^2 \pi b^2 c \right] \nu Q_0 \sin^2(\nu t)$$

$$\text{f) } L = \mu_0 n^2 \pi b^2 c \quad \text{g) } \nu = \frac{1}{\pi n ab} \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 C}}$$

$$7. \text{ a) } E_C = \frac{CV}{\pi a^2 \epsilon_0} \left(1 - e^{-t/RC} \right) = \frac{V}{d} \left(1 - e^{-t/RC} \right) \quad \text{b) } E_R = \rho j = \frac{\rho V}{SR} e^{-t/RC} = \frac{V}{l} e^{-t/RC}$$

8. a) juntar uma das placas à outra;

b) matematicamente fazendo $C \rightarrow \infty$. Neste limite, para qualquer t finito, temos $e^{-t/RC} \rightarrow 0$. Nesta situação, a carga $Q(t)$ do capacitor é nula e a corrente $I(t)$ é igual a V/R , para qualquer instante. Este caso, corresponde a um resistor ligado a uma fonte de tensão constante V .

Capítulo 4

circuitos com corrente alternada

Nesta aula, estudamos o caso de um cricuito RLC em série, ligado a uma fonte cuja tensão varia com o tempo. Consideramos apenas o caso em que a função $V(t)$ é dada por

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \quad (4.1)$$

e oscila, portanto, com freqüência bem definida. Esta escolha não envolve perda de generalidade no tratamento do problema pois, segundo Fourier, uma função dependente do tempo qualquer $F(t)$ pode sempre ser expressa na forma

$$F(t) = \int_0^\infty d\omega [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \text{sen } \omega t], \quad (4.2)$$

onde $a(\omega)$ e $b(\omega)$ são funções que representam as percentagens de cada freqüência. Assim, por exemplo, as duas funções mostradas na figura 4.1 podem ser representadas pela eq.(4.1), desde que as funções $a(\omega)$ e $b(\omega)$ sejam adequadamente escolhidas para cada caso.

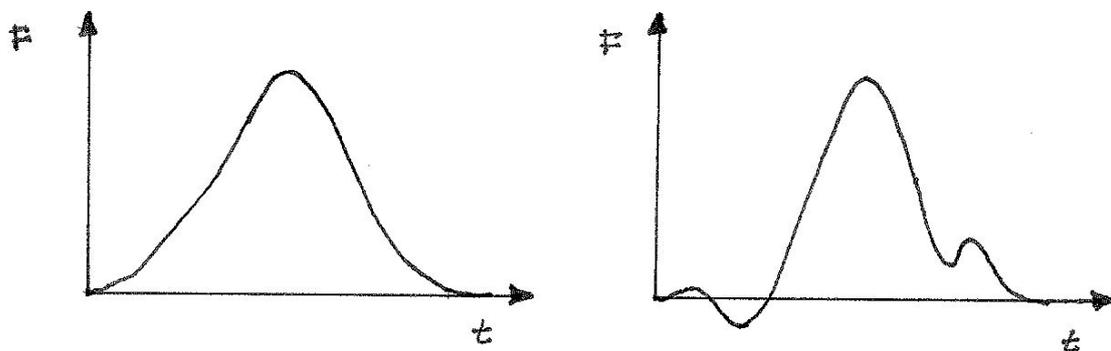


Figura 4.1:

• circuito RLC em série

Consideramos o circuito mostrado na figura 4.2, cujo comportamento temporal é regido pela equação diferencial

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad (4.3)$$

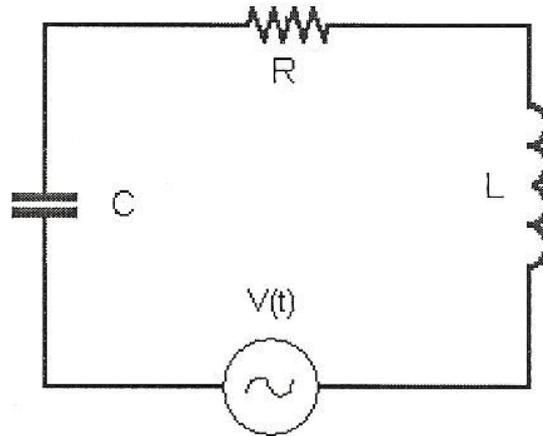


Figura 4.2: Circuito RLC série ligado a uma fonte de tensão que varia com o tempo.

Esta equação diferencial é não homogênea, já que o seu lado direito é não nulo. Da matemática, sabe-se que a solução geral de uma equação diferencial desse tipo é dada pela soma da solução geral da equação homogênea (H) com uma solução particular da equação não homogênea (NH). Por isso, representamos a solução geral por

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_{NH}(t). \quad (4.4)$$

Usando esta decomposição, reescrevemos a equação diferencial do sistema como

$$\left[L \frac{d^2 Q_H}{dt^2} + R \frac{dQ_H}{dt} + \frac{Q_H}{C} \right] + \left\{ L \frac{d^2 Q_{NH}}{dt^2} + R \frac{dQ_{NH}}{dt} + \frac{Q_{NH}}{C} \right\} = [0] + \{V_0 \cos \omega t\}. \quad (4.5)$$

Esta expressão mostra que a equação diferencial do circuito pode ser considerada como a soma de duas equações diferenciais. A primeira delas, representada por $[\dots]$, envolve apenas Q_H e corresponde a um circuito sem fonte externa, estudado nas aulas anteriores. A outra equação representada por $\{\dots\}$, é o objeto desta aula.

• oscilações forçadas

Tal como está escrita, a equação (4.5) não contém nenhuma informação acerca do instante em que a fonte externa foi acionada e por quanto tempo ela continuará atuando.

Alguém muito ingênuo poderia pensar que ela já operava antes do Big-Bang... Na prática, a equação (4.5) é utilizada para descrever fontes que permanecem ligadas por tempos longos comparado a outros tempos característicos do sistema. Quando um sistema qualquer, seja ele mecânico ou elétrico, oscila sob a ação de agente externo, com frequência bem definida, falamos em oscilações forçadas. Uma característica importante das oscilações forçadas é que, para tempos longos, elas ocorrem sempre com a frequência da fonte externa. Os comportamentos das funções $Q(t)$ para dois osciladores com valores de R , L e C diferentes, mas sujeitos à mesma fonte de tensão, são exemplificados na figura 4.3.

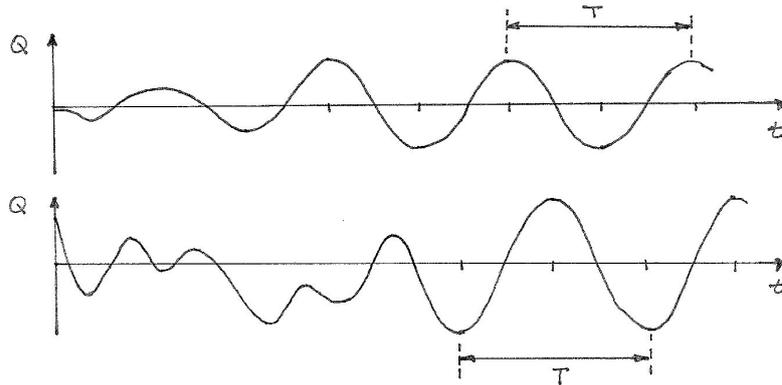


Figura 4.3:

No caso do circuito da figura 4.2, a função $Q_H(t)$ somente é importante durante um período relativamente curto de tempo e, por isso, é chamada de **solução transitória**. De fato, as expressões obtidas na aula 2 mostram que, quando a resistência é não nula, $Q_H(t)$ é proporcional a $e^{-tR/2L}$, o que faz com que a solução homogênea tenda a zero para tempos grandes. Como indica essa exponencial, o tempo de amortecimento total do sistema será tão menor quanto maior for a resistência. A função $Q_{NH}(t)$, por outro lado, corresponde à solução **estacionária**, já que só ela sobrevive depois de muito tempo que o sistema foi ligado.

Assim, para $t \gg 2L/R$

$$Q_H(t) \rightarrow 0,$$

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_{NH}(t) \rightarrow Q_{NH}(t).$$

• a solução da equação não homogênea

A equação não homogênea é escrita como

$$L \frac{d^2 Q_{NH}}{dt^2} + R \frac{dQ_{NH}}{dt} + \frac{Q_{NH}}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (4.6)$$

Como a fonte externa impõe a sua frequência de oscilação ao circuito, a forma geral da solução não homogênea é

$$Q_{NH}(t) = Q_0 \cos(\omega t - \phi), \quad (4.7)$$

onde os valores das constantes Q_0 e ϕ podem ser determinados impondo que $Q_{NH}(t)$ obedeça, a eq.(4.6).

Fazendo isso, obtemos

$$Q_0 \left[\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) \cos(\omega t - \phi) - R\omega \sin(\omega t - \phi) \right] = V_0 \cos \omega t. \quad (4.8)$$

Expandindo as funções trigonométricas, temos

$$\begin{aligned} Q_0 \left\{ \left[\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) \cos \phi + R\omega \sin \phi \right] - V_0 \right\} (\cos \omega t) \\ + Q_0 \left[\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) \sin \phi - R\omega \cos \phi \right] (\sin \omega t) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para que esta equação possa ser verdadeira para qualquer valor de t , é preciso que os coeficientes do $(\cos \omega t)$ e do $(\sin \omega t)$ sejam nulos independentemente. O fato de o coeficiente do $(\sin \omega t)$ ser nulo determina o valor de ϕ , através da sua tangente

$$\tan \phi = -\frac{R\omega}{(L\omega^2 - \frac{1}{C})}. \quad (4.10)$$

As relações trigonométricas usuais permitem-nos escrever

$$\sin \phi = \frac{R\omega}{[(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + (R\omega)^2]^{1/2}}, \quad (4.11)$$

$$\cos \phi = \frac{(L\omega^2 - \frac{1}{C})}{[(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + (R\omega)^2]^{1/2}}. \quad (4.12)$$

Usando estes resultados na equação que iguala o coeficiente do $(\cos \omega t)$ a zero, determinamos a amplitude da solução não homogênea

$$Q_0 = \frac{V_0}{[(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + (R\omega)^2]^{1/2}}. \quad (4.13)$$

Estes resultados especificam completamente a solução da equação não homogênea em função das características do circuito.

Para tornar mais transparente o conteúdo físico desses resultados, é conveniente escrevê-los em termos de ν , a chamada frequência “natural” do sistema. Esta é a frequência na qual este sistema oscilaria caso não houvesse resistência ($R=0$) e a fonte externa estivesse desligada ($V_0 = 0$). Nesta situação temos o circuito LC, discutido na aula 3, cuja frequência de oscilação é $\nu = \sqrt{1/LC}$. A capacitância C pode ser expressa em função de L e ν como $1/C = L\nu^2$ e as eqs.(4.10) e (4.13) podem ser reescritas como

$$\tan \phi = -\frac{R\omega}{[L(\omega^2 - \nu^2)]}, \quad (4.14)$$

$$Q_0 = \frac{V_0}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{1/2}}. \quad (4.15)$$

Em resumo, a solução geral $Q(t)$ do circuito RLC com fonte externa oscilante é dada pela eq.(4.4), sendo que a componente $Q_H(t)$ depende das condições iniciais do sistema e foi discutida nas aulas 2 e 3. Essa função tem vida efêmera e torna-se constante para tempos grandes. A componente $Q_{NH}(t)$, por outro lado, descreve a situação estacionária, existente depois de muito tempo depois de o sistema ter sido ligado. Ela é determinada pela eq.(4.7), onde ω é a frequência da fonte externa e as constantes Q_0 e ϕ são dadas pelas eqs.(4.10) e (4.13) ou, alternativamente, por (4.14) e (4.15).

Estes dois últimos resultados são muito interessantes, pois eles indicam que o comportamento do sistema resulta de um compromisso entre duas frequências diferentes: ν , a frequência própria de oscilação do sistema e ω , a frequência da fonte externa. Usando uma linguagem livre, eles representam um compromisso entre a “vontade” da fonte externa, que dá as ordens, e a “vontade” do circuito, que tem de obedecer estas ordens.

A corrente no sistema é

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = I_H(t) + I_{NH}(t), \quad (4.16)$$

sendo $I_H(t)$ as correntes discutidas nas aulas 2 e 3 e

$$I_{NH}(t) = \frac{dQ_{NH}(t)}{dt} = -Q_0 \omega \text{sen}(\omega t - \phi). \quad (4.17)$$

• exemplo 1:

Estudamos os comportamentos da carga, da corrente e das várias formas de energia do regime estacionário de um circuito RLC em série, alimentado por uma fonte de tensão $V = V_0 \cos \omega t$. Para fixar idéias, consideremos o caso $\omega < \nu$.

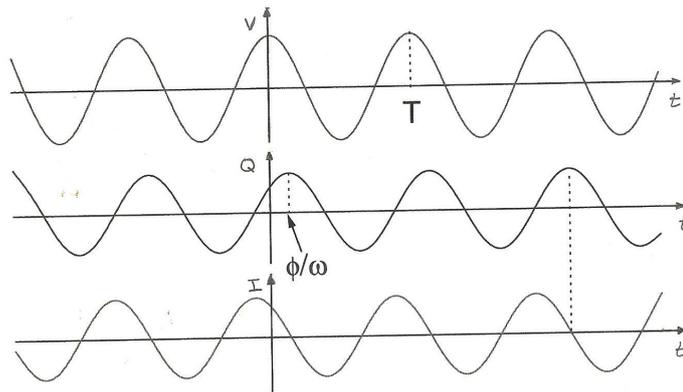


Figura 4.4:

A tensão $V(t)$ tem período $T = 2\pi/\omega$ e está representada no alto da figura 4.4. A diferença de fase ϕ entre as oscilações da fonte e da carga é dada pela eq.(4.14). Como $\omega < \nu$, temos $\tan \phi > 0$, o que corresponde a $0 < \phi < \pi/2$.

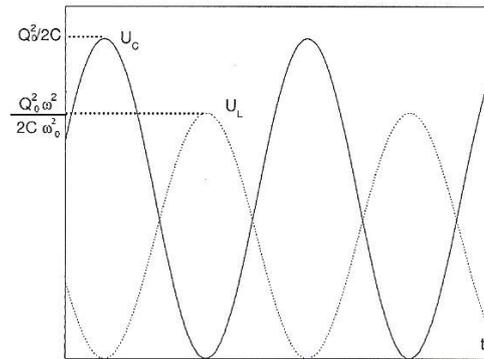


Figura 4.5: Energias armazenadas no capacitor (U_C) e no indutor (U_L).

Os comportamentos da carga e da corrente dadas pelas eqs.(4.15) e (4.17), também estão indicados na figura 4.4. É importante notar que, nesta figura, nenhuma das curvas está em fase com as outras duas. A diferença de fase entre $Q(t)$ e $I(t)$ é fácil de ser compreendida, pois é devida à derivação efetuada na eq.(4.17). A diferença de fase entre $V(t)$ e $Q(t)$, por outro lado, tem origem dinâmica, como indica a eq.(4.14), que depende da frequência ω da fonte, através do fator $R\omega$ no numerador e de $[L(\omega^2 - \nu^2)]$, no denominador. A influência deste último é maior, pois ele pode se anular.

As energias no capacitor U_C e no indutor U_L são dadas por

$$U_C(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t - \phi), \quad (4.18)$$

$$U_L(t) = \frac{L I(t)^2}{2} = \frac{Q_0^2 \omega^2}{2C \nu^2} \sin^2(\omega t - \phi), \quad (4.19)$$

e mostradas na figura 4.5.

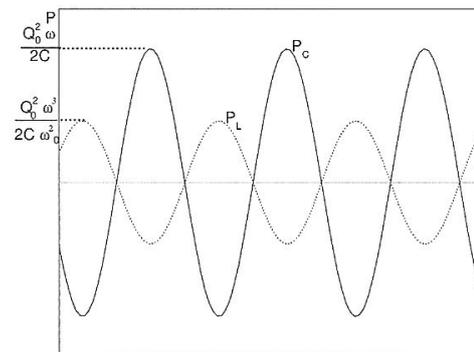


Figura 4.6: Potências fornecidas ao capacitor (P_C) e ao indutor (P_L).

As potências fornecidas ao capacitor e ao indutor são obtidas derivando essas energias,

e obtemos

$$P_C = \frac{dU_C}{dt} = -\frac{Q_0^2}{C} \omega \cos(\omega t - \phi) \sin(\omega t - \phi) = \frac{-Q_0^2}{2C} \omega \sin[2(\omega t - \phi)], \quad (4.20)$$

$$P_L = \frac{dU_L}{dt} = \frac{Q_0^2}{C} \frac{\omega^2}{\nu^2} \sin(\omega t - \phi) \cos(\omega t - \phi) = \frac{Q_0^2}{2C} \frac{\omega^2}{\nu^2} \sin[2(\omega t - \phi)]. \quad (4.21)$$

essas funções são mostradas na figura 4.6.

A potência dissipada no resistor vale

$$P_R = RI^2(t) = RQ_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) \quad (4.22)$$

e a potência fornecida ao circuito pela fonte externa é dada por

$$P_V = V(t)I(t) = V_0 \cos \omega t (-Q_0 \omega) \sin(\omega t - \phi). \quad (4.23)$$

Ambas são mostradas na figura 4.7.

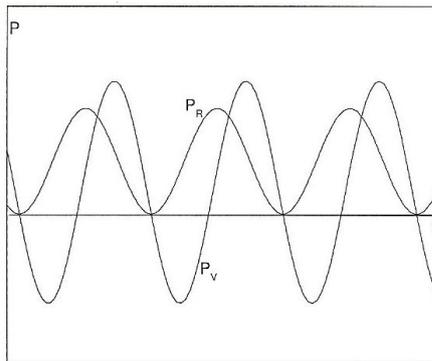


Figura 4.7: Potência P_V fornecida pela fonte e potência P_R dissipada no resistor.

• exercícios:

1. Mostre que, para um circuito RLC em série com uma fonte de tensão $V = V_0 \cos \omega t$, vale a relação $P_V = P_R + P_C + P_L$ para as potências associadas aos vários componentes.
2. Qual o significado de valores negativos da potência P_V fornecida pela fonte, mostrados na figura 4.7?

Capítulo 5

circuitos com corrente alternada: ressonância

• um diálogo entre duas frequências

Na aula 4, mostramos que a carga $Q(t)$ no capacitor de um circuito RLC, alimentado por uma fonte de tensão do tipo $V(t) = V_0 \cos \omega t$, é dada pela soma de dois termos

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_{NH}(t) ,$$

onde $Q_H(t)$ descreve o regime transitório e $Q_{NH}(t)$, o regime estacionário. Em circuitos reais, a solução $Q_H(t)$ tende a zero rapidamente após o sistema ser acionado e, a partir daí, apenas $Q_{NH}(t)$ sobrevive. Essa componente tem a forma geral

$$Q_{NH}(t) = Q_0 \cos(\omega t - \phi) , \quad (5.1)$$

onde

$$Q_0 = \frac{V_0}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2 \omega^2]^{1/2}} \quad (5.2)$$

$$\tan \phi = -\frac{R\omega}{L(\omega^2 - \nu^2)} , \quad (5.3)$$

sendo ν a frequência natural do sistema, dada por $\nu = \sqrt{1/LC}$. A corrente no regime estacionário é

$$I_{NH}(t) = -I_0 \sin(\omega t - \phi) , \quad (5.4)$$

com $I_0 = \omega Q_0$.

Esses resultados indicam que as amplitudes Q_0 e I_0 , da carga e da corrente, e a fase ϕ , entre a carga e a fonte, dependem de duas frequências diferentes. Uma delas é ω ,

que representa a frequência com a qual a fonte externa oscila e a outra é ν , determinada pelas características do sistema e que corresponde à frequência natural de oscilação de um circuito LC .

Em linguagem figurada, podemos pensar que a fonte externa dá "ordens" ao sistema. O sistema, por sua vez, precisa respeitar as suas características para poder obedecer a estas ordens. É por esse motivo que Q_0 , I_0 e ϕ dependem simultaneamente de ω e ν . Essas funções representam os compromissos possíveis entre a fonte e o circuito. E, o que é muito importante, são essas funções que regulam as trocas de energia entre a fonte externa e o sistema, se elas ocorrem, ou não, e com qual eficiência. Nesse aspecto, o circuito RLC forçado constitui a realização de uma situação muito mais geral.

Por exemplo, num dia claro, você olha pela janela e vê um carro vermelho. Isso indica que, de algum modo, luz vermelha saiu da superfície do carro e chegou até os seus olhos. Por outro lado, você sabe que o carro está sendo iluminado por luz "branca", que tem outras componentes, amarelas, verdes, azuis, além das vermelhas. A questão básica é, então, saber porque a superfície do carro, que recebe luz de todas as cores, reemite apenas a vermelha. Isso ocorre porque o diálogo energético entre a luz incidente e os pigmentos que recobrem a superfície do carro somente é eficiente para as componentes vermelhas.

De modo geral, trocas eficientes de energia requerem amplitudes Q_0 e I_0 grandes. Por isso, é muito importante compreender como essas grandezas dependem da relação entre ω e ν . Para um dado circuito, a frequência $\nu = \sqrt{1/LC}$ é fixa. Por isso, na sequência, estudamos os comportamentos de um único circuito, sujeito a fontes externas com o mesmo V_0 , mas valores de ω diferentes.

Para determinar as características qualitativas do gráfico $Q_0 \times \omega$, estudamos o comportamento dessa função para $\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$ e, também, no ponto onde ela atinge o seu valor máximo. Usando a expressão (5.2) para Q_0 , obtemos

$$Q_0(\omega = 0) = CV_0. \quad (5.5)$$

Fisicamente, este resultado corresponde à idéia de que, no limite em que a frequência tende a zero e a fonte torna-se estática, o regime estacionário envolve apenas um capacitor com carga constante. O limite de altas frequências corresponde a

$$Q_0(\nu \rightarrow \infty) = 0. \quad (5.6)$$

Assim, nesse limite, a carga no circuito não oscila. Isso ocorre porque um sistema físico sempre precisa de um tempo para responder às solicitações externas. Quando a frequência da fonte é muito alta, o sistema é solicitado de modo tão contraditório que não tem tempo de responder e, por isso, a amplitude da oscilação torna-se nula.

Os pontos extremos da função $Q_0(\omega)$ são dados pela condição

$$\frac{dQ_0(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega V_0[2L^2(\omega^2 - \nu^2) + R^2]}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{3/2}} = 0, \quad (5.7)$$

cujas soluções são $\omega = 0$ ou $\omega = \omega_M$, onde

$$\omega_M = \sqrt{\nu^2 - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (5.8)$$

Pode-se mostrar que ω_M é um ponto de máximo, pois $d^2Q_0(\omega_M)/d\omega^2 < 0$. O valor $\omega = 0$, discutido na eq.(5.5), não corresponde a um ponto de máximo. O gráfico $Q_0 \times \omega$ está esboçado na fig. 5.1.

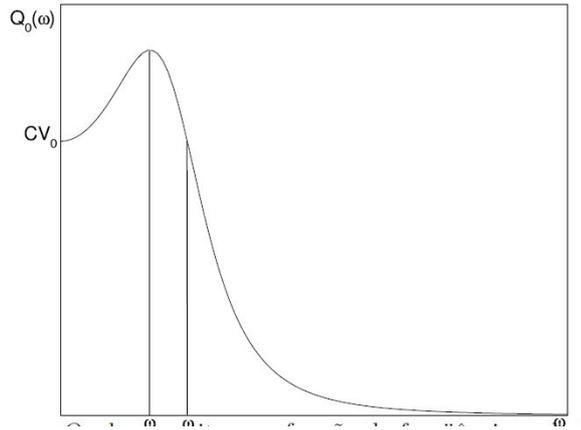


Figura 5.1: A amplitude de carga Q_0 do capacitor em função da frequência ω da fonte de tensão.

Para construir o gráfico da amplitude de corrente I_0 em função da frequência ω da fonte externa, usamos

$$I_0(\omega = 0) = 0, \quad (5.9)$$

o que se explica pelo fato de que não poder haver corrente no regime estacionário quando o sistema é alimentado por uma fonte estática. No limite de frequências altas, $\omega Q_0 \rightarrow 0$ e, portanto,

$$I_0(\omega \rightarrow \infty) = 0. \quad (5.10)$$

Novamente, este resultado decorre da incapacidade do sistema de responder a uma solitação externa que varia muito rapidamente.

A amplitude da corrente tem um máximo, dado pela condição

$$\frac{d I_0}{d \omega} = Q_0 + \omega \frac{d Q_0}{d \omega} = 0. \quad (5.11)$$

Usando a eq.(5.2) encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{V_0}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{1/2}} - \frac{\omega^2 V_0 [2L^2(\omega^2 - \nu^2) + R^2]}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{V_0 L^2 (\omega^2 - \nu^2)(\omega^2 + \nu^2)}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{3/2}} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

A solução desse equação, dada por

$$\omega = \nu, \quad (5.13)$$

determina o ponto de máximo de I_0 , cujo valor é

$$I_0(\omega = \nu) = \frac{V_0}{R}. \quad (5.14)$$

Este resultado mostra que, quando a frequência ω da fonte é igual à frequência natural do sistema ν , o circuito está na condição de máxima amplitude de corrente. Portanto, o gráfico $I_0 \times \omega$ tem a forma mostrada na figura 5.2

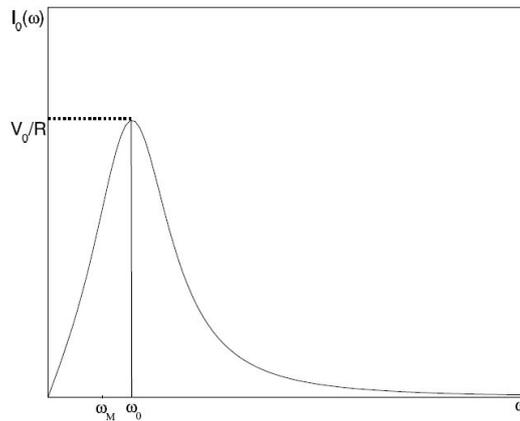


Figura 5.2: A amplitude de corrente I_0 , do circuito RLC em função da frequência ω da fonte de tensão.

Finalmente, o comportamento da tangente da defasagem ϕ em função de ω é mostrado na figura 5.3, onde podemos notar uma divergência em $\omega = \nu$, que corresponde a $\phi = \pi/2$.

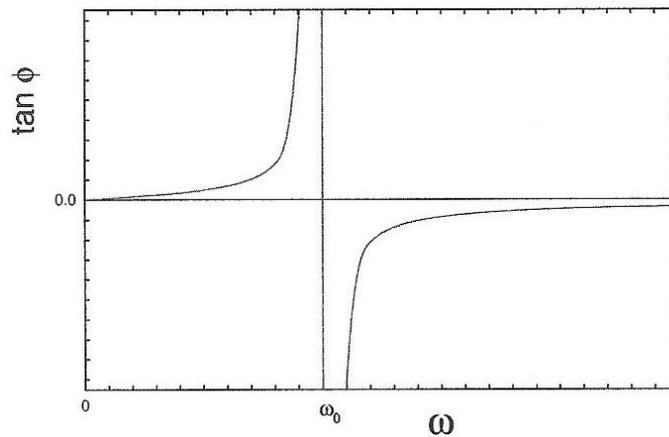


Figura 5.3:

• a troca de energia

Para um circuito RLC forçado, em cada instante, a fonte externa fornece ao sistema uma potência $P_V = V(t)I(t)$, o resistor dissipa uma potência $P_R = RI^2(t)$, e o capacitor e o indutor contêm energias dadas, respectivamente, por $U_C = Q^2(t)/2C$ e $U_L = LI^2(t)/2$.

De acordo com o princípio de conservação da energia, em cada instante, vale a relação

$$\frac{dU_L}{dt} + P_R + \frac{dU_C}{dt} = P_V. \quad (5.15)$$

Quando substituimos as expressões das energias e potências nesta relação, obtemos novamente a equação diferencial do sistema

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (5.16)$$

Este resultado não é surpreendente, uma vez que esta equação diferencial foi obtida, na aula 2, a partir da mesma relação entre potências.

A compreensão dos fluxos de energia no circuito fica mais simples quando consideramos potências médias em um período. Para um dado componente do circuito, a potência média durante um período T é definida por

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t). \quad (5.17)$$

Usando esta definição, podemos calcular as potências médias relativas a cada elemento.

Em um período, os valores médios de $\frac{dU_C}{dt}$ e $\frac{dU_L}{dt}$ são dados por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dU_C}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\frac{dU_C}{dt} \right) = \frac{1}{T} [U_C(T) - U_C(0)] \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{Q(T)^2}{2C} - \frac{Q^2(0)}{2C} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dU_L}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\frac{dU_L}{dt} \right) = \frac{1}{T} [U_L(T) - U_L(0)] \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{L I^2(T)}{2} - \frac{L I^2(0)}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Esses resultados, $\langle P_C \rangle = \langle P_L \rangle = 0$, indicam que, ao longo de um período, existem trocas de energia entre o capacitor e o indutor, mas não existem acúmulos dessas energias. As energias U_C e U_L são idênticas no início e no fim de cada período. Isso significa que toda a energia fornecida pela fonte durante um período é dissipada pelo resistor.

A potência média fornecida pela fonte, em um período, é dada por

$$\begin{aligned} \langle P_V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt V(t) I(t) = -\frac{1}{T} \int_0^T dt [V_0 \cos \omega t] Q_0 \omega \sin(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2} V_0 Q_0 \omega \sin \phi = \frac{R V_0^2 \omega^2}{2[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2 \omega^2]} \end{aligned} \quad (5.20)$$

e a potência média dissipada pelo resistor, em um período, vale

$$\begin{aligned} \langle P_R \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt R I^2(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt R [Q_0 \omega^2 \sin(\omega t - \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2} R Q_0^2 \omega^2 = \frac{R V_0^2 \omega^2}{2[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2 \omega^2]}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Assim, como esperado, $\langle P_V \rangle = \langle P_R \rangle$.

Um aspecto importante do funcionamento de sistemas forçados é que a maneira como a fonte fornece energia a ele depende muito da relação entre ω , a frequência da fonte, e ν , a sua frequência natural de oscilação. Para analisar as dependências, com ω , das trocas de energia no sistema, consideramos duas grandezas: $\langle P_V \rangle$ e $\langle U_V \rangle$. Esta última é a energia média fornecida ao sistema durante um ciclo e é dada por $\langle U_V \rangle = T \langle P_V \rangle$.

A função $\langle P_V(\omega) \rangle$, expressa por (5.20), pode ser reescrita como

$$\langle P_V(\omega) \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2(\omega). \quad (5.22)$$

Assim, a potência média fornecida ao sistema é muito pequena para frequências próximas de zero e para frequências muito grandes ($\omega \gg \nu$). Para $\omega = \nu$, $\langle P_V(\nu) \rangle$ atinge seu valor máximo.

Finalmente, a energia média, fornecida pela fonte em cada ciclo, é dada por

$$\langle U_V \rangle = \frac{2\pi}{\omega} \langle P_V \rangle. \quad (5.23)$$

O máximo desta função está localizado num ponto diferente de ω_M ou $\omega = \nu$.

• ressonância

Nesta discussão acerca da dependência das respostas do circuito RLC forçado com a frequência da fonte, vimos que a potência média fornecida ao sistema, representada por $\langle P_V \rangle$ e dada pela eq.(5.20), é máxima quando $\nu = \omega$. Neste caso ocorre uma ressonância entre a fonte e o sistema. Isso significa que, para esta frequência, a transferência de energia da fonte para o sistema é a mais eficiente possível. Assim, quando a frequência da fonte externa ω é igual à frequência natural de oscilação do sistema ν ,

a capacidade da fonte de fornecer energia está a mais ajustada possível à capacidade do sistema de receber tal energia. Na ressonância, a fonte e o sistema estão totalmente afinados.

Na situação de ressonância, a corrente no sistema $I(t)$ e a fonte estão completamente em fase. Este fato é muito importante do ponto de vista físico e pode ser constatado notando-se que, quando $\omega = \nu$, a eq.(5.3) fornece $\tan \phi_{res} \rightarrow \infty$, o que significa que $\phi_{res} = \pi/2$. Assim, neste caso,

$$I_{res} = -I_0 \sin(\omega t - \pi/2) = I_0 \cos \omega t \quad (5.24)$$

Na ressonância, esta concordância entre as fases da fonte e da corrente explica a eficiência do processo. Ela significa que a fonte sempre “empurra” os elétrons da corrente a favor do seu movimento. Fonte e corrente nunca se opõem nesta situação. É importante notar que esta sintonia total entre $I(t)$ e $V(t)$ ocorre somente na ressonância. Se $\nu \neq \omega$, então $\phi \neq \pi/2$ e ora a fonte empurra as cargas a favor da corrente, ora contra a corrente. Para ilustrar o contraste entre essas duas situações, mostramos abaixo gráficos representando a tensão V_0 da fonte (Fig. 5.4), a corrente I no circuito (Fig.5.5a) e a potência instantânea P_V (Fig.5.5b), em função do tempo.

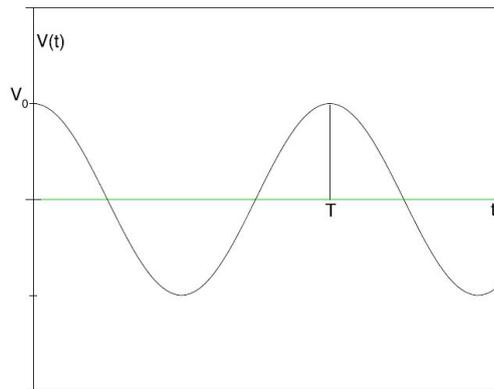


Figura 5.4: Tensão $V(t)$ da fonte em função do tempo.

Nas figuras 5.5 são apresentados gráficos da corrente I e da potência P_V para os casos de ressonância (linha cheia) e de $\omega < \nu$ (linha tracejada). A figura descrevendo P_V é obtida multiplicando $V(t)$ por $I(t)$. Por isso, no caso $\omega \neq \nu$, a função $P_V(t)$ se anula quatro vezes por período, nos pontos em que ou $V(t) = 0$ ou $I(t) = 0$. Isso faz com que, fora da ressonância, tenhamos regiões onde $P_V(t) > 0$ e outras, onde $P_V(t) < 0$. Nas regiões onde $P_V(t) > 0$, a fonte fornece energia ao sistema. Quando $P_V(t) < 0$, o sistema devolve energia à fonte, o que não ocorre na situação de ressonância quando a fonte e a corrente estão em fase.

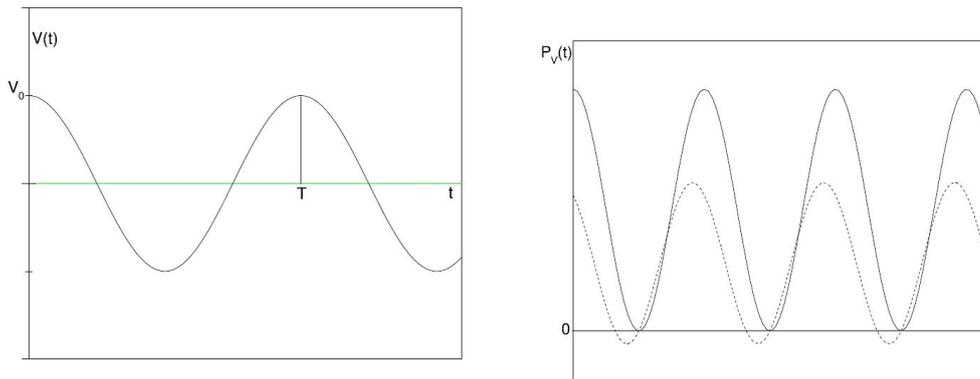


Figura 5.5: (a) Corrente $I(t)$ que percorre o circuito RLC para uma fase ϕ qualquer (curva tracejada) e para $\phi = \pi/2$ (curva cheia). (b) Potência fornecida pela fonte em função do tempo para uma frequência $\omega \neq \omega_0$ (curva tracejada) e para frequência de ressonância $\omega = \omega_0$ (curva cheia).

• exercícios

1. Considere um circuito simples formado por uma fonte de tensão $V(t) = V_0 \cos \omega t$ e um resistor de resistência R . Calcule

- a corrente no sistema, em função do tempo;
- a potência fornecida pela fonte, em função do tempo;
- a potência média, por período, fornecida pela fonte;
- considere, agora, um circuito RLC em série, ligado à mesma fonte. Supondo que a resistência do resistor seja R e a capacitância do capacitor seja C , existe algum valor de L para o qual a corrente e a potência fornecida pela fonte sejam as mesmas determinadas nos itens anteriores? Caso positivo, qual é esse valor?

2. Determine o ponto de máximo da função $\langle U_V(\omega) \rangle$ dada na eq.(5.20), seus comportamentos na origem e no infinito e esboce um gráfico que a represente.

• respostas

1. a) $I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$; b) $P_V(t) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t$ c) $\langle P_V \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}$; d) $L = \frac{1}{C \omega^2}$.

Capítulo 6

circuitos com corrente alternada: impedância

- motivação

Nas aulas anteriores, discutimos o comportamento de um circuito RLC sujeito a uma fonte de tensão externa dependente do tempo. Naquele caso, todos os elementos estavam em série, a equação diferencial que determinava o comportamento temporal do sistema era simples, e a solução particular $Q_{NH}(t)$ da equação não homogênea era relativamente fácil de ser obtida. Entretanto, é possível montarmos circuitos bastantes mais complicados, envolvendo indutores, capacitores e resistores. Como exemplo, temos os mostrados abaixo:

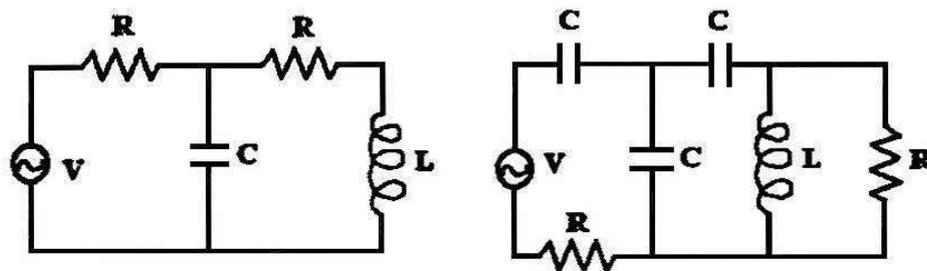


Figura 6.1: Exemplos de circuitos.

No caso de um circuito genérico, a obtenção da solução particular da equação não homogênea torna-se bastante complicada, devido ao fato de a corrente poder se dividir entre várias malhas diferentes. A saída para essa dificuldade é muito inteligente.

No caso de sistemas formados apenas por resistores, sabemos resolver problemas envolvendo malhas. Por exemplo, se substituirmos os capacitores na figura 6.1 por um resistor R_1 e o indutor por um resistor R_2 , seremos capazes de obter as correntes nos vários trechos associando, pouco a pouco, os resistores que estão em série ou em paralelo.

Felizmente, podemos copiar essa idéia e estendê-la a circuitos envolvendo também capacitores e indutores, usando o conceito de *impedância*. As impedâncias são normalmente representadas pela letra Z . A cada elemento do circuito está associada uma impedância. Assim, $C \rightarrow Z_C$, $R \rightarrow Z_R$, $L \rightarrow Z_L$. As regras para tal associação são simples e são dadas na seqüência. Antes de fazer isso, entretanto, vale a pena compreender a essência do método.

Imaginemos, por exemplo, que desejássemos conhecer a corrente que percorre o circuito da esquerda da figura 6.1, no regime estacionário. O primeiro passo para resolver esse problema consiste em refazer o desenho usando os símbolos de impedância, como na figura 6.2.

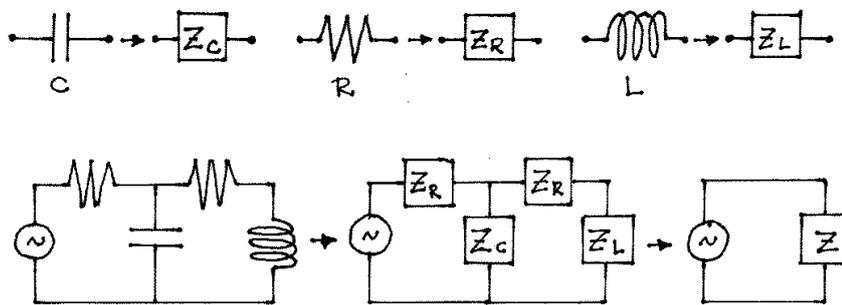


Figura 6.2:

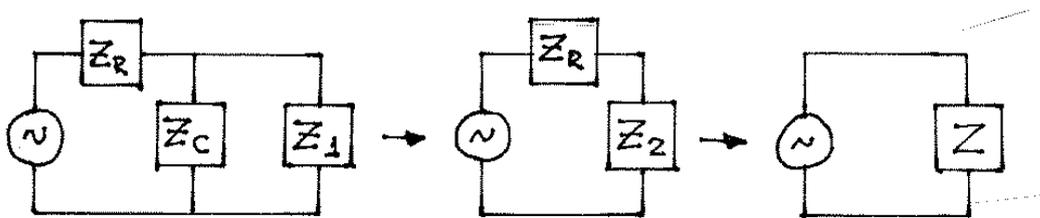


Figura 6.3:

Em seguida, calculamos a impedância equivalente Z , usando as mesmas regras de associação de resistores, como na figura 6.3. Para tanto, inicialmente associamos o resistor e o indutor à direita da figura, que estão em série, obtendo

$$Z_1 = Z_R + Z_L. \tag{6.1}$$

Em seguida, associamos Z_1 e Z_C , que estão em paralelo, e encontramos

$$Z_2 = \frac{Z_C Z_1}{Z_C + Z_1}. \tag{6.2}$$

Finalmente, a associação em série do último resistor com Z_2 fornece a impedância equivalente

$$Z = Z_R + Z_2, \quad (6.3)$$

com Z_2 e Z_1 dadas pelas eqs.(6.2) e (6.1). Assim, calcular indutâncias não é difícil.

Do ponto de vista matemático, indutâncias são grandezas complexas. No começo, isso pode parecer um pouco assustador. Há, entretanto, uma razão física forte para o emprego desse tipo de formalismo, diretamente associada ao fato de o capacitor e o indutor conservarem energia e de o resistor dissipar energia. Nesse sentido, dissipação e conservação representam duas dimensões diferentes do comportamento do sistema. E o emprego de números complexos é conveniente porque esses números são bidimensionais, eles são capazes de descrever duas coisas ao mesmo tempo ... No caso da impedância, as informações acerca das partes conservativa e dissipativa do sistema são carregadas paralelamente no interior dos cálculos.

• o método

Resolver um circuito consiste em determinar a corrente no seu interior, a partir do conhecimento dos seus componentes e da fonte que o alimenta. No método das impedâncias, toda a informação acerca dos elementos do circuito fica codificada na grandeza Z .

A fonte física de tensão é descrita pela função $V(t) = V_0 \cos \omega t$. No regime estacionário, a corrente $I(t)$ oscila com a mesma frequência da fonte e, por isso, ela tem a forma geral

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta). \quad (6.4)$$

Resolver o problema corresponde, portanto, a determinar a amplitude I_0 e a fase δ .

No método, essas funções são generalizadas para

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}, \quad (6.5)$$

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t - \delta)}, \quad (6.6)$$

onde os acentos circunflexos nas notações \hat{V} e \hat{I} indicam que essas funções são complexas.

Em seguida, calculamos a corrente complexa $\hat{I}(t)$ por meio da relação

$$\hat{V}(t) = Z \hat{I}(t), \quad (6.7)$$

que é a generalização do resultado $V = RI$, válido para circuitos envolvendo somente resistores.

Assim, se conhecermos $\hat{V}(t)$ e Z , podemos obter a corrente complexa por meio da relação

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} \rightarrow I_0 e^{i\delta} = \frac{V_0}{Z}. \quad (6.8)$$

Tomando a parte real de $\hat{I}(t)$, encontramos a *corrente física* $I(t)$, que é a solução desejada.

resumo do método: a análise de um circuito elétrico através do método baseado no conceito de impedância envolve as seguintes etapas:

1. escrever a tensão da fonte como um número complexo;
2. determinar a impedância Z do circuito;
3. escrever $\hat{I}(t) = \hat{V}(t)/Z$;
4. identificar a corrente física à parte real de $\hat{I}(t)$.

Para determinar a impedância de um circuito que contém indutores, capacitores e resistores, precisamos conhecer as impedâncias de cada elemento. Por isso, mais adiante, determinamos Z_L , Z_C e Z_R , respectivamente, as impedâncias de um indutor, de um capacitor e de um resistor. Antes de fazer isso, entretanto, apresentamos uma revisão rápida de alguns resultados envolvendo números complexos.

• números complexos

Números complexos envolvem o símbolo i , definido pela relação $i^2 = -1$. Um número complexo qualquer Z pode ser escrito nas formas cartesiana e polar como

$$Z = a + ib \longleftrightarrow Z = \delta e^{i\theta}, \quad (6.9)$$

sendo

$$\delta = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctg \frac{b}{a}. \quad (6.10)$$

Números complexos envolvem duas dimensões, a real e a imaginária, e podem ser representados em planos. Um exemplo é dado na figura 6.4. Dela, podemos concluir diretamente que

$$a = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad b = \rho \sin \theta. \quad (6.11)$$

No caso em que $\rho = 1$, encontramos um resultado muito importante,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (6.12)$$

O complexo conjugado de Z é representado por Z^* e obtido a partir de Z , trocando o sinal de i . Assim,

$$Z^* = a - ib \longleftrightarrow Z^* = \rho e^{-i\theta} \quad (6.13)$$

A soma de dois números complexos $Z_1 = (a + ib)$ e $Z_2 = (c + id)$ é dada por

$$Z_1 + Z_2 = (a + c) + i(b + d) \longleftrightarrow Z_1 + Z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2} \quad (6.14)$$

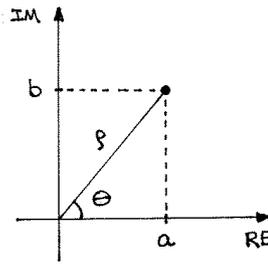


Figura 6.4:

e o seu produto por

$$Z_1 Z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc) \longleftrightarrow Z_1 Z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (6.15)$$

Inspicionando as eqs.(6.14) e (6.15), notamos que a forma cartesiana é mais conveniente para a soma e a forma polar, para o produto.

O inverso de um número complexo pode ser escrito como

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \frac{(a - ib)}{(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \longleftrightarrow \frac{1}{Z} = \frac{e^{-i\theta}}{\rho}. \quad (6.16)$$

Finalmente, o quociente de dois números complexos $Z_1 = (a + ib)$ e $Z_2 = (c + id)$ é dado por

$$\frac{Z_1}{Z_2} = (a + ib) \frac{(c - id)}{(c^2 + d^2)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{(c^2 + d^2)} \longleftrightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (6.17)$$

Nestes casos, também, a forma polar é mais conveniente.

• impedância dos elementos

Para determinar a impedância do indutor, capacitor e resistor, usamos circuitos simples, onde cada um desses elementos está diretamente ligado a uma fonte externa que fornece a tensão $V = V_0 \cos \omega t$. Esse cálculo envolve três passos:

- escrevemos a equação diferencial real para o circuito físico;
- efetuamos a generalização complexa, usando

$$V(t) \longrightarrow \hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}, \quad (6.18)$$

$$I(t) \longrightarrow \hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.19)$$

- calculamos Z , usando a relação

$$Z = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{I}(t)}. \quad (6.20)$$

• **indutor**



Figura 6.5: Um indutor ligado a uma fonte de tensão alternada.

A equação diferencial é

$$V(t) = L \frac{dI}{dt}, \quad (6.21)$$

e corresponde à generalização complexa

$$\hat{V}(t) = L \frac{d\hat{I}}{dt} \longrightarrow V_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.22)$$

A partir dela, obtemos a expressão para a impedância Z_L de um indutor

$$\hat{Z}_L = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{I}(t)} = i\omega L. \quad (6.23)$$

• **capacitor**

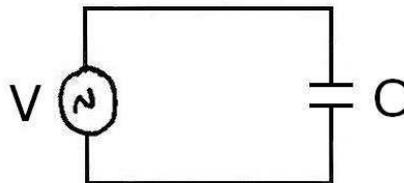


Figura 6.6: Um capacitor ligado a uma fonte de tensão alternada.

A equação para o problema físico é

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad (6.24)$$

que é generalizada para

$$\hat{V}(t) = \frac{\hat{Q}(t)}{C}. \quad (6.25)$$

A carga $\hat{Q}(t)$ está relacionada à corrente $I(t)$ por $\hat{I}(t) = \frac{d\hat{Q}(t)}{dt}$. Usando a eq.(6.19), encontramos

$$\hat{Q}(t) = \frac{1}{i\omega C} \hat{I}(t). \quad (6.26)$$

Assim,

$$Z_C = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{I}(t)} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}. \quad (6.27)$$

• resistor



Figura 6.7: Um resistor ligado a uma fonte de tensão alternada.

Para o resistor, podemos escrever

$$V(t) = R I(t) \longrightarrow \hat{V}(t) = R \hat{I}(t) \quad (6.28)$$

e a sua impedância vale

$$Z_R = R. \quad (6.29)$$

resumo: as impedâncias do indutor, do capacitor e do resistor são dadas por

$$Z_L = i\omega L, \quad Z_C = i/\omega C, \quad Z_R = R. \quad (6.30)$$

As impedâncias Z_L e Z_C , associadas a elementos que conservam a energia, são imaginárias. A associada ao resistor, que dissipa a energia, é real. Deste modo, o uso de números complexos permite que os dois tipos de componentes sejam tratados de maneira conjunta mas, o que é importante, respeitando as características de cada um deles.

• exemplo 1:

Como exemplo, resolvemos novamente o circuito RLC em série ligado a uma fonte externa que fornece tensão $V = V_0 \cos \omega t$, discutido na aula 4 e representado na figura 6.2. Os itens numerados da solução correspondem aos passos usados na descrição do **resumo do método**.

1. a tensão da fonte, em notação complexa, é obtida a partir da tensão física

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \longrightarrow \hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}; \quad (6.31)$$

2. a impedância Z do circuito é dada, neste caso, pela soma das impedâncias do resistor, do capacitor e do indutor:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (6.32)$$

Para completar os cálculos é conveniente reescrever a impedância em coordenadas polares, como

$$Z = |Z| e^{i\delta}, \quad (6.33)$$

onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad (6.34)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R}; \quad (6.35)$$

3. a corrente $\hat{I}(t)$ é dada por

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\delta}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.36)$$

4. Assim, a corrente física no circuito é dada pela parte real da expressão (6.36),

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (6.37)$$

com $\operatorname{tg} \delta$ dada por (6.35).

• exemplo 2:

Estudamos o circuito mostrado na figura 6.8, sujeito a uma tensão externa dada por $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Em particular, estamos interessados nas funções que descrevem, em função do tempo, a corrente no resistor e a carga do capacitor, no regime estacionário.

As impedâncias são dadas por $Z_R = R$, $Z_L = i \omega L$, $Z_C = -i/\omega C$. A associação de Z_C e Z_L , em paralelo, corresponde a uma impedância equivalente Z_1 , dada por

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \longrightarrow Z_1 = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} \quad (6.38)$$

e portanto,

$$Z_1 = \frac{i}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)} = \frac{i \omega L}{1 - \omega^2 LC}. \quad (6.39)$$

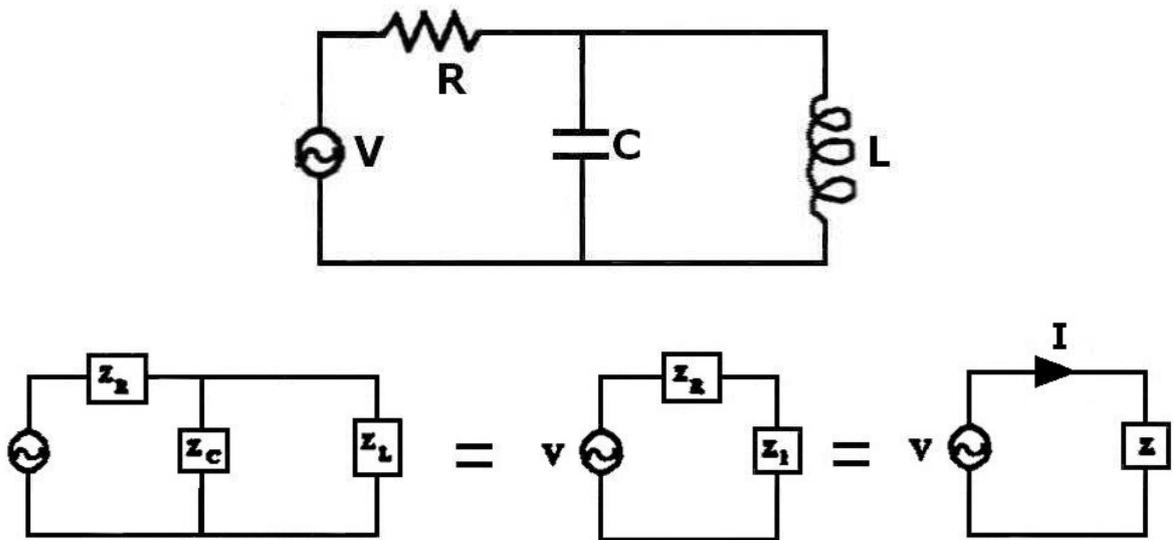


Figura 6.8: em cima: circuito com resistência, capacitância e indutância ligado a uma fonte de tensão alternada; em baixo: representação em termos de impedância.

A impedância equivalente Z do circuito é

$$Z = Z_R + Z_1 = R + \frac{i\omega L}{(1 - \omega^2 L C)}. \quad (6.40)$$

Usando coordenadas polares, temos $Z = |Z| e^{i\delta}$, onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 L C}\right)^2}, \quad (6.41)$$

$$\text{tg } \delta = \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 L C)}. \quad (6.42)$$

O conhecimento da impedância permite obter a corrente no resistor que, na notação complexa, é escrita como

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} = \frac{V_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 L C}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (6.43)$$

Assim, a corrente física no resistor é dada por

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (6.44)$$

com

$$I_0 = \frac{V_0}{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 L C}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (6.45)$$

e $\text{tg } \delta$ dada pela eq. (6.42).

O próximo passo consiste em obter a função que descreve a carga no capacitor. Para isso precisamos, inicialmente, determinar a corrente no capacitor. A idéia que a impedância Z do sistema é dada por associações das impedâncias das suas partes permite escrever, neste exemplo:

$$\hat{V}(t) = Z \hat{I}(t) = Z_R \hat{I}(t) + Z_1 \hat{I}(t) \equiv \hat{V}_R(t) + \hat{V}_1(t). \quad (6.46)$$

Na última passagem, identificamos o produto de $\hat{I}(t)$ pela impedância de cada elemento à tensão complexa entre as extremidades daquele elemento. Assim, as tensões complexas no capacitor e no indutor são iguais entre si e valem

$$\hat{V}_1(t) = Z_1 \hat{I}(t), \quad (6.47)$$

com Z_1 e $\hat{I}(t)$ dadas por (6.39) e (6.43). No subsistema formado pelo capacitor e pelo indutor, a corrente $\hat{I}(t)$ se divide em duas componentes $\hat{I}_C(t)$ e $\hat{I}_L(t)$, sendo

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_C(t) + \hat{I}_L(t). \quad (6.48)$$

Como a tensão complexa é a mesma para o capacitor e para o indutor, valem também as relações

$$\hat{V}_1(t) = Z_C \hat{I}_C(t) \quad \text{e} \quad \hat{V}_1(t) = Z_L \hat{I}_L(t). \quad (6.49)$$

Neste exemplo estamos interessados na carga no capacitor e escrevemos

$$\hat{I}_C(t) = \frac{\hat{V}_1(t)}{Z_C} = \frac{Z_1}{Z_C} \hat{I}(t) = \frac{\frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{-i}{\omega C}} \hat{I}(t) = -\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} \hat{I}(t). \quad (6.50)$$

Como o fator em frente de $\hat{I}(t)$ é real, não há diferença de fase entre as duas correntes. A corrente física no capacitor vale

$$I_C(t) = I_{0C} \cos(\omega t - \delta), \quad (6.51)$$

com

$$I_{0C} = \frac{\omega^2 C L}{(1 - \omega^2 L C)} I_0. \quad (6.52)$$

Finalmente, a carga no capacitor é dada por

$$Q(t) = \int dt I_{0C} \cos(\omega t - \delta) = \frac{I_{0C}}{\omega} \text{sen}(\omega t - \delta) \quad (6.53)$$

$$= \frac{\omega L C}{(1 - \omega^2 L C)} I_0 \text{sen}(\omega t - \delta), \quad (6.54)$$

com δ e I_0 dados por (6.42) e (6.45).

• potência

No caso de um circuito qualquer, acionado por um único gerador de tensão $V(t) = V_0 \cos \omega t$, existe uma relação muito geral e importante entre a potência média fornecida pelo gerador ao sistema e a sua impedância.

A impedância sempre pode ser escrita como

$$Z = x + i y \equiv |Z| e^{i \delta}, \quad (6.55)$$

onde

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{e} \quad \text{tg } \delta = \frac{y}{x}. \quad (6.56)$$

A corrente $\hat{I}(t)$ é dada por

$$\hat{I}(t) = \frac{V_0 e^{i \omega t}}{|Z| e^{i \delta}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.57)$$

Usando

$$\cos \delta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{e} \quad \text{sen } \delta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (6.58)$$

escrevemos a corrente física como

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \delta) = \frac{V_0}{|Z|} [\cos \omega t \cos \delta + \text{sen } \omega t \text{ sen } \delta] \\ &= \frac{V_0}{x^2 + y^2} [y \cos \omega t + x \text{ sen } \omega t]. \end{aligned} \quad (6.59)$$

A potência média fornecida pelo gerador em um período é dada por

$$\begin{aligned} \langle P_V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt V(t) I(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{V_0^2}{|Z|} \cos \omega t \cos (\omega t - \delta) \\ &= \frac{V_0^2}{2} \frac{x}{(x^2 + y^2)}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Esse resultado é importante porque ressalta o fato que a parte real x da impedância descreve a dissipação de energia enquanto que a parte imaginária y está associada aos elementos onde a energia é conservada. Ele mostra, em particular, que se a impedância for um número imaginário ($x = 0$), a potência média, em um período, fornecida pela fonte ao sistema, será nula. Se a parte real da impedância for um número positivo, o gerador estará fornecendo energia ao sistema em cada período.

• **exercícios**

1. Determine as correntes físicas nos circuitos descritos pelas figuras 6.5, 6.6 e 6.7.
2. Mostre que a corrente $I(t)$ dada pela expressão (6.44) é idêntica à encontrada na aula 4.
3. Para o circuito à direita da figura 6.1, calcule:
 - a) a impedância equivalente;
 - b) a corrente no circuito no regime estacionário.
4. A partir da expressão (6.60), obtenha a potência média que a fonte de tensão $V = V_0 \cos \omega t$ fornece a um circuito RLC em série, em um período. Compare seu resultado com o obtido na aula 5.

• **respostas**

$$1. \text{ 6.5 } \longrightarrow I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \operatorname{sen} \omega t; \quad \text{6.6 } \longrightarrow I(t) = -\omega C V_0 \operatorname{sen} \omega t;$$

$$6.7 \longrightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t.$$

$$3. \text{ a) } Z = \frac{3Z_L Z_C^2 + 4Z_L Z_C Z_R + 3Z_C^2 Z_R + 2Z_C Z_R^2 + Z_L Z_R^2}{2Z_L Z_C + 2Z_C Z_R + Z_L Z_R};$$

$$Z = \frac{a+ib}{c+id}, \text{ com } a = \left[\frac{4LR}{C} - \frac{3R}{\omega^2 C^2} \right], \quad b = \left[-\frac{3L}{\omega C^2} - \frac{2R^2}{\omega C} + \omega L R^2 \right], \quad c = \frac{2L}{C},$$

$$d = \left[2\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] R$$

$$\text{b) } I(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \delta)$$

$$Z = |Z| e^{i\delta} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} e^{i\delta}, \quad \delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{d}$$

Capítulo 7

circuito LC infinito

• introdução

Até o presente ponto do curso, consideramos circuitos RLC em duas situações diferentes. Numa delas, as fontes eram estáticas e, matematicamente, o problema consistia em resolver uma equação diferencial homogênea. Na outra situação, o sistema era ligado a uma fonte externa oscilante. Nesses dois casos, supusemos tacitamente os circuitos como estando localizados em regiões muito pequenas do espaço. Esta idéia permeou a discussão de modo sutil, pois não nos preocupamos com o fato de que eventos que ocorrem numa certa região do espaço não podem influenciar *instantaneamente* eventos que ocorrem em outras regiões. Fisicamente, existem atrasos entre efeitos que ocorrem em um ponto e as conseqüências deles, que ocorrem em outro ponto, pois a velocidade da luz leva um tempo para percorrer a distância que separa esses dois pontos. No caso de sistemas “pequenos”, esse tempo de atraso pode ser desprezado. Foi por isso que não o consideramos nas discussões precedentes. Uma das motivações para o estudo das linhas de transmissão é entender como esses efeitos de retardamento se manifestam e porque eles ocorrem. Uma outra motivação, é que as linhas de transmissão são utilizadas para transportar energia elétrica entre regiões diferentes, seja de uma usina hidroelétrica até as cidades, seja entre duas pessoas que conversam por telefone. Elas têm, por isso, grande importância prática.

O crescente consumo de energia tem motivado um debate a respeito do aproveitamento de diversas fontes, tais como carvão, petróleo, hidroelétrica, nuclear, solar, etc. Uma parte deste debate envolve problemas associados à poluição e ao transporte da energia. A energia hidroelétrica é, entre as fontes convencionais, a que mais tem sido aproveitada no Brasil, sendo a tecnologia envolvida no seu uso bastante desenvolvida. O transporte dessa energia representa um aspecto importante do problema porque, na maioria dos casos, as usinas hidroelétricas estão bastante longe dos centros consumidores. Nosso objetivo aqui não é discutir os detalhes da tecnologia envolvida no transporte de energia elétrica, mas estudar os princípios de física envolvidos nesta questão e entender como se dá a transmissão da energia eletromagnética.

• linhas de transmissão

Uma linha de transmissão é, geralmente, constituída por dois condutores longos e paralelos, cuja geometria pode variar, como pode ser visto na figura 7.1.



Figura 7.1: Linhas de transmissão.

Quando uma fonte de tensão é ligada aos extremos da linha de transmissão, vão existir campos elétricos e magnéticos no seu interior e, conseqüentemente, acúmulos de energias elétrica e magnética. Isto indica que sistemas como este possuem capacitância e indutância que, como no caso de circuitos pequenos, podem ser determinadas. Com o intuito de facilitar os cálculos, o nosso estudo da linha de transmissão será feito com base no caso concreto de um sistema formado por duas placas planas e paralelas. Entretanto os resultados obtidos podem ser facilmente generalizados para sistemas com outras características geométricas.

Consideramos que a nossa linha seja formada por duas fitas metálicas muito longas, planas e paralelas, de largura a separadas pela distância b , sendo $b \ll a$. A linha está disposta paralelamente ao eixo dos y , conforme a figura 7.2, e supomos que no seu interior existe o vácuo. Isso corresponde a uma simplificação da situação mais realística, onde o interior da linha é preenchido por um dielétrico, que impede que as duas placas se toquem.

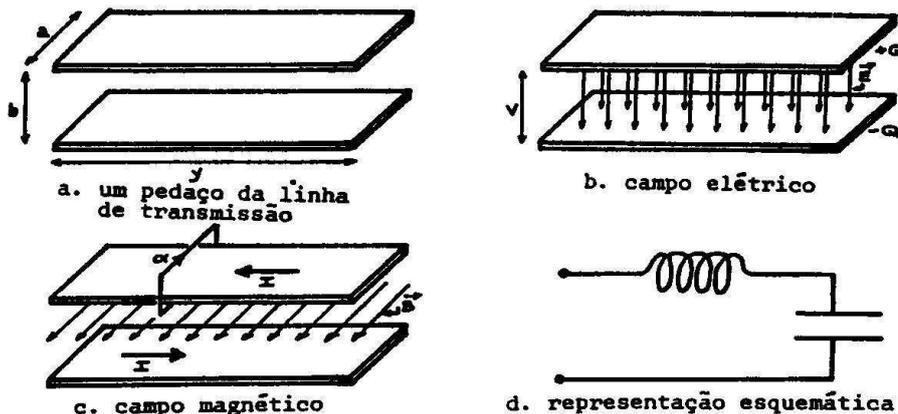


Figura 7.2: Um elemento de linha de transmissão.

O primeiro passo para a solução do problema consiste nos cálculos da capacitância e da indutância de um trecho de comprimento Δy dessa linha. A capacitância C , que

depende apenas da geometria do sistema, pode ser determinada a partir da energia elétrica armazenada entre as placas quando elas estão carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$. Essa energia está relacionada à capacitância por

$$U_C = Q^2 / 2C \quad (7.1)$$

e está distribuída na região interna ao trecho da linha considerado. Sua densidade volumétrica é dada por

$$dU_C / dV = \varepsilon_0 E^2 / 2 , \quad (7.2)$$

onde o módulo do campo, calculado por meio da lei de Gauss, vale

$$E = \sigma / \varepsilon_0 . \quad (7.3)$$

Juntando esses resultados, obtemos a capacitância deste trecho da linha

$$C = \varepsilon_0 a \Delta y / b . \quad (7.4)$$

A indutância L do sistema também depende apenas de sua geometria, podendo ser determinada pela energia magnética existente entre as placas quando por elas flui uma corrente I . Neste caso, a energia pode ser escrita como

$$U_L = LI^2 / 2 , \quad (7.5)$$

estando distribuída pelo interior do trecho considerado com densidade

$$dU_L / dV = B^2 / 2\mu_0 . \quad (7.6)$$

Usando a lei de Ampère no caminho α mostrado na figura 7.2c, obtemos o módulo do campo magnético

$$B = \mu_0 I / a . \quad (7.7)$$

Estes resultados permitem-nos concluir que a indutância deste trecho do circuito é dada por

$$L = \mu_0 b \Delta y / a . \quad (7.8)$$

Os valores de L e C obtidos acima determinam o comportamento de um pequeno elemento do sistema, representado de duas maneiras diferentes na figura 7.3. É interessante notar o caráter simbólico destas representações. O desenho da esquerda propõe-se a ser uma espécie de fotografia de um trecho da linha de transmissão, enquanto que o da direita é um pouco mais abstrato. O primeiro ajuda a imaginar a situação física, o segundo é mais apropriado ao tratamento matemático. O primeiro mostra claramente que, na linha de transmissão, as energias elétrica e magnética coexistem numa mesma região do espaço. O segundo é mais geral, e não se compromete com esta idéia. Ele pode representar qualquer sistema que armazene energias elétrica e magnética, tanto na configuração da linha

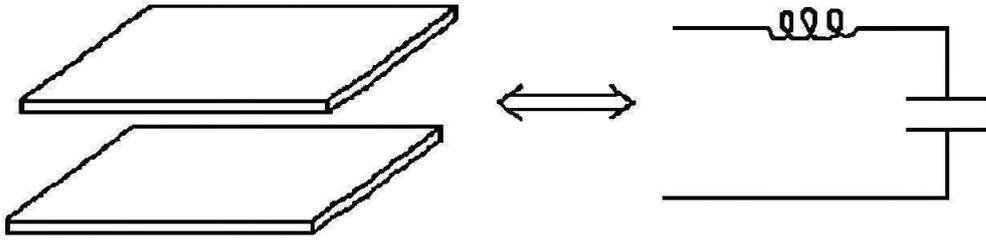


Figura 7.3: Um pedaço da linha de transmissão e sua representação esquemática.

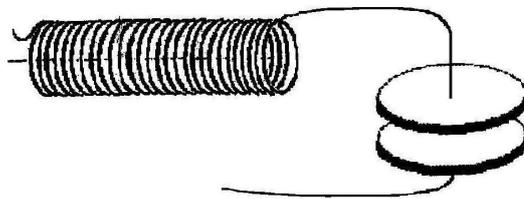


Figura 7.4: Representação de um sistema que armazena energia elétrica e magnética.

de transmissão como no caso onde o capacitor e o indutor são elementos distintos, como indicado na figura 7.4.

A linha de transmissão completa pode ser entendida como uma associação de pequenos pedaços semelhantes aos considerados acima. Isso significa que ela pode ser representada pelo circuito LC infinito da figura 7.5. É importante notar que, a bem da simplicidade, estamos desprezando os efeitos associados à resistência do metal do qual a linha é feita.

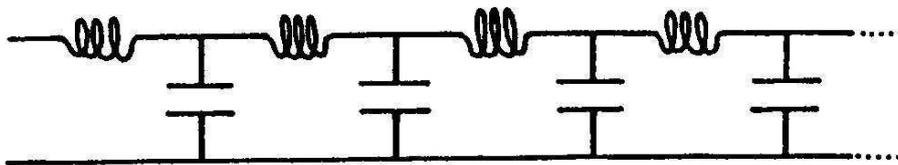


Figura 7.5: Representação esquemática de uma linha de transmissão.

• circuito LC infinito

Passamos, agora, a estudar as propriedades de um circuito infinito, formado por indutores e capacitores. Circuitos deste tipo podem representar tanto linhas de transmissão, onde as energias elétrica e magnética encontram-se na mesma região do espaço, como outros sistemas, formados por elementos como os da fig. 7.4. Para equacionar este circuito,

é preciso determinar a sua impedância.

Chamamos de Z a impedância total do circuito infinito, que desejamos calcular, e de Z_L e Z_C as impedâncias de cada um dos indutores e capacitores elementares. A relação entre Z , Z_L e Z_C é determinada usando um truque matemático, baseado na idéia de que um circuito infinito sempre pode ser considerado como a associação de um elemento da sua extremidade esquerda com um outro sistema, também infinito. Tal idéia é representada esquematicamente na figura 7.6.

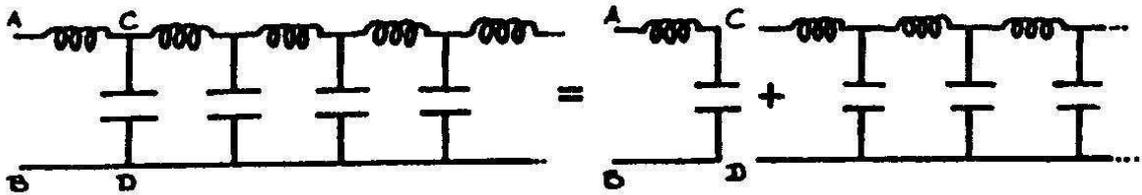


Figura 7.6: Circuito formado por infinitos circuitos elementares.

A figura 7.7 representa a mesma idéia, só que formulada em termos de impedâncias. A primeira igualdade desta figura indica que a impedância total Z é o resultado da associação das diversas impedâncias elementares. A segunda representa, como vimos acima, o fato de o circuito infinito poder ser entendido como a associação entre um elemento e um resto. A terceira igualdade, incorpora o truque matemático. O fato de o circuito ser infinito faz com que a impedância da parte que sobra depois do trecho da esquerda também seja Z . Ela somente é válida para circuitos infinitos, e é baseada na idéia que a impedância de tal circuito não se altera quando dele retiramos uma parte finita. Finalmente, a última identidade nos diz que o circuito infinito pode ser entendido como a associação de um de seus elementos com ele mesmo.¹

A igualdade entre o primeiro e o último circuitos da figura permite-nos escrever

$$Z = Z_L + 1 / \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_C} \right), \quad (7.9)$$

que corresponde a

$$Z^2 - Z Z_L - Z_L Z_C = 0. \quad (7.10)$$

Resolvendo esta equação algébrica, obtemos Z , a impedância da linha de transmissão

$$Z = \frac{Z_L}{2} \pm \sqrt{\frac{Z_L^2}{4} + Z_L Z_C}. \quad (7.11)$$

¹Esse tipo de raciocínio é o mesmo que permite calcular a soma de séries geométricas. Se $S = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$, podemos escrever $S = 1 + a(1 + a + a^2 + a^3 + \dots) = 1 + aS$ e, portanto, $S = 1/(1-a)$.

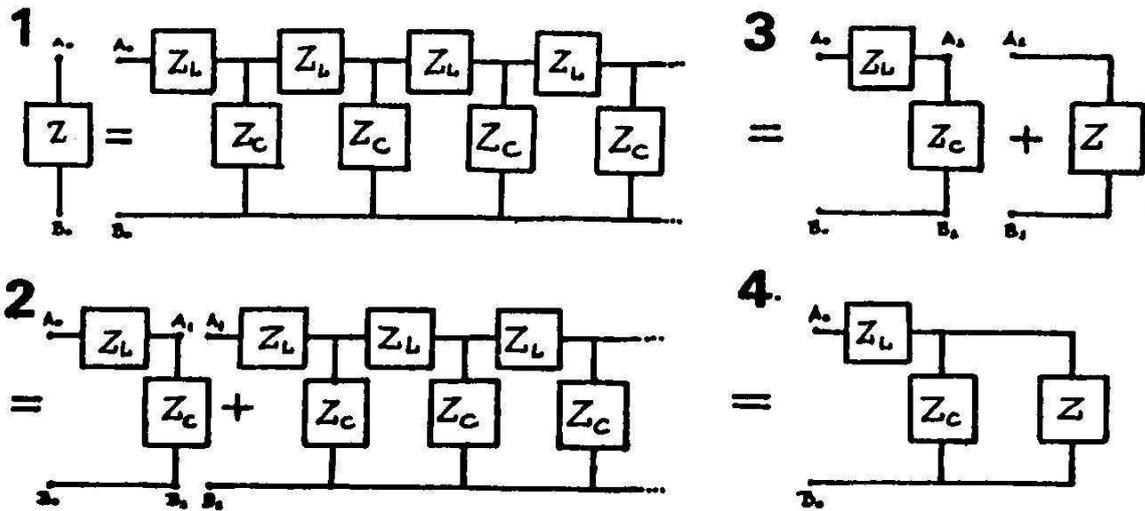


Figura 7.7: Os circuitos 1, 2, 3 e 4 são equivalentes.

A solução com sinal negativo não tem significado físico pois, de acordo com a eq.(7.9), no caso $Z_C = 0$, devemos ter $Z = Z_L$. Por isso, ela não será considerada na seqüência.

Lembrando que as impedâncias de um indutor e de um capacitor sujeito a tensão alternada com frequência ω são dadas por $Z_L = i\omega L$ e $Z_C = -i/\omega C$, obtemos

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \omega^2 L^2/4} + \frac{i\omega L}{2}. \quad (7.12)$$

• dois regimes de frequência

O conhecimento da impedância total Z permite-nos analisar o comportamento do circuito infinito quando, na sua extremidade, está conectada uma fonte de tensão alternada da forma $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Para compreender como os efeitos da fonte se propagam através do circuito, notamos que, na eq.(7.12) o termo no interior da raiz pode ser positivo, negativo, ou nulo. Existem, por isso, casos diferentes a serem considerados, dependendo do valor da frequência ω .

No caso de frequências baixas, quando $\omega^2 < 4/LC$, a impedância é um número complexo, com uma parte real e outra imaginária. A parte real, como vimos anteriormente, indica a existência de absorção de energia. Isso pode parecer estranho num circuito que contém apenas capacitores e indutores, que são elementos não dissipativos. Como podem esses elementos absorver continuamente energia, como se fossem um resistor? Isso ocorre porque, quando se conecta uma fonte a este circuito, ela fornece energia ao primeiro circuito LC elementar, em seguida ao segundo, então ao terceiro, e assim por diante. Como o circuito é infinito, ele estará absorvendo energia continuamente, energia esta que vai

sendo armazenada nos indutores e capacitores e, portanto, se propaga através da linha. Deste modo, é possível a uma pessoa colocada no fim da linha de transmissão consumir a energia elétrica introduzida na extremidade oposta. Assim, para frequências baixas, a energia “entra” na linha, e este fato é representado matematicamente por uma impedância que contém uma parte real.

O caso de frequências altas é determinado pela condição $\omega^2 > 4/LC$. Nesta situação, podemos esperar que não ocorra propagação da energia através da linha, uma vez que circuitos com impedância puramente imaginária não absorvem energia da fonte durante um ciclo.

• tensão no primeiro capacitor

Estudamos, agora, o comportamento da tensão ao longo do circuito LC infinito e um pouco do que acontece já pode ser antecipado. Estamos tratando de um circuito composto de elementos não dissipativos, de comprimento bastante grande, alimentado por uma fonte de tensão colocada numa das suas extremidades. Do ponto de vista energético, essa situação assemelha-se a uma corda muito longa, balançada por alguém, a partir de uma das suas extremidades. A pessoa que balança a corda faz o papel de uma fonte de energia que, uma vez fornecida à corda, propaga-se através dela na forma de ondas. Por isso, podemos esperar que a energia eletromagnética fornecida ao circuito LC infinito pela fonte de tensão também venha a se propagar pelo interior do mesmo.

Supomos que o circuito LC infinito seja feito de um metal muito bom condutor, de modo a podermos desprezar a energia dissipada por efeito Joule. Um gerador, cuja tensão é dada por

$$V(t) = V_0 \cos \omega t , \quad (7.13)$$

está ligado à extremidade do circuito, representada pelos pontos A_E e B_E da figura 7.8, onde o rótulo E refere-se à extremidade esquerda.

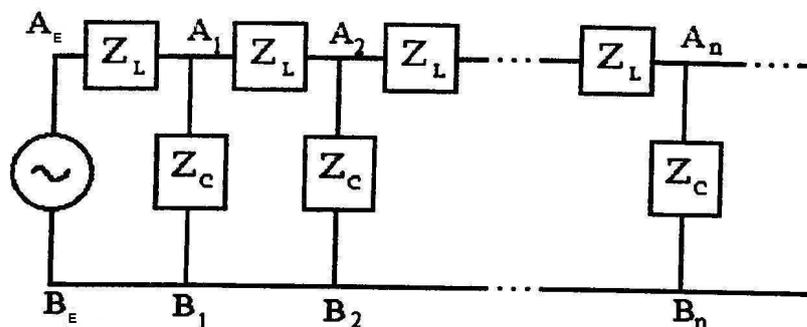


Figura 7.8: Circuito LC infinito.

Quando a fonte é ligada à extremidade do circuito, ela gera correntes no indutor e cargas são acumuladas no capacitor mais próximo, fazendo com que exista uma tensão $V_1(t)$ entre os pontos A_1 e B_1 . É esta tensão que alimenta o funcionamento do resto do sistema. Ou seja, para o resto do circuito, tudo se passa como se houvesse uma “fonte” $V_1(t)$ conectada aos pontos A_1 e B_1 . Essa nova “fonte” gera correntes e cargas no segundo elemento, fazendo com que exista uma tensão $V_2(t)$ entre os pontos A_2 e B_2 . Essa tensão $V_2(t)$ passa a alimentar o circuito daí para a frente e assim, sucessivamente. Por isso, para compreender o comportamento da tensão ao longo do circuito LC infinito, basta investigar o que acontece no primeiro elemento. O que acontecer ali vai se repetir através do restante do circuito.

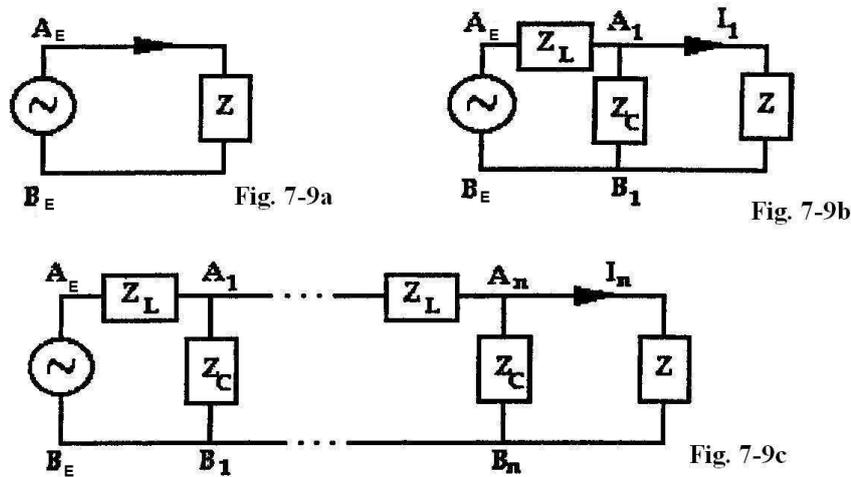


Figura 7.9: Circuito LC infinito.

A fig. 7.9a corresponde a um gerador acoplado ao circuito LC infinito, representado pela sua impedância total Z . A mesma situação está indicada na fig. 7.9b, só que desta vez o circuito foi representado como uma associação de um elemento formado por um indutor e um capacitor, de impedâncias Z_L e Z_C , com o restante da linha, cuja impedância é Z . Estudar a propagação da energia através do circuito LC infinito equivale, então, a analisar a relação entre as tensões $V_E(t)$ e $V_1(t)$. Essas duas tensões são diferentes porque, entre os pontos A_E e A_1 existe um indutor. Para calcular essa relação, usamos o formalismo das impedâncias e chamamos de \hat{V} e \hat{I} os correspondentes complexos das tensões e correntes. A fig. 7.9a permite-nos escrever a corrente que sai da fonte e atravessa o primeiro indutor como

$$\hat{I}_E = \frac{\hat{V}_E}{Z}. \quad (7.14)$$

Por outro lado, considerando a fig. 7.9b, temos

$$\hat{V}_E = \hat{I}_E Z_L + \hat{V}_1. \quad (7.15)$$

Juntando esses dois resultados, encontramos a relação

$$\hat{V}_1 = \left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) \hat{V}_E. \quad (7.16)$$

Usando os valores obtidos anteriormente para Z_L e Z , podemos expressar o fator em frente de \hat{V}_E como

$$\left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) = \left[\left(\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} - \frac{i\omega L}{2} \right) / \left(\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + \frac{i\omega L}{2} \right) \right]. \quad (7.17)$$

As características deste fator dependem do sinal do termo no interior da raiz e, conseqüentemente, do valor de ω .

Para **frequências baixas**, que correspondem a $\omega^2 < 4/LC$, o interior da raiz é positivo e o fator $(1 - Z_L/Z)$ é dado pelo quociente de um número complexo pelo seu conjugado, que sempre tem módulo 1. De fato, podemos escrever

$$\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} - i\omega L/2 = \rho e^{-i\phi}, \quad (7.18)$$

onde

$$\rho = \frac{L}{C}, \quad \tan\phi = \frac{\omega L/2}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}}. \quad (7.19)$$

Assim, neste caso, temos

$$(1 - Z_L/Z) = e^{-i2\phi}, \quad (7.20)$$

e a tensão $V_1(t)$, dada pela parte real de $\hat{V}_1(t)$, é

$$V_1(t) = \text{Re}[\hat{V}_1(t)] = \text{Re}[(1 - Z_L/Z)\hat{V}_0(t)] = \text{Re}[V_0 e^{i(\omega t - 2\phi)}] = V_0 \cos(\omega t - 2\phi). \quad (7.21)$$

Para frequências altas, ou seja, quando $\omega^2 > 4/LC$, o fator $(1 - Z_L/Z)$ passa a ser

$$(1 - Z_L/Z) = -\eta, \quad (7.22)$$

$$\eta = [(\omega L/2 - \sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C}) / (\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} + \omega L/2)] < 1. \quad (7.23)$$

Este resultado mostra que a tensão cai ao longo da linha de transmissão, uma vez que a função $V_1(t)$ é dada por

$$V_1(t) = -\eta V_0 \cos \omega t. \quad (7.24)$$

Em resumo, nos dois casos, as tensões no primeiro capacitor são dadas por

$$\omega^2 < 4/LC \rightarrow V_1(t) = V_0 \cos(\omega t - 2\text{meson}), \quad (7.25)$$

$$\omega^2 > 4/LC \rightarrow V_1(t) = [\eta V_0] \cos \omega t. \quad (7.26)$$

Assim, para frequências baixas, aparece uma fase entre V_1 e V_E enquanto que, para frequências altas, a diferença entre essas duas tensões manifesta-se no módulo.

Na discussão precedente, vimos que existe uma frequência ω_C , dada por

$$\omega_C = 2/\sqrt{LC}, \quad (7.27)$$

que regula o comportamento do circuito. Ela é chamada de *frequência de corte* do circuito LC infinito.

• tensão ao longo do circuito LC infinito

Como discutimos anteriormente, cada trecho do circuito é alimentado pelo imediatamente anterior. Como o segundo capacitor é alimentado pela tensão $V_1(t)$, podemos escrever

$$\hat{V}_2 = (1 - Z_L/Z)\hat{V}_1 \quad (7.28)$$

e usando (7.16),

$$\hat{V}_2 = (1 - Z_L/Z)^2 V_0. \quad (7.29)$$

De modo totalmente análogo, a tensão no n -ésimo capacitor vale

$$\hat{V}_n = (1 - Z_L/Z)^n V_0. \quad (7.30)$$

Assim, no caso de baixas frequências, obtemos

$$V_n(t) = V_0 \cos(\omega t - 2n\phi), \quad (7.31)$$

enquanto que, para frequências altas, a tensão assume a forma

$$V_n(t) = [-\eta]^n V_0 \cos(\omega t). \quad (7.32)$$

Estes resultados permitem-nos concluir que, para frequências baixas, a energia se propaga através do circuito LC infinito, uma vez que a tensão $V_n(t)$ oscila com frequência e amplitude idênticas às do gerador. A única diferença entre as duas tensões é devida a uma fase de valor $2n\phi$, estando $V_n(t)$ atrasada em relação a $V_0(t)$. Por outro lado, quando as frequências são altas, a tensão vai caindo ao longo do circuito LC infinito, sempre à mesma proporção η de um elemento para outro. Por isso, neste caso, a tensão tende a zero depois de um número grande de elementos. Assim, para frequências baixas, a tensão adentra o circuito enquanto que, para frequências altas, ela é amortecida.

• exercícios

1. Determine a indutância e a capacitância de um trecho de comprimento Δy de uma linha de transmissão formada por um cabo coaxial cuja cavidade tem raios menor e maior iguais a \underline{a} e \underline{b} respectivamente.

2. Como está distribuída a tensão ao longo do circuito LC infinito quando $\omega = \omega_C$?
3. (**diffcil**) No caso de frequências altas, qual relação entre o sinal negativo de $(1 - Z_L/Z)$ e a não propagação da energia?
4. Para os casos $\omega < \omega_C$ e $\omega > \omega_C$, faça gráficos representando a tensão, a carga no capacitor e a energia elétrica ao longo de um circuito LC infinito, num dado instante. O que acontece quando o tempo passa ?

• **respostas**

1. $C = \frac{2\pi\epsilon_0}{mb/a} dy; \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} m b/a dy$

2. $(1 - Z_L/Z) = -1,$ e a tensão em cada elemento tem a fase oposta ao anterior.

3. Sugestão: pense no que acontece no caso $\omega = \omega_C$ e, depois, considere os casos $\omega = (1 - \epsilon)\omega_C$ e $\omega = (1 + \epsilon)\omega_C$, sendo ϵ um número positivo e pequeno.

Capítulo 8

linha de transmissão

• introdução

Na aula anterior, argumentamos que uma linha de transmissão pode ser pensada como uma associação de infinitos elementos, cada um deles possuindo capacitância e indutância. Resolvemos, em seguida, o problema do circuito LC infinito, obtendo a sua impedância e a tensão em cada um dos seus capacitores. Em especial, vimos que estes sistemas são caracterizados por uma frequência de corte ω_C , abaixo da qual a energia pode se propagar. Nesta aula, voltamos ao caso particular da linha de transmissão. Neste curso, ao falarmos em linha de transmissão, estamos pensando em cabos metálicos, contínuos e muito longos. Na situação idealizada em que a resistência do metal é desprezada, o sistema pode ser pensado como um circuito LC infinito.

É importante notar, entretanto, que existem circuitos LC infinitos que não se comportam como linhas de transmissão contínuas. Por exemplo, se comprarmos em uma loja mil componentes de capacitância C e indutância L , podemos montá-los como na figura 7.6 e teremos algo que se aproxima de um circuito LC infinito. O mesmo vale se optarmos por componentes de capacitância C' e indutância L' . Ou seja, ao montarmos um circuito LC infinito, temos ampla liberdade de escolher os valores de L e C . No caso da linha de transmissão contínua, tal liberdade deixa de existir e os valores de L e C estão sempre "amarrados" entre si.

• tensão na linha de transmissão

Para discutir o caso contínuo, dividimos o comprimento D da linha de transmissão em N pedaços iguais, de comprimento Δy dado por

$$\Delta y = D/N. \quad (8.1)$$

Nas eqs.(7.4) e (7.8), mostramos que a capacitância e a indutância de cada um dos pedaços de uma linha de transmissão feita com placas planas e paralelas, de largura a , comprimento Δy e separadas pela distância b , são dadas por $C = \varepsilon_0 a \Delta y/b$ e $L = \mu_0 b \Delta y/a$.

Assim, a frequência de corte ω_C para esta linha de transmissão é dada pela eq.(7.27) e vale

$$\omega_{CLT} = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta y)}. \quad (8.2)$$

Este resultado independe das características geométricas do sistema e tende a infinito quando Δy se torna muito pequeno. Assim, qualquer frequência da fonte é menor que esta frequência de corte e a energia sempre pode propagar-se pelo interior de uma linha de transmissão.

A impedância deste circuito é obtida a partir do resultado (7.12) Usando os valores de L e C dados por (7.4) e (7.8), temos

$$Z_{LT} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (8.3)$$

A tensão no n-ésimo pedaço da linha é obtida a partir da eq.(7.31) e vale

$$V_n(t) = V_0 \cos(\omega t - 2n \phi), \quad (8.4)$$

onde ϕ dado pela eq.(7.19), tem a forma

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L/2}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}}. \quad (8.5)$$

No caso da linha de transmissão, obtemos

$$\phi_{LT} = \tan^{-1} \left(\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\Delta y}{2} \right) \cong \left(\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\Delta y}{2} \right), \quad (8.6)$$

usando o fato de que $\tan^{-1}\theta \cong \theta$, para $\theta \ll 1$. Substituindo este resultado na eq.(8.4), temos

$$V_n(t) = V_0 \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n \Delta y). \quad (8.7)$$

Nesta expressão, $n\Delta y$ corresponde à posição do n-ésimo elemento, medida a partir da extremidade onde se encontra a fonte. Por isso, denotamos esta distância por

$$y = n \Delta y \quad (8.8)$$

e escrevemos a tensão neste elemento como

$$V(y, t) = V_0 \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} y) = V_0 \cos [\omega(t - \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} y)]. \quad (8.9)$$

Este resultado indica que a tensão ao longo da linha de transmissão é associada a uma onda. Essa característica fica mais evidente quando consideramos os gráficos da tensão

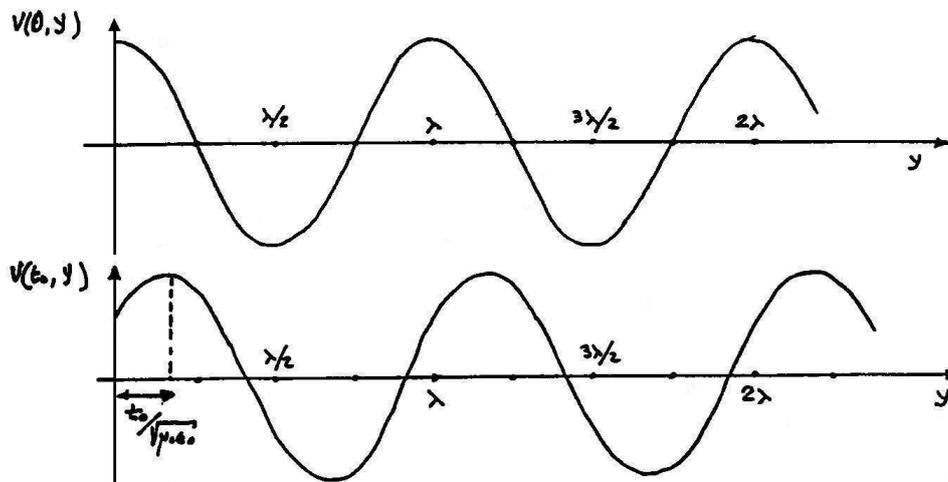


Figura 8.1:

em função de y , a posição do ponto da linha considerado, para dois instantes diferentes. Por exemplo, nos instantes $t = 0$ e $t = t_0$, temos as situações mostradas na figura 8.1.

Estas figuras representam as distribuições espaciais de tensão ao longo da linha de transmissão, em dois instantes fixos. Elas são, assim, parecidas a duas fotografias da onda em instantes diferentes, separadas pelo intervalo t_0 . O segundo desenho corresponde a um instante posterior ao primeiro e está deslocado para a direita em relação a ele. Comparando essas duas figuras, é possível perceber que o papel do parâmetro t_0 é o de deslocar a curva inteira para a direita, proporcionalmente ao seu valor.

Se tomarmos o parâmetro t como sendo uma variável contínua, temos uma situação na qual, à medida que o tempo passa, a curva desloca-se continuamente. Por isso, interpretamos a equação

$$V(y, t) = V_0 \cos [\omega(t - \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} y)],$$

obtida anteriormente, como uma onda que se move para a direita.

A tensão ao longo da linha é descrita por uma função cosseno, que é cíclica. Se considerarmos um ponto fixo y , os valores da tensão se repetem depois de um tempo T , conhecido como o *período* da onda. Ele é determinado pela condição $V(y, t + T) = V(y, t)$ e vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.10)$$

Alternativamente, se consideramos um instante fixo e nos movemos ao longo do eixo y , a onda também se repete ao longo de uma distância λ , conhecida como *comprimento de onda* e determinada pela condição $V(y + \lambda, t) = V(y, t)$. O valor de λ é dado por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (8.11)$$

• a velocidade da onda

A velocidade de propagação da onda no interior da linha de transmissão é obtida dividindo a distância percorrida num certo intervalo de tempo por este intervalo. Se tomarmos, no caso das figuras 8.1, este tempo como sendo um período T , a distância percorrida pela onda será λ , o comprimento de onda. Assim,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{2\pi/\omega} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (8.12)$$

Por muitos motivos, este resultado simples tem enorme importância. Essa velocidade é expressa em termos das constantes ϵ_0 e μ_0 , que podem ser extraídas diretamente de medidas experimentais envolvendo cargas e correntes. No S.I., os seus valores são dados por

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{m}^2\text{N} \\ \mu_0 &= 1.256\,637\,061 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2 \end{aligned}$$

e, substituídos na eq.(8.12), fornecem

$$v = 299.792.458 \text{ m/s},$$

que corresponde a c , a velocidade de propagação da luz no vácuo.

Este resultado motiva várias questões:

1. Porque a velocidade de *luz* aparece em um problema envolvendo um circuito tão simples como uma linha de transmissão? Porque ela independe totalmente das características geométricas do sistema considerado?
2. A óptica é o ramo da física que estuda a luz, as suas propriedades e o seu comportamento. Porque, então, a velocidade da luz pode ser obtida no contexto do eletromagnetismo?
3. Uma velocidade pressupõe um referencial. Neste problema qual é esse referencial? Ele parece não existir, já que ϵ_0 e μ_0 são constantes ...

A primeira questão será discutida na aula 9. A segunda, na aula 11 e a terceira, na parte do curso dedicada à relatividade.

• algumas propriedades gerais de ondas unidimensionais

O nosso estudo mostrou que, ao ligarmos uma fonte de tensão da forma $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ na extremidade de uma linha de transmissão, em seu interior aparece uma onda da forma $V(t, y) = V_0 \cos[\omega(t - y/c)]$. Esta última função descreve uma curva de forma cossenoidal bem definida, que se propaga ao longo do eixo y . Assim, forma e propagação *parecem* estar relacionadas. Entretanto, do ponto de vista físico, essas duas características da onda são completamente independentes. Para clarificar este ponto, fazemos um digressão para discutir as propriedades gerais de uma onda unidimensional.

Ondas são fenômenos físicos comuns cuja principal característica é o transporte de energia através do espaço. Para ler estas palavras, o leitor recebe ondas de luz refletidas pela página. Ao ouvir alguém, chegam aos seus ouvidos, ondas sonoras. No mar ondas de água se propagam... Situações simples, envolvendo ondas em cordas ou molas, contêm características gerais, presentes em todas as ondas. As ondas em cordas e molas, assim como as ondas sonoras e de água, resultam de movimentos de matéria, ou seja, precisam de matéria não rígida para existir. Por isso, são chamadas de ondas elásticas ou mecânicas e podem ser descritas a partir da segunda lei da dinâmica de Newton.

Quando uma onda viaja pelo espaço, como é o caso da onda do mar ou de uma corda muito longa, esta onda é chamada de progressiva ou viajante. Alternativamente, a onda pode estar confinada em determinadas regiões do espaço, como é o caso das ondas em uma corda com as pontas presas. Nestes casos, a onda é dita estacionária.

De modo geral, a descrição da propagação de ondas envolve o tempo e uma, duas ou três dimensões espaciais. Quando apenas uma dimensão espacial é relevante, temos ondas *unidimensionais* como, por exemplo, em cordas ou linhas de transmissão. Ondas bidimensionais ocorrem em superfícies líquidas ou em membranas de tambores. Talvez o exemplo mais comum de ondas tridimensionais à nossa volta seja o som das palavras e outros ruídos.

Neste curso, estudamos apenas ondas unidimensionais. Para representar uma onda deste tipo, é preciso uma função f que dependa de duas variáveis: do tempo e da posição na direção de propagação. Por isso, escrevemos $F = F(y, t)$. Esta função, $F(y, t)$, é chamada de *função de onda*. Na corda, por exemplo, a função de onda é a medida do seu deslocamento em relação à posição de equilíbrio. A figura 8.2a mostra uma corda em equilíbrio e a 8.2b, uma onda na corda. Neste caso, o movimento de cada elemento de massa da corda é cossenoidal na direção vertical, e a onda se propaga na direção horizontal, que é a direção de sua velocidade.

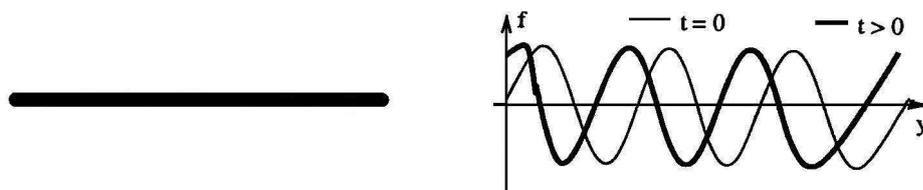


Figura 8.2: (a) A corda em equilíbrio. (b) A corda em dois instantes diferentes.

A figura 8.3 mostra outra onda. Ela não tem forma cossenoidal, mas uma forma que chamamos de pulso. Podemos gerar uma onda deste tipo em uma corda, balançando a sua extremidade esquerda de modo adequado. Alguns puxões para cima, outros para baixo, durante um intervalo de tempo finito, geram um pulso que se move para a direita. Esse pulso é uma onda e carrega energia através da corda, apesar de não ser periódico.

De modo muito geral, a *característica principal* de uma onda unidimensional é que ela

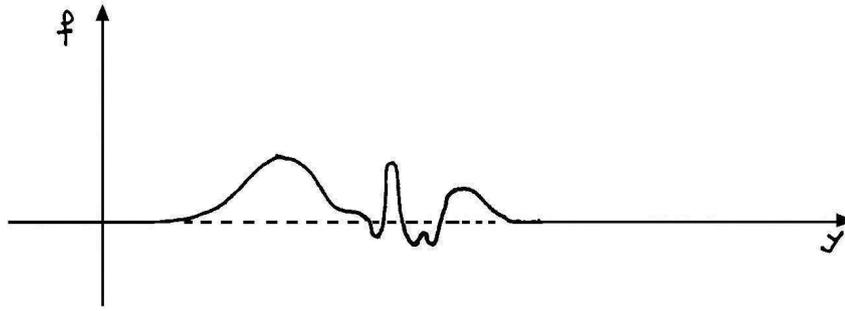


Figura 8.3:

é descrita por uma função $F(y, t)$, que satisfaz uma equação diferencial do tipo

$$\frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (8.13)$$

Ela é chamada de **equação de onda** e determina que a derivada segunda da função em relação à posição y é proporcional à derivada segunda em relação ao tempo t .

Para que uma função $F(y, t)$ seja solução da equação de onda, é preciso apenas que ela dependa de y do mesmo modo que ela depende de t . Para verificar esta propriedade, consideremos uma função qualquer $F(u)$. Substituindo seu argumento por $u \equiv (y + \alpha t)$, automaticamente fazmos com que ela passe a ser solução da equação de onda, como podemos ver com auxílio da regra da cadeia. Assim

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial F}{\partial u} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \quad (8.15)$$

Vemos, então, que qualquer função de argumento $(y + \alpha t)$ é solução da equação de onda. Além disso, como o parâmetro α aparece ao quadrado nessa equação, qualquer função de argumento $(y - \alpha t)$ também é solução. Assim, a solução mais geral da equação de onda tem a forma

$$F(y, t) = g(y - \alpha t) + h(y + \alpha t), \quad (8.16)$$

onde g e h são funções quaisquer! Por exemplo, as seguintes funções são soluções da equação de onda:

$$\cos(y - \alpha t), \quad \cos^3(y - \alpha t), \quad \cos[(y - \alpha t)^3], \quad \arctan(y - \alpha t)^{-1};$$

$$\log(y - \alpha t) + \exp[-(y + \alpha t)], \quad A(y - \alpha t) + B(y + \alpha t)^3, \quad \text{etc.}$$

Por estranho que possa parecer, é essa a razão pela qual *qualquer* palavra que você fala num telefone pode ser ouvida por uma outra pessoa. Se você disse *alô*, a outra pessoa, escuta *alô*, se você disser *sorvete*, a outra pessoa escuta *sorvete* ...

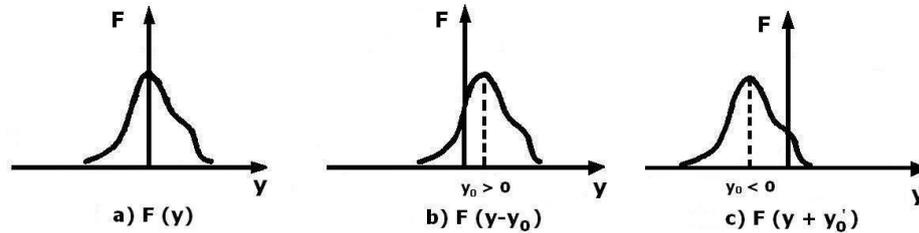


Figura 8.4: (a) (b) (c)

Para compreender esta propriedade maravilhosa, é preciso entender o significado da solução da equação de onda. Suponha que $F(y)$ seja a função cujo gráfico está representado na fig. 8.4a. Se subtrairmos de seu argumento um certo valor constante y_0 , positivo, o único efeito é deslocar o gráfico deste valor para a direita e temos a situação descrita na fig. 8.4b. Se somarmos y_0 , temos o caso da fig. 8.4c. Vemos, portanto, que a solução geral da equação de onda, $g(y - \alpha t)$, com $\alpha > 0$, representa uma função que, à medida que o tempo passa, vai se deslocando para a direita. Analogamente, $h(y + \alpha t)$ se desloca para a esquerda. Por exemplo, os gráficos de uma possível função $g(y - \alpha t)$, em diversos instantes diferentes, estão representados na fig. 8.5. É importante notar que, neste caso, α é a velocidade com que o gráfico se desloca.

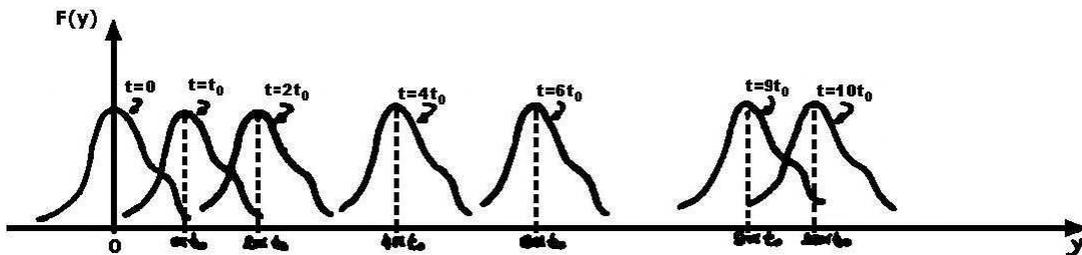


Figura 8.5: O gráfico se desloca quando o argumento é mudado.

É por possuir soluções com estas propriedades que equações da forma

$$\frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.17)$$

são chamadas de equações de onda unidimensionais. Este tipo de equação é encontrado em todos os ramos da física, desde cordas vibrantes até partículas elementares. A solução geral da equação de onda é dada por funções extremamente genéricas, da forma

$$F(y, t) = g(y - \alpha t) + h(y + \alpha t).$$

A equação de onda impõe restrições apenas ao argumento da função, não à sua forma. Do ponto de vista matemático, *uma onda é uma função que anda!*

• as formas das ondas

Para completar este estudo, é interessante discutir como uma dada situação física escolhe uma forma particular para a função $F(y, t)$. Para tanto, voltamos ao caso particular da linha de transmissão. No início desta aula, vimos que a tensão no ponto y de uma linha sujeita a uma fonte do tipo $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ é dada por

$$V(y, t) = V_0 \cos[\omega(t - y/c)].$$

Este resultado indica que, a tensão em y tem as mesmas características da fonte: ela oscila cossenoidalmente, com a mesma amplitude e a mesma frequência. A única diferença entre as tensões da fonte e do ponto y é uma fase, dada por $\omega y/c$, que representa um atraso devido ao tempo finito de propagação da onda. Assim, a tensão em y num dado instante t_0 é sempre igual à tensão da fonte em um instante anterior, $t_0 - y/c$. A essência da onda é ser o passado da fonte. E esse passado será tão mais longínquo quanto mais distante o ponto y considerado estiver da fonte.

De modo muito geral, a tensão entre as placas de uma linha de transmissão satisfaz uma equação de onda e, portanto, deve ter a forma genérica

$$V(y, t) = V_D(y - vt) + V_E(y + vt), \quad (8.18)$$

onde $v = c$ é a velocidade de propagação da onda e os índices D e E indicam, respectivamente, propagações para a direita e para a esquerda. Consideremos o caso de duas pessoas conversando pelo telefone. Um aparelho de telefone, para os nossos propósitos, pode ser pensado como sendo apenas um fone, feito de um diafragma preso a um ímã, como mostra a fig. 8.6. Este ímã constitui o núcleo móvel de um solenóide, cujas extremidades estão ligadas à linha de transmissão. Quando uma pessoa fala, as ondas sonoras fazem com que o diafragma vibre, causando também vibrações no ímã. Estas, por sua vez, induzem correntes elétricas no solenóide, ligado num dos extremos da linha de transmissão. As correntes levam cargas de uma das placas para a outra, causando o aparecimento de densidades de sinais opostos nas placas que constituem a linha e, conseqüentemente, de uma tensão, descrita pela função $V(t)$. Esta tensão se propaga até o extremo oposto da linha, onde existe outro fone. Ao chegar lá, a tensão dá origem a correntes neste outro fone, que induzem campos magnéticos no interior do solenóide e que, por sua vez, causam vibrações no ímã. Estas são transmitidas ao diafragma, que faz vibrar o ar, reproduzindo os sons emitidos no extremo oposto da linha.

Se a pessoa da esquerda disser "alô", a tensão no ponto $y = 0$ deve ser dada por uma função

$$V(y = 0, t) = \text{alô}(t) \quad (8.19)$$

Neste caso, estamos interessados apenas nas soluções que se propagam para a direita, ou seja, para o interior da linha de transmissão. Por isso, escolhemos $V_E(y + vt) = 0$ na

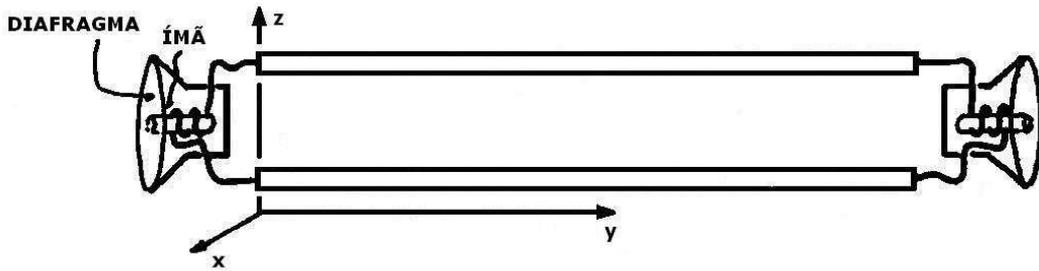


Figura 8.6: Um esquema do telefone: uma linha de transmissão.

solução geral da equação de onda. A função que descreve a tensão que leva a informação correspondente à palavra "alô" pelo interior da linha é dada por

$$V(y, t) = \text{alô} \left[- \frac{y - vt}{v} \right] \quad (8.20)$$

A forma desta função descreve a propagação, para a direita, de uma seqüência específica de tensões que corresponderam, no passado, à palavra "alô", injetada na extremidade esquerda da linha, no ponto $y = 0$.

Este resultado é muito importante, porque ele nos ensina que o que acontece no ponto $y = 0$ determina o que vai acontecer em todos os demais pontos da linha de transmissão. É, na verdade, por isso que este circuito é chamado de *linha de transmissão*: o que quer que seja colocado num extremo, se *transmite* através dele e vai até o outro extremo, sem distorções (se a linha for boa, é claro!).

A função que descreve uma palavra é, em geral, muito complicada. Existe um teorema matemático, entretanto, que afirma que qualquer função, por mais complicada que seja, pode ser sempre decomposta como uma somatória de funções *seno* e *coseno*, com várias freqüências diferentes. Este resultado, conhecido como **teorema de Fourier**, permite que a propagação de qualquer sinal através da linha de transmissão possa ser entendida como a propagação simultânea das diversas funções *seno* e *coseno* que o compõem. No caso da função $\text{alô}(t)$, por exemplo, teríamos uma decomposição do tipo:

$$\text{alô}(t) = \int d\omega [a(\omega) \text{sen } \omega t + b(\omega) \text{cos } \omega t], \quad (8.21)$$

onde $a(\omega)$ e $b(\omega)$ são funções determinadas a partir de $\text{alô}(t)$. Por isso, não há perda de generalidade se estudarmos apenas o caso de uma fonte com tensão cossenoidal.

• **exercícios**

1. Sem usar fórmulas decoradas, determine o período e o comprimento de onda da onda descrita pela equação $V(y, t) = V_0 \cos(\alpha t - \beta y)$.
2. Considere uma linha de transmissão formada pelo cabo coaxial descrito no exercício 7.1. Determine:
 - a) a impedância da linha;
 - b) a função que descreve a tensão ao longo da linha quando ela é alimentada por uma fonte $V(t) = V_0 \sin \omega t$;
 - c) a velocidade de propagação da tensão ao longo da linha.
3. A tensão na extremidade direita de uma linha de transmissão infinita é dada por $V(t) = V_0 e^{-\alpha t^2}$. Qual a função que descreve a tensão num ponto do interior da linha?

• **respostas**

1. $T = 2\pi/\alpha$, $\lambda = 2\pi/\beta$.
2. a) $Z = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, b) $V(y, t) = V_0 \sin [\omega (t - \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} y)]$, c) $V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
3. $V(y, t) = V_0 e^{-\alpha (y/c+t)^2}$.

Capítulo 9

linha de transmissão: cargas, correntes e campos

• os cálculos

Até o momento, estudamos apenas na tensão $V(y, t)$ entre as placas da linha de transmissão. Passamos, agora, a discutir o comportamento das outras grandezas. Nesta discussão, usamos um sistema de referência com o x paralelo à largura das placas, o eixo y paralelo ao comprimento das placas e o eixo z , à separação entre elas.

Num ponto y qualquer da linha, a tensão $V(y, t)$ é devida a cargas de sinais opostos existentes nas faces interiores das duas placas. Cada pequeno trecho da linha funciona como um capacitor e, por isso, podemos escrever

$$Q(y, t) = CV(y, t) = CV_0 \cos[\omega(t - y/c)] \quad (9.1)$$

onde C , a capacitância, dado pela eq.(7.4), vale $C = a\varepsilon_0\Delta y/b$.

A densidade superficial de carga pode ser calculada dividindo a carga por um elemento de área das placas, e é dada por

$$\frac{Q(y, t)}{a\Delta y} = \sigma(y, t) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b} \cos[\omega(t - y/c)]. \quad (9.2)$$

Entre as placas existe um campo elétrico $\vec{E} = E\vec{k}$, vertical, cujo módulo no ponto y é dado pela função

$$E(y, t) = \frac{\sigma(y, t)}{\varepsilon_0} = \frac{V_0}{b} \cos[\omega(t - y/c)]. \quad (9.3)$$

Assim, na linha, as densidades de carga e o campo elétrico podem ser representados como na figura 9.1. À medida que o tempo passa, os "desenhos" das cargas e campos elétricos movem-se para a direita, com a velocidade c .

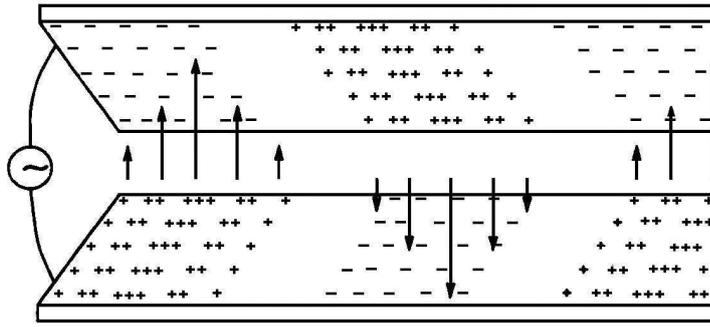


Figura 9.1: Um esboço das cargas nas placas e campo elétrico na linha de transmissão.

As correntes na linha de transmissão são obtidas a partir da relação

$$I(y, t) = \frac{V(y, t)}{Z_{LT}}, \tag{9.4}$$

onde Z_{LT} representa a impedância da parte da linha à direita do ponto y . Como a linha é considerada infinita, o valor dessa impedância é o dado pela eq.(8.4). Por isso,

$$I(y, t) = V_0 \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos[\omega(t - y/c)]. \tag{9.5}$$

O campo magnético $\vec{B} = B\vec{i}$ é horizontal, paralelo ao eixo x . O seu módulo, obtido a partir da lei de Ampère, é dado por

$$B(y, t) = \frac{\mu_0}{a} I(y, t) = \frac{V_0}{bc} \cos[\omega(t - y/c)]. \tag{9.6}$$

As correntes e campo magnético na linha são mostrados na figura 9.2. Neste caso, também, os "desenhos" da corrente e campos magnéticos movem-se para a direita, com velocidade c .

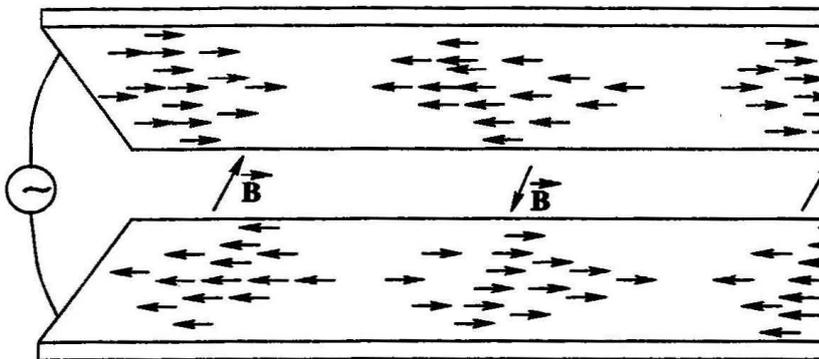


Figura 9.2: Esboço das correntes e campo magnético na linha de transmissão.

• os resultados

Uma linha de transmissão ligada a uma fonte de tensão possui cargas e correntes nas suas faces internas e campos elétrico e magnético em seu interior. No caso de uma linha alimentada por uma fonte com variação cossenoidal, os comportamentos dessas grandezas, ao longo da linha e em função do tempo, são descritos pelas funções

$$\sigma(y, t) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b} \cos[\omega(t - y/c)], \quad (9.7)$$

$$I(y, t) = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} V_0 \cos[\omega(t - y/c)], \quad (9.8)$$

$$E(y, t) = \frac{V_0}{b} \cos[\omega(t - y/c)] \quad (9.9)$$

$$B(y, t) = \frac{V_0}{bc} \cos[\omega(t - y/c)]. \quad (9.10)$$

É importante notar que todas estas funções são proporcionais a V_0 e estão em fase. Assim, os máximos da carga e da corrente coincidem, o mesmo acontecendo com os máximos das intensidades dos campos. O fato de todas estas grandezas terem a mesma dependência do tempo e da posição indica que todas elas se propagam de mesma maneira pelo interior da linha. A velocidade desta propagação, é a mesma da tensão, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, eq.(8.13).

• comprimentos de onda

Os comprimentos de onda dos efeitos eletromagnéticos numa linha de transmissão, alimentada por fontes cossenoidais, estão relacionadas às suas frequências:

$$\lambda = cT = c/f. \quad (9.11)$$

Por exemplo, usando o valor aproximado $c = 3 \times 10^8$ m/s, encontramos para a rede doméstica, que tem a frequência de 60 Hz, o valor $\lambda = 3 \times 10^8 / 60$ m = 5×10^6 m = 5.000 Km. Este comprimento é enorme quando avaliado na escala do corpo humano ou de edifícios ou de cidades. No caso das rádios FM, que emitem em frequências em torno de 100 MHz as ondas têm comprimentos de onda da ordem de $\lambda = 3 \times 10^8 / 10^8$ m = 3m.

• exemplo 1: densidade de carga

Para compreender melhor o funcionamento de uma linha de transmissão, consideramos um sistema formado por duas placas de cobre, paralelas, com 1 cm de largura, 0,1 mm de espessura e separadas pela distância de 2 mm, no interior do qual existe o vácuo. Essa linha é alimentada por uma fonte que varia cossenoidalmente, com amplitude 180V e frequência de 60 Hz.

O cobre, como os demais metais, é formado por uma rede iônica bastante estável, no interior da qual movem-se os elétrons livres. No cobre, a densidade volumétrica de elétrons

livres vale $N = 8,4 \times 10^{28}$ elétrons/m³. Supondo que estes elétrons estejam uniformemente distribuídos pelo interior do metal, podemos pensar que existem $N_L = N^{1/3} = 4,4 \times 10^9$ elétrons ao longo de cada comprimento de 1 metro. Como existe aproximadamente um elétron livre por íon de cobre, esse número corresponde a uma distância $d = 2,3 \times 10^{-10}$ m entre dois íons vizinhos. Essa distância é característica da espessura de cada camada de íons no interior do metal. Ela também indica que, em média, existem um íon e um elétron livre dentro de cada cubo de lado d no interior do metal.

Assim, N_S , o número de elétrons livres por m² na superfície do cobre é dado por

$$N_S = N_L^2 = N_S^{2/3} = 1,9 \times 10^{19} \text{ elétrons/m}^2.$$

A densidade superficial de carga associada à tensão na linha de transmissão é dada pela eq.(9.7) e sua amplitude, neste exemplo, é dada por

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b} = \frac{180}{(4\pi \times 9 \times 10^9) \times (2 \times 10^{-3})} = 0,8 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2}.$$

Sabendo que a carga do elétron tem módulo $e = 1,6 \times 10^{-19} C$, podemos concluir que esse valor de σ_0 corresponde a uma densidade superficial de elétrons N_0 dada por

$$N_0 = \sigma_0/e = \frac{0,8 \times 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19}} = 0,5 \times 10^{13} \text{ elétrons/m}^2.$$

Essa densidade superficial de carga em cada uma das superfícies internas da linha representa um excesso ou falta de elétrons relativamente à quantidade de elétrons livres normalmente existente nestas superfícies.

Por isso, a magnitude do *excesso* de elétrons relativamente ao número de elétrons livres na superfície do metal é dada por

$$N_0/N_L = 0,5 \times 10^{13}/1,9 \times 10^{19} = 0,3 \times 10^{-6}.$$

Em outras palavras, a densidade σ_0 corresponde aproximadamente a um elétron excedente para cada três milhões de elétrons livres existentes na superfície do metal. Se considerarmos todos os elétrons existentes no volume do metal, esta proporção torna-se muito menor ainda. A densidade relativa calculada acima mostra que é legítimo considerar que as cargas na linha de transmissão são fenômenos superficiais, envolvendo apenas algumas camadas de átomos na parte *externa* do metal. O mesmo vale para as correntes na linha, já que elas são devidas ao movimento dos *excessos* de carga.

• a corrente elétrica

A função $I(y, t)$, dada pela eq.(9.8), descreve as correntes elétricas ao longo da linha de transmissão. Esse resultado indica que os excessos de carga movem-se com a velocidade

da luz, ao longo da linha. Isso pode parecer contraditório com a teoria da relatividade, já que elétrons têm massa e, portanto, não podem se mover com a velocidade da luz. Entretanto, esta contradição é apenas aparente. Quem se move com a velocidade da luz é o *excesso* de elétrons, não os próprios elétrons. Estes se movem com velocidades bem mais baixas.

Existe uma relação entre as funções $\sigma(y, t)$ e $I(y, t)$ que descrevem, respectivamente, os excessos de carga e os movimentos destes excessos. Essa relação é um pouco sutil e precisa ser pensada com atenção.

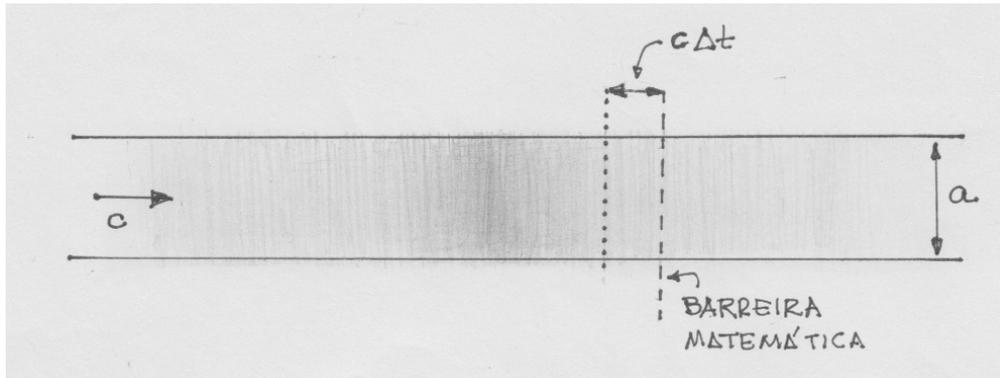


Figura 9.3:

A figura 9.3 representa a densidade de carga $\sigma(y, t)$ na face interna da linha de transmissão, em um instante fixo. Para calcular a corrente elétrica em um dado ponto, é preciso colocar ali uma barreira matemática e calcular a carga que a atravessa num intervalo de tempo Δt . Como os excessos de carga se movem para a direita com velocidade c , esta carga é dada por

$$\Delta Q(y, t) = a c \Delta t \sigma(y, t) \quad (9.12)$$

e, conseqüentemente, a corrente vale

$$\frac{\Delta Q(y, t)}{\Delta t} = I(y, t) = a c \sigma(y, t). \quad (9.13)$$

Este resultado está de acordo com as eqs.(9.7) e (9.8) e indica que a corrente envolve o produto da densidade de carga pela velocidade de propagação da onda. Ele mostra que a corrente é devida ao arrastamento da densidade de carga. Como a densidade representa o excesso de cargas num ponto, a corrente representa o movimento desse excesso de cargas. É preciso ter cuidado com a eq.(9.13), pois o seu lado esquerdo envolve a função $Q(y, t)$, que representa a quantidade de carga que atravessa a barreira matemática por unidade de tempo.

Neste problema, existe uma outra função, representada por $q(y, t)$, que corresponde à carga contida num intervalo Δy da linha de transmissão. Ela é dada por

$$q(y, t) = a \Delta y \sigma(y, t). \quad (9.14)$$

Sua derivada temporal, calculada usando a eq.(9.7), vale

$$\frac{\partial q(y, t)}{\partial t} = -a\Delta y \frac{\epsilon_0 V_0}{b} \omega \sin [\omega (t - y/C)] . \quad (9.15)$$

Este resultado envolve a função seno e é completamente diferente do lado direito da eq.(9.13). Isso acontece porque a derivada temporal da função $q(y, t)$ deve ser entendida no contexto da equação da continuidade. Assim $\partial q(y, t)/\partial t$ representa a variação da concentração de carga num dado ponto da linha. No caso da figura 9.3, ela corresponde à diferença entre as cargas que *entram* pela linha pontilhada e *saem* pela barreira matemática, por unidade de tempo.

A corrente $I(y, t)$ na linha de transmissão pode ter valores positivos e negativos. No contexto da figura 9.3, correntes positivas correspondem a excessos de cargas positivas que se movem para a direita enquanto que correntes negativas são produzidas por excessos de cargas negativas, que *também* se movem para a direita.

• a velocidade dos elétrons e a velocidade da onda

Na linha de transmissão, cargas e correntes se movem com velocidade c . Esses resultados podem nos induzir a pensar que, neste processo, os elétrons também se movem com velocidade c , o que estaria em contradição com a relatividade. Nesta seção, mostramos que essa idéia **não** é correta e que as velocidades individuais dos elétrons são bastante baixas. Para tanto, consideramos a figura 9.4, que mostra em detalhe um trecho de uma das lâminas que formam a linha de transmissão, no caso em que ela é alimentada por uma fonte cuja tensão é $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Essa lâmina é metálica e, portanto, constituída de íons positivos e elétrons livres. Esses dois tipos de densidade de carga são representados, na figura 9.4, por hachuras em direções diferentes. Nas regiões em que as duas densidades coexistem e se superpõem, a densidade volumétrica total de cargas ρ é nula. Entretanto, nas superfícies em que o metal está em contato com o campo elétrico, os elétrons são levemente puxados para fora do metal ou empurrados para dentro dele, dependendo do sentido desse campo. Na situação da figura o campo \vec{E} é paralelo ao eixo z e os movimentos dos elétrons ocorrem, também, na direção z . Por isso, o deslocamento de um elétron que está num ponto de coordenada y da superfície da lâmina metálica é descrito por um vetor

$$\vec{r}(y, t) = r_0 \vec{k} \cos [\omega (t - y/c)] , \quad (9.16)$$

medido em relação à superfície da densidade de íons positivos. Assim, a primeira conclusão importante desta discussão é que cada elétron descreve um movimento harmônico simples numa direção *ortogonal* à direção de propagação de onda.

A velocidade de uma elétron que oscila na superfície do metal é dada por

$$\vec{V}(y, t) = \frac{d\vec{r}(y, t)}{dt} = -r_0 \omega \vec{k} \sin [\omega (t - y/c)] . \quad (9.17)$$

A amplitude r_0 dessa oscilação pode ser calculada considerando uma região de largura Δy em torno do ponto P da figura 9.4. Ali existe uma densidade de carga **negativa** de

módulo σ_0 , descrita pela eq.(9.7). Essa densidade permite-nos calcular a carga contida em uma pequena área de lados a e Δy , sobre a superfície interna da fita, como sendo

$$\Delta q = \sigma_0 a \Delta y. \quad (9.18)$$

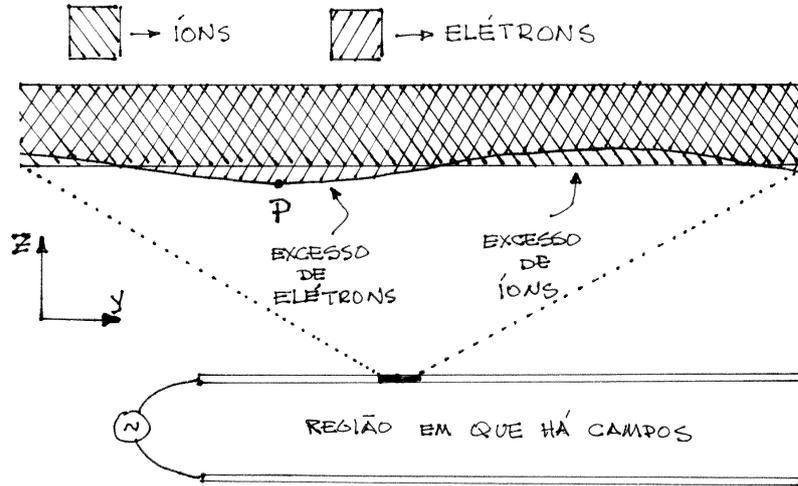


Figura 9.4:

Por outro lado, a figura 9.4 informa que a carga dada pela eq.(9.7) está, na verdade, distribuída em um pequeno *volume* de lados a , Δy e r_0 . Por isso a carga Δq também pode ser escrita como

$$\Delta q = \rho a \Delta y r_0, \quad (9.19)$$

com $\rho = eN$, sendo N a densidade volumétrica de elétrons livres no metal. Comparando as eqs.(9.18) e (9.19), concluímos que

$$r_0 = \frac{\sigma_0}{eN}. \quad (9.20)$$

No caso da linha de transmissão discutida no exemplo 1,

$$r_0 = \frac{0,8 \times 10^{-6} \text{C/m}^2}{[1,6 \times 10^{-19} \text{C}] \times [8,4 \times 10^{28} / \text{m}^3]} = 0,06 \times 10^{-15} \text{m}.$$

Lembrando que 10^{-15}m é a escala do tamanho de um próton, vemos que r_0 é a amplitude de uma oscilação bastante pequena! Se ela for alimentada por uma fonte que oscila com 60Hz , a amplitude da velocidade do elétron na eq.(9.17) vale

$$r_0 = \omega r_0 = [2\pi 60 / \text{s}] \times [0,06 \times 10^{-15} \text{m}] = 22,6 \times 10^{-15} \text{m/s},$$

que é, de fato, muito menor do que a velocidade c de propagação da onda.

• os campos

Em todos os pontos do interior da linha de transmissão, os módulos dos campos elétrico e magnético são dados pelas eqs.(9.9) e (9.10). Introduzindo os versores das respectivas direções temos

$$\vec{E}(y, t) = \frac{V_0}{b} \vec{k} \cos[\omega(t - y/c)], \quad (9.21)$$

$$\vec{B}(y, t) = \frac{V_0}{bc} \vec{i} \cos[\omega(t - y/c)]. \quad (9.22)$$

Esses campos possuem quatro propriedades muito importantes que, como veremos adiante, são compartilhadas por todas ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo.

1. \vec{E} e \vec{B} satisfazem equações de onda, como dada na eq.(8.15).
2. Os módulos de \vec{E} e \vec{B} , em cada ponto e em cada instante, são relacionados por

$$|\vec{E}| = |\vec{B}|/c \quad (9.23)$$

3. \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares entre si.
4. \vec{E} e \vec{B} são transversais às suas direções de propagação,

As figs. 9.5a. e 9.5b. representam os campos \vec{E} e \vec{B} no interior da linha de transmissão, em dois instantes diferentes.

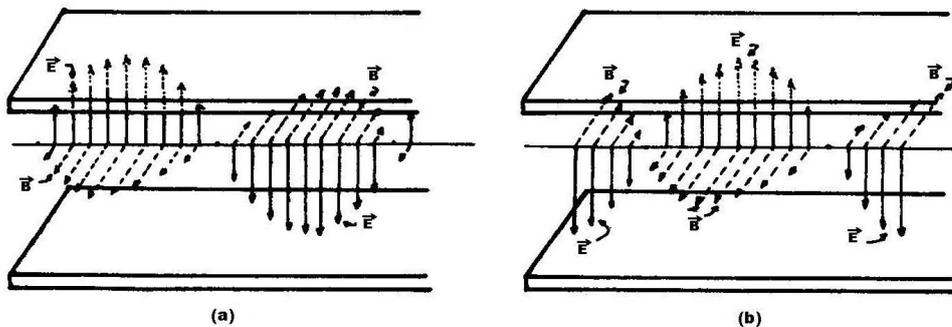


Figura 9.5: \vec{E} e \vec{B} na linha de transmissão em dois instantes sucessivos.

• a propagação dos campos

No interior da linha de transmissão, o campo elétrico é criado pelas cargas concentradas em certos pontos e o campo magnético é devido ao movimento destas cargas. No cálculo de \vec{E} e \vec{B} usamos, respectivamente, as leis de Gauss e Ampère na forma integral. Assim, do ponto de vista destas leis, é razoável pensar que as cargas criam \vec{E} e as correntes criam \vec{B} , sendo as variações destes campos com o tempo explicadas pelas variações das suas fontes com o tempo.

Esta não é, entretanto, a única explicação possível para o que acontece com os campos \vec{E} e \vec{B} no interior da linha de transmissão. A explicação alternativa, que discutimos adiante corresponde a uma interpretação dos mesmos fenômenos, de um ponto de vista diferente. Do ponto de vista físico, ela é mais fundamental que a anterior e explica porque a velocidade de propagação das ondas no interior da linha de transmissão é a mesma que a da luz. Ela é baseada na idéia que, em cada ponto, o campo magnético, por ser variável com o tempo, cria um campo elétrico. Este, entretanto, também varia com o tempo, gerando um campo magnético. Mas esse campo gera um campo elétrico, que por sua vez também gera...

Para compreender melhor esta explicação alternativa, imagine um microlaboratório de dimensões dx, dy, dz , no interior da linha de transmissão. Com um pouco mais de esforço da imaginação, coloque-se no interior do microlaboratório, sentado a uma mesa, como mostra a figura 9.6.

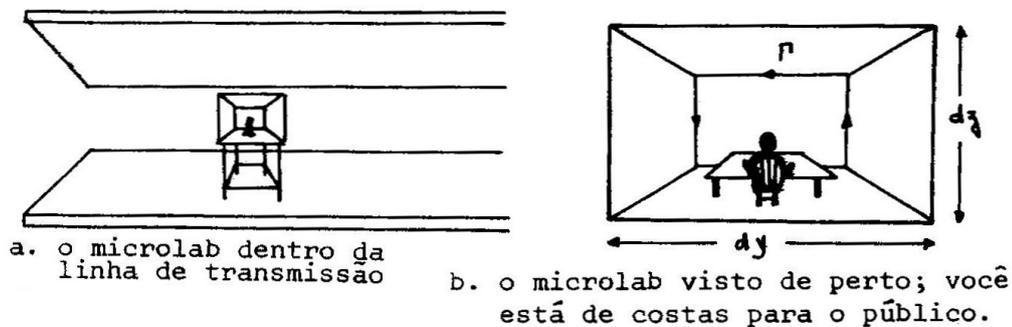


Figura 9.6: O microlab.

O microlaboratório é, agora, o seu universo. Usando detetores sensíveis, você consegue medir os campos elétrico e magnético no interior do laboratório. O campo elétrico é vertical e, em cada instante, uniforme ao longo de planos paralelos às paredes esquerda e direita, mas assume valores diferentes em cada uma dessas paredes. Com o passar do tempo, você vê o vetor campo elétrico furando o chão e o teto do laboratório, ora de cima para baixo, ora de baixo para cima.

O campo magnético é horizontal, e também uniforme ao longo de planos paralelos às paredes esquerda e direita. Da mesma forma que o campo elétrico, o campo magnético é, em cada instante, diferente em cada uma das paredes. O vetor campo magnético ora entra no laboratório pela parede da frente, ora entra pela parede de trás.

Depois de efetuar muitas medidas, você consegue chegar às seguintes expressões para os campos elétrico e magnético na parede esquerda, situada no plano $y = y_e$

$$\vec{E}_e = E_0 \vec{k} \cos[\omega(t - y_e/c)], \quad \vec{B}_e = B_0 \vec{i} \cos[\omega(t - y_e/c)]. \quad (9.24)$$

Para a parede direita situada no plano $y = y_d = y_e + \Delta y$, é possível escrever

$$\vec{E}_d = E_0 \vec{k} \cos[\omega(t - y_d/c)], \quad \vec{B}_d = B_0 \vec{i} \cos[\omega(t - y_d/c)]. \quad (9.25)$$

Os seus experimentos mostram claramente que, em cada instante,

$$\vec{E}_e \neq \vec{E}_d, \quad \vec{B}_e \neq \vec{B}_d. \quad (9.26)$$

Dentro do microlab, você observa que os campos elétricos e magnéticos nas paredes direita e esquerda são diferentes. O seu problema passa a ser, então, elaborar uma explicação para esta diferença, baseada em algo existente no interior do microlaboratório. Não vale olhar para fora!

Parte do problema é resolvido pela lei de Faraday, que permite atribuir a diferença entre E_e e E_d à variação do campo magnético com o tempo. Para compreender isso, escrevemos a lei de Faraday para o circuito Γ da fig. 9.5, que delimita a parede à sua frente no microlaboratório. A superfície da parede é S .

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds. \quad (9.27)$$

Se o caminho Γ é percorrido no sentido anti-horário, a normal \vec{n} corresponde ao versor \vec{i} e, temos

$$(E_d - E_e)dz = -\int \frac{\partial B_x}{\partial t} ds. \quad (9.28)$$

Deste modo, podemos afirmar que a diferença entre E_e e E_d é causada pelo campo magnético variável com o tempo. O fato de o microlab ser muito pequeno permite que se retire $\partial B_x / \partial t$ do interior da integral. Temos, então,

$$E_d - E_e = -\frac{\partial B_x}{\partial t} dy. \quad (9.29)$$

O campo elétrico é função de x , y , z e t , sendo sua diferencial total dada por

$$d\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt. \quad (9.30)$$

No caso do microlaboratório

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0, \quad (9.31)$$

e, se os campos nas paredes esquerda e direita forem considerados num instante fixo, podemos escrever

$$E_d - E_e = \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \quad (9.32)$$

Substituindo esta expressão na eq.(9.29), obtemos

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (9.33)$$

Esta equação corresponde à lei de Faraday na forma diferencial e exprime a idéia que a variação do campo magnético dentro do microlaboratório é responsável pela diferença entre os campos elétricos nas paredes esquerda e direita.

De modo totalmente análogo você pode atribuir a diferença entre B_e e B_d à variação do campo elétrico com o tempo. Para tanto, basta usar a equação de Ampère-Maxwell na forma diferencial

$$-\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (9.34)$$

Resumindo o conhecimento que você, que vive no microlab, tem do seu universo: por meio de detetores foi possível fazer um mapeamento dos vetores \vec{E} e \vec{B} em todos os pontos do laboratório em diversos instantes; a partir deste mapeamento, foi possível concluir que \vec{E} e \vec{B} nas paredes esquerda e direita são funções cíclicas do tempo dadas pelas equações (9.21) e (9.22); com base nas equações de Maxwell foi possível atribuir a diferença entre os campos elétricos nas paredes esquerda e direita à variação do campo magnético com o tempo e a variação espacial de \vec{B} também foi explicada de modo análogo.

Um aspecto muito importante dessas explicações é que elas se baseiam somente em fatos que ocorrem dentro do laboratório. Deste modo, as equações de Maxwell permitem que você descreva o que acontece no laboratório usando somente fatos ocorridos dentro dele. Note que, para explicar as variações dos campos ocorridos dentro do microlab, você não precisou saber que entidades haviam criado os campos no seu exterior. Em outras palavras, as equações de Maxwell permitem que você tenha um *conhecimento autônomo* do seu pequeno universo.

No microlab, então, existem campos elétricos e magnéticos que variam com o tempo, gerando campos magnéticos e elétricos, respectivamente. Tome, por exemplo, o campo magnético: ele, ao mesmo tempo, é criado pela variação do campo elétrico com o tempo e cria a variação espacial do mesmo campo elétrico. Em outras palavras, as variações do campo elétrico com o tempo e com o espaço estão ligadas. A criação do campo magnético é descrita pela equação (9.34), enquanto que a do campo elétrico o é pela eq. (9.33). Para achar a ligação entre as variações espaciais e temporais do campo elétrico, basta eliminarmos \vec{B} dessas duas equações. Derivando a eq. (9.33) em relação a y , obtemos

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial t}. \quad (9.35)$$

Usando a eq.(9.34) encontramos

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0. \quad (9.36)$$

De modo análogo pode-se obter

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0. \quad (9.37)$$

Estas duas expressões são equações de onda unidimensionais discutidas na aula 8 e, nos dois casos, a velocidade de propagação é

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}. \quad (9.38)$$

Na aula 8 vimos, também, que essa velocidade é idêntica a c , a velocidade da luz. Este resultado fornece uma pista importante acerca dos mecanismos básicos que determinam o que acontece na linha de transmissão. Cargas, correntes, tensão e campos se propagam com a velocidade da luz no interior da linha porque, no vácuo, os campos se propagam com essa velocidade. A propagação dos campos é o efeito básico, primordial. Ao se propagarem, os campos arrastam com eles as densidades de carga e corrente. Na verdade, uma linha de transmissão é um *guia de onda*, o seu papel é conduzir a onda de um lugar a outro. Nesse processo, a onda se propaga de maneira autônoma.

Em resumo, no interior do microlab não existem cargas ou correntes elétricas. Mas, mesmo assim, podem haver lá dentro campos elétricos e magnéticos que, por variarem com o tempo, criam campos magnéticos e elétricos respectivamente. Usando as equações de Maxwell, podemos entender tudo o que acontecia com esses campos dentro do microlab *de modo autônomo*, ou seja, sem precisar saber o que acontece fora dele.

Feitos esses comentários, você pode abandonar o microlab, E retornar ao macrolab, ou seja, à Terra, cheia de luz. É importante perceber que, por exemplo, quando se estuda a luz do Sol num laboratório na Terra, tudo se passa como se estivéssemos no microlab. Sim, porque desejamos estudar a luz numa região do espaço distante, das cargas que a produziu. E uma das características das equações de Maxwell é que elas permitem o estudo das ondas eletromagnéticas de modo independente de como elas foram produzidas. Como no microlab.

• exercícios

1. A velocidade de propagação da tensão no interior da linha de transmissão é $v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ e independe de todas as características particulares do sistema considerado. Qual o significado disto?
2. (**difícil**) Neste problema $I(y, t)$ é diferente de $dQ(y, t)/dt$. Por que isto ocorre ?
3. Uma linha de transmissão formada por duas placas planas e paralelas, está sujeita a tensão $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Faça um desenho representando cargas, correntes e os campos \vec{E} e \vec{B} nos instantes:
 - a) $t = \pi/2\omega$;
 - b) $t = 5\pi/\omega$.
4. Descreva o comportamento de uma carga elétrica e de uma bússola colocadas no interior da linha de transmissão.

Capítulo 10

linha de transmissão: energia

• potência e o valor de Poynting

Quando uma fonte de tensão é acoplada a uma linha de transmissão, as superfícies internas do metal ficam recobertas por densidades de cargas que se movem e, na região entre elas, passam a existir campos elétricos e magnéticos. São esses campos que carregam, ao longo da linha, a energia fornecida pela fonte, pois a eles está associada uma densidade volumétrica de energia dada por

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 . \quad (10.1)$$

Nosso interesse, agora, é obter expressões que relacionem a potência fornecida pelo gerador com o campo eletromagnético entre as placas, assim como entender a maneira como essa energia fornecida se propaga pela linha.

A potência fornecida pelo gerador na extremidade da linha, que indicamos por $P(y = 0, t)$, pode ser escrita como

$$P(0, t) = V(0, t) I(0, t). \quad (10.2)$$

A tensão entre as placas vale, na extremidade

$$V(0, t) = |\vec{E}(0, t)| b, \quad (10.3)$$

onde b é a distância entre elas. Por outro lado, a eq.(9.7) da aula anterior nos permite escrever a corrente em termos do campo magnético na região entre as placas como

$$I(0, t) = \frac{a}{\mu_0} |\vec{B}(0, t)|. \quad (10.4)$$

Juntando esses resultados, expressamos a potência fornecida à linha de transmissão em termos de \vec{E} e \vec{B} , como

$$P(0, t) = \frac{|\vec{E}(0, t)| |\vec{B}(0, t)|}{\mu_0} ab. \quad (10.5)$$

Essa equação nos dá a energia fornecida ao sistema, por unidade de tempo, no plano $y = 0$, em termos dos campos elétrico e magnético nesse mesmo plano¹. Se considerarmos um plano y qualquer da linha de transmissão, é o trecho situado entre este plano e o gerador que “fornece” energia ao restante do sistema. O potencial aí vale $V(y, t)$, a corrente $I(y, t)$, e o mesmo cálculo anterior nos leva a

$$P(y, t) = \frac{|\vec{E}(y, t)||\vec{B}(y, t)|}{\mu_0} ab. \quad (10.6)$$

Como a energia é carregada pelos campos, a grandeza $P(y, t)$ representa a energia que, por unidade de tempo, passa através do plano y em direção ao resto da linha. Se notarmos que essa energia é proporcional à área entre as placas ab , é natural introduzir a idéia de fluxo de energia por unidade de área como sendo

$$\frac{P(y, t)}{ab} = \frac{|\vec{E}(y, t)||\vec{B}(y, t)|}{\mu_0}. \quad (10.7)$$

Esta expressão representa a energia que, em um certo instante, atravessa o plano y , por unidade de tempo e de área. Como esse fluxo de energia tem, também, uma direção e um sentido, é útil construirmos um vetor com módulo dado pela eq.(10.7). Lembrando que \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares entre si e que a energia flui ao longo da linha, paralelamente ao eixo y , este vetor deve ser perpendicular a \vec{E} e \vec{B} . Por isso, ele é definido como

$$\vec{S}(y, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(y, t) \times \vec{B}(y, t). \quad (10.8)$$

O símbolo \vec{S} é usualmente atribuído a essa grandeza, conhecida como vetor de Poynting. A relação entre \vec{E} , \vec{B} e \vec{S} é mostrada na figura 10.1.

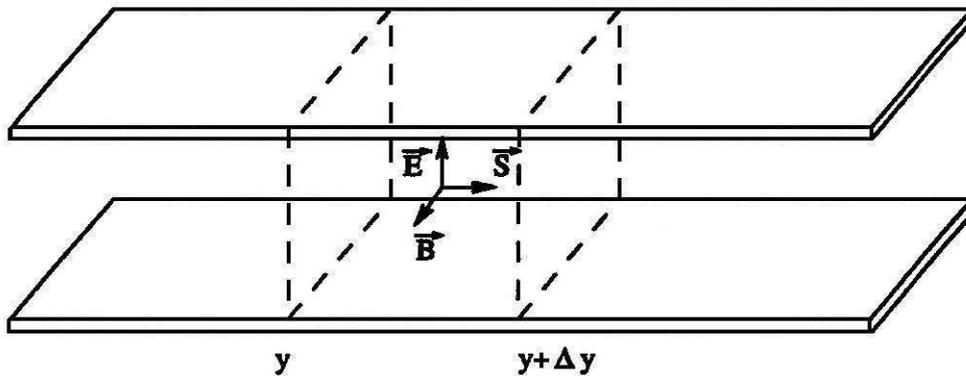


Figura 10.1: O fluxo de energia através da linha de transmissão.

¹O plano y é o plano perpendicular ao eixo y e que passa pelo ponto y .

• a conservação da energia e o teorema de Poynting

No interior da linha de transmissão, existem campos elétricos e magnéticos e, portanto, existe também uma quantidade de energia armazenada em cada região. A energia é uma grandeza conservada e podemos expressar matematicamente essa conservação imitando o caso da carga elétrica. A conservação da carga é representada pela equação da continuidade

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dA = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad (10.9)$$

onde S é uma superfície fechada e V é o volume encerrado por essa superfície. A mesma idéia pode, também, ser expressa na forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (10.10)$$

Na linha de transmissão que estudamos, foram desprezadas perdas de energia devidas ao efeito Joule e, por isso, precisamos considerar apenas a energia eletromagnética. O vetor \vec{S} é análogo a \vec{j} , pois ele está relacionado aos fluxos de energia através de superfícies. O análogo à densidade volumétrica de carga ρ é a densidade volumétrica de energia u , dada pela eq.(10.1). Por isso, a conservação da energia eletromagnética é expressa por

$$\int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dA = -\frac{d}{dt} \int_V u dV \quad (10.11)$$

ou, alternativamente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (10.12)$$

onde

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}. \quad (10.13)$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2. \quad (10.14)$$

Este resultado representa o **teorema de Poynting**, e é válido para qualquer sistema eletromagnético. A seguir, apresentamos a sua demonstração formal, usando as equações de Maxwell na forma diferencial.

Para dois vetores \vec{A} e \vec{B} quaisquer, vale a relação

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (10.15)$$

que pode ser demonstrada calculando explicitamente o produto vetorial e, em seguida, o divergente. Assim²

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \partial_x(A_y B_z - A_z B_y) + \partial_y(A_z B_x - A_x B_z) + \partial_z(A_x B_y - A_y B_x). \quad (10.16)$$

²Introduzimos aqui uma notação mais econômica para derivadas parciais, escrevendo $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \partial_x$, $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \partial_y$, $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \partial_z$, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t$.

Efetuada as derivações temos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\partial_x A_y) B_z - (\partial_x A_z) B_y + (\partial_y A_z) B_x - (\partial_y A_x) B_z \\ &+ (\partial_z A_x) B_y - (\partial_z A_y) B_x - (A \leftrightarrow B).\end{aligned}\quad (10.17)$$

Reorganizando os termos, encontramos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= [\partial_y A_z - \partial_z A_y] B_x + [\partial_z A_x - \partial_x A_z] B_y \\ &[4mm] + [\partial_x A_y - \partial_y A_x] B_x - (A \leftrightarrow B),\end{aligned}\quad (10.18)$$

que é o resultado (10.15). Aplicando-o ao vetor \vec{S} , escrevemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})].\quad (10.19)$$

Os campos \vec{E} e \vec{B} estão *entre as placas*, ou seja, numa região onde não existem cargas e correntes. Como as equações de Maxwell na forma diferencial são locais e relacionam \vec{E} e \vec{B} num ponto com ρ e \vec{j} no mesmo ponto, para o *interior* da linha valem as relações

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\quad (10.20)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\mu_0} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2} + \varepsilon_0 \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right] = -\frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}\quad (10.21)$$

• exemplo 1.

Cálculo da energia \mathcal{E} que flui pela linha de transmissão, alimentada por uma fonte de tensão $V(t) = V_0 \cos \omega t$, durante um período T . Existem várias maneiras de resolver este problema.

solução 1. Como não há dissipação, a energia que flui pela linha é a que foi fornecida pela fonte em instantes anteriores. A energia fornecida pela fonte entre os instantes t e $t + T$ independe de t e pode ser expressa, em termos da corrente $I(t)$ dada pela eq.(9.5). Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^T dt V(t) I(t) = \int_0^T dt V_0 \cos(\omega t) \frac{V_0 a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t) \\ &= \frac{T}{2} V_0^2 \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{V_0^2}{2} \frac{2\pi}{\omega} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.\end{aligned}\quad (10.22)$$

solução 2. Uma alternativa consiste em notar que a energia que flui pela linha durante um período é igual à energia distribuída em um comprimento de onda no seu interior. Essa idéia é expressa por

$$\mathcal{E} = \iiint dV \left[\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right], \quad (10.23)$$

onde a integral é efetuada sobre o volume $V = a b \lambda$. Como \vec{E} e \vec{B} dependem apenas de y , temos

$$\mathcal{E} = ab \int_0^\lambda dy \left[\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \quad (10.24)$$

Usando os valores de E e B dados pelas eqs.(9.9 e (9.10), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= ab \int_0^\lambda dy \left[\frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2 b^2} \cos^2(\omega t - \omega y/c) + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0^2}{2\mu_0 b^2} \cos^2(\omega t - \omega y/c) \right] \\ &= \frac{a}{b} \frac{V_0^2}{2} \varepsilon_0 \lambda = \frac{a}{b} \frac{V_0^2}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\mu_0 b_0}} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{2\pi}{\omega}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

solução 3. Uma outra possibilidade consiste em calcular a energia que flui através da linha usando o vetor de Poynting. Nesse caso, escrevemos

$$\mathcal{E} = \int_0^T dt \left[\iint_A \vec{S} \cdot \vec{n} dA \right], \quad (10.26)$$

onde A é a área de uma seção transversal à linha.

Na situação da figura 10.1, o vetor $\vec{S} = S \hat{j}$ e a normal à área também é dada pelo versor \hat{j} . Deste modo, $\vec{S} \cdot d\vec{A} = S dA$ e temos

$$\mathcal{E} = \int_0^T dt \left[\iint_A S dA \right]. \quad (10.27)$$

O passo seguinte consiste em notar que o módulo de \vec{S} é constante sobre a superfície A , o que permite escrever

$$\iint_A S dA = S \iint_A dA = S ab. \quad (10.28)$$

O módulo de \vec{S} é obtido a partir da eq.(10.8). Usando os resultados (9.9) e (9.10) e escrevemos

$$\iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\omega t - \omega y/c) \quad (10.29)$$

e, portanto,

$$\mathcal{E} = \int_0^T dt \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\omega t - \omega y/c) = \frac{1}{2} \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2\pi}{\omega} \quad (10.30)$$

• exemplo 2.

Cálculo do fluxo de energia em um trecho de fio metálico ligado a uma bateria, como na figura 10.2. Este é um caso muito interessante de aplicação do teorema de Poynting. A nossa questão consiste em saber por onde chega e quanto vale a energia dissipada no pedacinho de fio, cuja imagem ampliada aparece no lado direito da figura.

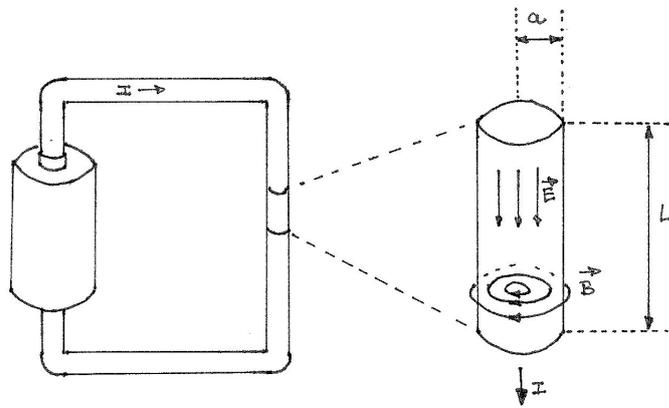


Figura 10.2:

No interior do fio, o campo elétrico, devido à bateria, é dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} \quad (10.31)$$

onde σ é a condutividade elétrica. Ela está relacionada à resistência R do pedacinho de fio por

$$\sigma = \frac{L}{\pi a^2 R}, \quad (10.32)$$

sendo πa^2 a área da seção transversal do fio e L , o comprimento do pedaço considerado. O campo elétrico pode, assim, ser expresso como

$$\vec{E} = -\frac{I}{LR} \hat{e}_z. \quad (10.33)$$

O campo magnético no interior do fio, devido à corrente, é dado por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta \quad (10.34)$$

onde r é a distância do ponto considerado ao eixo de simetria. Esses resultados para \vec{E} e para \vec{B} valem para r variando desde o eixo do fio até a sua superfície. Por isso, na região $0 \leq r \leq a$, o vetor de Poynting vale

$$\vec{S} = -\frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_r \quad (10.35)$$

O sinal negativo nesta expressão é muito importante, pois ele indica que a energia eletromagnética fornecida pela bateria *entra* no fio radialmente, *através da sua superfície lateral*.

Usando os valores de \vec{E} e \vec{B} dados por (10.33) e (10.34), para a superfície lateral ($r = a$), obtemos

$$\vec{S} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{IR}{L} \right) \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \right) \vec{e}_r. \quad (10.36)$$

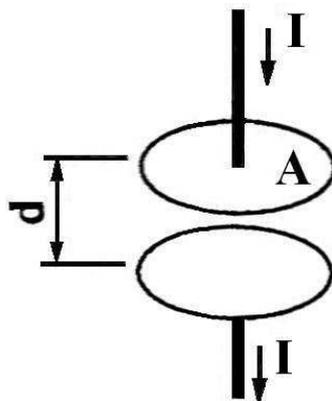
A potência *fornecida ao fio* através da sua superfície cilíndrica lateral vale, portanto,

$$P = \iint_A \vec{S} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{IR}{L} \right) \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \right) 2\pi b L = RI^2. \quad (10.37)$$

Como não há acúmulo de energia no fio, a potência fornecida pela bateria é igual à dissipada pelo efeito Joule.

• exercícios

1. A figura mostra um capacitor de placas paralelas, em processo de carga.



a) Mostre que o vetor de Poynting \vec{S} é, em cada ponto, radial e aponta para dentro do volume cilíndrico compreendido entre as placas.

b) A relação entre o fluxo de energia por unidade de tempo que penetra na região entre as placas, calculado por integração do vetor de Poynting sobre a superfície lateral e a taxa de variação de energia eletrostática armazenada no capacitor é dada por

$$\iint_A \vec{S} \cdot \vec{n} dA = Ad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right).$$

Desprezando os efeitos de borda para o campo \vec{E} , demonstre esta relação.

2. Um gerador está ligado à extremidade de uma linha de transmissão, formada por duas placas planas e paralelas, de largura a , comprimento infinito e separadas por uma distância b . A tensão fornecida pelo gerador é $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$.

a) Desenhe as cargas ao longo da linha de transmissão no instante $t = 7T/2$, sendo T o período de oscilação de $V(t)$. Faça um gráfico desta carga em função da posição, para o mesmo instante.

b) Desenhe os campos \vec{E} e \vec{B} no interior da linha, no mesmo instante anterior. Quais os valores máximos destes campos?

c) Escreva o vetor de Poynting no plano y e no instante t . Como ele se relaciona à tensão e corrente neste ponto?

3. Refaça o exercício 2 para o caso de uma linha de transmissão formada por um cabo coaxial de raios interno e externo a e b , na extremidade $y = 0$ da qual é ligado um gerador que fornece uma tensão dado por $V(t) = \cos(\omega t)$.

Capítulo 11

ondas no vácuo

Ondas eletromagnéticas podem se propagar no vácuo, ou seja, em regiões do espaço onde não existem cargas ou correntes elétricas. A discussão desse tema será feita em duas partes: inicialmente, mostramos que as equações de Maxwell no vácuo levam a equações de onda para \vec{E} e \vec{B} . Em seguida, passamos a estudar uma classe particular de soluções dessas equações, correspondente às ondas planas.

• equação de onda

Numa região onde não há cargas ou correntes elétricas, temos $\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$. Nessa região, as equações de Maxwell são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (11.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (11.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (11.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (11.4)$$

As expressões (11.2) e (11.3) envolvem simultaneamente os campos \vec{E} e de \vec{B} . Podemos desacoplá-las, obtendo uma equação para \vec{E} e outra para \vec{B} . Inicialmente, calculamos o rotacional de (11.2), dado por

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (11.5)$$

Usando a equação (11.3), obtemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (11.6)$$

Precisamos, agora, calcular o lado esquerdo desta equação. Para tanto, usamos o fato de que o duplo rotacional de um vetor qualquer \vec{V} é igual a

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \left(\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \right). \quad (11.7)$$

Para demonstrar esta relação, basta calcularmos explicitamente o seu lado esquerdo em coordenadas cartesianas. O rotacional de \vec{V} é dado por

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = (\partial_y V_z - \partial_z V_y) \vec{i} + (\partial_z V_x - \partial_x V_z) \vec{j} + (\partial_x V_y - \partial_y V_x) \vec{k} \quad (11.8)$$

e o duplo rotacional vale

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= [\partial_y (\partial_x V_y - \partial_y V_x) - \partial_z (\partial_z V_x - \partial_x V_z)] \vec{i} \\ &+ [\partial_z (\partial_y V_z - \partial_z V_y) - \partial_x (\partial_x V_y - \partial_y V_x)] \vec{j} \\ &+ [\partial_x (\partial_z V_x - \partial_x V_z) - \partial_y (\partial_y V_z - \partial_z V_y)] \vec{k}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Considere, por exemplo, a componente x deste resultado. Somando e subtraindo $\partial^2 V_x / \partial x^2$ a ele e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})]_x &= [\partial_x (\partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) V_x] \\ &= [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}]_x. \end{aligned} \quad (11.10)$$

A demonstração desta igualdade para as componentes y e z é feita de modo análogo, ficando provada a relação (11.7).

Assim, o duplo rotacional do campo elétrico é dado por

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right). \quad (11.11)$$

No vácuo o divergente do campo elétrico é nulo, como mostra a equação (11.1). Deste modo, usando este resultado, podemos escrever a equação (11.6) como

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.12)$$

As constantes ε_0 e μ_0 estão relacionadas à velocidade de propagação da luz no vácuo por $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ e, portanto,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.13)$$

Esta é a equação de onda para o campo elétrico. A equação para o campo magnético pode ser obtida de modo totalmente análogo, a partir do rotacional da eq.(11.3),

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.14)$$

As soluções das eqs.(11.14) e (11.15) descrevem ondas tridimensionais. Apesar de os campos \vec{E} e \vec{B} aparecerem isoladamente nessas expressões, é muito importante notar que não existem ondas puramente elétricas ou puramente magnéticas, já que o acoplamento entre \vec{E} e \vec{B} , determinado pelas equações de Maxwell (11.2) e (11.3), foi essencial à obtenção das equações de onda. Esse acoplamento apenas deixou de ser diretamente visível. Por isso, o correto é pensar em *ondas eletromagnéticas*.

Um outro fato importante, relacionado às equações de onda, é que elas podem admitir soluções que não satisfazem as equações de Maxwell. Se isto acontecer, a solução deve ser descartada. Um exemplo de uma situação deste tipo será visto no estudo de ondas planas monocromáticas, na seção seguinte.

• luz é onda eletromagnética

Na obtenção das equações de onda para \vec{E} e \vec{B} , usamos o resultado $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, apresentado pela primeira vez na aula 8. Entretanto, cabe aqui um comentário sobre a sua importância histórica. Maxwell, ao estudar equações de onda dos campos elétrico e magnético, sugeriu que se medisse experimentalmente a velocidade de propagação. No entanto, na época, não havia aparelhos capazes de produzir variações do campo elétrico suficientemente rápidas para permitir a sua medição direta. Então, Maxwell sugeriu que se medissem cuidadosamente as constantes μ_0 e ε_0 , de modo que essa velocidade pudesse ser obtida a partir de $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Feitas estas medidas, obteve-se $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sim 300.000 \text{ Km/s}$. Mas esta era c , a velocidade de propagação da luz no vácuo, que à época de Maxwell já era bastante bem conhecida. A respeito desta igualdade numérica, A.D'Abro escreve¹ “*A conclusão era óbvia. A menos que fossemos supor que esta extraordinária coincidência nos valores destas duas velocidades características, a da indução eletromagnética e a das ondas de luz, era devida ao acaso cego, não havia outra alternativa senão reconhecer que o que nós comumente chamávamos de um raio de luz não era nada mais que uma série de oscilações no campo eletromagnético, propagadas de ponto a ponto. Ondas eletromagnéticas e ondas luminosas eram, então, uma coisa só.*”

Deste modo, a igualdade numérica entre $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ e c foi historicamente interpretada como a manifestação de algo mais profundo, a identidade entre ondas eletromagnéticas e luz.

• ondas planas

As equações de onda para os campos elétrico e magnético, dadas pelas eqs.(11.13) e

¹A.D'Abro, the Evolution of Scientific Thought, Dover 1950, Pg. 128

(11.14), envolvem as três coordenadas espaciais, além do tempo. Suas soluções correspondem, por isso, a ondas tridimensionais, cuja forma geral pode ser bastante complicada. Felizmente, o princípio da superposição permite que qualquer onda, por mais complicada que seja, possa ser decomposta em somas de ondas planas monocromáticas. E, como veremos adiante, estas ondas planas são relativamente simples.

Uma onda será dita **plana** se \vec{E} e \vec{B} forem, em cada instante, constantes ao longo de planos perpendiculares à sua direção de propagação. Se consideramos, por exemplo, ondas elétricas planas se propagando na direção y , podemos afirmar que

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t). \quad (11.15)$$

Uma possível onda plana, que se propaga na direção y , está representada na Fig. 11.1. Para esta onda, podemos afirmar que:

- em qualquer ponto do plano perpendicular ao eixo y o campo elétrico, representado pelas setas, é sempre o mesmo;
- as linhas de campo elétrico estão igualmente espaçadas sobre o plano.

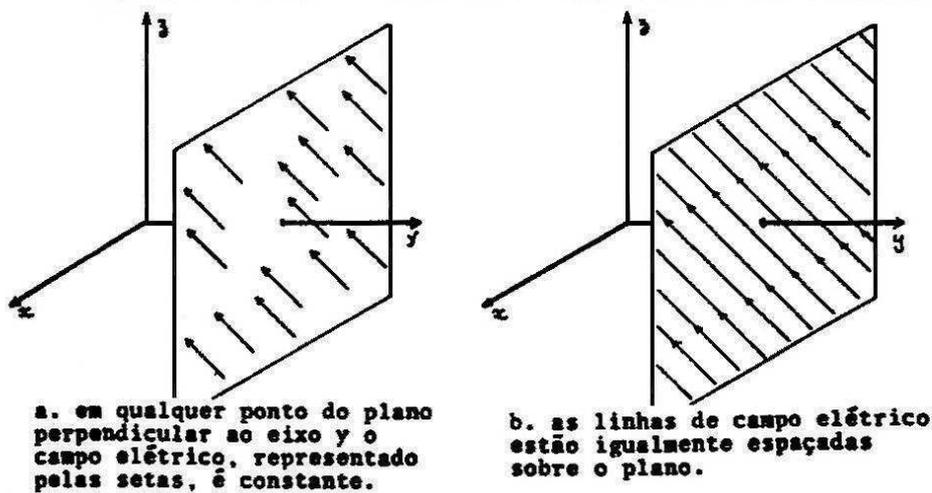


Figura 11.1: Ondas planas propagando-se na direção y .

A relação (11.15) simplifica bastante o tratamento do problema pois, neste caso, a equação de onda para o campo elétrico reduz-se a

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.16)$$

A solução geral de equações deste tipo já foi discutida anteriormente, na aula 8. Ela é dada por

$$\vec{E}(y, t) = \vec{E}_d(y - ct) + \vec{E}_e(y + ct), \quad (11.17)$$

sendo \vec{E}_d e \vec{E}_e funções arbitrárias, descrevendo a propagação da onda nos sentidos y positivo e y negativo, respectivamente. Quando uma onda possui uma única e bem definida frequência, ela é dita **monocromática**.

Uma onda plana e monocromática, que se propaga para a direita, pode ser escrita como

$$\vec{E}_d = \vec{E}_0 \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.18)$$

onde \vec{E}_0 é um vetor constante, que descreve a amplitude da onda. O período T e o comprimento de onda λ são relacionados aos parâmetros ω e κ por $\omega = 2\pi/T$ e $\kappa = 2\pi/\lambda$.

A equação (11.18) é vetorial e, assim, corresponde a três equações escalares:

$$E_{dx} = E_{ox} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (11.19)$$

$$E_{dy} = E_{oy} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (11.20)$$

$$E_{dz} = E_{oz} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.21)$$

Agora, algo muito importante: o fato de estas funções satisfazerem a equação de onda *não garante* que elas correspondam a campos elétricos reais. Para que isso aconteça é necessário que elas também satisfaçam as equações de Maxwell. A compatibilidade da solução dada pela equação (11.18) com a lei de Gauss no vácuo requer que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_d = 0. \quad (11.22)$$

Essa equação somente pode ser satisfeita se $E_{oy} = 0$. Para verificar isso, consideremos o divergente em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_d = \frac{\partial E_{dx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{dy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{dz}}{\partial z}. \quad (11.23)$$

O vetor \vec{E}_d depende apenas da variável y e, portanto,

$$\frac{\partial E_{dx}}{\partial x} = \frac{\partial E_{dz}}{\partial z} = 0. \quad (11.24)$$

Usando a forma explícita de E_{dy} , dada pela eq.(11.20) temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_d = \frac{\partial E_{dy}}{\partial y} = -E_{oy} \kappa \sin(\kappa y - \omega t). \quad (11.25)$$

Para que este divergente seja nulo para quaisquer valores de y e t , devemos ter $E_{oy} = 0$. Assim, a eq.(11.18),

$$\vec{E}_0 = (E_{0x} \vec{i} + E_{0z} \vec{k}) \quad (11.26)$$

e o campo elétrico de uma onda eletromagnética, plana e monocromática, que se propaga na direção y positivo pode ser escrito na forma

$$\vec{E}_d = (E_{ox} \vec{i} + E_{oz} \vec{k}) \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.27)$$

A amplitude dessa onda não possui, portanto a componente na direção de propagação. Ainda que tenhamos demonstrado esse fato no contexto particular de ondas planas e monocromáticas, ele é muito mais geral.

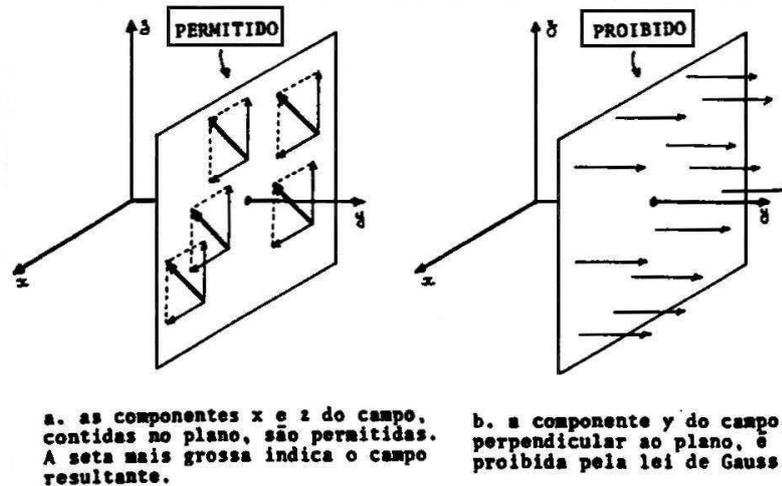


Figura 11.2: As componentes do campo elétrico de uma onda eletromagnética.

O campo elétrico de uma onda eletromagnética está sempre contido no plano perpendicular à direção de propagação. Essa importante propriedade do campo elétrico numa onda está esquematizada na fig. 11.2.

Como a amplitude da onda dada por (11.26) é dada por um vetor em duas dimensões, costuma-se dizer que são possíveis duas *polarizações* para ela. Por exemplo, se a amplitude tiver componentes $E_{ox} = 0$ e $E_{oz} \neq 0$, diz-se que a onda elétrica está polarizada na direção z . A palavra *polarização* indica apenas a direção do campo elétrico da onda.

Numa onda eletromagnética sempre existe, entretanto, uma onda de campo magnético associada à onda de campo elétrico. A sua forma pode ser obtida através da lei de Faraday, expressa pela equação (11.2). Para o caso de ondas planas e monocromáticas se propagando para a direita, ao longo do eixo y , temos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (E_{0x}\vec{i} + E_{0z}\vec{k}) \cos(\kappa y - \omega t) \\ &= -\kappa (\vec{E}_{0z}\vec{i} - E_{0x}\vec{k}) \text{sen}(\kappa y - \omega t).\end{aligned}\quad (11.28)$$

O coeficiente do seno pode ser colocado na forma compacta

$$-\kappa (E_{0z}\vec{i} - E_{0x}\vec{k}) = -\kappa \vec{j} \times \vec{E}_0 \quad (11.29)$$

e a lei de Faraday permite escrever

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\kappa \vec{j} \times \vec{E}_0) \text{sen}(\kappa y - \omega t). \quad (11.30)$$

Essa equação pode ser integrada, produzindo o campo magnético:

$$\vec{B} = (\kappa \vec{j} \times \vec{E}_0) \frac{1}{\omega} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.31)$$

Usando a relação $\kappa/\omega = 1/c$, obtemos

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{E}, \quad (11.32)$$

$$= \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2}. \quad (11.33)$$

O campo magnético está, assim, sempre contido num plano perpendicular ao eixo y , a direção de propagação neste caso, sendo também perpendicular ao campo elétrico. A expressão (11.32) relaciona, sem ambigüidades, as direções e sentidos da propagação da onda, de \vec{E} e de \vec{B} .

Resumindo, uma onda plana monocromática que se propaga na direção $y > 0$ pode ser representada pelas equações

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_{0x}\vec{i} + E_{0z}\vec{k}) \cos(\kappa y - \omega t) \\ \vec{B} &= \vec{c} \times \vec{E}/c^2. \end{aligned}$$

Este resultado envolve três vetores \vec{c} , \vec{E} e \vec{B} , que são sempre ortogonais entre si. Eles formam um triedro ortogonal. De modo geral, *ondas eletromagnéticas no vácuo são transversais*, pois os campos \vec{E} e \vec{B} são sempre ortogonais à direção de propagação. Por exemplo, se $\vec{c} = c\vec{j}$ e $\vec{E} = E\vec{k}$, então $\vec{B} = B\vec{i}$. Ou alternativamente, se $\vec{E} = E\vec{j}$ e $\vec{B} = -B\vec{i}$, então $\vec{c} = -c\vec{k}$. Note que o ordenamento dos vetores ao longo dos eixos do triedro não pode ser feito ao acaso. Assim, por exemplo, os vetores $\vec{c} = c\vec{j}$, $\vec{E} = E\vec{i}$ e $\vec{B} = B\vec{k}$ **não** podem descrever uma onda eletromagnética.

• ondas no vácuo: propriedades gerais

Na seção anterior, discutimos as características de ondas planas e monocromáticas, que são relativamente simples. Entretanto, várias das características encontradas ali são muito gerais e válidas para todas as ondas eletromagnéticas. Dentre essas propriedades gerais, mencionamos:

1. \vec{E} e \vec{B} satisfazem a equação de onda;
2. os módulos de \vec{E} e \vec{B} são proporcionais: $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$;
3. \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares entre si e, também, perpendiculares à direção da propagação da onda.

Um aspecto muito importante das ondas é o seu caráter eletromagnético, ou seja, as oscilações elétricas são sempre acompanhadas de oscilações magnéticas e vice-versa. Não é possível haver uma onda que seja puramente elétrica ou puramente magnética, pois os campos \vec{E} e \vec{B} estão sempre acopladas pelas leis de Faraday e Ampère-Maxwell.

A figura 11.3 representa os campos elétrico e magnético para o caso de uma onda plana,

monocromática e polarizada na direção z , que se propaga na direção $y > 0$. Note que os máximos e mínimos de \vec{E} e \vec{B} sempre ocorrem no mesmo ponto.

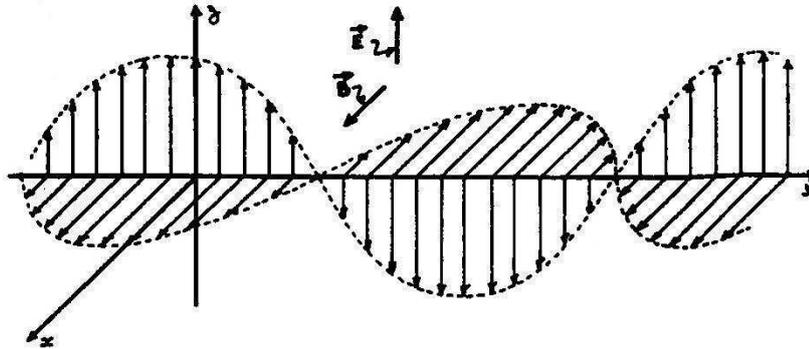


Figura 11.3: Onda eletromagnética plana e monocromática. O campo elétrico está no plano yz , enquanto que o campo magnético está no plano xy .

Qualquer onda, seja ela mecânica ou eletromagnética, apresenta sempre duas características importantes: transportar energia de um ponto a outro do espaço e interferir com ondas de natureza semelhante. Esses dois aspectos das ondas eletromagnéticas serão estudados nas próximas aulas.

• espectro eletromagnético

As ondas eletromagnéticas são formadas por oscilações de campo elétrico e magnético, acoplados pelas leis de Faraday e de Ampère-Maxwell. No vácuo, todas as ondas se propagam com velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, podendo ter diferentes frequências f e comprimentos de onda λ , de tal forma que

$$c = \lambda f \quad (11.34)$$

Há vários tipos de ondas eletromagnéticas: ondas de rádio, microondas, radiação infravermelha, luz visível, ultravioleta, raios X, raios γ . O que diferencia um tipo de onda eletromagnética de outro é a sua frequência, que pode variar desde 10 Hz (corrente alternada doméstica) até 10^{28} Hz (raios γ). A luz visível tem frequência entre $4,1 \times 10^{14}$ Hz e $7,5 \times 10^{14}$ Hz. A grande faixa de valores de frequências para as ondas eletromagnéticas explica a diversidade de fenômenos envolvendo estas radiações e, em particular, a sua interação com a matéria. O conjunto de todos os tipos de ondas eletromagnéticas é chamado espectro eletromagnético e está ilustrado na figura 11.4.

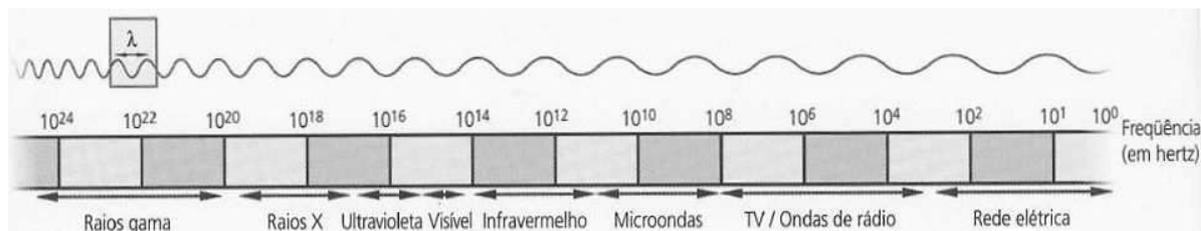


Figura 11.4: Espectro eletromagnético.

• exercícios

1. Em que mudariam as equações (11.13) e (11.14) se não houvesse um termo correspondente à corrente de deslocamento nas equações de Maxwell? Quais seriam as possíveis consequências físicas deste fato?
2. Uma onda plana e monocromática é descrita pela equação $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\kappa y - \omega t)$. Mostre que, se E_{0y} , a componente y de \vec{E}_0 , não for nula, a lei de Gauss não é satisfeita. Sugestão: considere o fluxo total do campo elétrico através de uma superfície cúbica de lados de comprimento $\ell = \pi/\kappa$ e paralelos aos eixos x , y e z .
3. Determine a direção de polarização da onda dada pela equação (11.29) e mostre que ela não varia com o tempo.
4. Uma onda elétrica, plana e monocromática, é descrita pela equação $\vec{E} = (2E_0\vec{i} - E_0\vec{k}) \cos(\kappa y - \omega t)$. Desenhe esse vetor em três pontos diferentes do plano $y = 3\lambda/4$ nos instantes: a) $t = 0$; b) $t = T/4$; c) $t = T/2$; d) $3T/4$.
5. Considere a onda plana e monocromática descrita pela equação $\vec{E} = E_0\vec{k} \cos(\kappa y - \omega t)$. Desenhe, o vetor campo elétrico no instante $t = T/4$, em três pontos diferentes dos planos: a) $y = 0$; b) $y = \lambda/4$; c) $y = \lambda/2$; d) $y = 3\lambda/4$. Compare essas respostas com o diagrama da fig. 11.3b.
6. Escreva as equações descrevendo a propagação de ondas planas monocromáticas segundo as seguintes direções: a) $y < 0$; b) $x > 0$.
7. É possível haver ondas de campo elétrico sem que haja ondas de campo magnético? Justifique a sua resposta.

8. As flexas da figura 11.5 representam o vetor campo elétrico de uma onda plana monocromática que se propaga para a direita. Desenhe, nesta figura, o vetor campo magnético.

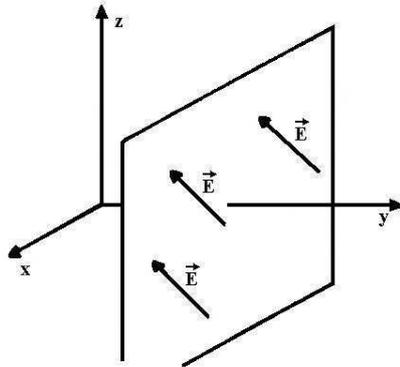


Figura 11.5:

9. As figuras 11.6 mostram as linhas de campo elétrico e magnético num dado plano. Quais das figuras podem corresponder a ondas eletromagnéticas? Nestes casos, qual a direção de propagação da onda?

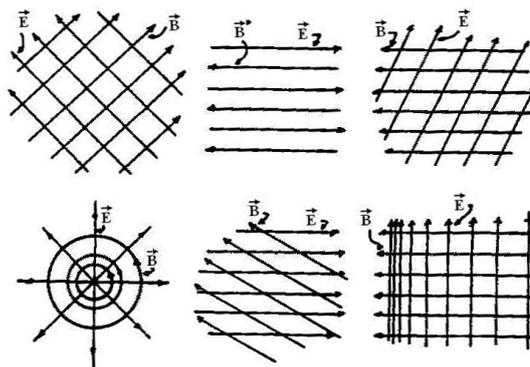


Figura 11.6:

10. Mostre, usando as equações de Maxwell, que a onda representada na figura 11.3 se propaga para a direita.

Capítulo 12

ondas no vácuo: propagação e energia

- o vetor de onda

A descrição de uma onda eletromagnética plana envolve três vetores importantes, cada um com uma direção diferente. Um deles é o campo elétrico \vec{E} e o segundo é o campo magnético \vec{B} , que é sempre perpendicular a \vec{E} . O terceiro, é o vetor de Poynting \vec{S} , que representa a direção de propagação da energia e é sempre simultaneamente perpendicular a \vec{E} e \vec{B} . Como $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$, esses três vetores estão sempre relacionados entre si, como nos exemplos da figura 12.1. Na aula 11, discutimos um caso particular desse tipo de relação, onde \vec{E} e \vec{B} estavam contidos no plano xz , eqs. (11.27) e (11.31), e a onda se propagava na direção y , representada pelo versor \vec{j} .

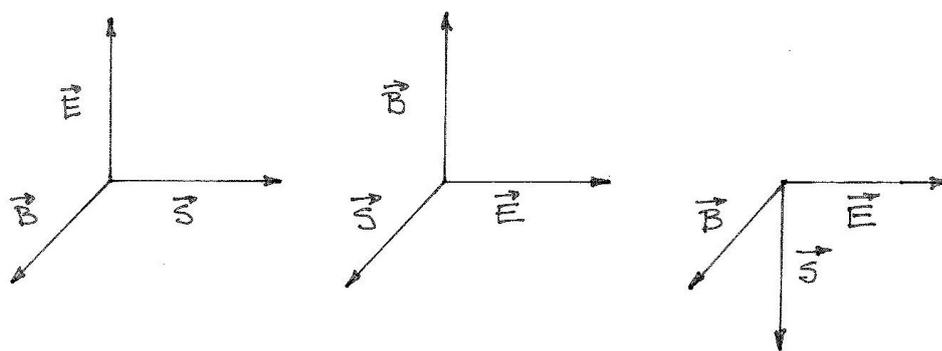


Figura 12.1:

Até o momento, consideramos apenas ondas que se propagam na direção y . O nosso objetivo, nesta seção, é discutir como se descreve uma onda plana que se propaga numa direção qualquer.

Na aula 11, vimos que o campo elétrico \vec{E} de uma onda eletromagnética plana que se propaga na direção y positiva não depende de x e z e pode ser escrito como na eq. (11.17), $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t)$. Nesta relação, as variáveis x , y e z representam as coordenadas do ponto onde o vetor está aplicado e t , o instante no qual este campo é observado.

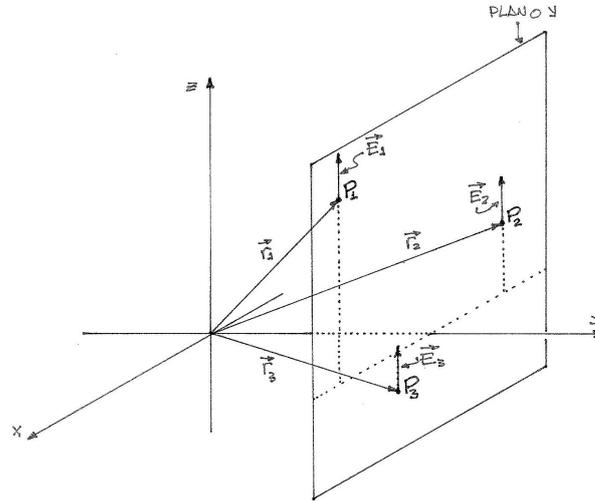


Figura 12.2:

Na figura 12.2, selecionamos três possíveis pontos do plano y , cujas coordenadas são $P_1(x_1, y, z_1)$, $P_2(x_2, y, z_2)$ e $P_3(x_3, y, z_3)$. Como eles estão sobre o plano, todos eles têm a mesma coordenada y . Esses pontos estão associados aos vetores $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{r}_3 = x_3\vec{i} + y\vec{j} + z_3\vec{k}$ e, no instante t , os campos elétricos em P_1 , P_2 , e P_3 , são representados pelos vetores $\vec{E}_1(\vec{r}_1, t)$, $\vec{E}_2(\vec{r}_2, t)$, $\vec{E}_3(\vec{r}_3, t)$, apoiados sobre o plano y . O fato de a onda ser plana permite-nos escrever $\vec{E}(\vec{r}_1, t) = \vec{E}_2(\vec{r}_2, t) = \vec{E}_3(\vec{r}_3, t)$.

Assim, a condição de onda plana corresponde a representar o campo elétrico \vec{E}_n num ponto genérico P_n qualquer do plano y , descrito pelo vetor

$$\vec{r}_n = x_n\vec{i} + y\vec{j} + z_n\vec{k} \quad , \quad (12.1)$$

no instante t , como $\vec{E}_i(\vec{r}_i, t) = \vec{E}(y, t)$. Deste modo, fica explícito o fato de que as coordenadas x_n e z_n do vetor \vec{r}_n são irrelevantes para o valor de \vec{E}_n . Na aula 8, vimos que esse campo elétrico obedece a uma equação diferencial característica, que obriga o *argumento* da função a ser da forma $(\kappa y - \omega t)$, sendo $\kappa = \omega/c$.

Se desejamos descrever uma onda plana que se propaga na direção x positiva, a reelaboração da discussão precedente usando o vetor posição $\vec{r}_n = x\vec{i} + y_n\vec{j} + z_n\vec{k}$ permite escrever $\vec{E}_n(\vec{r}_n, t) = E(x, t)$ e o argumento da função que descreve o campo elétrico passa a ser $(\kappa x - \omega t)$. Isso indica que não é preciso repetir toda a discussão em cada caso, pois basta adaptar o argumento da função à situação desejada. Por exemplo, uma onda que se propaga na direção z negativa, tem argumento $(kz + \omega t)$.

Existem situações nas quais uma onda plana pode se propagar em direções mais gerais, como as indicadas na figura 12.3. Nestes casos, os planos de fase constantes são perpendiculares aos eixos desenhados.

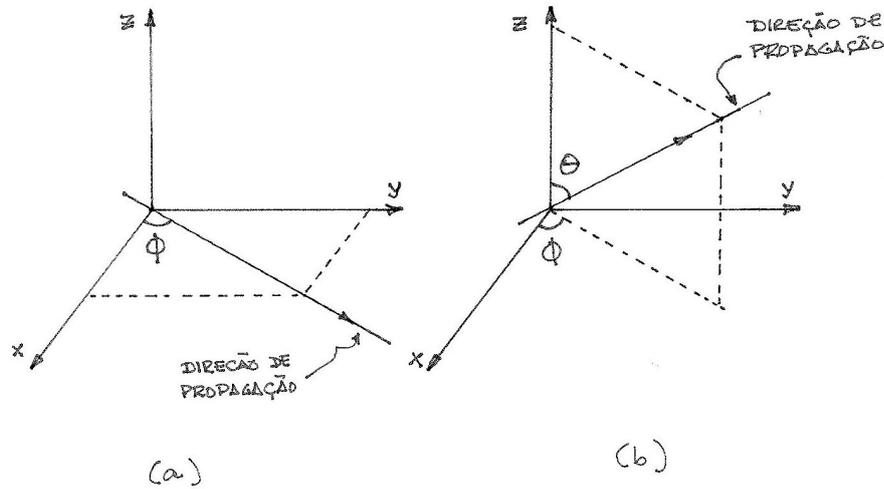


Figura 12.3:

A direção de propagação é um elemento muito importante de qualquer onda e, em particular, de ondas eletromagnéticas. Ela é incorporada na descrição da onda por meio de um vetor, chamado *vetor de onda*, geralmente representado pelo símbolo \vec{k} . Nós também adotamos esta convenção, usando o símbolo grego *kappa*. Ainda assim, é preciso tomar algum cuidado para não confundir o vetor de onda com o versor da direção z, pois eles representam coisas completamente diferentes.

O vetor de onda \vec{k} é construído de modo que seu módulo seja $\kappa = \omega/c$ e sua direção e sentido sejam os da propagação da onda. Assim, por exemplo, para uma onda que se propaga na direção y, temos $\vec{k} = \kappa \vec{j}$ e o argumento do campo elétrico no ponto genérico P_n , cujas coordenadas são dadas pela eq.(12.1), corresponde a $(\vec{k} \cdot \vec{r}_n - \omega t) = (\kappa y - \omega t)$. Ou seja, o produto escalar seleciona a componente de \vec{r}_n paralela a \vec{k} . As componentes de \vec{r}_n perpendiculares a \vec{k} não contribuem e, por isso, a fase não depende de x_n e z_n .

Este tipo de característica permanece válida para ondas que se propagam em direções quaisquer. No caso de uma onda que se propaga segundo a direção indicada na fig. 12.3a, o vetor de onda é dado por

$$\vec{k} = \kappa [\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}] \quad (12.2)$$

e o argumento da onda plana no ponto $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e no instante t, é dado por

$$(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = [\kappa (x \cos \phi + y \sin \phi) - \omega t]. \quad (12.3)$$

Analogamente, para a onde que se propaga segundo o eixo mostrado na figura 12.3b,

temos

$$\vec{\kappa} = \kappa [(\text{sen } \theta \cos \phi \vec{i} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})] \quad (12.4)$$

e

$$(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) = [\kappa(x \text{sen } \theta \cos \phi + y \text{sen } \theta \text{sen } \phi + z \cos \theta) - \omega t]. \quad (12.5)$$

• as três direções importantes

O resultado (12.5) é importante porque permite descrever o argumento de uma onda plana que se propaga numa direção qualquer, dada pelo vetor $\vec{\kappa}$. O campo elétrico dessa onda plana é

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (12.6)$$

Como o campo elétrico deve ser sempre transversal à direção de propagação, a amplitude \vec{E}_0 deve satisfazer a condição

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{\kappa} = \kappa [E_{0x} \text{sen } \theta \cos \phi + E_{0y} \text{sen } \theta \text{sen } \phi + E_z \cos \theta] = 0 \quad (12.7)$$

O campo magnético da onda é dada por

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (12.8)$$

e o seu módulo deve ser simultaneamente ortogonal a $\vec{\kappa}$ e a \vec{E} . Usando o resultado $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$, podemos escrever o campo magnético como

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}(x, y, z, t)}{\omega} \quad (12.9)$$

O vetor de Poynting é dado por

$$\begin{aligned} \vec{S}(x, y, z, t) &= \frac{\vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{B}(x, y, z, t)}{\mu_0} \\ &= \frac{\vec{\kappa}}{\mu_0 \omega} |\vec{E}(x, y, z, t)|^2, \end{aligned} \quad (12.10)$$

onde usamos a eq.(12.9) e a identidade vetorial $\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$, válida para quaisquer vetores \vec{A} , \vec{B} e \vec{C} . Como esperado, o vetor \vec{S} , associado ao fluxo de energia, é paralelo ao vetor de onda $\vec{\kappa}$.

• exemplo 1.

Determinação da direção de propagação e do campo magnético de uma onda eletromagnética cujo campo elétrico é dado por $\vec{E} = E_0 \cos(\kappa x - \omega t) \vec{j}$.

O argumento $(\kappa x - \omega t)$ do campo \vec{E} é simples e indica que a onda se propaga ao longo do eixo z positivo. O nosso interesse, aqui, é obter o mesmo resultado a partir da eq.(12.5). Escrevendo

$$\kappa(x \sen \theta \cos \phi + y \sen \theta \sen \phi + z \cos \theta) = \kappa x \quad , \quad (12.11)$$

obtemos $\phi = 0$ e $\theta = \pi/2$, o que nos permite concluir que a onda se propaga na direção x positiva. Assim, o vetor de onda é $\vec{\kappa} = \kappa \vec{i}$.

O campo magnético é obtido a partir da relação (12.9), onde $\vec{\kappa}$ é o versor da direção de propagação. Assim,

$$\vec{B} = \frac{\vec{\kappa}}{c} \times E_0 \cos(\kappa x - \omega t) \vec{j} = \frac{\vec{i}}{c} \times E_0 \cos(\kappa x - \omega t) \vec{j} = \frac{E_0}{c} \cos(\kappa x - \omega t) \vec{k}. \quad (12.12)$$

• exemplo 2.

Uma onda plana e monocromática, que se propaga na direção mostrada na figura 12.4, contida no plano xz , incide sobre um espelho plano, situado sobre o plano xy . O nosso objetivo é determinar os argumentos das ondas incidente (I) e refletida (R).

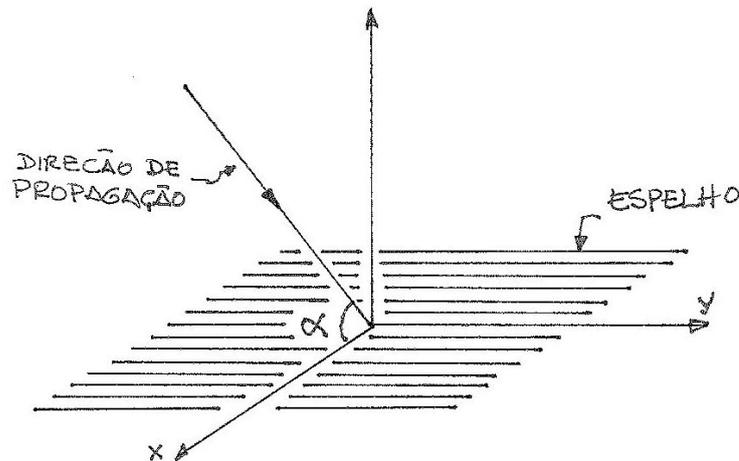


Figura 12.4:

Para a onda incidente, temos

$$\vec{k}_I = \kappa (\cos \alpha \vec{i} - \sen \alpha \vec{k}) \quad (12.13)$$

e o seu argumento é dado por

$$[\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t] = [\kappa (x \cos \alpha - z \sen \alpha) - \omega t]. \quad (12.14)$$

Na reflexão, os ângulos de incidência e de reflexão, medidos em relação à normal ao espelho, são iguais. Entretanto, a onda refletida se afasta do espelho e, por isso, o seu vetor de onda é dado por

$$\vec{k}_R = \kappa (\cos \alpha \vec{i} + \sen \alpha \vec{k}). \quad (12.15)$$

Portanto, o argumento da onda refletida é escrita como

$$[\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t] = [\kappa(x \cos \alpha + z \sin \alpha) - \omega t] . \quad (12.16)$$

No caso particular de incidência normal, em que $\alpha = \pi/2$, obtemos $\vec{k}_R = -\vec{k}_I$.

• as energias elétrica e magnética

A energia transportada por uma onda eletromagnética está diretamente relacionada aos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , que a constituem. Onde há campo elétrico e campo magnético, há energia elétrica e energia magnética, com densidades volumétricas dadas, respectivamente, por

$$u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} , \quad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (12.17)$$

Para o caso de uma onda eletromagnética se propagando no vácuo, os módulos dos campos elétrico e magnético obedecem a relação $E = cB$ onde c é a velocidade de propagação, dada por $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Podemos, portanto, concluir que $u_B = u_E$. Este resultado é importante, pois evidencia que as densidades volumétricas de energia elétrica e de energia magnética de uma onda eletromagnética são iguais. Assim, ao se propagar, uma onda eletromagnética transporta energia com densidade volumétrica dada por

$$u = u_E + u_B = 2u_E = \varepsilon_0 E^2 . \quad (12.18)$$

• a conservação da energia eletromagnética

O transporte de energia eletromagnética é representado pelo vetor de Poynting, definido por $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$. O seu módulo, S , é igual à potência da radiação por unidade de área e a sua direção e sentido são iguais aos da propagação da onda. Conforme discutimos na aula 10, a conservação de energia eletromagnética é expressa, na forma integral, pela equação

$$\oiint_A \vec{S} \cdot \vec{n} dA = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV , \quad (12.19)$$

sendo V , o volume contido pela superfície fechada A .

Através do teorema de Gauss, a equação (12.19) pode ser reescrita na forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} . \quad (12.20)$$

• exemplo 3.

Cálculo da energia eletromagnética contida no interior do cubo de lado L , mostrado na figura 12.5, num instante genérico t , para a onda eletromagnética para a monocromática, cujo campo elétrico é dado por $\vec{E} = E_0 \cos(\kappa x - \omega t)\vec{j}$, considerada no exemplo 1.

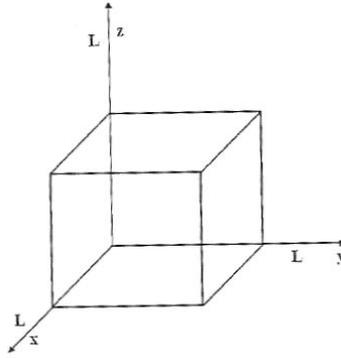


Figura 12.5:

A densidade volumétrica de energia é obtida a partir de (12.18) e vale

$$u = \frac{dU}{dV} = \varepsilon_0 E^2 .$$

A energia no interior do cubo é expressa por

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\kappa x - \omega t) \\ &= \varepsilon_0 E_0^2 L^2 \int_0^L dx \cos^2(\kappa x - \omega t) = \varepsilon_0 E_0^2 L^2 \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2\kappa} \sin 2(\kappa x - \omega t) \right]_0^L \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 L^3 \left\{ 1 + \frac{1}{2\kappa L} [\sin 2(\kappa L - \omega t) + \sin 2\omega t] \right\} . \end{aligned} \quad (12.21)$$

A presença explícita do parâmetro t neste resultado, que não pode ser eliminada, indica que a energia total no interior do cubo depende do instante considerado.

• exemplo 4.

Verificação da conservação da energia, no caso da situação discutida no exemplo anterior. A energia contida no interior do cubo de lado L pode variar à medida que o tempo passa. Entretanto, de acordo com o princípio da conservação da energia, tal variação deve estar relacionada ao fluxo dessa energia através das paredes do cubo.

Usando o resultado (12.21), obtemos a variação temporal da energia no interior do cubo, dada por

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 L^2 c [-\cos 2(\kappa L - \omega t) + \cos 2\omega t] , \quad (12.22)$$

onde usamos $\omega/\kappa = c$.

O fluxo de energia através das paredes do cubo é calculado por meio do vetor de Poynting

e vale

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\kappa x - \omega t) \vec{i}. \quad (12.23)$$

Assim, o fluxo de \vec{S} através das paredes do cubo é não nulo apenas nas faces perpendiculares ao eixo x :

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \iint_{\text{cubo}} \vec{S} \cdot \vec{n} \, dA \\ &= \frac{E_0^2}{c\mu_0} [-L^2 \cos^2 \omega t + L^2 \cos^2(\kappa L - \omega t)]. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Usando $\cos^2 \alpha = \cos 2\alpha + 1/2$, obtemos

$$\Phi_S = \frac{E_0^2}{c\mu_0} L^2 \frac{1}{2} [\cos 2(\kappa L - \omega t) - \cos 2\omega t]. \quad (12.25)$$

Notando que $\varepsilon_0 c = 1/c\mu_0$, e usando (12.22) podemos escrever

$$\Phi_S = -\frac{dU}{dt}, \quad (12.26)$$

coerente com a equação da continuidade para a energia.

É interessante notar que, quando $L = 2\pi/\kappa$, temos

$$\Phi_S = -\frac{dU}{dt} = 0. \quad (12.27)$$

• intensidade de uma onda

Em muitos problemas, é conveniente representar o fluxo de energia de uma onda por meio de sua intensidade I , definida como o valor médio do módulo do vetor Poynting em um período. Assim,

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt S. \quad (12.28)$$

Para uma onda plana e monocromática que se propaga na direção y , temos

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\kappa y - \omega t) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}. \quad (12.29)$$

Este resultado vale para qualquer onda que se propaga no vácuo e é muito útil. Ele permite, em muitos problemas, conhecer a dependência do módulo de E com a distância à fonte das ondas. Por exemplo, quando estamos longe de uma lâmpada elétrica acesa, ela pode ser considerada como puntiforme e as ondas luminosas que ela emite podem ser

consideradas como esféricas. Se a luz emitida pela lâmpada pode se propagar livremente em todas as direções, então a mesma energia por período atravessa qualquer superfície esférica com centro na lâmpada. Ou seja, $\Phi_{<S>}$ é constante sobre qualquer superfície fechada que contenha a lâmpada. Assim, se conhecermos a amplitude $E_0(a)$ do campo elétrico, a uma distância a da fonte, então podemos afirmar que a uma distância b , a amplitude $E_0(b)$ do campo elétrico é

$$E_0(b) = \frac{a}{b} E_0(a) \quad (12.30)$$

Analogamente, para uma fonte cilíndrica, teríamos

$$E_0(b) = \sqrt{\frac{a}{b}} E_0(a) \quad (12.31)$$

• exercícios

1. O vetor de onda de uma onda eletromagnética é o dado pela eq.(12.4). Mostre que uma função f da forma $f(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t)$ obedece uma equação de onda dada por

$$\vec{\nabla}^2 f - \frac{\kappa}{\omega} \partial_t^2 f = 0.$$

2. Dois espelhos planos estão colocados, respectivamente, sobre os planos xz e yz e a aresta entre eles está contida sobre o eixo z . Um raio de luz cujo vetor de onda é dado por $\vec{\kappa}_I = -\kappa[\text{sen } \theta \cos \phi \vec{i} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}]$ incide sobre o conjunto. Determine o vetor de onda $\vec{\kappa}_R$ da onda, depois de ser refletida sucessivamente pelos dois espelhos.

3. Mostre que os componentes do campo elétrico de uma onda eletromagnética cujo vetor de onda é dado pela eq.(12.4) obedecem a relação $E_z = -\tan \theta [E_x \cos \phi + E_y \text{sen } \phi]$. Estude o significado desta relação para o caso $\theta = \pi/2$, por meio de um desenho, mostrando $\vec{\kappa}$ e \vec{E} .

4. Interprete e justifique o resultado dado pela eq.(12.27).

5. Uma folha de papel de área A , colocada sobre o plano xy , é iluminada por luz cujo campo elétrico é dado pela equação $\vec{E} = E_0 \cos[\kappa(\text{sen } \theta y + \cos \theta z) + \omega t] \vec{i}$. Determine a intensidade da luz que incide sobre o papel.

• respostas

2. $\vec{\kappa}_R = \kappa[\text{sen } \theta \cos \phi \vec{i} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \vec{j} - \cos \theta \vec{k}]$

4. $\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \cos \theta$

Capítulo 13

ondas eletromagnéticas: superposição e polarização

• introdução

Ondas eletromagnéticas são constituídas por campos elétricos e magnéticos, que se propagam no espaço. Um aspecto muito importante desses campos é que eles obedecem ao princípio de superposição: se num ponto do espaço coexistem campos elétricos e magnéticos provenientes de várias fontes, então os campos resultantes são dados pelas somas vetoriais dos campos individuais.

O nosso ponto de partida são as ondas planas e monocromáticas estudadas anteriormente, com campos elétricos da forma

$$\vec{E} = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}. \quad (13.1)$$

A forma do campo elétrico especifica completamente a onda, já que ela indica a sua frequência, direção de propagação e, também, o campo magnético. Neste caso, ele é dado por

$$\vec{B} = \frac{\vec{j} \times \vec{E}}{c}. \quad (13.2)$$

A onda associada a este campo elétrico está representada na figura 13.1, para um instante fixo. Ela mostra que o campo elétrico varia de intensidade de um ponto para outro, mas tem sempre a mesma direção e está contido num único plano. Diz-se que uma onda deste tipo tem polarização plana. Neste caso, a direção do campo elétrico é chamada de direção de polarização da onda. Assim, o campo elétrico dado acima representa uma onda com polarização plana, ao longo do eixo z . Análogamente, uma onda descrita pela equação

$$\vec{E} = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{i}, \quad (13.3)$$

é polarizada ao longo do eixo x .

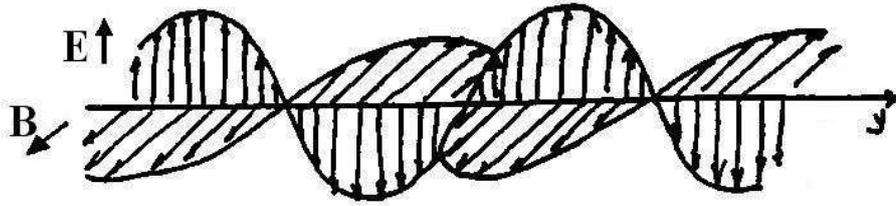


Figura 13.1: Os campos elétrico e magnético, em um instante arbitrário, de uma onda linearmente polarizada na direção z .

No caso de haverem duas ondas, com campos elétricos \vec{E}_1 e \vec{E}_2 , se propagando numa mesma região do espaço, o campo elétrico resultante é dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (13.4)$$

e o campo magnético \vec{B} , por

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (13.5)$$

As ondas envolvidas neste processo de superposição podem se propagar em direções iguais ou diferentes. Por exemplo, tanto no caso

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}, \\ \vec{E}_2 &= 2E_0 \cos[\kappa(y + ct)]\vec{i}, \end{aligned}$$

como no caso

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_0 \cos[2\kappa(y - ct)]\vec{k}, \\ \vec{E}_2 &= E_0 \sin[\kappa(x + ct)]\vec{k}, \end{aligned}$$

o campo elétrico resultante é dado pela eq.(13.4). Entretanto, como as componentes são diferentes em cada caso, o mesmo acontece com o campo resultante.

• exemplo 1

Determinação das características da onda que resulta da superposição de duas outras cujos campos elétricos são dados por

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}, \quad (13.6)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos[2\kappa(y - ct)]\vec{k}. \quad (13.7)$$

Estas duas ondas diferem quanto às frequências, pois $\omega_2 = 2\omega_1$. Por isso, a onda resultante é plana, não é monocromática e tem polarização plana, ao longo do eixo z . Os valores de \vec{E}_1 , \vec{E}_2 e \vec{E} ao longo do eixo y , para um instante fixo, são mostrados na figura 13.2. Com o passar do tempo, todo o desenho move-se para a direita com velocidade c .

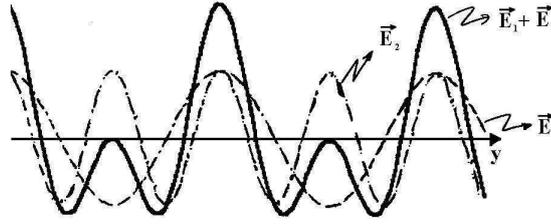


Figura 13.2: Onda resultante da interferência de duas ondas planas de mesma amplitude, polarização e direção de propagação, mas com frequências diferentes ($\omega_2 = 2\omega_1$).

• exemplo 2

Determinação das características da onda que resulta da superposição de duas outras cujos campos elétricos são

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}, \quad (13.8)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{2} \cos[\kappa(y - ct)]\vec{i}. \quad (13.9)$$

Estas duas ondas diferem quanto às amplitudes e polarizações. A onda resultante é monocromática e tem polarização plana, como mostrado na figura 13.3a. Os valores de \vec{E} sobre o eixo y , para um instante fixo, são mostrados na figura 13.3b.

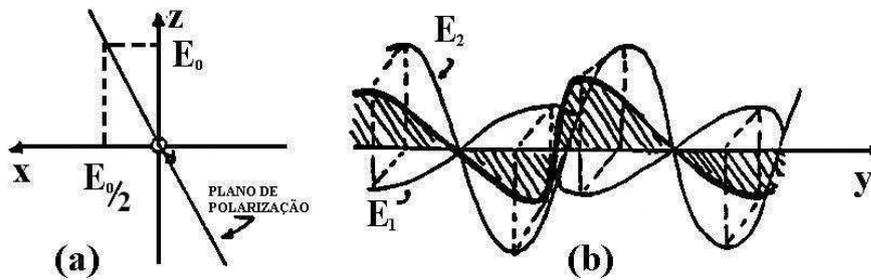


Figura 13.3: Onda resultante da interferência de duas ondas com polarizações perpendiculares, mesma frequência e direção de propagação e amplitudes diferentes ($E_{01} = 2E_{02}$).

• exemplo 3

Uma onda eletromagnética, cujo campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}, \quad (13.10)$$

sempre pode ser pensada como o resultado da superposição de duas outras ondas com polarizações planas, com campos elétricos dados pelos vetores \vec{E}_1 e \vec{E}_2 . Assim, por exemplo, a onda determinada pelo vetor \vec{E} pode ser devida à superposição das ondas dadas pelos

vetores

$$\vec{E}_1 = \left(\frac{E_0}{2} \vec{k} + a \vec{i} \right) \cos[\kappa(y - ct)] , \quad (13.11)$$

$$\vec{E}_2 = \left(\frac{E_0}{2} \vec{k} - a \vec{i} \right) \cos[\kappa(y - ct)] , \quad (13.12)$$

onde a é uma constante arbitrária. A figura abaixo mostra algumas possibilidades para \vec{E}_1 e \vec{E}_2 , e existem ainda muitas outras.

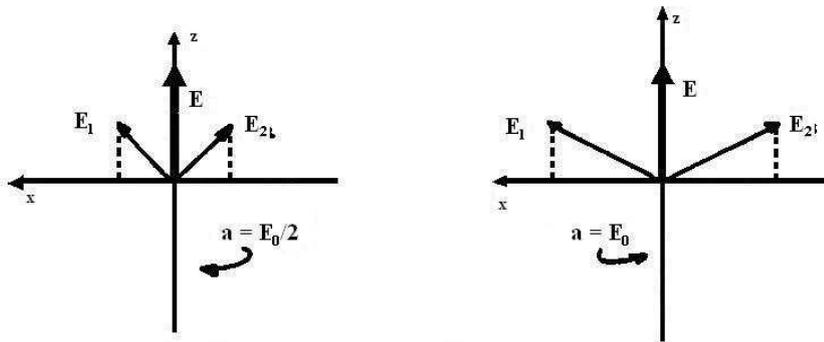


Figura 13.4: Uma onda linearmente polarizada resultante da interferência de dois pares de ondas diferentes, também linearmente polarizadas.

• filtros polarizadores

As ondas eletromagnéticas que encontramos normalmente não têm polarização bem definida. Com isso, queremos dizer que elas são superposições de muitas ondas com polarizações diferentes. Essa mistura de polarizações ocorre, por exemplo, com a luz que chega aos seus olhos depois de ser difundida pelo papel. Atualmente, o modo mais fácil de obter uma onda com polarização bem definida consiste em atirar ondas não polarizadas sobre um filtro polarizador. Filtros polarizadores são instrumentos que permitem a passagem de ondas com polarização ao longo de uma dada direção e bloqueiam ondas com polarização perpendicular a essa direção. No caso de ondas de comprimento macroscópico, como as microondas, um polarizador pode ser uma placa de metal, com ranhuras. Quando a polarização da onda é paralela às ranhuras, ela não atravessa o polarizador, porque o seu campo elétrico gera correntes na placa e sua energia é absorvida. Quando o campo é perpendicular às ranhuras, as correntes não podem circular eficientemente e a onda passa. No caso de ondas com comprimento de onda microscópico, tais como luz ($\lambda \sim 10^{-7}\text{m}$), os polarizadores podem ser feitos com macromoléculas, que permitem a passagem de correntes elétricas apenas ao longo de uma dada direção. O seu princípio de funcionamento é o mesmo das placas com ranhuras, apenas a escala é diferente. Em geral, chama-se de eixo do filtro polarizador a direção ao longo da qual ele deixa a onda passar. Assim, quando uma onda não polarizada incide sobre um polarizador, temos a situação indicada simbolicamente na figura 13.5.

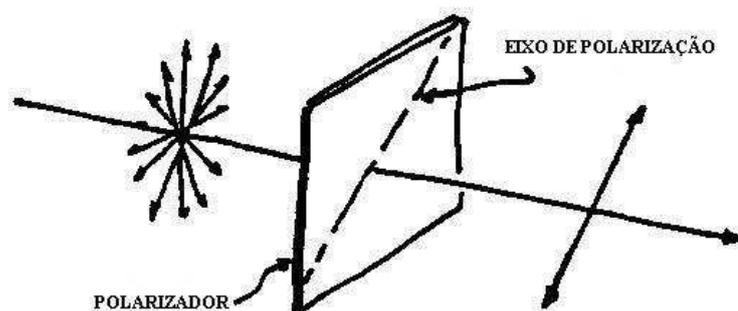


Figura 13.5: Representação de uma onda despolarizada incidindo sobre um polarizador e a onda linearmente polarizada que emerge do polarizador.

Existem, também, processos naturais onde ocorre a polarização da luz. Por exemplo, em dias sem nuvens, a luz que vem do céu azul é bastante polarizada. Isso pode ser facilmente constatado olhando o céu com o auxílio de um filtro polarizador; ao girarmos o seu eixo, vemos que certas regiões do céu podem tornar-se mais claras ou escuras. Também ocorre a polarização da luz quando ela é refletida por vidro, água ou outras superfícies polidas, como mesas envernizadas e a própria pele. Novamente, isso pode ser constatado com o auxílio de um filtro polarizador. É por este motivo que filtros polarizadores são bastante empregados em fotografia pois, com eles, é possível controlar a quantidade de reflexos dos objetos a serem fotografados.

• exemplo 4

Uma onda com campo elétrico dado por

$$\vec{E} = E_0 \cos[\kappa(y - ct)] \vec{k} \quad (13.13)$$

incide sobre um filtro polarizador, disposto perpendicularmente ao eixo y , e que tem o eixo de polarização orientado paralelamente à direção do versor

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{k}. \quad (13.14)$$

O nosso interesse é determinar o campo elétrico da onda que emerge do polarizador e a fração da energia da onda que atravessa o filtro.

Para determinar o campo da onda emergente, é preciso lembrar que, neste caso, o polarizador deixa passar apenas a componente da onda paralela ao versor \vec{u} . Por isso, é conveniente escrever o campo da onda incidente como a superposição de duas ondas, com polarizações respectivamente paralela e perpendicular a \vec{u} . O módulo da componente paralela ao eixo de polarização é dada pelo produto escalar $\vec{E} \cdot \vec{u}$. Usando os dados do problema, temos

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{u} = E_0 \cos[\kappa(y - ct)] \sin \theta \vec{u} \\ &= E_0 \cos[\kappa(y - ct)] \sin \theta (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{k}). \end{aligned} \quad (13.15)$$

O vetor E_{\perp} , por outro lado, é dado por

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\perp} &= \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} \\ &= E_0 \cos[\kappa(y - ct)](-\sin \theta \cos \theta \vec{i} + \cos^2 \theta \vec{k})\end{aligned}\quad (13.16)$$

A energia da onda é proporcional à amplitude do seu campo elétrico. Assim, a fração T de energia transmitida através do polarizador é dada por

$$T = \frac{E_{\parallel}^2}{E^2} = \sin^2 \theta. \quad (13.17)$$

Por outro lado, a fração A de energia absorvida pelo filtro vale

$$A = \frac{E_{\perp}^2}{E^2} = \cos^2 \theta. \quad (13.18)$$

• exemplo 5

Um feixe de luz não polarizada, com velocidade $\vec{c} = c\vec{j}$, incide sucessivamente sobre dois filtros polarizadores 1 e 2, situados respectivamente nos planos $y_1 = 0$ e $y_2 = 2a$ e com eixos orientados ao longo das direções z e x . Qual a polarização da onda depois que ela atravessa o sistema?

Após passar pelo primeiro polarizador, o campo elétrico da onda torna-se paralelo ao eixo z . Por isso, ela é totalmente bloqueada pelo segundo polarizador e, portanto, não passa luz nenhuma pelo sistema.

Um fato, que pode parecer surpreendente, é que esta situação muda se intercalarmos um terceiro filtro *entre* os dois anteriores, no plano $y = a$, com eixo de polarização orientado segundo uma direção formando um ângulo θ ($\theta \neq 0$ ou $\pi/2$) com o eixo z . Neste caso podemos utilizar os resultados do exemplo 4 e, nas regiões $0 < y < a$ e $a < y < 2a$, os campos da onda são dados, respectivamente, pelas eqs.(13.13) e (13.15). Isso indica que, agora, existe um campo que atravessa todo o sistema, dado por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \cos[\kappa(y - ct)] \sin \theta \cos \theta \vec{i} \\ &= \frac{E_0}{2} \cos[\kappa(y - ct)] \sin 2\theta \vec{i},\end{aligned}\quad (13.19)$$

válido para $y > 2a$. A intensidade da onda que atravessa o sistema é, portanto, máxima para os ângulos $\theta = 45^\circ$ e $\theta = 225^\circ$.

• exemplo 6

Queremos estudar as características da onda que resulta da superposição de outras duas, cujos campos elétricos obedecem as equações

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}, \quad (13.20)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \sin[\kappa(y - ct)]\vec{i}. \quad (13.21)$$

Estas duas ondas diferem quanto às fases, e a onda resultante é plana e monocromática. Os campos elétrico e magnético resultantes são

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k} + E_0 \text{sen}[\kappa(y - ct)]\vec{i} \quad (13.22)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} \cos[\kappa(y - ct)]\vec{i} - \frac{E_0}{c} \text{sen}[(y - ct)]\vec{k}. \quad (13.23)$$

Os campos \vec{E} e \vec{B} têm módulos constantes dados, respectivamente, por $E = E_0$ e $B = E_0/c$.

Esta onda é chamada circularmente polarizada. O vetor campo elétrico \vec{E} , em uma dada posição, gira em sentido horário, e sua ponta “desenha” uma circunferência. A figura 13.6 ilustra esta situação. O vetor campo elétrico ao longo do eixo y , em um dado instante, descreve uma hélice, como mostra a figura 13.7. Esta é uma onda com polarização horária ou direita porque ela “gira” segundo a “regra da mão direita”.

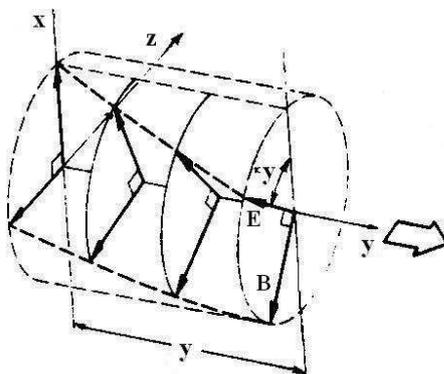


Figura 13.6: O campo elétrico de uma onda circularmente polarizada num dado ponto do espaço, através do tempo.

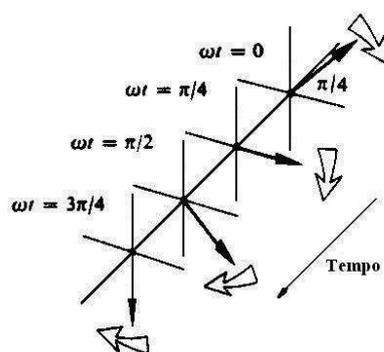


Figura 13.7: O campo elétrico da onda circularmente polarizada num dado instante.

• exemplo 7

Pode-se contruir uma onda com polarização esquerda ou anti-horária, por meio da superposição de duas ondas planas. Para tanto, basta inverter o sinal de uma das ondas do exercício anterior. Por exemplo, a superposição dos campos

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}, \quad (13.24)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \sin[\kappa(y - ct)]\vec{i}, \quad (13.25)$$

corresponde a uma onda com polarização esquerda.

• a polarização verdadeira...

Vimos, nos exemplos 6 e 7, que é sempre possível pensar numa onda circularmente polarizada, seja à esquerda ou à direita, como uma superposição de duas ondas com polarizações planas, de amplitudes iguais e defasadas de $\pi/2$. O contrário também é verdadeiro, ou seja, é sempre possível obter uma onda com polarização plana a partir de duas ondas circularmente polarizadas. Por exemplo, as ondas dadas por

$$\vec{E}_D = E_0 \{+\sin[\kappa(y - ct)]\vec{i} + \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}\}, \quad (13.26)$$

$$\vec{E}_E = E_0 \{-\sin[\kappa(y - ct)]\vec{i} + \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}\}, \quad (13.27)$$

são circularmente polarizadas, para a direita e esquerda. A partir delas, podemos obter duas ondas com polarizações planas, através das relações

$$\vec{E}_z = (\vec{E}_D + \vec{E}_E), \quad (13.28)$$

$$\vec{E}_x = (E_D - E_E). \quad (13.29)$$

Esse exemplo simples evidencia um aspecto muito interessante das ondas: elas não têm essência. Com isso, queremos dizer que as ondas com polarizações planas não são mais fundamentais que as circulares ou vice-versa. Todos esses tipos de descrição são equivalentes. A escolha de uma abordagem ou outra é motivada apenas por uma questão de conveniência.

• exemplo 8

Até agora, consideramos apenas os efeitos da superposição de ondas que se propagam com direções e sentidos iguais. Por isso consideramos, neste exemplo, o caso de ondas que se propagam na mesma direção, mas com sentidos *opostos*. Os campos elétricos de duas ondas desse tipo são dados por

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}, \quad (13.30)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos[\kappa(y + ct)]\vec{k}. \quad (13.31)$$

Neste caso, a onda 1 propaga-se para a direita e a onda 2, para a esquerda. O campo elétrico resultante é dado por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \{ \cos[\kappa(y - ct)] + \cos[\kappa(y + ct)] \} \vec{k} \\ &= 2E_0 \cos \kappa y \cos \kappa ct \vec{k}\end{aligned}\quad (13.32)$$

Este resultado corresponde a um campo elétrico sem a dependência em y e t característica de ondas que se propagam. De fato, ele representa uma onda estacionária. Num ponto do espaço, caracterizado pela coordenada y_0 o campo oscila, com a passagem do tempo, com uma amplitude $2E_0 \cos \kappa y_0$. Isso significa que nos pontos para os quais vale a relação $y_0 = (2n + 1)\pi/2\kappa$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, a amplitude é nula em todos os instantes t . Estes pontos são chamados *nós* da onda estacionária e por eles não flui energia, uma vez que o vetor de Poynting é nulo. A energia eletromagnética fica confinada entre os nós, daí o nome de onda estacionária. Para os pontos $y_0 = n\pi/\kappa$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, a amplitude do campo elétrico tem valor máximo $E = 2E_0$. Estes pontos são chamados *ventres* da onda estacionária.

Os campos magnéticos das ondas 1 e 2 são dados por

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{j} \times \vec{E}_1}{c} = \frac{E_0}{c} \cos[\kappa(y - ct)] \vec{i} \quad (13.33)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{-\vec{j} \times \vec{E}_2}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos[\kappa(y + ct)] \vec{i} \quad (13.34)$$

e, pelo princípio da superposição, o campo resultante é dado por

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ &= \frac{2E_0}{c} \sin \kappa y \sin \kappa ct \vec{i}.\end{aligned}\quad (13.35)$$

Portanto, o campo magnético, assim como o campo elétrico, têm nós e ventres. Entretanto, há defasagens espaciais e temporais, entre os nós e ventres de \vec{E} e \vec{B} .

É importante notar que, para a onda estacionária, **não** vale a relação

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \times \vec{E}}{c}, \quad (13.36)$$

onde \vec{E} e \vec{B} são os campos resultantes e \vec{u} é o versor da direção e sentido da propagação da onda. Na verdade, o versor \vec{u} não é definido, pois a onda resultante não se propaga. Relações do tipo da eq.(13.36) valem, entretanto, para as ondas 1 e 2, individualmente.

Os campos elétrico e magnético de uma onda estacionária, em diferentes instantes, estão ilustrados na figura 13.9.

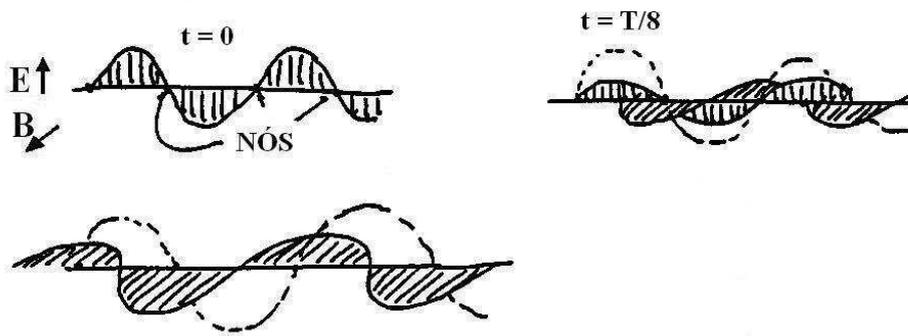


Figura 13.8: Os campos elétrico e magnético de uma onda estacionária em diferentes instantes.

• exercícios

1. Qual a vantagem de se usarem polarizadores para se fazer óculos “escuros”?
2. Determine os campos elétrico e magnético de um feixe de luz circularmente polarizada, cujo campo elétrico é dado pela eq.(13.26), depois que ela atravessa um polarizador plano, situado no plano $y = 0$ e com eixo de polarização fazendo 30° com o eixo x . Qual a razão entre as intensidades da radiação incidente e emergente?
3. Determine o campo elétrico da onda resultante da superposição de duas ondas cujos campos elétricos são dados por $\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)] \vec{k}$, e $\vec{E}_2 = 2E_0 \sin[\kappa(y - ct)] \vec{i}$. Interprete a polarização da onda resultante.

• respostas

$$2. \vec{E} = E_0 \sin[\kappa(y - ct) + \pi/6] \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{k} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \sin[\kappa(y - ct) + \pi/6] \left[\frac{1}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right]$$

$$T = \sin^2[-\kappa ct + \pi/6]$$

3. $\vec{E} = E_0 2 \sin[\kappa(y - ct)] \vec{i} + \cos[\kappa(y - ct)] \vec{k}$. Se as ondas com polarizações planas tiverem a mesma fase mas amplitudes diferentes, a onda resultante será elípticamente polarizada. Neste exercício, a polarização é para a direita.

Capítulo 14

interferência

Na aula anterior, consideramos várias situações nas quais duas ondas eletromagnéticas coexistiam em uma dada região do espaço e se propagavam na mesma direção, e discutimos principalmente os efeitos associados à polarização. Nesta aula, estudamos o que acontece quando duas ondas superpoem em uma mesma região do espaço, mas se propagam em direções diferentes.

Uma onda eletromagnética é uma configuração de campos. Como não existe interação entre campos eletromagnéticos, vale o princípio da superposição, que afirma que, se numa região do espaço existirem campos de origens diferentes, então o campo resultante é dado pela soma vetorial desses campos. Esta idéia é o ponto de partida para compreender o que acontece quando duas ondas eletromagnéticas coexistem numa dada região. Quando isso acontece, existe a superposição das ondas.

• frentes de onda

Em muitas situações, é conveniente representar, por meio de desenhos, o comportamento das ondas. Por exemplo, consideremos o caso de uma onda eletromagnética, cujo campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = E_0 \cos[\kappa(y - ct)]\vec{k}. \quad (14.1)$$

Esse campo elétrico pode ser representado de várias maneiras diferentes. Uma delas corresponde à figura 14.1a, que representa um corte da onda, paralelo ao plano yz , num certo instante. Como esta onda é plana, todos os pontos com o mesmo valor de y têm a mesma fase. Cada conjunto de pontos de mesma fase define uma *frente de onda* e, na figura, as frentes de onda são planos paralelos a xz . Assim, as frentes de onda associadas aos máximos e mínimos do campo elétrico correspondem a planos que interceptam perpendicularmente o plano yz nas linhas cheias, marcadas por $+$ e $-$, respectivamente. Já as linhas pontilhadas indicam intersecções de planos onde o campo é nulo. À medida que o tempo passa, tanto a cossenóide quanto as frentes de onda deslocam-se para a direita, com velocidade c . A representação da figura 14.1 enfatiza o perfil da onda.

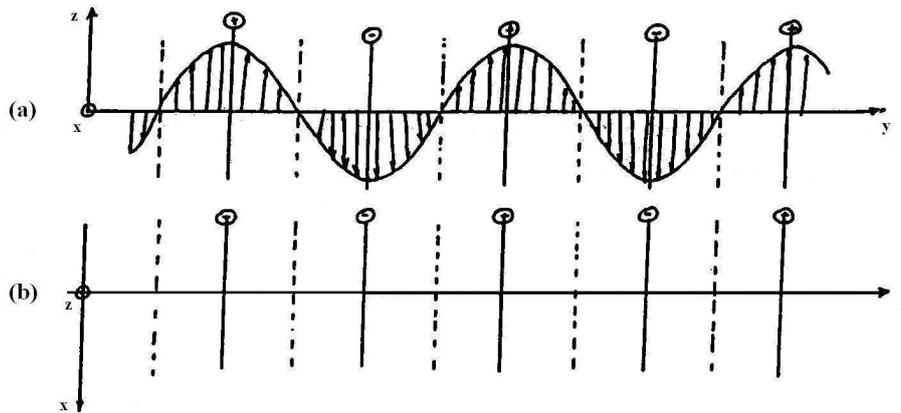


Figura 14.1: Duas representações geométricas para a onda plana linearmente polarizada que se propaga no sentido do eixo $0y$ positivo. (a) O campo elétrico da onda; (b) As frentes de onda.

O uso de frentes de onda permite, ainda, uma representação alternativa da onda, como se “olhássemos” a onda de cima. Tal como acontece quando atiramos pedras numa superfície de água parada e contemplamos as circunferências que se expandem. No caso da onda eletromagnética, o olhar de cima corresponde à figura 14.1b, onde as linhas cheias representam as intersecções de planos onde o campo é dado por $\vec{E} = \pm E_0 \vec{k}$ com o plano xy . Já as linhas pontilhadas correspondem a planos onde $\vec{E} = 0$.

• superfícies nodais

Os fenômenos associados à interferência de ondas que se propagam em direções diferentes são muito ricos em informações e foram fundamentais no desenvolvimento da óptica. Os efeitos mais perceptíveis estão relacionados ao aparecimento de linhas escuras em superfícies iluminadas e decorrem da possibilidade de o campo elétrico de uma das ondas anular o campo elétrico da outra, ao longo algumas porções bidimensionais do espaço, conhecidas como *superfícies nodais*. A palavra *nodal* é o adjetivo derivado de *nó*.

Para discutir a origem das superfícies nodais em problemas de interferência, estudamos o que acontece quando, numa região do espaço, coexistem duas ondas eletromagnéticas cujos campos elétricos são dados por

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa(x - ct)] \vec{k}, \quad (14.2)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos[\kappa(y - ct)] \vec{k}. \quad (14.3)$$

Estas duas ondas têm características semelhantes, apenas propagam-se em direções diferentes. Para compreender o resultado dessa superposição, é conveniente representá-las através de um corte paralelo ao plano xy . Na figura 14.2, válida para um instante fixo, a onda 1 se propaga para baixo e a onda 2, para a direita. As linhas cheias horizontais representam os planos nos quais $\vec{E}_1 = +E_0 \vec{k}$ ou $\vec{E}_1 = -E_0 \vec{k}$, enquanto que as linhas

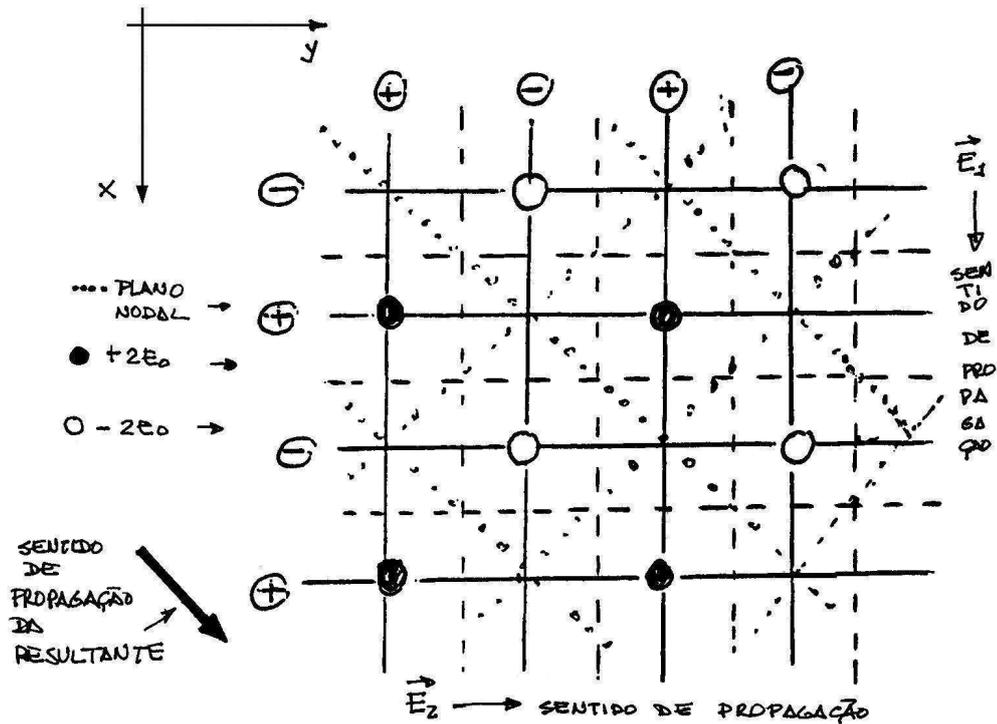


Figura 14.2: Representação geométrica de duas ondas de plana, linearmente polarizadas, que se propagam em direções perpendiculares, e a onda resultante.

tracejadas horizontais indicam os planos nos quais $\vec{E}_1 = 0$. Analogamente, as linhas cheias verticais indicam $\vec{E}_2 = +E_0 \vec{k}$ ou $\vec{E}_2 = -E_0 \vec{k}$ e as tracejadas, $\vec{E}_2 = 0$. Como as duas ondas têm a mesma amplitude, cada cruzamento de duas linhas cheias do tipo + e + corresponde a um ponto onde o campo elétrico tem valor $2E_0 \vec{k}$, enquanto que nos cruzamentos de duas linhas cheias do tipo - e -, o valor do campo é $-2E_0 \vec{k}$. Por outro lado, o campo resultante é nulo tanto nos cruzamentos de duas linhas do tipo + e - como de duas linhas tracejadas. Além desses pontos especiais, o campo resultante também é nulo ao longo de todas as diagonais indicadas por linhas pontilhadas na figura 14.2. Se deixarmos o tempo correr, as ondas 1 e 2 propagam-se e a configuração devida à superposição dessas ondas se move numa direção que forma 45° com os eixos x e y , paralelamente ao versor $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$. Neste processo, os planos onde o campo é nulo e que são paralelos a \vec{u} permanecem sempre iguais.

Uma característica importante do padrão de superposição das duas ondas planas é a existência de planos ao longo dos quais o campo é nulo, chamados de *planos nodais*. Na figura usada neste exemplo, esses planos nodais estão indicados pelas linhas pontilhadas inclinadas de 45° . Podemos notar que existem tanto planos nodais paralelos como ortogonais à direção de propagação.

• franjas de interferência

As superfícies nodais constituem as marcas mais características da interferência entre ondas. E, felizmente, elas podem ser observadas por meio de experimentos.

No caso das ondas (14.2) e (14.3), que deram origem à figura 14.2, a existência dos planos nodais pode ser observada por meio de uma tela branca, colocada de modo a interceptar perpendicularmente o caminho da onda. Ou seja, ortogonal à bissetriz do ângulo formado pelos eixos x e y , como mostra o canto superior esquerdo da figura 14.3.

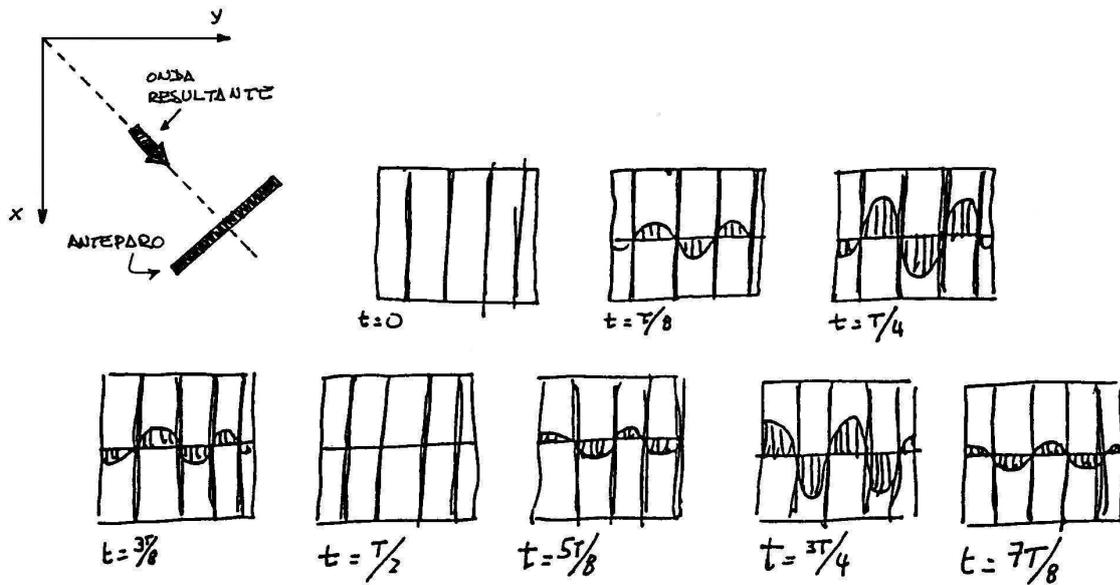


Figura 14.3: O campo elétrico em diferentes instantes da onda resultante da superposição de duas ondas planas, de mesma amplitude e polarização, que se propagam em direções perpendiculares.

Nos diversos painéis da figura 14.3, indicamos o perfil do campo elétrico da onda resultante sobre o anteparo em oito instantes diferentes, separados pelo intervalo $T/8$, onde T é o período da onda.

O primeiro desenho corresponde ao instante $t = 0$, no qual um plano nodal ortogonal à direção de propagação atinge o anteparo. Nesse instante, o campo sobre todo o anteparo é nulo, o mesmo acontecendo com a intensidade da onda, que é proporcional ao quadrado do campo. No instante $t = T/8$, começa a aparecer campo em algumas regiões do anteparo, enquanto que em outras, correspondentes aos planos nodais perpendiculares ao anteparo, o campo é nulo. O anteparo mostra, portanto, uma sucessão de linhas escuras verticais, que separam regiões iluminadas. A iluminação dessas regiões é pulsante, mas essa pulsação é tão rápida, da ordem de 10^{15} Hz, que tanto os nossos olhos como os instrumentos de medida percebem a iluminação como se ela fosse contínua. Por outro lado, o que acontece na intersecção dos planos nodais com a tela não varia com o tempo. Em qualquer instante existem planos nodais interceptando perpendicularmente o anteparo, indicando a ausência

de campo elétrico nessas regiões.

A situação discutida anteriormente, onde duas ondas planas se movem em direções ortogonais, pode ocorrer na natureza mas não é a mais interessante para estudar os efeitos de superposição no laboratório. Nós a consideramos aqui apenas por ser particularmente simples, do ponto de vista conceitual. Situações mais realísticas serão apresentadas nas duas aulas seguintes.

• aspectos geométricos, ondulatórios e eletromagnéticos

O estudo de efeitos associados a ondas eletromagnéticas, realizado no âmbito das equações de Maxwell pode envolver, paralelamente, aspectos geométricos e ondulatórios. Em muitos casos, aspectos importantes de problemas envolvendo ondas podem ser compreendidos sem que campos elétricos e magnéticos sejam acionados.

Na verdade, muitos dos fenômenos de luz foram descritos em bases geométricas, bem antes da teoria de Maxwell. Parte deste conhecimento ainda hoje é conhecido como *óptica geométrica*, cujo principal instrumento é a idéia de *raio de luz*, que indica a direção de propagação da onda. Entre os fenômenos descritos pela óptica geométrica, estão a propagação da luz num meio homogêneo, sua reflexão e transmissão ao encontrar um meio homogêneo diferente (refração) e a formação de imagens em espelhos e em lentes. Na descrição geométrica, o ganho em simplicidade compensa as fragilidades do método, e ela tem-se mostrado adequada quando o comprimento de onda da radiação é muito pequeno comparado com as dimensões do meio onde ela se propaga (meios extensos), e muito grande em relação às estruturas atômico-moleculares do meio.

Há fenômenos, entretanto, que não podem ser entendidos somente com base na descrição geométrica, como é o caso das interferências ondulatórias mostradas na figura 14.2. Nesses casos, aparecem padrões de interferência, nos quais a radiação em algumas regiões do espaço tem intensidade alta e, em outras, intensidades baixas ou nulas. Estes padrões de interferência são como a impressão digital que identifica um fenômeno ondulatório, e ocorrem com todos os tipos de ondas. Sua descrição, entretanto, pode ser simplificada com o uso de instrumentos tais como frentes de onda. Essas frentes de onda são superfícies perpendiculares aos raios, que se sucedem no tempo e, nas quais a intensidade da onda é uniforme.

Existem muitas situações, entretanto, onde esses métodos aproximados não podem ser aplicados e a solução de problemas requer um tratamento baseado diretamente nas equações de Maxwell. Este é o caso, por exemplo, de explicações da cor azul do céu ou da transparência do vidro.

• princípio de Huygens

Na teoria de Maxwell, as ondas eletromagnéticas são descritas pelos campos elétricos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnéticos $\vec{B}(\vec{r}, t)$, que contêm informação acerca da direção de propagação da

onda.

De modo geral, se conhecermos a direção de propagação da onda, podemos construir as frentes de onda em cada instante. Um método de construção das frentes de onda foi proposto inicialmente por Huygens, em 1690 e, por isso, é conhecido como **princípio de Huygens**. Um possível enunciado para este princípio é o seguinte: *cada ponto de uma frente de onda num dado instante funciona como uma fonte esférica secundária, de forma que a nova frente de onda, num instante posterior, é a envoltória das frentes de ondas esféricas provenientes dos vários pontos.*

Em outras palavras, uma vez perturbado, cada ponto do meio se comporta como uma fonte puntiforme. Essa fonte puntiforme emite ondas em todas as direções e, no vácuo, ou em meio homogêneo não dissipativo, a propagação se dá em todas as direções com a mesma velocidade. Assim, a fonte puntiforme gera uma *onda esférica*. Os raios da onda esférica têm a direção radial com origem na fonte, representada por um ponto, e as frentes de onda são superfícies esféricas concêntricas com a fonte.

Na representação gráfica das frentes de uma onda monocromática, é costume relacionar a distância entre as frentes de onda com seu comprimento de onda. Assim, na representação de uma onda com comprimento de onda λ e, de outra com 2λ , a distância entre as superfícies que representam a frente de onda da primeira é metade da distância entre as frentes de onda da segunda.

Há dois pontos cruciais implícitos no uso do princípio de Huygens: o primeiro deles é que as ondas têm a mesma frequência que aquela que as gerou, independentemente do meio onde ela se propaga. O outro ponto é que, se a onda tem uma certa velocidade num meio, as ondas secundárias se propagam naquele meio com a mesma velocidade. Como consequência, se o meio em que a luz se propaga é homogêneo, os raios são linhas retas infinitas.

A figura 14.4 esquerda ilustra a propagação de uma onda esférica com base no princípio de Huygens. A propagação de cada frente de onda pode, segundo este princípio, ser entendida como proveniente da soma de inúmeras pequenas ondas, também esféricas. Na figura 14.4 direita é mostrada a propagação de uma onda genérica, com base no princípio de Huygens.

Alguns casos particulares de frentes de onda, além das esféricas, são importantes. Por exemplo, feixes de luz emitidos por fontes distantes, como o Sol, são representados por *ondas planas*. As ondas planas têm raios que são linhas paralelas e infinitas, e as frentes de onda são superfícies planas, perpendiculares aos raios. Neste caso, a intensidade da onda que se propaga no vácuo é constante em todas as frentes de onda, para haver conservação da energia da onda em sua propagação. Por isto a amplitude do campo elétrico da onda plana monocromática é constante.

Uma fonte de onda linear (ou cilíndrica com raio muito menor que o comprimento)

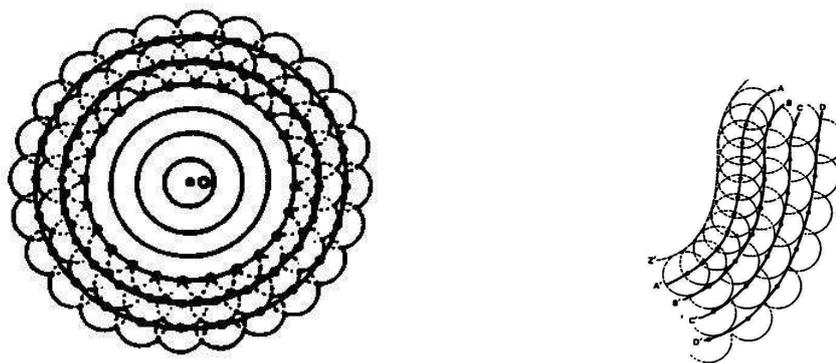


Figura 14.4: Representação geométrica das frentes de uma onda esférica (direita) e qualquer (esquerda) com base no princípio de Huygens.

gera, segundo o princípio de Huygens, ondas cujos raios são linhas radiais em relação à fonte (ou eixo do cilindro) e as frentes de onda são superfícies cilíndricas coaxiais com a fonte. Por esta razão estas ondas são chamadas de *cilíndricas*.

• exemplo

Uma onda incide sobre um anteparo plano, contendo duas ranhuras longas e muito estreitas, paralelas ao eixo z . Pelo princípio de Huygens, cada uma das fendas passa a se comportar como uma fonte de ondas cilíndricas que, vistas de cima, correspondem à situação mostrada na figura 14.5.

Se a onda incidir normalmente ao anteparo, as ondas emitidas pelas duas fendas estarão em fase e suas frentes de onda terão, num dado instante a configuração mostrada na figura 14.6. Na região à direita do anteparo, temos algo análogo ao descrito na figura 14.2 e aparecem superfícies nodais. Quando interceptadas por um outro anteparo, as superfícies nodais se manifestam como uma sucessão de linhas que permanecem sempre escuras. Entre elas, existem regiões iluminadas.

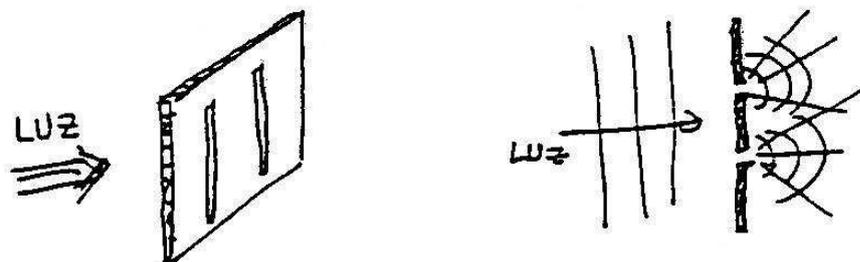


Figura 14.5: Onda incidindo em um anteparo plano, com duas ranhuras.

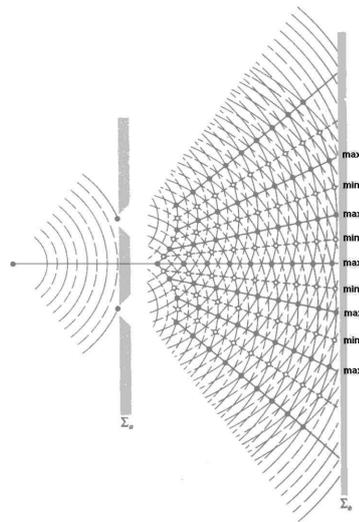


Figura 14.6: Interferência entre as ondas provenientes de duas fendas.

• **exercício**

1. As situações mostradas nas figura 14.2 e 14.6 são semelhantes, na medida que, em ambas, existe uma região do espaço na qual ondas de mesmo comprimento de onda se propagam em direções diferentes. No caso da figura 14.6, suponha que o comprimento de onda da luz seja λ e que d_1 e d_2 sejam as distâncias entre cada uma das fendas do anteparo ao *mesmo* ponto P da tela. Determine a relação entre d_1 e d_2 para que o ponto P esteja sobre uma linha escura.

• **resposta**

1. $d_1 - d_2 = \pm \frac{(2n+1)}{2} \lambda$, onde n é um número inteiro.

Capítulo 15

difração

- um tipo de experimento clássico

As características ondulatórias da luz podem ser evidenciadas por meio de experimentos, nos quais se atiram ondas monocromáticas sobre anteparos com fendas e estudam-se as figuras de interferência que aparecem num segundo anteparo, normalmente branco, colocado a uma certa distância do primeiro, como mostra a figura 15.1.

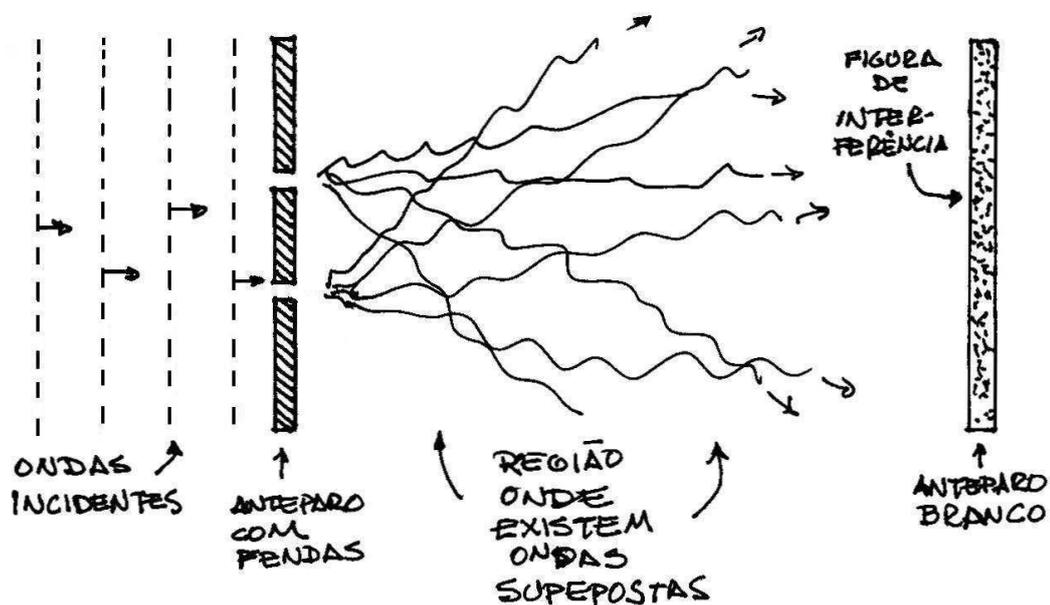


Figura 15.1:

O princípio de Huygens permite que, neste tipo de experimento, cada fenda possa ser considerada como uma fonte independente. Por isso, na região entre os dois anteparos, coexistem e estão superpostas as ondas provenientes das várias fendas. Para que as figuras devidas à interferência dessas ondas possam ser observadas sobre o anteparo branco, as

larguras das fendas devem ser pequenas quando comparadas com a distância entre os anteparos. Em óptica, as larguras de fendas são tipicamente bem menores do que 1 milímetro.

Como a figura sugere, a luz se propaga em várias direções diferentes depois de passar pela fenda, e o mesmo acontece com a energia que ela carrega. Se, no primeiro anteparo, existir um pequeno orifício circular, ele pode ser considerado como uma fonte de ondas esféricas, que se propagam em todas as direções. No vácuo, ou em meio homogêneo não dissipativo, essa propagação se dá com a mesma velocidade. Assim, a fonte gera uma *onda esférica*, cujos raios têm origem na fonte, e cujas frentes de onda são superfícies esféricas concêntricas com a fonte. Se a fonte emite com potência (energia por unidade de tempo) constante, a energia média sobre qualquer frente de onda é sempre a mesma, independentemente do seu raio. Por isso, a conservação de energia exige que a intensidade (energia média por unidade de tempo e de área) da onda varie com o inverso do quadrado da distância à fonte. Se chamarmos de \vec{E}_0 a amplitude do campo elétrico *na região da fenda*, a intensidade da onda naquela região será proporcional ao quadrado do campo e, portanto, a $|\vec{E}_0|^2$. Como, no caso da onda esférica, a intensidade da onda a uma distância r da fonte é proporcional a $1/r^2$, a amplitude do campo elétrico a essa distância vale \vec{E}_0/r .

No caso de emissores de ondas eletromagnéticas que têm outras simetrias que não a esférica, o princípio de Huygens prevê que as frentes das ondas geradas têm as mesmas simetrias que as fontes. Assim, uma ranhura retilínea e longa num anteparo, que pode ser considerada como uma fonte de onda linear gera, segundo o princípio de Huygens, ondas que se propagam ao longo de linhas radiais em relação à fonte, com frentes de onda na forma de superfícies cilíndricas, coaxiais com a fonte. Por esta razão estas ondas são chamadas de *cilíndricas*. Na propagação de ondas cilíndricas no vácuo, a conservação da energia faz com que a intensidade deva ser inversamente proporcional à distância da frente de onda à fonte, uma vez que a área de uma frente de onda é proporcional à sua distância ao eixo. Nestas ondas, a amplitude do campo elétrico à distância r da ranhura é dada por \vec{E}_0/\sqrt{r} .

• difração por duas fendas estreitas - o campo elétrico

Quando uma onda plana e monocromática incide sobre um anteparo contendo duas ranhuras estreitas, retilíneas e paralelas, cada uma das fendas passa a se comportar como uma fonte de ondas cilíndricas, cujas amplitudes em um ponto distando r da ranhura decrescem com $1/\sqrt{r}$. Se a onda incidir normalmente ao anteparo, as ondas emitidas pelas duas fendas estarão em fase. Analogamente ao caso das duas ondas planas estudadas na aula 14, as duas ondas cilíndricas que partem das fendas também se superpõem, gerando um padrão de máximos, mínimos e superfícies nodais. Sobre essas superfícies nodais, os campos se anulam e, por isso, sobre o segundo anteparo podemos observar uma sucessão de listas verticais, claras e escuras.

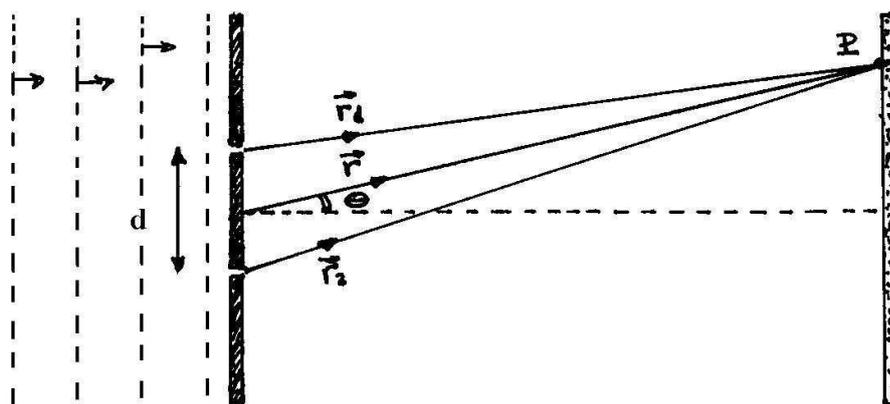


Figura 15.2:

As posições dessas linhas poderiam ser obtidas geometricamente, a partir do princípio de Huygens, como visto na aula 14. Entretanto, esse método não é o mais conveniente para um estudo detalhado da interferência que ocorre neste problema. Nós, aqui, abordamos o problema com base nas equações dos campos elétricos. Consideremos a situação mostrada na figura 15.2, onde uma onda plana incide sobre um anteparo situado sobre o plano $y = 0$, com duas fendas compridas e estreitas, paralelas ao eixo z , que funcionam como fontes de ondas cilíndricas. Essas ondas se propagam, e incidem sobre uma tela, paralela ao anteparo. Nosso problema consiste em determinar o que ocorre sobre um ponto P da tela, genérico, e que dista r_1 da fenda 1 e r_2 da fenda 2.

Os módulos dos campos elétricos sobre as fendas são praticamente iguais, pois eles derivam da mesma onda plana. Supondo que tal onda esteja polarizada paralelamente ao eixo z , podemos escrever os campos *sobre as fendas* como

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos \omega t \vec{k} , \quad (15.1)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos \omega t \vec{k} . \quad (15.2)$$

Sobre o ponto P , esses campos passam a ser dados por

$$\vec{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{r_1}} \cos(\kappa r_1 - \omega t) \vec{k} , \quad (15.3)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{r_2}} \cos(\kappa r_2 - \omega t) \vec{k} . \quad (15.4)$$

Estas expressões de \vec{E}_1 e \vec{E}_2 contêm dois ingredientes importantes. O primeiro é o fator $1/\sqrt{r}$, que representa a diminuição do módulo do campo com a distância a uma fonte cilíndrica. O segundo é uma fase relativa ao campo na fenda, dada por $\vec{\kappa} \cdot \vec{r} = \kappa r$. O campo resultante no ponto P do anteparo é dado por

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 . \quad (15.5)$$

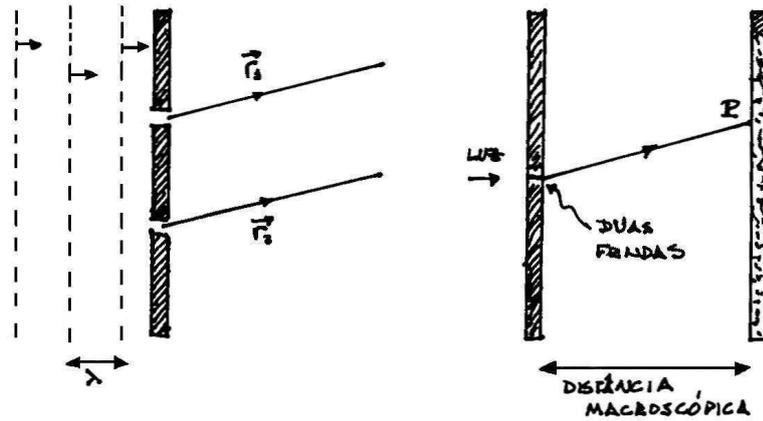


Figura 15.3: A figura da esquerda foi desenhada na escala do comprimento de onda da luz incidente, que é comparável à separação entre as fendas. No caso da figura da direita, a escala do anteparo branco do laboratório foi utilizada e, por isso, é impossível representar adequadamente as frentes de onda de luz incidente e a distância entre as fendas. A existência dessas duas escalas tão diferentes permite que os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 da figura da esquerda possam ser considerados como paralelos, ainda que isso não seja estritamente verdade.

Quando a distância da tela ao anteparo for muito maior que a separação entre as fendas, podemos obter uma expressão analítica para o campo resultante. Nesse caso, podemos reexpressar r_1 e r_2 , em termos de $r = (r_1 + r_2)/2$, a média dessas distâncias e de $\Delta = r_2 - r_1$, o dobro da diferença entre elas:

$$r_1 = r - \Delta, \quad (15.6)$$

$$r_2 = r + \Delta, \quad (15.7)$$

sendo $r \gg \Delta$. Nesse caso, podemos usar, para as amplitudes, as aproximações $1/\sqrt{r_1} \sim 1/\sqrt{r_2} \sim 1/\sqrt{r}$ e escrever, para o módulo de \vec{E}_P

$$E_P = \frac{E_0}{\sqrt{r}} [\cos(\kappa r - \omega t - k\Delta) + \cos(\kappa r - \omega t + k\Delta)] \quad (15.8)$$

$$= \frac{2E_0}{\sqrt{r}} [\cos k\Delta \cos(\kappa r - \omega t)] . \quad (15.9)$$

A distância Δ pode ser expressa em termos das variáveis r e θ da figura 15.4, como

$$\Delta = \frac{d \operatorname{sen} \theta}{2} . \quad (15.10)$$

Assim, o módulo do campo elétrico resultante sobre o anteparo é dado por

$$E = E_A [\cos(\kappa r - \omega t)] . \quad (15.11)$$

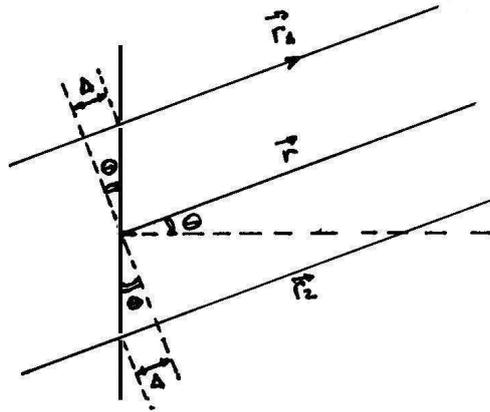


Figura 15.4:

onde a amplitude E_A é

$$E_A = \frac{2E_0}{\sqrt{r}} \left[\cos \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \right], \quad (15.12)$$

usando $\kappa = 2\pi/\lambda$. Esta amplitude depende de θ , indicando que ela varia ao longo da tela. Além disso, é muito importante notar que ela também depende da razão d/λ . A variável d representa a separação entre as duas fendas e, por isso, pode ser determinada pelo interesse da pessoa que realiza o experimento. Em princípio, respeitadas as limitações tecnológicas, essa pessoa pode construir anteparos com o valor que desejar para d . A variável λ , por outro lado, depende da frequência da luz usada no experimento e pode, também, ser escolhida à vontade. Deste modo, a pessoa que realiza o experimento de difração pode escolher o valor que quiser para a razão d/λ .

• difração por duas fendas estreitas - as franjas

Os pontos de máximo e mínimo da amplitude (15.12) são determinados pelas condições

$$\cos \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) = 1 \rightarrow \frac{d \sin \theta_{MAX}}{\lambda} = n, \quad (15.13)$$

$$\cos \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) = 0 \rightarrow \frac{d \sin \theta_{MIN}}{\lambda} = \frac{2n+1}{2}, \quad (15.14)$$

sendo n um número inteiro. Essas condições determinam os valores dos ângulos correspondentes, por meio das equações

$$\sin \theta_{MAX} = n \frac{\lambda}{d}, \quad (15.15)$$

$$\sin \theta_{MIN} = \left(\frac{2n+1}{2} \right) \frac{\lambda}{d}. \quad (15.16)$$

Na tela, os pontos de mínimo correspondem a regiões escuras e os pontos de máximo a regiões brilhantes. Na região central da tela, para a qual $\theta = 0$, existe uma região brilhante. Por outro lado, o aparecimento de linhas escuras ou de mais linhas claras depende da relação λ/d . Considere, por exemplo, um experimento onde $d = \lambda/4$, para o qual as equações (15.17) e (15.18) seriam $\text{sen } \theta_{MAX} = 4n$ e $\text{sen } \theta_{MIN} = 4,5n$, respectivamente. Como $\text{sen } \theta \leq 1$, a única solução viável é dada por $n = 0$. Por isso, a primeira linha escura somente pode aparecer para $d = \lambda/2$.

Na tabela abaixo fornecemos os valores dos ângulos correspondentes às linhas escuras para vários valores da razão λ/d .

n + 1/2	d = λ/2		d = λ		d = 2λ		d = 4λ	
	sen θ	θ	sen θ	θ	sen θ	θ	sen θ	θ
1/2	1	90°	1/2	30°	1/4	14°	1/8	7°
3/2	∅		∅		3/4	48°	3/8	22°
5/2	∅		∅		∅		5/8	39°
7/2	∅		∅		∅		7/8	61°

Os planos nodais correspondentes ao caso $d = 4\lambda$ estão mostrados na figura 15.5, que dão origem a oito linhas escuras sobre o anteparo. As regiões entre esses planos permanecem iluminadas.

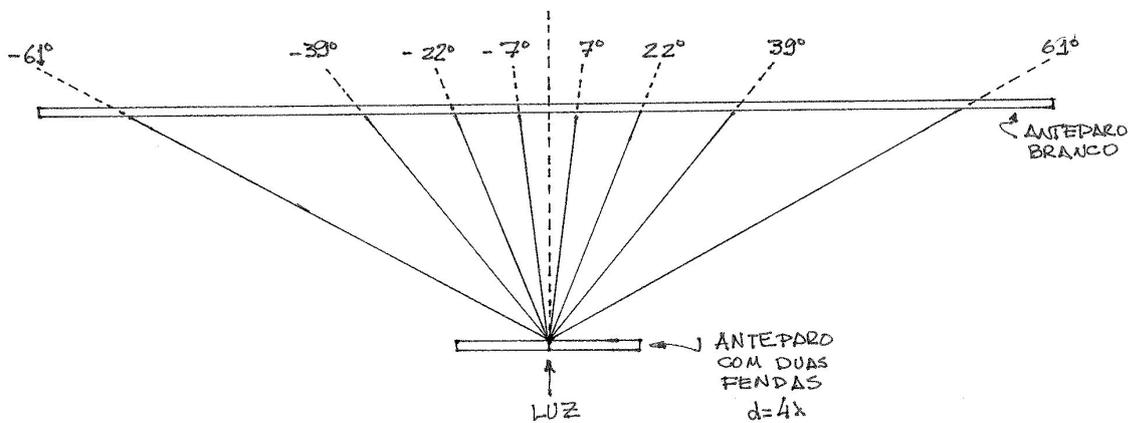


Figura 15.5:

• difração por duas fendas estreitas - energia

O fluxo de energia sobre a tela é determinado pelo vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \tag{15.17}$$

Como o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \vec{c} \times \frac{\vec{E}}{c^2}, \quad (15.18)$$

temos que o vetor de Poynting é paralelo à velocidade da luz e expresso por

$$\vec{S} = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c^2} \right) \vec{c}. \quad (15.19)$$

Assim, a energia que incide sobre a tela por unidade de tempo e unidade de área é dada pelo produto escalar de \vec{S} com \vec{n} , um versor normal à superfície, e vale

$$S_\theta = \vec{S} \cdot \vec{n} = \left(\frac{E_A^2}{\mu_0 c} \right) \cos\theta, \quad (15.20)$$

onde E_A é a amplitude do vetor campo elétrico, dada pela equação (15.12).

$$\langle S_\theta \rangle = \frac{E_A^2}{2\mu_0 c} \cos\theta, \quad (15.21)$$

A média temporal desta grandeza é

$$\langle S_\theta \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{4E_0^2}{r} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \right) \right] \cos\theta. \quad (15.22)$$

Notando que, se fechássemos uma das fendas, a incidência média de energia seria dada por

$$\langle S_\theta \rangle_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c r} \cos\theta, \quad (15.23)$$

podemos escrever

$$\langle S_\theta \rangle = 4 \left[\cos^2 \left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \right) \right] \langle S_\theta \rangle_0. \quad (15.24)$$

O gráfico da intensidade sobre a tela para o caso $d = 4\lambda$ está esboçado na figura 15.4.

O experimento de interferência por duas fendas estreitas, discutido esquematicamente nesta aula, foi realizado pela primeira vez por Thomas Young, em 1801. Para que as faixas brilhantes e escuras possam ser observadas experimentalmente, é preciso que a luz empregada seja monocromática, ou seja, tenha frequência muito bem definida. Quando isto não acontece, as linhas aparecem “borradas” e podem não ser observadas.

• exercícios

1. Supondo que $d = 4\lambda$ e que a tela diste $100d$ do anteparo, esboce gráficos representando os campos \vec{E}_1 e \vec{E}_2 entre as fendas e o primeiro ponto de mínimo.

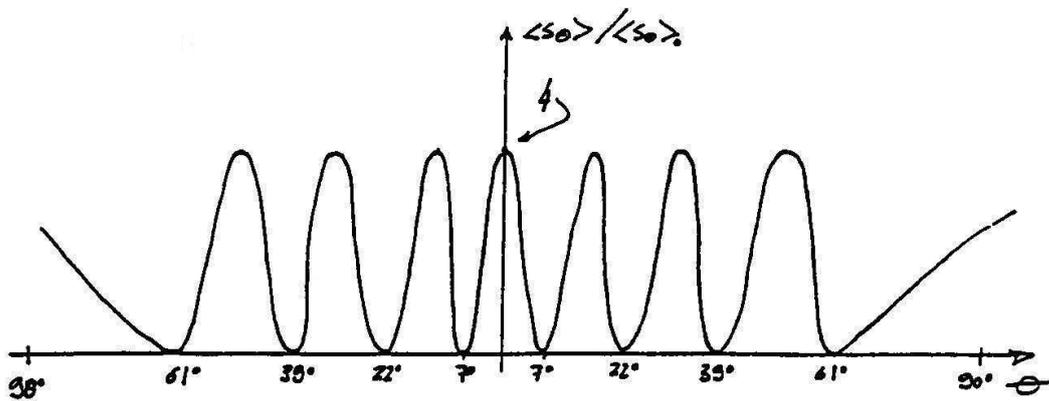


Figura 15.6:

2. Usando um programa gráfico, estude o comportamento da função $F(\theta) = \cos \left[\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]$, em função de θ , no intervalo $10 \leq d/\lambda \leq 1/10$.
3. Por que duas fendas muito juntas não provocam figuras de interferência?
4. No caso da interferência provocada pela passagem de luz em duas fendas estreitas e usando diretamente as construções geométricas associadas ao princípio de Huygens, determine os ângulos θ para os quais aparecem linhas escuras no anteparo branco, no caso $d = 4\lambda$.

• respostas

3. Porque a onda as percebe como uma única fenda...

Capítulo 16

difração em fendas largas

Na aula anterior, estudamos a difração por duas fendas estreitas e vimos que, naquele caso, a luz pode produzir um padrão de linhas claras e escuras numa tela. A interferência observada é devida à diferença de fase entre as ondas emitidas pelas duas fendas, já que as distâncias de cada uma delas a um ponto genérico da tela são diferentes. Naquele caso, o conceito de “distância à fenda” não tinha ambiguidade, porque a fenda não possuía espessura e podia ser considerada como uma linha. Nesta aula consideramos o caso de fendas de larguras não desprezíveis. Quando isto acontece, cada ponto da fenda funciona como uma fonte unidimensional e pode existir uma diferença de fase entre dois raios “vizinhos”, o que dá origem a um padrão de interferência.

• uma fenda larga

Como no caso da aula anterior, o estudo dos padrões de interferência produzidos por uma fenda larga é feito considerando um ponto P de uma tela branca, situado à distância r do centro da fenda, sendo r muito maior do que a largura da fenda.

Quando uma onda plana incide normalmente sobre um anteparo no qual há uma fenda larga, temos a situação indicada na figura 16.1, onde todos os pontos sobre o eixo x têm a mesma fase. As ondas incidente e difratada existem, respectivamente, nas regiões $y < 0$ e $y > 0$. Chamando a largura da fenda de a e tomando o eixo y como referência, a diferença de fase entre o raio central e o que parte de um ponto situado à coordenada x é dada por

$$\delta(x) = \kappa x \operatorname{sen} \theta . \quad (16.1)$$

Assim, o campo elétrico sobre o ponto P da tela, devido ao raio que emergiu do ponto de coordenada x , pode ser escrito como

$$\vec{E}(r, x) = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \cos[\kappa(r + x \operatorname{sen} \theta) - \omega t] \vec{k} . \quad (16.2)$$

O campo observado no ponto P da tela corresponde a uma média das várias contribuições

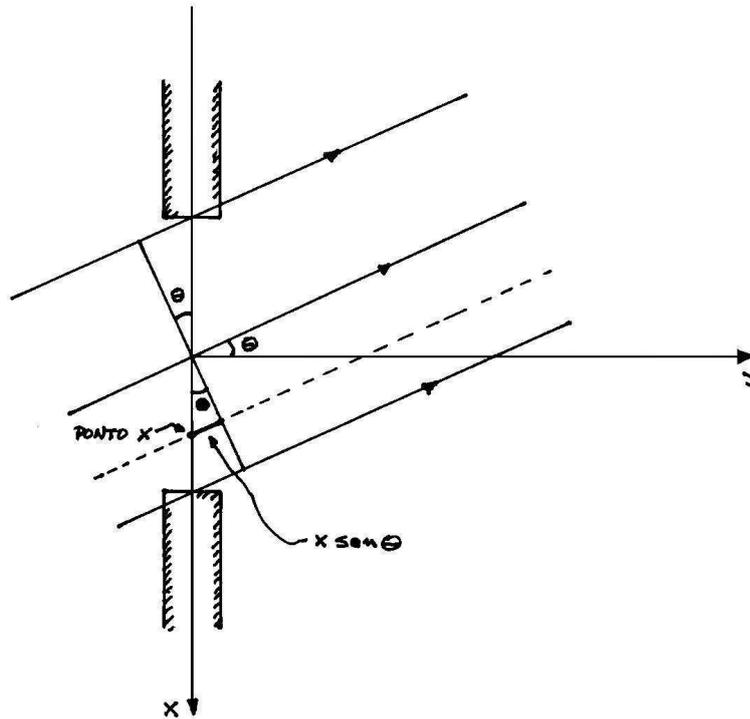


Figura 16.1:

individuais dada por

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(r) &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \vec{E}(r, x) \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{E_0}{\sqrt{r}} \cos[\kappa(r + x \text{ sen } \theta) - \omega t] \vec{k} \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{E_0}{\sqrt{r}} \{ \cos(\kappa r - \omega t) \cos(\kappa x \text{ sen } \theta) - \text{sen}(\kappa r - \omega t) \text{sen}(\kappa x \text{ sen } \theta) \} \vec{k} \\
 &= \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{2}{ka \text{ sen } \theta} \text{sen} \left(\frac{\kappa a \text{ sen } \theta}{2} \right) \cos(\kappa r - \omega t) \vec{k}.
 \end{aligned} \tag{16.3}$$

Chamando

$$\phi \equiv \frac{\kappa a \text{ sen } \theta}{2} \tag{16.4}$$

temos

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \cos(\kappa r - \omega t) \vec{k}. \tag{16.5}$$

Para calcular o fluxo de energia sobre a tela, usamos o vetor de Poynting, que é dado por

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c^2} \vec{c} = \frac{E_0^2}{r \mu_0 c^2} \left[\frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2 \cos^2(\kappa r - \omega t) \vec{c}. \tag{16.6}$$

A sua média temporal vale

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r\mu_0 c^2} \left[\frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2 \vec{c}. \quad (16.7)$$

No problema presente, a velocidade da luz que sai da fenda é paralela ao vetor \vec{r} e, portanto, podemos escrever

$$\vec{c} = c \frac{\vec{r}}{r}. \quad (16.8)$$

Assim, numa dada direção \vec{r} , o valor médio do vetor de Poynting tem a forma

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r\mu_0 c} \left[\frac{\text{sen}^2 \phi}{\phi} \right]^2 \frac{\vec{r}}{r}. \quad (16.9)$$

e, para o módulo de \vec{S} , obtemos

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r\mu_0 c} \left[\frac{\text{sen}^2 \phi}{\phi} \right]^2. \quad (16.10)$$

O valor máximo desta função ocorre para $\phi = 0$ e vale ¹

$$\langle |\vec{S}| \rangle_{MAX} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r\mu_0 c}, \quad (16.11)$$

o que permite escrever

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{S}| \rangle_{MAX} \left[\frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2. \quad (16.12)$$

A função $\text{sen } \phi$ pode ser nula sempre que a condição

$$\phi = \frac{\kappa a \text{sen } \theta}{2} = n \pi, \quad (16.13)$$

for satisfeita, sendo n um número inteiro. Como $\kappa = 2\pi/\lambda$, temos pontos escuros sempre que

$$\text{sen } \theta_n = \frac{n\lambda}{a}. \quad (16.14)$$

As soluções desta equação são fortemente dependentes da razão λ/a . Por exemplo, se $a = \lambda/2$, a equação (16.14) passa a ser $\text{sen } \theta = 2n$, que não tem solução quando n é um número inteiro. A primeira possibilidade de solução ocorre para $\lambda = a$, e alguns exemplos são dados na tabela.

A intensidade relativa, para o caso $a = 3\lambda$, que é mostrada na figura 16.2, corresponde à teoria subjacente ao resultado experimental mostrado na figura 16.3.

¹Usamos o resultado $\lim_{\phi \rightarrow 0} \text{sen } \phi / \phi = 1$.

n	$a = \lambda/2$		$a = 1,7\lambda$		$a = 2\lambda$		$a = 3\lambda$		$a = 3,2\lambda$		$a = 3,8\lambda$		$a = 4\lambda$	
	sen θ_n	θ_n	sen θ_n	θ_n	sen θ_n	θ_n	sen θ_n	θ_n	sen θ_n	θ_n	sen θ_n	θ_n	sen θ_n	θ_n
1	2	$\cancel{\lambda}$	0,59	$36,03^\circ$	0,50	$30,00^\circ$	0,33	$19,47^\circ$	0,31	$18,21^\circ$	0,26	$15,26^\circ$	0,25	$14,48^\circ$
2	4	$\cancel{\lambda}$	1,18	$\cancel{\lambda}$	1,00	$90,00^\circ$	0,67	$41,81^\circ$	0,63	$38,68^\circ$	0,53	$31,76^\circ$	0,50	$30,00^\circ$
3	...	$\cancel{\lambda}$	1,76	$\cancel{\lambda}$	1,50	$\cancel{\lambda}$	1,00	$90,00^\circ$	0,94	$69,64^\circ$	0,79	$52,14^\circ$	0,75	$48,59^\circ$
4	2,00	$\cancel{\lambda}$	1,33	$\cancel{\lambda}$	1,25	$\cancel{\lambda}$	1,05	$\cancel{\lambda}$	1,00	$90,00^\circ$
5	1,67	$\cancel{\lambda}$	1,56	$\cancel{\lambda}$	1,32	$\cancel{\lambda}$	1,25	$\cancel{\lambda}$
6	1,50	$\cancel{\lambda}$
7

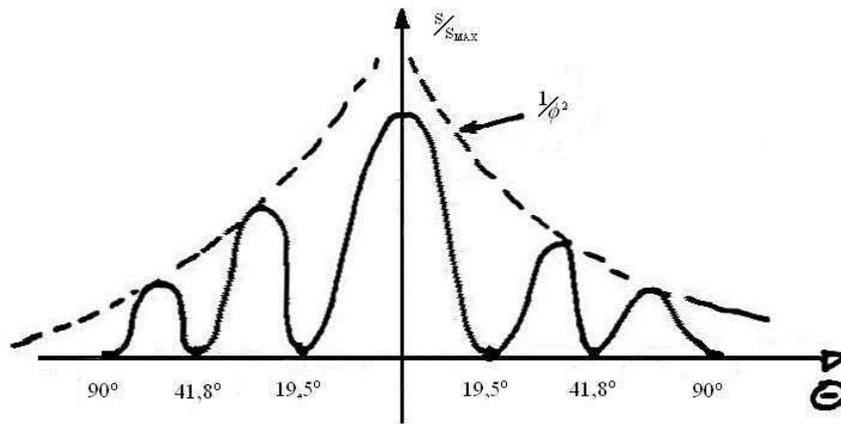


Figura 16.2:

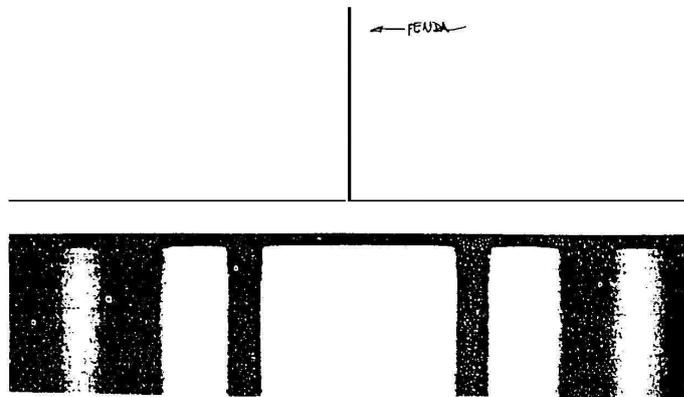


Figura 16.3:

O comprimento de onda da luz é da ordem de 10^{-7} m. Isso significa que, sobre uma tela colocada atrás de um fenda de 1 metro de abertura, comparável a uma porta, existem da ordem de 10^7 soluções para a eq.(16.13). Ou seja, da ordem de 10 milhões de linhas escuras, separando regiões claras. Essas linhas estão de tal modo empilhadas umas sobre as outras, que é impossível distingui-las. O que se percebe, então, é apenas uma região clara atrás da porta.

• duas fendas largas

No caso de termos duas fendas largas como na figura 16.4, o padrão de difração é mais complexo. Para cada uma das fendas vale o resultado dado pela equação (16.5). Assim, escrevemos os campos médios das ondas oriundas das fendas 1 e 2 como

$$\vec{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \cos(\kappa r_1 - \omega t) \vec{k}, \quad (16.15)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \cos(\kappa r_2 - \omega t) \vec{k}, \quad (16.16)$$

com $\phi = ka \text{ sen } \theta/2$.

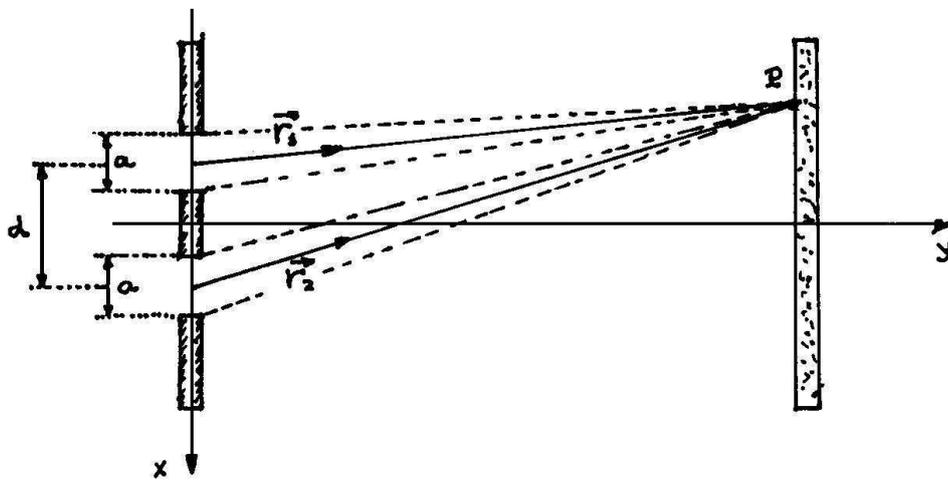


Figura 16.4:

Como na aula 15, chamamos

$$\begin{aligned} r_1 &= r - \frac{d}{2} \text{sen } \theta, \\ r_2 &= r + \frac{d}{2} \text{sen } \theta. \end{aligned} \quad (16.17)$$

Assim, o campo resultante no ponto P pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} 2 \cos \beta \cos(\kappa r - \omega t) \vec{k}, \\ \beta &= \frac{kd \text{ sen } \theta}{2}. \end{aligned} \quad (16.18)$$

A intensidade, portanto, é dada por

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r\mu_0 c} 4 \cos^2 \beta \left[\frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2. \quad (16.19)$$

A diferença entre este resultado, válido para duas fendas largas, e a eq.(16.10), válida para uma fenda, é o fator $4 \cos^2 \beta$, que dá origem a um novo conjunto de superfícies nodais, que ocorrem sempre que

$$\beta = \frac{\kappa d \sin \theta_m}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (16.20)$$

sendo m um número inteiro. Usando $\kappa = 2\pi/\lambda$, obtemos a condição

$$\sin \theta_m = \frac{2m - 1}{2} \frac{\lambda}{d} \quad (16.21)$$

para os zeros de β .

A intensidade relativa determinada por esse resultado é a mostrada na figura 16.5. Na figura 16.6 são mostradas duas fotografias, obtidas por meio de difração por uma e duas fendas largas.

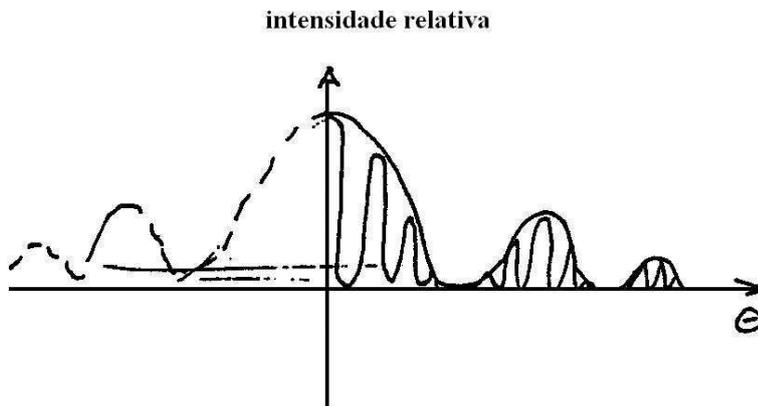


Figura 16.5:

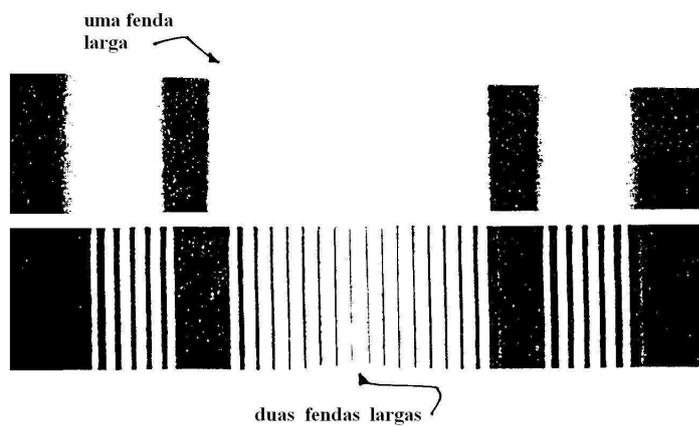


Figura 16.6:

• **exercícios**

1. Considere a difração de uma luz monocromática cujo comprimento de onda é λ por uma fenda de largura $a = 3,99 \lambda$.
 - a) obtenha os ângulos para os quais a intensidade é nula e compare os resultados com a tabela que segue a eq.(16.13);
 - b) esboce um gráfico $\langle |\vec{S}| \rangle \times \theta$.

2. Uma fenda única produz um espectro de difração sobre uma tela branca, colocada a 80,0 cm à frente dela. Nessa tela, a distância entre os dois mínimos centrais é de 5,2 cm. Sabendo que o comprimento de onda da luz incidente é de $5,46 \times 10^{-7} \text{m}$, determine a largura da fenda.

3. Uma fenda é iluminada por luz constituída pelos comprimentos de onda λ_a e λ_b , escolhidos de forma que o primeiro mínimo de difração de λ_a coincida com o segundo mínimo de difração de λ_b .
 - a) Qual a relação entre esses dois comprimentos de onda?
 - b) Haverá coincidências entre outros mínimos deste espectro?

4. Considere um sistema de duas fendas de larguras iguais a separadas uma da outra pela distância d .
 - a) Supondo $d = 3a$, quantas franjas de interferência haverá dentro da envolvente central de difração?
 - b) Supondo $d = a$, qual será o espectro obtido na tela? Sugestão: veja a fig. 16.4.

5. Uma onda plana e monocromática incide perpendicularmente em um anteparo, onde existem duas fendas longas, retilíneas, paralelas entre si e separadas pela distância d . A largura de cada uma das fendas é $a = 10^{-5} \text{m}$. A figura 16.7 apresenta, em função do ângulo θ , o gráfico da intensidade da radiação incidente sobre uma tela paralela ao anteparo e muito distante dele.
 - a) determine o comprimento de onda da radiação;
 - b) determine o valor da distância entre as fendas;
 - c) esboçe o gráfico da intensidade da radiação em função de θ , quando uma das fendas é fechada.

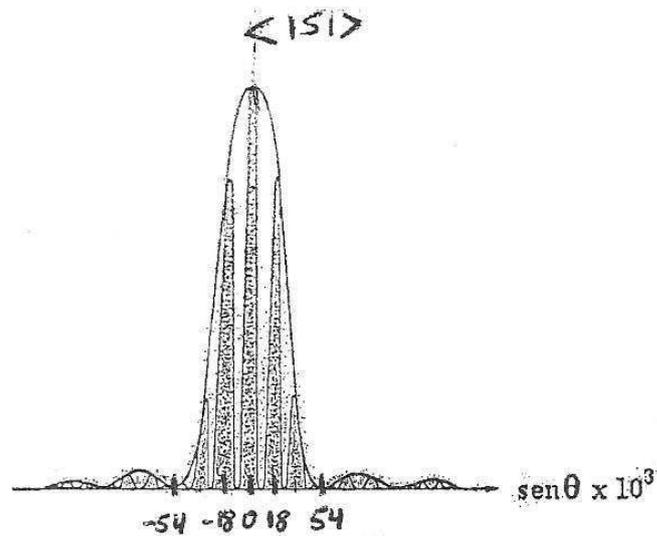


Figura 16.7:

• respostas

1.a) $14,51^\circ$; $30,08^\circ$; $48,75^\circ$.

2. $\text{sen } \theta_1 = 2,6/80,0 \rightarrow a = 1,68 \times 10^{-5}\text{m}$.

3. $\lambda = 2\lambda b$.

4. a) 6 b) dado pela eq.(16.10), fazendo $a \rightarrow 2a$ na eq.(16.5).

5.a) $\lambda = 5,4 \times 10^{-7}\text{m}$; b) $d = 1,8 \times 10^{-7}\text{m}$.

Capítulo 17

relatividade: impacto e princípios

A teoria da relatividade restrita foi proposta por Albert Einstein em 1905, no mesmo ano em que ele publicou o seu famoso trabalho sobre o efeito fotoelétrico. As idéias de Einstein tiveram enorme impacto na ciência do século 20, bem como importantes implicações filosóficas, epistemológicas e culturais. A visão de mundo subjacente à teoria da relatividade é bastante diferente daquela proveniente da mecânica clássica e, por isso, levou bastante tempo para ser aceita. Mesmo em 1922, ano em que Einstein foi agraciado com o prêmio Nobel, não havia consenso na comunidade científica acerca da validade da relatividade, tendo o prêmio sido concedido pelo seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico.

• o impacto na ciência

A relatividade mudou tanto **o modo de trabalhar** em ciência como a percepção de como esse trabalho ocorre. No fim do século 19 e no início do 20, a ciência era vista hegemonicamente como uma atividade onde o conhecimento seria produzido por meio de generalizações muito cautelosas, feitas a partir de observações também muito cuidadosas. Esquemáticamente, segundo a concepção dominante na época, o conhecimento científico deveria ter início em observações cuidadosas do comportamento da natureza, que mostrariam a existência de regularidades. A percepção dessas regularidades levaria à formulação de leis que, após serem testadas e generalizadas, passariam a fazer parte de corpos maiores, as teorias. Deste modo, o conhecimento científico cresceria de modo cumulativo, lenta e gradualmente, por indução de verdades mais gerais a partir de outras menos gerais ^[1]. Este modo de conceber a ciência é conhecido como *indutivismo*.

O modo como a relatividade foi gerada é completamente antagônico a essa visão do processo científico, defendida pelos indutivistas. Ao ser proposta, a relatividade possuía muito pouco ou nenhum suporte empírico, tendo sido produzida a partir de concepções gerais a respeito do universo. Por isso, a proposta desta teoria, por Einstein, modificou muito a visão que tanto cientistas como filósofos tinham a respeito do funcionamento da ciência. O filósofo Karl Popper, no livro “A lógica da descoberta científica”, publicado em

1935, foi um dos primeiros a incorporar a postura científica de Einstein no contexto da filosofia da ciência. A visão do processo de criação do conhecimento científico apresentada por Popper, nesta e em outras obras, representou uma ruptura importante com a dos indutivistas. Posteriormente, outros filósofos aprofundaram a compreensão desta ruptura, culminando com a proposta apresentada em 1962 por Thomas Kuhn, no seu livro “A estrutura das revoluções científicas”. Um dos resultados desse processo de revisão das idéias acerca da ciência, motivado pela relatividade é que, atualmente, a questão da existência de um método científico único é vista como algo sem sentido. Uma apresentação compacta de discussões filosóficas acerca deste tema pode ser encontrada no livro “O que é esta coisa chamada ciência”, de A.F. Chalmers.

• o impacto na física

O impacto da relatividade foi muito forte no interior da física. Seus efeitos não estão restritos apenas ao interior de uma teoria, pois ela mudou também o modo de conceber **o universo físico** como um todo. Na primeira aula do curso de Física 3, mencionamos o fato de que o universo contém muitas coisas e entidades, uma parte das quais constitui o chamado universo físico. Como vimos, o universo físico pode ser pensado, em linhas gerais, como contendo três grandes classes de entidades, simbolicamente denominadas *palco*, *dinâmica* e *atores*.

Na versão clássica do universo físico, o palco engloba o tempo e o espaço, a energia e as quantidades de movimento linear e angular. Na física clássica, o tempo e o espaço são concebidos como grandezas independentes. Entretanto, a energia é ligada ao tempo, já que a sua conservação pode ser atribuída à uniformidade com que ele flui. O mesmo tipo de relação existe, também, entre espaço e as quantidades de movimento linear e angular. Os atores, por outro lado, representam os entes materiais, tais como massas, cargas e outras coisas, juntamente com os seus campos, responsáveis pelas interações da matéria. Finalmente, a dinâmica corresponde às leis que relacionam interações e movimentos. O universo físico clássico pode ser representado pelo esquema abaixo.

	o universo clássico	
palco	\mathbf{L} e \mathbf{p} \updownarrow \mathbf{r}	E \updownarrow t
dinâmica	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e as outras leis da dinâmica propostas por Newton	
atores	$m \leftrightarrow \mathbf{g}$, $q \leftrightarrow \mathbf{E} - \mathbf{B}$ e outros...	

A relatividade subverteu profundamente este quadro, de várias maneiras. Na física clássica, espaço e tempo são concebidos como grandezas absolutas, ou seja, que não de-

pendem do observador. Na relatividade, aparece uma relação entre espaço e tempo, sendo possível que observadores diferentes interpretem de modos diferentes o que é tempo e o que é espaço, na relação entre dois eventos quaisquer. Assim, espaço e tempo passam a ser facetas diferentes do *espaço-tempo*. Do mesmo modo, na relatividade, a energia e as quantidades de movimento linear e angular também passam a ser relacionadas entre si. Essas mudanças nas características do palco forçaram a revisão das demais partes do quadro e, em particular, as leis da dinâmica de Newton tiveram de ser modificadas. A versão da relatividade de 1905, conhecida como **relatividade restrita**, contém ainda um outro elemento bastante novo, expresso pela equação $E = mc^2$, que relaciona a energia, um elemento do palco, com a massa, um ator. A proposta de universo físico contida na teoria de 1905 pode ser representada pelo quadro abaixo.

relatividade (1905)	
palco	$\begin{array}{ccc} \mathbf{L} \text{ e } \mathbf{p} & \leftrightarrow & E \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbf{r} & \leftrightarrow & t \end{array}$
dinâmica	“leis de Newton” modificadas
atores	$\begin{array}{l} m \leftrightarrow \mathbf{g} \\ q \leftrightarrow \mathbf{E} - \mathbf{B} \\ \text{e outros...} \end{array}$

O papel ambíguo da relação $E = mc^2$ na relatividade restrita indica que o quadro alternativo à física clássica produzido por esta teoria não é totalmente coerente. Isso motivou a formulação da teoria da relatividade geral, apresentada por Einstein em 1915. Nessa nova versão, Einstein resolve a ambiguidade existente na relatividade restrita, colocando a massa no palco. Agora, ela passa a ser vista como algo capaz de influenciar o próprio comportamento do espaço-tempo. O campo gravitacional, que antes era atribuído a uma aura que existiria em torno das massas, passa a ser devido ao que, em termos técnicos, é chamado de curvatura do espaço-tempo. Esta nova concepção do universo pode ser representada do seguinte modo.

	relatividade geral (1915)
palco	$\begin{array}{ccc} \mathbf{L} \text{ e } \mathbf{p} & \leftrightarrow & \mathbf{E} \leftrightarrow m \leftrightarrow \mathbf{g} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbf{r} & \leftrightarrow & t \end{array}$
dinâmica	equação de Einstein
atores	$q \leftrightarrow \mathbf{E} - \mathbf{B}$ e outros...

• o absoluto

O caráter revolucionário da relatividade fez com que ela ficasse bastante conhecida fora do âmbito restrito da ciência e que Einstein se tornasse uma espécie de herói popular. Isso motivou o aparecimento de várias visões estapafúrdias acerca do conteúdo da relatividade. Talvez a mais errada de todas elas seja a que afirma que a relatividade mostra que “tudo é relativo”^[2]. Ao contrário, o objetivo da teoria é determinar o que é relativo na física, de modo a podermos compreender melhor o que não o é. Os aspectos absolutos do universo físico constituem, de fato, o alvo maior da relatividade.

O jogo entre o relativo e o absoluto está presente em várias partes da física e da matemática. Ele é particularmente importante na geometria. Para fixar as idéias, consideremos um cubo. Com certeza, todos nós sabemos o que é um cubo. Entretanto, como sabemos isto? Onde, dentro de nós, este conhecimento se esconde? Que formas ele pode ter?

Existem várias maneiras de sabermos o que é um cubo. Esse conhecimento pode começar, por exemplo, com o contato sensorial com um cubo material, como ocorre quando uma criança brinca com um dado. Ao fazer isto, ela experimenta o cubo com o tato, com os olhos, com a boca... Manipulando o dado e outros cubos materiais passamos, de algum modo, a conceber um cubo abstrato em nossa mente. Normalmente, nossas experiências com cubos materiais ocorrem em ambientes culturais nos quais o conceito de cubo já está bem estabelecido. Existe até uma palavra para designar esta entidade: CUBO! Este tipo de exercício, envolvendo experimentação e informação cultural acaba fazendo com que, depois de certo tempo, passemos a *saber* o que é um cubo. A idéia de cubo que passamos a ter vai se distanciando dos cubos materiais particulares que conhecemos. Essa idéia, se por um lado se afasta das experiências particulares, por outro, é capaz de apreender todos os cubos de uma só vez. Na nossa mente passa a existir um *cubo-conceito*, passível de ser examinado e conhecido sem intermediações. O conhecimento do cubo pela mente corresponde a um tipo de saber profundo e silencioso. É um tipo de conhecimento que pode ser classificado com gnóstico, onde ocorre uma relação direta entre a mente e o conceito de cubo.

A existência do cubo-conceito na nossa mente leva a uma outra classe de problemas, associada às suas representações. Elas podem ser feitas de vários modos diferentes. Podemos representá-lo oralmente, falando a palavra *cubo*. Alternativamente, podemos recorrer a um código um pouco mais visual, e escrever a palavra *cubo*. É interessante notar que, em português, um cubo não precisa ser descrito e pode ser denotado por uma única palavra, o que indica uma proximidade com o sentido absoluto do cubo.

Alternativamente, podemos representar um cubo por meio de desenhos, como os mostrados abaixo:

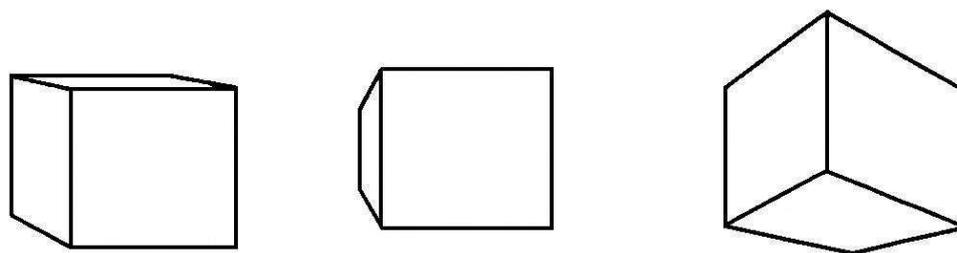


Figura 17.1: Representação de cubos em diversos pontos de vista.

Neste caso, a relação da representação com o caráter absoluto do cubo torna-se ambígua. Por um lado, os cubos representados voltam a ficar um pouco parecidos com os cubos reais. Por outro, ao desenhar o cubo, não conseguimos mais representá-lo em sua inteireza, e somos obrigados a nos contentar com apenas algumas das suas facetas. Em cada desenho, apenas uma, dentre as suas infinitas caras. São possíveis apenas representações parciais, e a unidade do objeto somente pode ser recuperada postulando-se a equivalência destas várias representações parciais. Esse caráter parcial das representações baseadas em desenhos ocorre porque eles incorporam, necessariamente, a perspectiva do observador, que é sempre particular. De fato, cada desenho não representa o cubo em sua totalidade, mas uma das possíveis maneiras de alguém se relacionar com ele.

No contexto da geometria um cubo pode, também, ser representado de várias maneiras diferentes. Por exemplo, na geometria dos sólidos, que estuda as propriedades e características das figuras no espaço euclidiano em três dimensões, o cubo é pensado como sendo um sólido com seis faces quadradas iguais. Neste caso, temos uma conceituação absoluta, independente de observadores e referenciais. De modo alternativo, na geometria analítica, o cubo pode ser descrito por meio de expressões quantitativas. Por exemplo, o cubo de lado L mostrado na figura 17.2, pode ser representado como sendo o corpo sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = L$, $y = L$ e $z = L$.

Este tipo de representação tem duas características muito interessantes. A primeira delas é que, para representar o cubo, é preciso especificar o comprimento de sua aresta. Por isso, o cubo representado já é um pouco particular. Além disso, no caso da representação analítica, é necessário o uso de um referencial, que incorpora, obrigatoriamente, um “ponto de vista” *externo* ao objeto representado. Podemos perceber isso notando que o mesmo

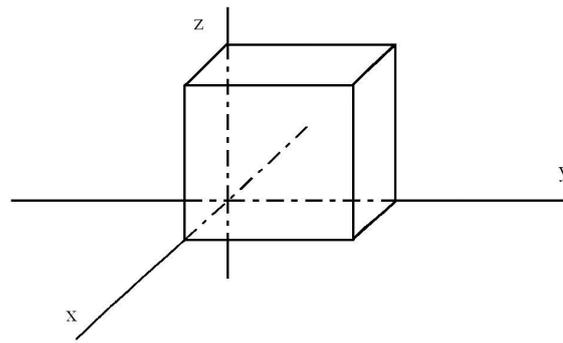


Figura 17.2:

cubo também pode ser representado como sendo o sólido delimitado pelos planos $x = a$, $y = b$, $z = c$, $x = L+a$, $y = L+b$ e $z = L+c$, onde a , b e c são variáveis que podem assumir quaisquer valores. Essas novas descrições correspondem a deslocamentos da origem do sistema de coordenadas. Assim, a forma da descrição analítica do cubo também depende fortemente do sistema de eixos adotado. Mudando o referencial, a descrição do cubo muda, ainda que o cubo não mude. Neste caso, pode-se perceber de modo claro, a relação dialética entre o caráter absoluto do objeto e a relatividade da sua representação.

Imaginemos, agora, que tenhamos nascido em um mundo onde existissem objetos sólidos, mas no qual não pudéssemos ter acesso direto a eles, a não ser por meio de suas descrições analíticas. Neste mundo, cada um descreveria o cubo através de uma perspectiva particular, usando convenções diferentes, equações diferentes... Seria muito difícil recuperar o conceito de cubo no meio de todo este caos aparente. Seria necessário alguém muito inteligente para perceber a existência de um cubo, ou seja, de que existe algo em comum entre as várias descrições particulares, com características estáveis e bem definidas. Como buscar a estabilidade no meio do caos? Em primeiro lugar, é preciso acreditar que tal estabilidade exista. Em seguida, alguém dotado de espírito matemático poderia pensar em inventar uma teoria que unificasse todas as observações e descrições particulares, de modo que, conhecida uma delas, todas as demais pudessem ser obtidas. Usando tal teoria, ele seria capaz de separar, por meio de mudanças matemáticas de referencial, as características relativas das absolutas existentes em uma dada descrição. Um nome bom para uma teoria como essa seria “teoria de relatividade”.

O caso da teoria da relatividade de Einstein é muito parecido com o do cubo na geometria analítica, já que o seu propósito é encontrar, por trás das aparências dos fenômenos, as leis absolutas que os determinam. O que muda, é o fato de ela unificar, não só as observações de pessoas que estão paradas em posições diferentes, olhando um único objeto mas, também, as observações de pessoas em movimento relativo.

• teorias

A **relatividade restrita** é uma teoria e, como tal, ela é portadora de uma visão de

mundo. Na primeira aula deste curso, mencionamos alguns dos significados da palavra teoria, encontrados no dicionário do Aurélio:

“teoria. [Do gr. *theoria*, ‘ação de contemplar, examinar’; ‘estudo’; ‘deputação solene que as cidades gregas mandavam às festas dos deuses’; ‘festa solene, pompa, procissão’, pelo lat. *theoria*.] S.f. 1. Conhecimento especulativo, meramente racional. 2. Conjunto de princípios fundamentais duma arte ou duma ciência. (...) 8. Na Grécia antiga, embaixada sagrada que um Estado enviava para o representar nos grandes jogos esportivos, consultar um oráculo, levar oferendas, etc. (...).”

Na física, uma teoria é, normalmente, uma estrutura onde conceitos e leis empíricas são articulados por meio de relações matemáticas. O fato de elas serem fortemente apoiadas no formalismo matemático lhes confere certa racionalidade e uma certa impessoalidade. Entretanto, isto não significa que elas sejam totalmente objetivas, isentas de aspectos subjetivos. As teorias dão margem a interpretações, elas apontam para aspectos escondidos da realidade. A teoria faz o papel do dedo no provérbio chinês: “o dedo serve para apontar a lua; o sábio olha para a lua, o ignorante para o dedo”.

• o dedo e a lua

A preocupação em separar o absoluto do aparente aproxima Einstein da tradição mística dos judeus, a cabala. Por exemplo, apresentamos a seguir um trecho de uma obra clássica, o “Zohar”, escrito pelo cabalista espanhol Moisés de Leon, entre 1280 e 1286, onde ele descreve alegoricamente a relação com o absoluto que está por trás das aparências ^[3]. No caso, este autor refere-se à Torá, o livro que encerra a lei mosaica.

“Na verdade, a Torá deixa escapar uma palavra, e emerge um pouco de seu invólucro e depois torna a esconder-se. Mas procede assim somente com os que a conhecem e lhe obedecem. Pois a Torá se parece com uma bela e formosa donzela, escondida numa câmara reclusa de seu palácio, e que tem um namorado secreto, desconhecido de todos. Por amor à donzela, ele vive passando à porta da casa dela, olhando para cá e para lá, à procura dela. Ela sabe que o bem-amado ronda o portão da sua casa. O que é que ela faz? Abre a porta da sua câmara reclusa, um pouquinho só, e por um momento revela o rosto ao bem-amado, porém logo o esconde de novo. Estivesse alguém com o amado, nada veria e nada perceberia. Só ele a vê e ele é atraído por ela com o coração e a alma e todo o seu ser, e ele sabe que por amor a ele, ela se lhe mostrou por um instante, ardendo de paixão por ele. Assim acontece com a palavra da Torá, que se revela somente aos que a amam. A Torá sabe que o místico (... o sábio de coração) ronda o portão de sua casa. O que é que ela faz? Do interior de seu palácio oculto desvela o semblante, acena-lhe e retorna logo ao palácio onde se esconde. Os que lá se encontram nada vêem e nada sabem, somente ele, e ele é atraído para ela com todo o coração e toda a alma e todo o seu ser. Assim a Torá se desvela e se esconde, e emerge em amor pelo seu amado e desperta o amor nele. Venha e veja: este é o caminho da Torá. De início, quando deseja revelar-se a um homem, faz-lhe um rápido sinal. Se ele entende, muito que bem; se não, manda-o vir e chama-o de simplório. Ao mensageiro que ela envia, a Torá diz: diga ao simplório que

venha até aqui para que eu possa conversar com ele. [...] Quando ele vem para junto dela, ela começa falar-lhe por detrás de uma cortina, palavras à altura da sua compreensão, até que, lentamente, ele começa a entender [...]. Depois ela fala, através de um véu, palavras alegóricas [...]. Só então, depois que ele se familiariza com ela, esta se lhe revela, face a face, e fala-lhe de todos os seus segredos escondidos e seus caminhos obscuros que desde o começo estiverem em seu coração. Um tal homem, então, é chamado de perfeito, um “mestre”, ou seja, “um noivo da Torá”, no sentido mais estrito, o dono da casa, a quem ela desvenda todos os segredos, nada escondendo. Ela lhe diz: Está vendo agora, quantos segredos havia naquele sinal que lhe fiz no primeiro dia, e qual seu verdadeiro sentido? E ele entende, então, que àquelas palavras nada se lhes pode acrescentar e delas nada se pode tirar. E pela primeira vez, então, compreende o verdadeiro significado das palavras da Torá, tal como elas aí se encontram, aquelas palavras às quais nenhuma sílaba ou letra pode ser acrescentada e das quais nenhuma pode ser tirada. E, por isso, os homens deveriam tomar o cuidado de perseguir a Torá (isto é, estudá-la com grande exatidão), a fim de se tornarem o seu bem amado, do modo como foi relatado”.

Substituindo neste texto a palavra Torá, que corresponde ao livro da lei mosaica, por natureza, talvez tenhamos uma boa alegoria da postura de Einstein frente à relatividade.

• os princípios da teoria da relatividade restrita

A teoria da relatividade restrita é baseada em dois postulados^[4], propostos por Einstein em 1905:

1. As leis físicas têm a mesma forma em todos os sistemas de inerciais.
2. Em qualquer sistema inercial, a velocidade da luz c é a mesma, tanto se a luz for emitida por um corpo em repouso como por um corpo em movimento uniforme.

As palavras que descrevem os postulados são bem menos importantes do que os seus significados silenciosos. Como se pode notar, o primeiro postulado representa a fé em uma equivalência profunda entre todos os referenciais inerciais, na não existência de referenciais privilegiados. Já o segundo é mais específico, conferindo ao *módulo* da velocidade da luz o status de grandeza absoluta, independente do referencial inercial. Por isso, ele parece chocante quando olhado a partir da intuição desenvolvida no estudo da mecânica clássica. E este tipo de choque costuma gerar a questão: de onde Einstein tirou esta idéia? Numa palestra dada em Kyoto, em 1922, ele dá um indício:

“Levando em consideração o experimento de Fizeau, tentei lidar com os problemas da suposição de que as equações de Lorentz a respeito do elétron deveriam valer tanto no caso de o nosso sistema de coordenadas ser definido nos corpos em movimento como o é no vácuo. De qualquer modo, naquela época eu me sentia certo da verdade das equações de Maxwell-Lorentz da eletrodinâmica. Além disso, as relações da dita invariância da velocidade da luz nos mostraram que estas equações deveriam valer também nos sistemas em movimento. Esta invariância da velocidade da luz estava, entretanto, em conflito com a regra da adição de velocidades que conhecíamos bem na mecânica.”^[5]

A teoria da relatividade surgiu quando Einstein resolveu este problema, abandonando a noção de tempo absoluto.

• covariância

Ainda que o primeiro princípio decorra de uma intuição profunda acerca do universo material, ele tem implicações matemáticas bastante claras e precisas. Em particular, ele regula o tipo de objetos matemáticos que podem ser empregados para expressar as leis físicas. O significado dessas palavras, que podem parecer um pouco assustadoras, é bastante simples e corresponde a uma idéia já incorporada há bastante tempo na prática de trabalho de qualquer estudante de física.

Sabemos que é errado escrever uma lei física usando uma equação do tipo

$$\vec{A} = b, \quad (17.1)$$

onde \vec{A} é um vetor e b , um escalar. Entretanto, porque isso é errado? Qual seria o problema de escrevermos a equação que representa a aceleração da gravidade nas proximidades da Terra como

$$\vec{g} = 10 \text{ m/s}^2? \quad (17.2)$$

A grandeza \vec{g} é um vetor e, como tal, um objeto matemático que possui, simultaneamente, três características distintas: módulo, direção e sentido. No caso de \vec{g} , em particular a direção é a da vertical no ponto e o sentido pode ser caracterizado como sendo “para baixo”, “apontando para a Terra”, ou algo equivalente. Por isso, a eq.(17.2) não tem sentido, já que o seu lado esquerdo envolve três informações e o lado direito, apenas uma.

Já a equação

$$\vec{P} = m \vec{g}, \quad (17.3)$$

que permite calcular o peso de um corpo de massa m nas proximidades da Terra, tem sentido matemático, pois ela informa que:

- o módulo do peso é igual ao módulo da aceleração da gravidade multiplicado por m ;
- a direção do peso é igual à direção da aceleração da gravidade;
- o sentido do peso é igual ao sentido da aceleração da gravidade.

Assim, de fato, a expressão (17.3) corresponde a um feixe de três equações. Essa característica fica mais evidente se a reescrevermos em termos de componentes cartesianas. Para tanto, é necessário adotar um sistema de eixos, o que incorpora, necessariamente, escolhas arbitrárias. Por exemplo, num dado problema, pode ser interessante adotar um sistema de eixos apoiado na encosta de uma montanha, como o indicado na figura 17.3.

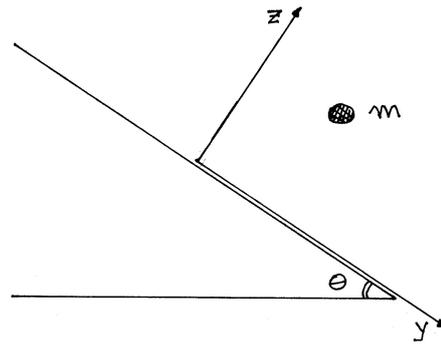


Figura 17.3:

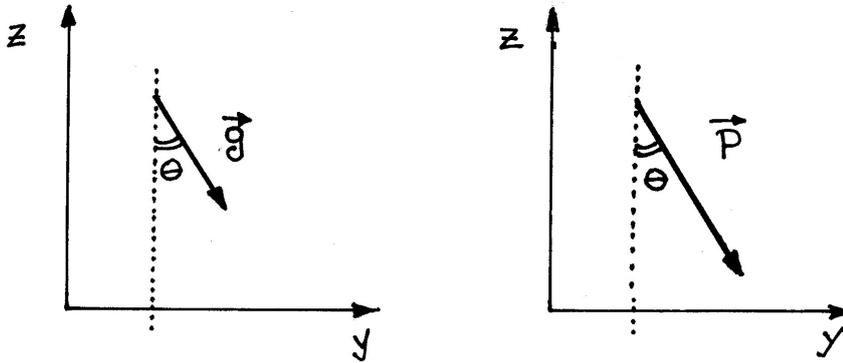


Figura 17.4:

Nesse caso, o feixe de equações determinado pela expressão (17.3) é dado explicitamente por

$$P_x = m g_x, \quad (17.4)$$

$$P_y = m g_y, \quad (17.5)$$

$$P_z = m g_z. \quad (17.6)$$

As componentes de \vec{g} podem ser obtidas a partir do lado esquerdo da figura 17.4 e valem

$$g_x = 0, \quad g_y = g \operatorname{sen} \theta, \quad g_z = g \operatorname{cos} \theta. \quad (17.7)$$

A presença do ângulo θ nesses resultados indicam claramente que eles dependem da escolha dos eixos de referência e, portanto, das convenções adotadas. Para calcular \vec{P} , substituímos (17.7) nas eqs. (17.4-17.6), e obtemos

$$P_x = 0, \quad P_y = m g \operatorname{sen} \theta, \quad P_z = m g \operatorname{cos} \theta. \quad (17.8)$$

Os valores dessas componentes também dependem de θ e, conseqüentemente, de convenções.

Se esta discussão fosse apresentada a um ser extraterrestre, que não tivesse vivenciado a noção de peso, ela poderia sugerir que o nosso modo de descrever o mundo material

é sempre contaminado por idéias dependentes de convenções. Para convencer este ser que esse não é o caso, poderíamos convidá-lo a inspecionar o lado direito da figura 17.4, construído a partir dos resultados (17.8). Ele mostra que \vec{P} é paralelo a \vec{g} . Se escolhermos outro valor para θ , refizermos os desenhos, as representações de \vec{g} e de \vec{P} mudam, mas o paralelismo entre eles, não. É esse paralelismo, independente de convenções, que a física trata como uma relação constitutiva da natureza.

Este exemplo ilustra uma versão simples da noção de *covariância*. A eq. (17.3), escrita na forma

$$(P_x, P_y, P_z) = (mg_x, mg_y, mg_z) \quad (17.9)$$

é dita *covariante* porque se, por um lado, os valores das componentes dos dois lados dependem de convenções, por outro, a igualdade se mantém se essas convenções forem alteradas. Neste exemplo, isso acontece porque rotações alteram os dois lados da equação do mesmo modo. Ou seja, eles *co*-variam, onde o prefixo *co*- indica algo que se faz junto, como em colaboração ou comemoração.

No caso da relatividade, a idéia incorporada no primeiro princípio, de que as leis físicas devem ter a mesma forma em qualquer referencial inercial corresponde a dizer que as equações que as descrevem devem ser covariantes por mudanças de referencial. Na aula 23 deste curso será discutida explicitamente a covariância das equações de Maxwell.

• referências

[1] no Aurélio: “**Indução**. [Do lat. *inductione*] S.f. 1. Ato ou efeito de induzir. 2. Lóg. Operação mental que consiste em se estabelecer uma verdade universal ou uma proposição geral com base no conhecimento de certo número de dados singulares ou de proposições de menor generalidade. [...]”.

[2] Na página 1-16 do jornal “Folha de São Paulo” de 18 de abril de 1995 encontra-se um artigo, assinado por Cássio Leite Vieira, onde pode-se ler: “*Há 40 anos, morria em Princeton (EUA) o físico alemão Albert Einstein (1879-1955), idealizador da teoria da relatividade. Hoje, Einstein é sinônimo de “Tudo é relativo”, forma fácil de sintetizar uma compreensão rasa de dois de seus trabalhos: a teoria da relatividade restrita, de 1905, e a da relatividade geral, de 1915.*”

[3] G.G. Scholem, A cabala e o seu simbolismo, ed. Perspectiva, 1978.

[4] Esta versão dos postulados é a apresentada por A. Pais em “Subtle is the Lord...”, Oxford University Press, 1982, p.141; a tradução brasileira tem o título “Sutil é o Senhor...” ed. Nova Fronteira.

[5] Citado em A. Pais, op.cit., p.141.

Capítulo 18

dilatação do tempo

• referenciais, personagens e notação

A física trata da observação e da descrição de fenômenos que ocorrem no mundo natural e, de modo geral, esse tipo de conhecimento depende do referencial no qual o observador se encontra. O objetivo da teoria da relatividade restrita é relacionar os resultados das observações e descrições de *um mesmo* conjunto de fenômenos, quando eles são feitos a partir de referenciais diferentes, que se movem com velocidades constantes, uns em relação aos outros. Um dos seus postulados básicos diz respeito à completa equivalência das leis físicas em todos os referenciais deste tipo. A incorporação integral desse tipo de equivalência entre referenciais em movimento relativo envolve tanto aspectos racionais como intuitivos. Quando viajamos em um ônibus que trafega com velocidade constante por um trecho retilíneo da estrada, é mais fácil admitirmos racionalmente que a estrada e a paisagem se movem com velocidade constante em relação a nós, do que sentirmos isso. Por esta razão evitamos, neste texto, representar os vários referenciais por S , S' , S'' , etc, uma vez que este tipo de notação parece sugerir algum tipo de assimetria entre eles. Como alternativa, introduzimos dois personagens, João e Maria, que participam das várias situações, e os observáveis correspondentes são rotulados com as suas iniciais. Assim, por exemplo, Δt_J e Δt_M podem representar intervalos de tempo observados por João e Maria, respectivamente. É *muito* importante notar que, em física, referenciais são instrumentos de pensamento e, como tal, entidades abstratas, não materiais. No nosso caso, eles serão sempre sistemas de eixos triortogonais x , y , z , matemáticos, acompanhados de um relógio, também matemático, que indica o tempo t . Por isso, não devemos confundir referenciais com coisas ou pessoas.

Por exemplo, na situação idealizada indicada na figura 18.1, na qual um carro se desloca com velocidade \vec{v} , constante, ao longo de uma estrada retilínea, pode ser conveniente descrever fenômenos físicos tanto no referencial S_E , fixo em uma pedra do pavimento da estrada, como em um referencial S_C , no qual o carro está parado. Entretanto, se o carro bater em algo e parar, a coincidência entre ele e o referencial S_C deixa de existir. O

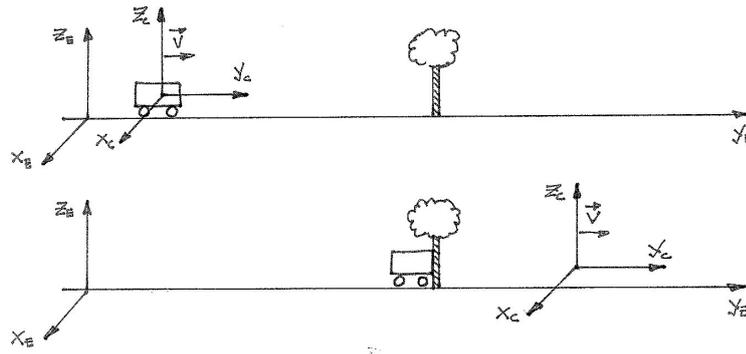


Figura 18.1:

carro passa a estar parado no referencial S_E , enquanto que S_C continua o seu movimento matemático com velocidade constante \vec{v} . Assim, quando falamos em referencias de João e Maria, queremos dizer os referenciais que coincidem com esses personagens enquanto os seus estados de movimento não são alterados. João e Maria **não são** referenciais, mas **estão** em referenciais.

Apenas com a finalidade de facilitar os desenhos, adotamos a velocidade relativa entre os referenciais como sendo paralela ao eixo y , e temos as situações mostradas na figura 18.2.

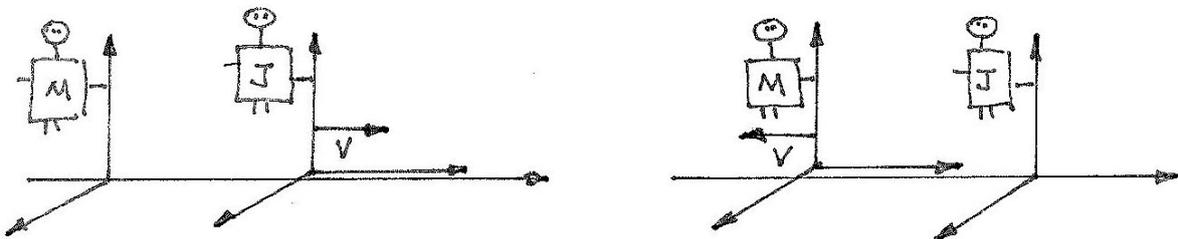


Figura 18.2: Lado esquerdo: João move-se com velocidade $v\vec{j}$ em relação a Maria; lado direito: Maria move-se com velocidade $-v\vec{j}$ em relação a João.

• trens ou foguetes?

Na época em que a relatividade foi proposta, o meio de transporte mais rápido era o trem e os exemplos pedagógicos costumavam envolver observadores fixos no solo e em trens em movimento. A partir da década de 1960, apareceram os foguetes tripulados e muitos exemplos passaram a ser formulados em termos de observadores em foguetes. Na prática, tanto trens como foguetes têm velocidades em relação à Terra que são muito pequenas em comparação à da luz e, portanto, em ambos os casos os exemplos são artificiais. Neste texto, ficamos com os trens. Por nostalgia, talvez...

• sobre os efeitos da relatividade

A relatividade restrita foi proposta em 1905 e, inicialmente, eram poucos os experimentos que davam suporte à teoria. Entretanto, nos anos 1930, com o desenvolvimento da física nuclear, ela passou a ser essencial para a compreensão dos fenômenos, principalmente no que diz respeito às transformações de massa em energia. A partir daí, a teoria foi testada em muitas outras situações, em experimentos muito precisos, que podem ser tomadas como evidências da teoria. Na física de partículas, por exemplo, *todos* os problemas são tratados por meio da relatividade, tanto para descrever como os corpos se deslocam de um ponto a outro do espaço com velocidades altas como para quantificar as energias envolvidas nas várias transformações que ocorrem. Já efeitos associados à relatividade geral dependem da existência de massas grandes e, por isso, são mais perceptíveis em cosmologia.

A relatividade teve, também, grande penetração junto a pessoas que não trabalham com ciência e, mesmo, que não se interessam por ela. Neste processo de ampliação, os conceitos foram perdendo nitidez e a precisão, como no caso da famosa equação $E = mc^2$, que todos conhecem, mas pouca gente sabe o que significa. Numa situação intermediária, ficam as noções de **dilatação do tempo** e **contração do espaço**, que correspondem a fenômenos físicos importantes, passíveis de serem observados experimentalmente. Entretanto, eles também foram explorados de forma solta e imprecisa em livros e filmes de ficção, o que gerou percepções incorretas dos seus significados. Por isso, antes de iniciarmos a discussão da relatividade restrita neste curso, deixamos uma advertência: é incorreto pensar que, nesta teoria, o tempo **sempre** se dilata e o espaço **sempre** se contrai. Essas afirmações gerais são imprecisas e destituídas de significado e, apenas em algumas situações bastante específicas, resultados podem ser enquadrados nessas situações. Para compreender isso é preciso um pouco de maturidade sobre a relatividade e é preciso espera algumas aulas...

• os relógios e o tempo, as réguas e o espaço

A relatividade restrita foi apresentada por Einstein, em 1905, em um trabalho intitulado “*Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*”. Numa das suas seções, são discutidos os comportamentos de réguas¹ e de relógios em movimento, sem qualquer menção a contração do espaço e dilatação do tempo. Tal escolha não foi feita por acaso. Réguas e relógios são objetos concretos, enquanto que espaço e tempo são conceitos abstratos. De um lado, coisas e, do outro, idéias.

Será que relógios são máquinas que marcam a passagem do tempo? Ou, alternativamente, será que a noção de tempo corresponde a algo inventado a partir do funcionamento dos relógios? Algo associado a um coletivo de relógios? No seu tratamento da relatividade, Einstein prefere adotar o segundo modo de pensar, e parte do concreto, dos relógios, dos instrumentos de medida. Afinal de contas, há sempre o risco de o conceito de tempo ser

¹Por uma questão de simplicidade, nós usamos a palavra *régua* em lugar de *corpo rígido*, empregada no texto original.

uma invenção humana e não, parte do universo material... O mesmo se aplica à relação entre réguas e espaço.

Esse tipo de questão pode parecer algo distante à prática da física. Entretanto, este não é o caso. Se, nas várias situações físicas, pensamos mais nas medidas e nos instrumentos empregados nelas, a compreensão da teoria da relatividade fica mais fácil.

• relógios

Relógios são instrumentos que permitem a medição de intervalos de tempo. Na relatividade, o funcionamento de um relógio depende do referencial a partir do qual ele é observado. Suponha que Maria esteja fixa no referencial de uma estação de trem e João esteja fixo no interior de um trem, que passa com velocidade constante pela estação. Se Maria possui um relógio em seu pulso, o funcionamento desse relógio é percebido de modos diferentes por ela mesma e por João. Essa idéia contraria frontalmente a concepção newtoniana do tempo, segundo a qual os relógios funcionam sempre do mesmo modo, para qualquer observador.

Existem relógios de muitos tipos. Em tempos remotos, tem-se notícia de relógios baseados no fluxo de azeite, água ou areia, como nas ampulhetas. Diz a história, por exemplo, que Galileu teria utilizado a medida do próprio pulso para determinar o período de oscilação de um pêndulo. Durante vários séculos, aconteceu a hegemonia dos relógios mecânicos, geralmente dotados de rodas dentadas, movidas por pêndulos ou molas, e de mostradores com ponteiros. Atualmente existem relógios digitais eletrônicos e, até, atômicos. Entretanto, apesar das diferenças entre todos estes tipos de relógio, eles possuem uma característica comum, que os unifica: eles medem intervalos de tempo, com base em fenômenos periódicos.

O elemento básico da construção de um relógio é um movimento ou acontecimento, que se repete a intervalos de tempo idênticos e bem definidos, um fato cíclico, com período determinado. Basta, então, definir uma unidade de tempo, dividindo este período em quantas partes se desejar, e avaliar a duração de outros fenômenos com base nesta unidade de tempo.

• o relógio de luz

Para começar a estudar o comportamento dos intervalos de tempo na relatividade, é conveniente usamos um outro relógio, diferente de todos os outros, mas ainda baseado na noção de periodicidade. Esse relógio é apenas uma construção terórica, e não existe na prática. Entretanto, ele é muito útil, pois captura a essência do problema. Ele é constituído por dois espelhos paralelos, separados pela distância L , e um contador. Um pulso de luz está confinado entre os dois espelhos, sendo refletido continuamente de um para outro, como mostra a figura 18.3. Este é o nosso fato cíclico. Quando a luz bate no espelho inferior, “ouve-se” um TIC; quando ela volta e bate no superior, “ouve-se” um TAC e o contador é acionado, avançando uma unidade, como na figura.

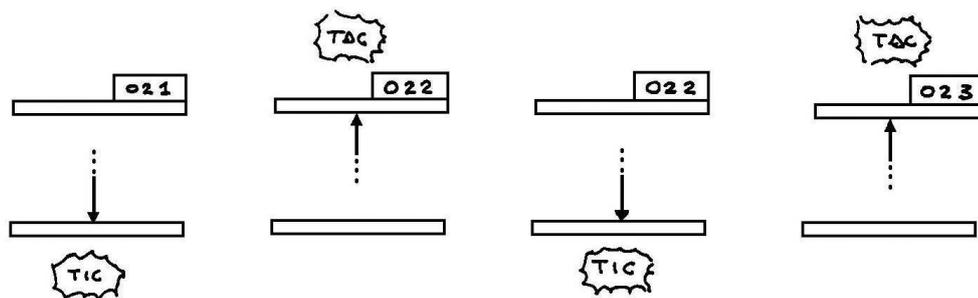


Figura 18.3: O relógio de luz, em instantes sucessivos; observe o contador.

Escolhemos este relógio apenas porque ele simplifica o trabalho a ser feito em seguida. Entretanto, é preciso deixar claro que o relógio de luz é um relógio como um outro qualquer, e todas as conclusões baseadas no seu funcionamento valem também para os demais. O **tempo** é o que importa, não o instrumento usado para medi-lo.

• intervalos de tempo clássico e relativístico

Nesta seção, comparamos as previsões para o funcionamento de relógios de luz, feitas na mecânica newtoniana e na relatividade. Os intervalos de tempo no contexto dessas duas teorias são representado, respectivamente, por ΔT e Δt .

Consideramos, inicialmente, a situação na qual João possui um relógio de luz, pintado de branco, em repouso em relação a ele, cujos espelhos são separados pela distância L . No seu referencial, qual o intervalo de tempo que decorre entre dois TACs sucessivos deste relógio?

No contexto da **mecânica newtoniana**, este intervalo, denotado por ΔT_J , é obtido através de um cálculo cinemático simples: sendo $D_J^b = 2L$ a distância percorrida pela luz no referencial de João, durante uma oscilação, temos

$$\Delta T_J^b = \frac{D_J^b}{c} = \frac{2L}{c}, \quad (18.1)$$

onde c é a velocidade da luz e os índices b e J correspondem a: relógio branco, observado por João.

No contexto da **mecânica relativística**, o cálculo é totalmente análogo. Antes de efetuá-lo, entretanto, convém notar que, na relatividade, costuma-se qualificar com o adjetivo *próprio* as grandezas que representam o comportamento de um sistema descrito por um observador no qual ele está em repouso e, também, representá-las por letras gregas. Por isso, escrevemos o intervalo de **tempo próprio** entre dois TACs, no referencial de João, como

$$\Delta t_J^b = \Delta \tau_J^b = \frac{d_J^b}{c} = \frac{2L}{c}. \quad (18.2)$$

Estes dois cálculos mostram que $\Delta T_J^b = \Delta \tau_J^b$, ou seja, que no referencial de João os intervalos de tempo são os mesmos, tanto na mecânica clássica como na relativística. Este resultado não é surpreendente, já que as novidades associadas à relatividade ocorrem quando efetuamos mudanças de referencial, enquanto que estes cálculos tratam do comportamento de um relógio em repouso relativamente ao observador João.

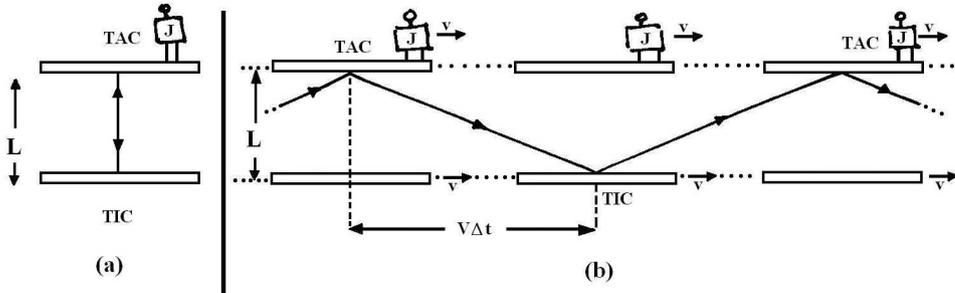


Figura 18.4: Relógio branco, visto por João (a) e por Maria (b).

Maria, parada numa estação de trem, possui relógios idênticos ao de João, pintados de preto. Cálculos totalmente análogos aos anteriores permitem-nos concluir que, nos contextos newtoniano e relativísticos, temos

$$\Delta T_M^p = \frac{2L}{c} \quad (18.3)$$

$$\Delta \tau_M^p = \frac{2L}{c}, \quad (18.4)$$

onde os índices p e M correspondem a: relógio preto, observado por Maria.

Suponhamos, agora, que João, carregando o seu relógio branco, esteja num trem que se move para a direita com velocidade v , em relação a Maria. A partir do seu referencial, Maria pode observar e realizar medições acerca do funcionamento do relógio branco e comparar os resultados com os mostrados pelo seu próprio relógio. Em particular, ela pode observar o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs sucessivos do relógio branco, por meio de máquinas fotográficas, filmadoras, ou outros instrumentos.

No referencial de Maria, onde João corre com velocidade v , o caminho que a luz percorre no interior do relógio branco, torna-se maior, como mostra a figura 18.4b. No **contexto clássico**, a distância D_M^b , percorrida pela luz entre dois TACs sucessivos do relógio branco, é dada por

$$D_M^b = 2 \sqrt{L^2 + \left(\frac{v \Delta T_M^b}{2} \right)^2} \quad (18.5)$$

onde ΔT_M^b é o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs. Esse intervalo de tempo vale

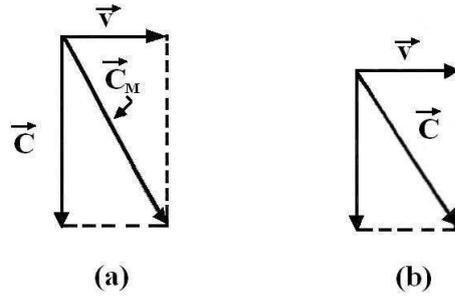


Figura 18.5: O arrastamento da luz na mecânica clássica (a) e na relatividade (b).

$$\Delta T_M = \frac{D_M^b}{C_M}, \quad (18.6)$$

onde C_M é o módulo da velocidade do raio de luz em relação a Maria. Na mecânica clássica, este valor é obtido a partir da soma vetorial de \vec{c} e \vec{v} , mostrada na figura 18.5a, e corresponde a

$$C_M = \sqrt{c^2 + v^2}. \quad (18.7)$$

Temos, portanto,

$$\Delta T_M = \frac{2\sqrt{L^2 + (v \Delta T_M^b/2)^2}}{\sqrt{c^2 + v^2}}. \quad (18.8)$$

Elevando os dois membros ao quadrado e isolando ΔT_M^b , obtemos

$$\Delta T_M^b = \frac{2L}{c}. \quad (18.9)$$

Comparando este resultado com a eq.(18.1), concluímos que

$$\Delta T_M^b = \Delta T_J^b. \quad (18.10)$$

Deste modo, “provamos” que, *na mecânica clássica*, Maria e João percebem o mesmo intervalo de tempo entre dois TACs sucessivos do relógio branco. Isso significa que o tempo passa “com a mesma velocidade”, tanto para João, parado em relação ao relógio branco, como para Maria, para quem o relógio branco se move com velocidade v . No contexto da mecânica clássica este resultado não poderia ser diferente já que o tempo, sendo absoluto, passa do mesmo modo para qualquer observador. Até aqui, nada de muito novo.

Entretanto, as coisas mudam quando se passa para a **teoria da relatividade**. A distância percorrida pela luz entre dois TACs é calculada como no caso clássico, e dada por

$$d_M^b = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v \Delta t_M^b}{2}\right)^2}. \quad (18.11)$$

A diferença é que, agora, de acordo com o segundo princípio, o módulo da velocidade do raio de luz deve ser igual a c para qualquer observador. Assim, o intervalo de tempo passa a ser dado por

$$\Delta t_M^b = \frac{2\sqrt{L^2 + (v \Delta t_M^b/2)^2}}{c}, \quad (18.12)$$

que corresponde a

$$\Delta t_M^b = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (18.13)$$

Comparando com a eq.(18.2), podemos escrever

$$\Delta t_M^b = \frac{\Delta \tau_J^b}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (18.14)$$

Este resultado indica que, na relatividade, os intervalos de tempo marcados pelos relógios não são mais absolutos. Maria observa que o seu próprio relógio e o de João funcionam de modos diferentes, apesar de eles serem idênticos quando colocados lado a lado, num mesmo referencial. Essa diferença de funcionamento se deve ao movimento relativo entre os dois relógios. Assim, no contexto da relatividade, a “velocidade” com que o relógio funciona depende do referencial, não sendo mais a mesma para todos os observadores.

• interpretação dos resultados

O resultado contido na eq.(18.10) mostra que, no contexto da mecânica newtoniana, os intervalos de tempo marcados pelo mesmo relógio branco, percebidos por Maria e por João, são iguais. Isso decorre diretamente da regra clássica de adição de velocidade, mostrada na figura 18.5a.

Já a eq.(18.14) representa a versão relativística do mesmo problema. Não é demais enfatizar que os intervalos Δt_M^b e $\Delta \tau_J^b$ referem-se ao funcionamento de um *único relógio*, o branco, quando observados por Maria e por João. Eles diferem entre si pelo fator $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Na relatividade a velocidade relativa v entre dois referenciais deve ser sempre menor que c e, conseqüentemente,

$$0 \leq \frac{v^2}{c^2} < 1 \implies \gamma \geq 1. \quad (18.15)$$

Assim γ , que representa um fator de escala, é sempre maior ou igual a 1 e, por isso, Δt_M^b será sempre maior ou igual a $\Delta \tau_J^b$. Em outras palavras, João, para quem o relógio branco está parado, mede um intervalo de tempo $\Delta \tau_J^b$ entre dois TACs sucessivos; qualquer outro observador, em relação ao qual esse relógio esteja em movimento com velocidade v , medirá um intervalo dado por $\gamma \Delta \tau_J^b$ entre os mesmos dois TACs sucessivos do relógio branco, que será sempre **maior** do que $\Delta \tau_J$. Por isso, quem carrega o relógio observa sempre o **menor** intervalo de tempo possível entre dois TACs sucessivos deste relógio.

Por exemplo, se a velocidade relativa entre João e Maria for $v = \sqrt{3}c/2$, teremos $\gamma = 2$ e, portanto, $\Delta t_M^b = 2\Delta\tau_J^b$. Maria “ouviria”:

TIC TAC TIC TAC TIC TAC TIC ... , nos relógios pretos e
 TIC TAC TIC TAC ... , no relógio branco.

Isso indica que o *período* do relógio branco, quando observado por Maria, é duas vezes maior que o *período* dos relógios pretos que ela possui. Todos os ritmos da vida de João são coerentes com os períodos do seu relógio: as batidas do seu coração, a jornada de trabalho, a quantidade de sono, a duração de uma música... Por isso, quando Maria observa o relógio branco andar duas vezes mais devagar que o seu, ela também observa o mesmo acontecer com todos os ritmos de João. Em outras palavras, Maria observa **tudo** acontecer mais devagar no referencial de João do que no seu próprio referencial. É isso que queremos dizer quando falamos que o *tempo* de João manifesta-se *dilatado* no referencial de Maria. Este tipo de comportamento dos relógios pode, à primeira vista, parecer estranho, já que viola a nossa intuição quotidiana, educada na tradição newtoniana, na qual a passagem do tempo parece independe do observador. Convém lembrar, entretanto, que essa intuição é baseada na nossa vivência em um mundo onde as velocidades relativas são pequenas, quando comparadas à da luz. Por exemplo, a velocidade de um jato comercial é cerca de 1.000 km/h, o que corresponde a pouco menos de 300 m/s. Usando esse dado na equação (18.13), juntamente com $c \cong 3 \times 10^8$ m/s, obtemos $\gamma = 1,000\,000\,000\,000\,5$.

Um aspecto muito importante do fenômeno discutido aqui, que envolve a dilatação dos ritmos dos relógios, é que ele é **real!** É algo que acontece mesmo, e não corresponde a uma ilusão ou uma falha dos sentidos. Ele pode ser comprovado por meio de experimentos, como veremos adiante.

• relatividade e bagunça

Quando iniciamos o estudo da relatividade, é comum que tenhamos muitas dúvidas, em geral acompanhadas por uma sensação de insegurança. A relatividade parece virar tudo de pernas para o ar. Se isto estiver acontecendo com você, não se preocupe, é normal. Para melhorar um pouco este tipo de sensação desagradável, convém lembrar que a relatividade é uma teoria que trata do comportamento do mundo físico quando ocorrem mudanças de referencial. Por isso, tudo o que você conhece e aprendeu sobre a natureza, na escola e nas suas experiências diárias, continua valendo quando você permanece num único referencial. A dilatação do tempo e todos os demais efeitos discutidos em seguir, acontecem quando pessoas em referenciais diferentes comparam as suas observações.

No caso particular do exemplo discutido anteriormente, é impossível que João sinta o seu *próprio* tempo passar mais devagar, só porque Maria passa correndo em frente a ele!

João não se sente em movimento. Para ele, quem se move é Maria. Pense em você mesmo: é possível que o seu relógio comece a andar mais devagar só porque um avião passou no céu, sobre a sua cabeça? Evidentemente, isto não faz qualquer sentido.

• a simetria da dilatação

No exemplo apresentado anteriormente, mostramos que os intervalos de tempo do relógio branco, carregado por João, aparecem dilatados para Maria. Será que isso significa que os intervalos de tempo do relógio de Maria vão aparecer *contraídos* para João? A resposta é **não!** Para compreender isto, discutimos a situação inversa, ou seja, como João vê um relógio preto, estacionário em relação a Maria. Dizer que João se move para a direita em relação a Maria é equivalente a dizer que Maria se move com velocidade $-v$, para a esquerda, em relação a João, como indica a figura 18.6.

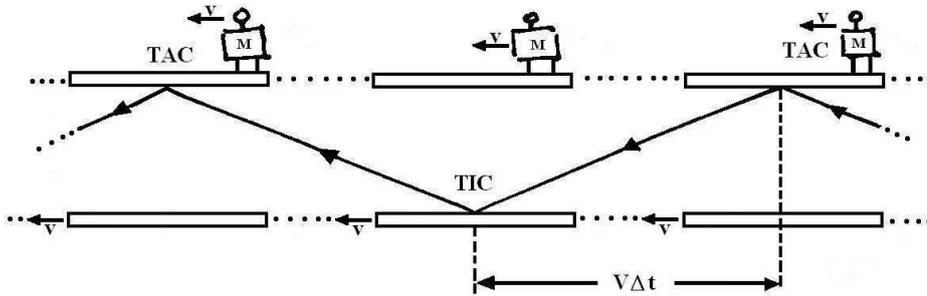


Figura 18.6: O relógio preto de Maria, visto por João.

Neste caso, a distância d_J^p , que a luz no interior do relógio preto estacionário em relação a de Maria tem de percorrer, no referencial de João, vale

$$d_J^p = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v \Delta t_J^p}{2}\right)^2} \quad (18.16)$$

e o intervalo de tempo $\Delta t_J^p = d_J^p/c$ é dado por

$$\Delta t_J^p = \frac{2L}{c\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{\Delta \tau_M^p}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \gamma \Delta \tau_M^p, \quad (18.17)$$

e $\Delta t_J^p \geq \Delta \tau_M^p$. Ou seja, resultado é o mesmo que o dado na eq.(18.14), com $M \longleftrightarrow J$ e $b \longleftrightarrow p$.

Juntando esta conclusão com a expressa pela eq.(18.14), podemos afirmar que Maria percebe os intervalos de tempo do relógio branco dilatados e João percebe os intervalos de tempo do relógio preto dilatados. Como é que isso é possível? Para entender melhor a solução deste *aparente* paradoxo, é preciso esperar um pouco, até que você adquira mais experiência em problemas de relatividade. No momento, tudo o que podemos fazer é notar que deve haver algum tipo de simetria entre as observações feitas por João e Maria. Afinal de contas, o primeiro princípio da relatividade precisa ser satisfeito!

Por outro lado, deve também haver algum tipo de assimetria entre as observações de João e Maria nos dois exemplos apresentados. Uma sugestão sobre a origem desta assimetria pode ser encontrada na notação que empregamos. Nas eqs.(18.14) e (18.17), $\Delta\tau$ e Δt representam coisas diferentes. Qual o significado de cada um desses intervalos? Esta é uma questão difícil e sutil, mas é importante que você deixe isto bem claro antes de prosseguir.

• exercícios

1. Você está estudando numa sala de aulas. A sala é um referencial ou está num referencial? O que é um referencial? Onde ele está “preso”?
2. Supondo que dois observadores, em referenciais inerciais diferentes, com velocidade relativa muito alta (mas menor do que c), possam se comunicar por meio de telefone, fax, ondas de rádio, e-mail, televisão, cartas enviadas pelo correio, etc, tente imaginar um experimento que permita comprovar a dilatação do tempo prevista pela relatividade.
3. Qual deve ser a velocidade de João relativamente a Maria, para que ela observe que relógio de João ande 10 vezes mais devagar do que o seu próprio? E 100 vezes? E 1.000 vezes?
4. João possui um relógio de luz em que esta se move verticalmente, como na figura 18.4a. Ele se desloca para a direita em relação a Maria, com uma velocidade $v = 3c/5$, carregando o seu relógio. Qual o valor da componente vertical da velocidade da luz em relação a Maria, nos contextos da mecânica clássica e da relatividade? Sugestão: estude a figura 18.5.

• respostas

3. $0.99 c$; $0.9999 c$; $0.999999 c$
4. $4c/5$.

Capítulo 19

contração do espaço e quebra da simultaneidade

- **contração do espaço**

Na aula anterior, ao aplicarmos o segundo princípio da relatividade ao caso do relógio de espelhos paralelos, chegamos à conclusão de que o funcionamento desse relógio é observado de modos diferentes por pessoas em referenciais com movimentos relativos. A contração do espaço é, de certo modo, um resultado complementar à dilatação dos intervalos de tempo. Isso acontece porque qualquer velocidade, inclusive a da luz, é sempre a razão entre uma distância e um intervalo de tempo. Como, na relatividade, a velocidade da luz é constante, se as características do tempo dependem do referencial, o mesmo deve acontecer com as do espaço.

- **a simetria das velocidades relativas**

Para perceber a complementaridade da dilatação dos intervalos de tempo e da contração das distâncias consideremos, por exemplo, o deslocamento de João relativamente a Maria com velocidade v . Para medir esta velocidade, João combina com Maria que ela deve fixar, no seu referencial, uma régua de comprimento λ_M , paralela à velocidade relativa. Ambos se comprometem a medir os intervalos de tempo entre as passagens de João pelas duas extremidades da régua e, a partir desses dados, calcular a velocidade do outro.

No referencial de Maria, λ_M é o **comprimento próprio** da régua, já que aí ela está em repouso. Na relatividade, uma distância entre dois pontos é chamada de *própria* quando estes dois pontos e o observador estão todos em repouso em um único referencial. Por isso, o *comprimento próprio* de uma régua é o seu comprimento medido por um observador em repouso em relação a ela. Em geral, representamos distâncias e comprimentos próprios por letras gregas.

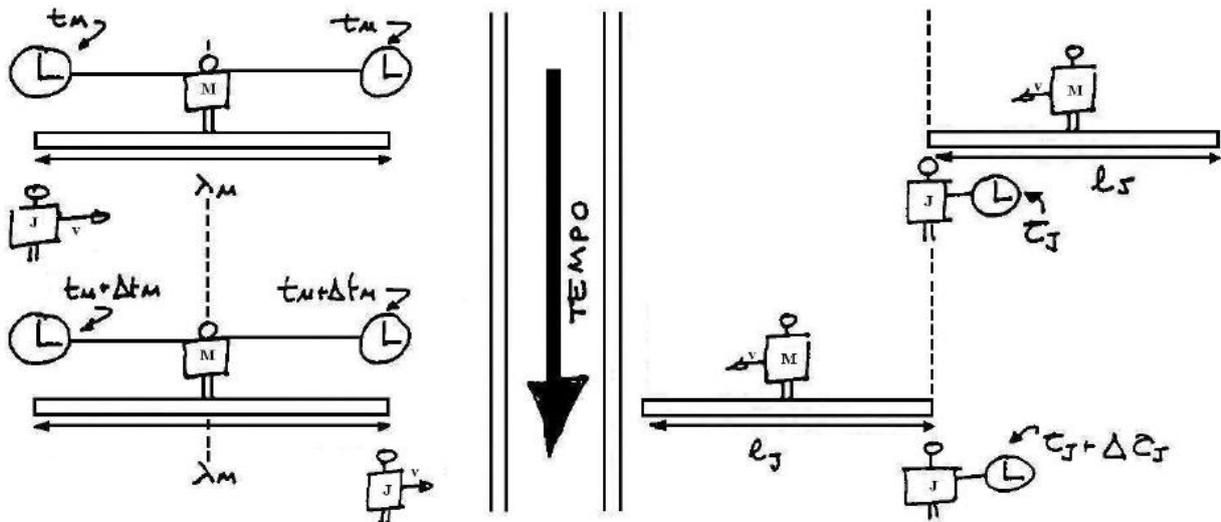


Figura 19.1: As medições da velocidade nos referenciais de Maria (esquerda) e de João (direita).

Na figura 19.1, mostramos, do lado esquerdo, a medição da velocidade de João, feita no referencial de Maria. Esta velocidade é dada por

$$v_M = \frac{\lambda_M}{\Delta t_M}, \quad (19.1)$$

onde λ_M é o comprimento da régua de Maria e Δt_M é o intervalo de tempo decorrido entre as passagens de João pelos seus dois extremos, medido por Maria.

No referencial de João, temos a situação descrita do lado direito da figura 19.1, e a medida da velocidade é dada por

$$v_J = \frac{\ell_J}{\Delta \tau_J}, \quad (19.2)$$

onde ℓ_J é o comprimento da régua visto por ele e $\Delta \tau_J$ é o intervalo de tempo decorrido entre as passagens dos dois extremos da régua por ele. Como João utiliza um único relógio, em repouso em relação a ele, esse é um intervalo de tempo próprio.

A simetria entre os dois referenciais, implícita no primeiro princípio da relatividade, nos diz que o módulo da velocidade de João em relação a Maria deve ser igual ao da velocidade de Maria em relação a João. Ou seja, $v_J = v_M$, o que nos permite escrever

$$\frac{\lambda_M}{\Delta t_M} = \frac{\ell_J}{\Delta \tau_J}. \quad (19.3)$$

A relação entre Δt_M and $\Delta \tau_J$ foi obtida na aula 18 e é dada pela eq. (18.14):

$$\Delta t_M = \frac{\Delta \tau_J}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.4)$$

Assim, concluímos que

$$\ell_J = \sqrt{1 - v^2/c^2} \lambda_M . \quad (19.5)$$

Como o fator em frente a λ_M é menor que 1, o comprimento da régua, que está em repouso em relação a Maria, é visto por João como contraído, já que $\ell_J \leq \lambda_M$. Na relatividade, tanto os intervalos de tempo como os de espaço deixam de ser absolutos.

A complementaridade entre dilatação do tempo e contração do espaço manifesta-se, neste exemplo, pelo fato de Maria observar o relógio de João funcionar mais lentamente que o seu, enquanto que João observa que a régua de Maria fica contraída. Do ponto de vista matemático isso está expresso na eq.(19.3), que envolve uma grandeza própria para cada observador: λ_M no lado esquerdo e $\Delta\tau_J$ no lado direito. Para compreender porque isso ocorre, analise com cuidado a figura 19.1.

• a contração do espaço e o segundo princípio

Para estudar a relação entre a constância da velocidade da luz e a contração das distâncias, tomamos o mesmo tipo de relógio da aula anterior, com o mesmo mecanismo de contagem. Agora, supomos que João, ao passar por Maria, carregue dois relógios brancos idênticos, um deles com espelhos horizontais e o outro, com espelhos verticais, indicados pelos rótulos bh e bv , respectivamente. No referencial de João, os dois relógios estão em repouso, como mostra a figura 19.2 e, por serem idênticos, os seus TICs e TACs coincidem. Ou sejam, eles medem intervalos de tempo próprio, que são idênticos entre si

$$\Delta\tau_J^{bh} = \Delta\tau_J^{bv} = \frac{2L}{c} . \quad (19.6)$$

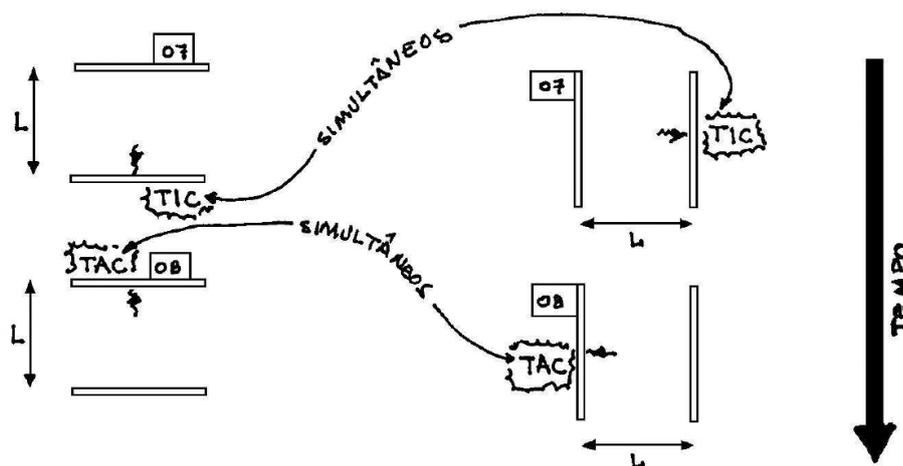


Figura 19.2: Os dois relógios de João, em dois instantes diferentes.

O caso do relógio de espelhos horizontais foi estudado na aula anterior, onde vimos que o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs sucessivos no relógio de João, medido por

Maria, é dado por

$$\Delta t_M^{bh} = \frac{2L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta \tau_J^{bh}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.7)$$

Caso Maria tivesse observado o relógio de espelhos verticais ou mesmo uma ampulheta no referencial de João, ela teria obtido exatamente o mesmo resultado. O que importa é a relação entre os períodos nos dois referenciais e não, os instrumentos usados para medi-los.

Depois dessas considerações, repetimos os cálculos do exemplo da aula anterior para o relógio de espelhos verticais, primeiro no contexto da mecânica clássica e, depois, no da relatividade. Entretanto, o que buscamos agora não é mais a relação entre os intervalos de tempo $\Delta \tau_J^{bv}$ e Δt_M^{bv} nos dois referenciais, que supomos conhecida, mas sim, a relação entre as distâncias entre os espelhos nos dois referenciais.

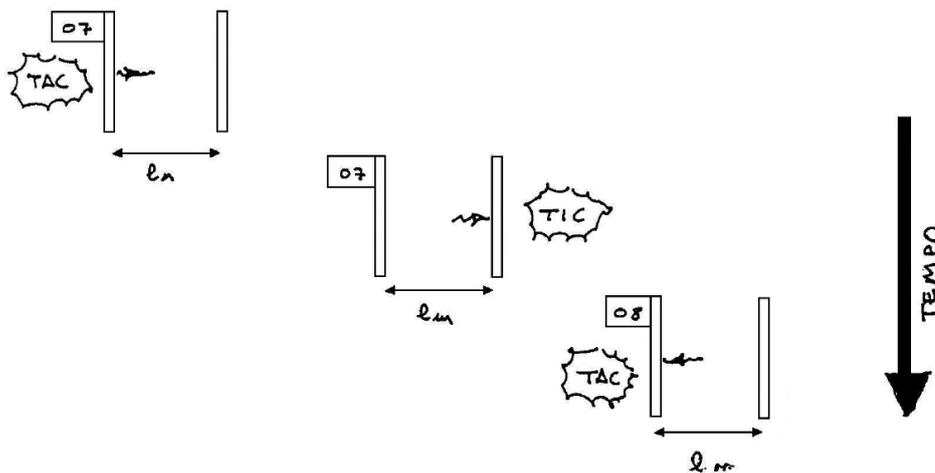


Figura 19.3: O relógio de João visto por Maria, em três instantes diferentes.

Consideramos, agora, o caso em que João, carregando o relógio branco de espelhos verticais, passa por Maria com velocidade v , para a direita, mostrado na figura 19.3. Qual é, para ela, o intervalo de tempo entre dois TACs sucessivos desse relógio?

Inicialmente, respondemos esta questão no contexto da mecânica clássica. Para tanto, dividimos o intervalo ΔT_M , entre dois TACs sucessivos, em duas partes: o intervalo entre o primeiro TAC e o TIC, que chamamos de ΔT_{M1} , e entre o TIC e o segundo TAC, representado por ΔT_{M2} . Chamando de L_M a distância entre os dois espelhos verticais no referencial de Maria, notamos que, no intervalo de tempo ΔT_{M1} , a luz tem de percorrer uma distância maior do que L_M já que, enquanto ela anda, o espelho da direita também o faz, “fugindo” do pulso luminoso. Na mecânica clássica, a velocidade deste pulso de luz em relação a Maria é dada por $C_{M1} = c + v$, o que nos permite escrever

$$\Delta T_{M1}^{bv} = \frac{L_M^{bv} + v \Delta T_{M1}^{bv}}{c + v}, \quad (19.8)$$

de onde obtemos

$$\Delta T_{M1}^{bv} = \frac{L_M^{bv}}{c}. \quad (19.9)$$

Durante o intervalo de tempo ΔT_{M2} , entre o TIC e o segundo TAC, o pulso de luz vai de encontro ao espelho da esquerda e, em relação a Maria, a sua velocidade seria $C_{M2} = c - v$. Portanto, no contexto da mecânica clássica, temos

$$\Delta T_{M2}^{bv} = \frac{L_M^{bv} - v \Delta T_{M2}^{bv}}{c - v}, \quad (19.10)$$

o que corresponde a

$$\Delta T_{M2}^{bv} = \frac{L_M^{bv}}{c} \quad (19.11)$$

O intervalo entre dois TACs sucessivos é, então,

$$\Delta T_M^{bv} = \Delta T_{M1}^{bv} + \Delta T_{M2}^{bv} = \frac{2L_M^{bv}}{c}. \quad (19.12)$$

Para interpretar este resultado, lembramos que, na seção anterior, “mostramos” que os intervalos de tempo na mecânica clássica são absolutos, o que nos permite escrever $\Delta T_M^{bv} = \Delta \tau_J^{bv}$. Comparando as eqs. (19.6) e (19.12), concluímos que $L_M^{bv} = L$. Ou seja, usando a idéia que o tempo “clássico” é absoluto, concluímos que as distâncias entre os espelhos também o são!

Repetimos, a seguir, este cálculo no contexto da relatividade, onde também consideramos dois intervalos de tempo, Δt_{M1}^{bv} e Δt_{M2}^{bv} . O intervalo relativístico Δt_{M1} , entre o primeiro TAC e o TIC é calculado do mesmo modo que o intervalo clássico. Entretanto, agora, o módulo da velocidade da luz em relação a Maria também é c , e não mais $C_{M1} = c + v$. Assim, o análogo relativístico da eq. (19.8) é:

$$\Delta t_{M1}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv} + v \Delta t_{M1}^{bv}}{c}, \quad (19.13)$$

e, portanto,

$$\Delta t_{M1}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c - v}. \quad (19.14)$$

Já o intervalo Δt_{M2} , entre o TIC e o segundo TAC, é dado por

$$\Delta t_{M2}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv} + v \Delta t_{M2}^{bv}}{c}, \quad (19.15)$$

que corresponde a

$$\Delta t_{M2}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c + v} \quad (19.16)$$

No contexto da relatividade, portanto, o intervalo entre dois TACs sucessivos é dado por

$$\Delta t_M^{bv} = \Delta t_{M1}^{bv} + \Delta t_{M2}^{bv} = \frac{2\ell_M^{bv}}{c(1 - v^2/c^2)}. \quad (19.17)$$

Para interpretar esse resultado, é preciso invocar a idéia de que a relação entre os intervalos de tempo observados por João e Maria não podem depender da orientação dos relógios envolvidos. No presente caso, isso equivale a dizer que os intervalos de tempo observados nos dois relógios brancos, bh e bv , devem ser idênticos também no referencial de Maria. A relação entre as observações do relógio de placas horizontais foi obtida na aula anterior, eq. (18.13), e dada por

$$\Delta t_M^{bh} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.18)$$

Impondo que $\Delta t_M^{bv} = \Delta t_M^{bh}$, concluímos que

$$\ell_M^{bv} = \sqrt{1 - v^2/c^2} L. \quad (19.19)$$

O fato de a raiz ser menor que 1 para $v \neq 0$ significa que a distância entre os dois espelhos, vista por Maria, é menor do que a distância própria $\lambda_J^{bv} = L$, vista por João: $\ell_M^{bv} \leq \lambda_J^{bv}$. Este resultado indica que a distância entre os espelhos se contraiu para o observador que vê o relógio em movimento.

Na obtenção destes resultados supusemos, tacitamente, que a contração do espaço somente ocorre na direção paralela à velocidade relativa; nas direções transversais, nada acontece. Este aspecto da relatividade será mais bem discutido nas aulas seguintes.

• a realidade da dilatação do tempo e da contração do espaço

Ao estudar relatividade, podemos ser tentados a pensar que os efeitos de dilatação do tempo e contração do espaço correspondem a impressões falsas, ou a enganos dos sentidos. Isso, entretanto, não é verdade, já que esses efeitos ocorrem realmente e podem, em muitos casos, ser comprovados experimentalmente. Em 1911, Einstein afirmou:¹ “*A contração de Lorentz existe ou não, é confusa. Ela “realmente” não existe, na medida que não existe para um observador que se move [com a barra]; ela “realmente” existe, entretanto, no sentido em que pode, em princípio, ser demonstrada por um observador em repouso*”.

Ou seja, um observador em repouso em relação a uma régua não pode perceber a sua contração, mas alguém que observa a régua em movimento, pode. Por exemplo, para documentar a contração do espaço, poderíamos pensar em fotografias. Tirar uma foto de um objeto que se move com velocidade muito alta não é trivial, pois ocorrem distorções devidas ao tempo de propagação da luz até a câmara. Apesar disto, neste curso vamos supor que estas distorções possam ser minimizadas por meio de um sistema eletrônico de

¹Citado em A. Pais, op.cit., p144.

reconstrução de imagens, ou por meio de câmaras, nas quais o registro das imagens é feito por meio de feixes contendo um número muito grande de fibras ópticas, colocadas muito próximas do objeto a ser registrado.

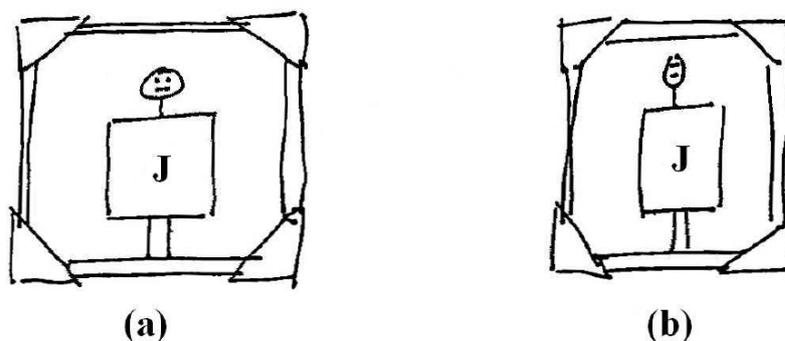


Figura 19.4: As duas fotos de João: a) tirada por ele mesmo; b) tirada por Maria.

Se colocássemos, lado a lado, um auto retrato de João e a foto tirada dele por Maria, com uma câmara em que as distorções houvessem sido corrigidas, e se a velocidade relativa fosse $v = 3c/5$, teríamos a situação mostrada na figura 19.4. Fotos são coisas concretas e palpáveis que poderiam, em princípio, registrar a contração do espaço, indicando que ela é real. Se, por outro lado, fosse João quem tirasse a foto de Maria, ela apareceria contraída na direção do movimento, como na figura 19.5. O efeito da contração do espaço também é simétrico.

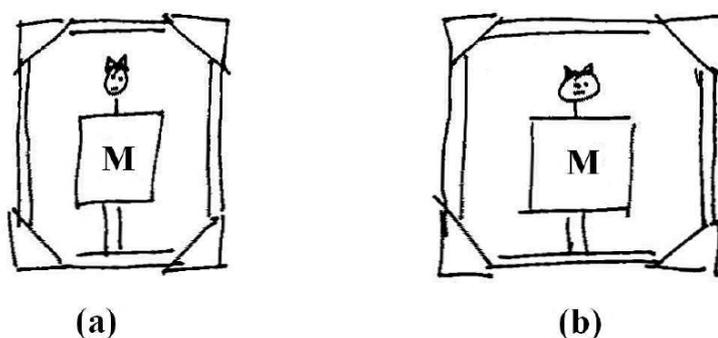


Figura 19.5: As duas fotos de Maria: a) tirada por João; b) tirada por ela mesma.

Este tipo de situação ilustra bem os efeitos da relatividade, mas não é viável na prática, pois não existem condições tecnológicas para que pessoas se movam com velocidades relativas iguais a $v = 3c/5$. Em geral, é muito difícil dotar corpos macroscópicos de velocidades relativas muito altas, pois as energias necessárias ao processo de aceleração são muito grandes. Já no caso de partículas microscópicas, por outro lado, isso é relativamente fácil.

• simultaneidade

Nesta aula e na anterior, vimos que os intervalos de tempo e de espaço na relatividade não são absolutos e que, tanto a dilatação do tempo como a contração do espaço, são efeitos reais, posto que mensuráveis. Como discutiremos a seguir, no contexto desta teoria, a noção clássica de simultaneidade entre eventos é também alterada, passando a depender do observador.

Para mostrar como isso ocorre, comparamos os comportamentos de dois relógios brancos, em repouso no referencial de João, com espelhos verticais e horizontais. João, que segura os dois, “ouve” ambos fazerem o TIC e o TAC simultaneamente, já que eles estão em repouso no seu referencial e, por isso, marcam o tempo da mesma maneira, como sugere a figura 19.6.

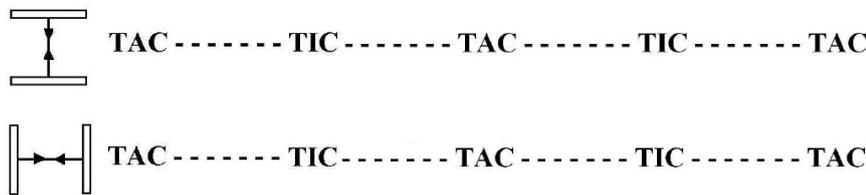


Figura 19.6: Os relógios de João no referencial dele mesmo.

O problema, agora, consiste em saber como Maria “ouve” os TICs e TACs dos dois relógios brancos. No caso do relógio de espelhos *horizontais*, os cálculos feitos anteriormente permitem-nos concluir que o intervalo Δt_{M1}^{bh} entre o TIC e o TAC é igual ao intervalo Δt_{M2}^{bh} entre o TAC e o TIC, sendo ambos dados por

$$\Delta t_{M1}^{bh} = \Delta t_{M2}^{bh} = \frac{L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{19.20}$$

No relógio de espelhos *verticais*, por outro lado, isso não acontece. Segundo as eqs. (19.14),(19.16) e (19.19), temos

$$\Delta t_{M1}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c - v} = \frac{L}{c} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c - v} , \tag{19.21}$$

$$\Delta t_{M2}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c + v} = \frac{L}{c} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c + v} . \tag{19.22}$$

Deste modo os três intervalos de tempo, $\Delta t_{M1}^{bh} = \Delta t_{M2}^{bh}$, Δt_{M1}^{bv} e Δt_{M2}^{bv} são todos diferentes entre si. Para Maria, os TACs dos dois relógios de João são simultâneos, mas isso não acontece com os TICs, como ilustra a figura 19.7.

Se o intervalo entre um TIC-TAC dos relógios brancos no referencial de João fosse de 1 segundo, e a velocidade relativa fosse $3/5c$, teríamos os resultados mostrados na tabela abaixo.

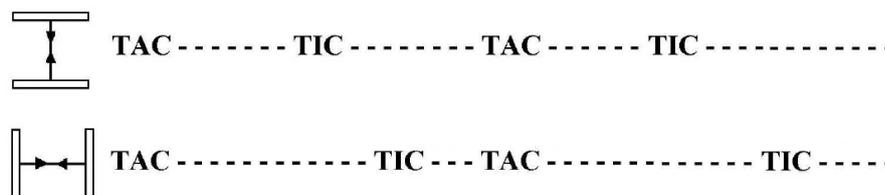


Figura 19.7: Os relógios de João no referencial de Maria.

	referencial	TAC-TIC	TIC-TAC	TAC-TAC
relógio de espelhos horizontais	JOÃO	1,00s	1,00s	2,00s
	MARIA	1,25s	1,25s	2,50s
relógio de espelhos verticais	JOÃO	1,00s	1,00s	2,00s
	MARIA	2,00s	0,50s	2,50s

• mais simultaneidade

A relatividade, ao mudar os conceitos de espaço e tempo, muda também o de simultaneidade. No dicionário, encontramos que dois eventos são ditos simultâneos quando ocorrem ao mesmo tempo. Na relatividade, esta definição de simultaneidade não é suficientemente clara, e é preciso ampliá-la. Neste novo contexto, é preciso perguntar também: em qual referencial?

Suponhamos que, no referencial de Maria, ocorram dois eventos quaisquer, A e B , em posições diferentes, P_A e P_B . Por exemplo, o evento A pode ser o piscar de um olho e o evento B , a batida de um martelo contra um prego. Suponhamos, ainda, que Maria esteja num ponto P_M , equidistante dos pontos P_A e P_B , e que ela possa ver os dois eventos. Na relatividade, os eventos A e B são considerados simultâneos se Maria os vê ao mesmo tempo. De modo mais geral, na relatividade, dizemos que dois eventos são simultâneos *em um referencial* quando as luzes por eles emitidas chegam juntas a um ponto equidistante deles. No caso do exemplo, Maria está equidistante do olho que pisca e do prego que recebe a martelada. Sabendo disso, ela pode concluir que se ela vê as informações luminosas provenientes desses dois eventos ao mesmo tempo, então eles de fato ocorrem ao mesmo tempo. Neste caso, os eventos A e B são simultâneos no referencial de Maria. Para completar esta discussão, convém lembrar que os eventos A e B são simultâneos *entre si*, mas ambos *anteriores* à percepção de Maria.

Onde falhou a definição de simultaneidade do dicionário não-relativístico? Na relatividade a definição de simultaneidade envolve tanto o tempo como o espaço, enquanto que a do dicionário envolve apenas o tempo e incorpora, tacitamente, a noção clássica de tempo absoluto.

- a noção de simultaneidade é relativa

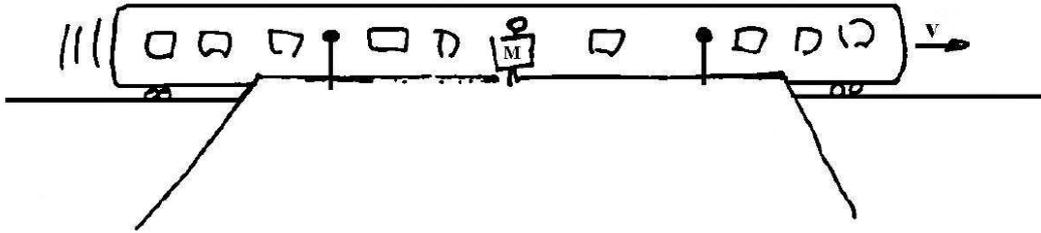


Figura 19.8: Maria e os dois flashes, no referencial da estação.

Na relatividade, dois eventos simultâneos num referencial podem não o ser num outro referencial. Esta nova noção de simultaneidade parece bastante estranha, à primeira vista, pois é diferente da nossa experiência diária. Para ganhar um pouco de familiaridade com ela, consideremos a situação mostrada na figura 19.8. Maria está parada numa estação de trem, à noite, com todas as luzes desligadas. Na plataforma existem, de cada um dos seus lados, dois flashes, ambos à distância L dela. A esses flashes estão ligados fios de mesmo comprimento, conectados a um interruptor único, de modo que eles podem ser acionados por Maria ao mesmo tempo. Este arranjo permite que sejam iluminadas pessoas que viajam num trem, que passa pela plataforma com velocidade v . Nesta discussão, vamos supor que os flashes estejam tão próximos das pessoas do trem, de modo que elas sejam iluminadas no mesmo instante em que são acionados. Essa hipótese não influencia em nada as conclusões principais a serem obtidas, mas simplifica muito a discussão.

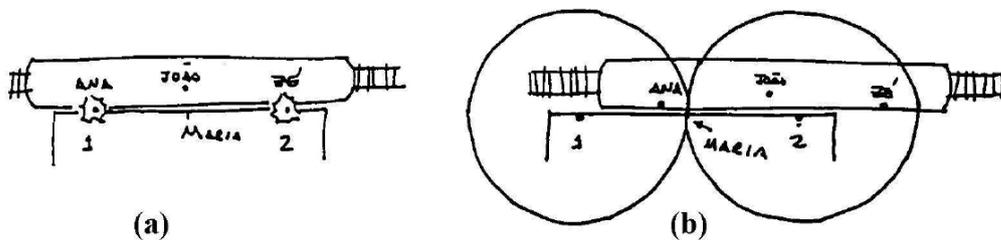


Figura 19.9: Eventos no referencial de Maria.

Quando Maria aciona o interruptor, os dois flashes iluminam duas pessoas no trem. Ana é iluminada pelo flash da esquerda e Zé, pelo da direita, como mostra a figura 19.9a. Quando os flashes são acionados, cada um deles emite uma frente de onda, que se propaga esfericamente, com velocidade c . Assim, no referencial da estação, após o intervalo de tempo $\Delta t_M = L/c$, temos a situação mostrada na figura 19.9b e Maria vê, simultaneamente, Ana e Zé. Para ela, as iluminações de Ana e Zé são simultâneas por construção, pois ela recebe, ao mesmo tempo, os pulsos provenientes dos dois flashes, que ela sabe estarem equidistantes dela.

No contexto da relatividade, Ana e Zé não podem ter sido iluminados simultaneamente no referencial de João, que viaja no trem e, está equidistante de Ana e Zé. Como o trem

se move à medida que as ondas luminosas se propagam, as duas frentes de onda levam tempos diferentes para chegar até ele. Assim, por exemplo, na situação ilustrada na figura 19.9b, a frente de onda que iluminou Zé já passou por João, mas isso ainda não aconteceu com a frente de onda que iluminou Ana. Por isso, João já viu Zé, mas ainda não viu Ana.

Na **relatividade**, as velocidades das luzes emitidas pelos dois flashes são as mesmas, iguais a c , tanto no referencial de Maria como no de João. Por isso, a diferença de tempo entre as chegadas das imagens de Zé e Ana até João constitui, para ele, uma clara indicação que as duas pessoas foram iluminadas em instantes diferentes. Como João recebe primeiro a luz proveniente de Zé, no referencial do trem, este foi, de fato, iluminado antes do que Ana.

• exercícios

1. O fator $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ regula a dilatação do tempo e a contração do espaço. Para ter uma idéia das ordens de grandeza envolvidas, complete a tabela abaixo, usando $c \approx 3 \times 10^8$ m/s:

.... v v/c γ
1m/s		
1km/h		
100 km/h		
	0,01	
	0,1	
	0,5	
		2
		5
		10
		100

2. Os funcionários de uma estação medem os comprimentos da plataforma e de um trem que passa com velocidade v , para a direita e obtêm, em ambos os casos, o valor L .

a) Desenhe a “visão do trem” e a “visão da plataforma” do problema.

b) Determine os valores dos comprimentos do trem e da plataforma medidos pelos passageiros do trem.

3. Ana possui um relógio de espelhos verticais e ela se move para a esquerda, em relação a Pedro. Desenhe, em escala, o TIC-TAC do relógio de Ana quando “ouvido” por ela mesma e por Pedro, no caso $v = \sqrt{3}c/2$. O que mudaria se Ana invertesse o sentido da sua velocidade relativamente a Pedro?

4. Um trem se move com velocidade v , para a direita, relativamente à plataforma de uma estação. Um sinal luminoso, emitido no centro do trem, ilumina simultaneamente as suas duas extremidades. O que observam os funcionários da estação?

• **respostas**

2. b) $L/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $L\sqrt{1 - v^2/c^2}$

4. A extremidade traseira do trem é iluminada antes da extremidade dianteira.

Capítulo 20

transformações de Lorentz

- **eventos**

A apresentação da relatividade feita até aqui explorou a constância da velocidade da luz e teve o intuito de desenvolver uma intuição sobre o assunto, motivando a construção de significados novos para velhas palavras, tais como **tempo** e **espaço**. Nesta aula e nas seguintes, passamos a estudar uma abordagem mais poderosa para atacar problemas de cinemática relativística, baseada nas **transformações de Lorentz**.

As transformações de Lorentz relacionam **eventos** em referenciais diferentes. Por isso, é conveniente discutirmos um pouco o significado da palavra evento. Este conceito tem importância fundamental na relatividade e corresponde a algo que *realmente* acontece, num ponto do espaço e do tempo. A realidade de um evento está associada ao fato de que, em princípio, ele pode ser observado e registrado. Por isso, dois observadores, em referenciais diferentes não podem discordar quando à *ocorrência* desse evento. Por exemplo, você encosta a caneta no papel e coloca um pingo num i . Daí em diante, o pingo está lá e nenhuma mudança de referencial pode fazer com que ele desapareça. A *colocação* do pingo *é* um evento, pois é algo que ocorre no espaço e no tempo. Note que o próprio pingo *não é* um evento!

Na linguagem cotidiana, podemos usar a palavra *evento* para descrever um show de música, um jogo de futebol, um encontro entre cientistas ou o choque de um carro contra uma árvore. Na física, por outro lado, um evento é um acontecimento que ocorre em *um único* ponto do espaço e em *um único* instante bem definido. Por isso, na física, qualquer um dos exemplos citados corresponde a um **conjunto** de eventos, pois envolve vários acontecimentos, que ocorrem em muitos pontos do espaço e em muitos instantes diferentes.

Na relatividade, um evento é algo *real*, passível de comprovação experimental e, por isso, dois observadores em referenciais diferentes não podem discordar da sua ocorrência.

Eles podem, entretanto, discordar quanto à *descrição* feita desta ocorrência. O evento independe do referencial, mas a descrição depende. É por isso que precisamos ter muito cuidado para não confundir um evento com a sua descrição.

Na teoria da relatividade, a descrição de um evento requer sempre quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal. Este aspecto do problema foi enfatizado por Minkowski, em um trabalho^[1] publicado em 1908, onde ele afirma: “*Os objetos da nossa percepção incluem invariavelmente lugares e tempos em combinação. Ninguém jamais percebeu um lugar a não ser em um tempo, ou um tempo a não ser em um lugar. Mas eu ainda respeito o dogma que tanto espaço como tempo têm significados independentes.*”

A *ocorrência* de um evento não depende do referencial no qual o observador se encontra. A *descrição* desse evento, por outro lado, depende do referencial. As observações incorporam, necessariamente, uma espécie de *perspectiva*, envolvendo espaço e tempo.

• perspectivas

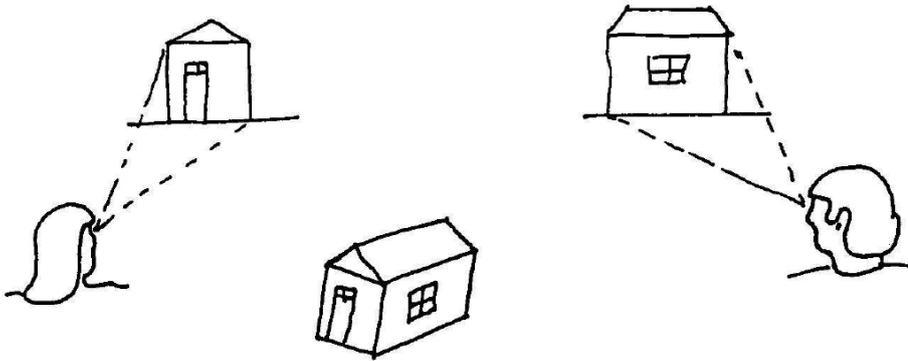


Figura 20.1: Maria e João olham a mesma casa.

Existe uma analogia entre a percepção de eventos na relatividade e o que acontece quando olhamos um objeto qualquer. Tomemos, por exemplo, uma casa. Maria, de pé em frente a ela, vê o que mostra o lado esquerdo da figura 20.1. João, entretanto, em outra posição, vê o que mostra o lado direito da figura 20.1. Maria e João vêem a *mesma casa*, mas as suas visões são diferentes. A casa faz, aqui, o papel de *evento*, a entidade que unifica as duas visões. As visões de Maria e João são observações particulares que, claramente, dependem da posição de cada pessoa em relação à casa. Por isso, as descrições baseadas nessas observações podem mudar, se o observador mudar de posição. Analogamente, na relatividade, as *observações* de um mesmo evento são dependentes dos referenciais. É interessante notar, também, que é impossível para um observador qualquer ver diretamente a casa como um todo. O máximo que ele consegue é ver, separadamente, as várias facetas da casa e reconstruí-la em sua mente. Exatamente o mesmo ocorre com um evento, na relatividade.

A teoria da Relatividade incorpora a idéia de que cada observador, em cada referencial, descreve um *mesmo* evento de forma diferente. Como o evento é o mesmo, estas diferentes

descrições guardam relações bem definidas, umas com as outras. Assim, se Maria, no referencial S_M , souber como descrever o evento E e souber, também, como o referencial S_M , onde está João, se move em relação a ela, ela pode reconstruir a descrição de João para esse mesmo evento. No exemplo da casa, se Maria quiser saber como João vê a casa e souber onde ele se encontra, ela pode simplesmente andar até aquele ponto e colocar-se na posição de João. Alternativamente, se ela dispuser de uma teoria de mudança de referencial, ela pode reconstruir a visão de João, mesmo sem se mover, sem sair do seu referencial!

Em relatividade, as regras que permitem efetuar esta operação, ou seja, encontrar as visões de outros observadores a partir da nossa, são as **transformações de Lorentz**. Elas relacionam as descrições, em referenciais com movimento relativo, de um mesmo evento.

A noção de perspectiva em situações envolvendo o tempo é bem menos fácil do que a aplicada apenas ao espaço tridimensional. Na relatividade, para descrever com clareza eventos no referencial S_M , de Maria, associamos a ele um sistema de três eixos e um relógio como na figura 20.2. Analogamente João, no sistema S_J , também possui um sistema de três eixos e um relógio, como na figura 20.3.

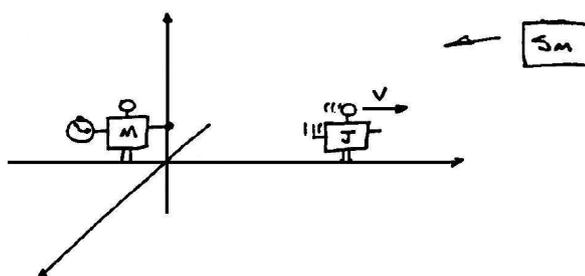


Figura 20.2: O referencial de Maria.

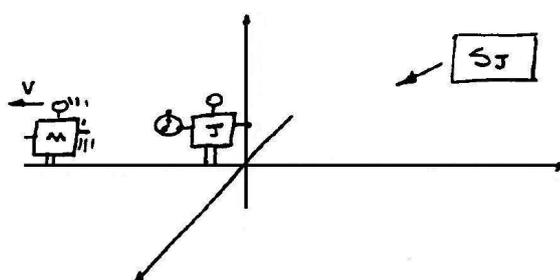


Figura 20.3: O referencial de João.

Imaginemos uma situação em que Maria tenha, em suas mãos, um aparelho capaz de emitir pulsos de luz. No instante em que João passa correndo em frente a ela, ela emite um pulso. Cria-se, então, uma frente de onda esférica que se propaga, de acordo com o segundo princípio da relatividade, com velocidade c em qualquer referencial.

O piscar da luz é um evento, que chamaremos de P , que ocorre no instante em que as origens de S_M e S_J coincidem. Por esse motivo, adotamos o piscar da luz como origem espaço-temporal para os dois referenciais. Este evento é descrito do seguinte modo, por Maria e João:

$$\text{evento } P \quad S_M : (x_M^P, y_M^P, z_M^P; t_M^P) = (0, 0, 0; 0) \quad (20.1)$$

$$S_J : (x_J^P, y_J^P, z_J^P; t_J^P) = (0, 0, 0; 0) \quad (20.2)$$

À medida que o tempo passa, em cada um dos referenciais, a luz emitida fica distribuída sobre uma esfera, cujo raio cresce com a velocidade da luz, como mostra a figura 20.4. É importante notar que, no referencial S_M , é Maria que está no centro da esfera enquanto que, em S_J , é João que se encontra nessa posição. Essa situação viola bastante a nossa intuição clássica, já que parece corresponder a uma esfera com dois centros! Podemos nos perguntar se seria possível unificar os dois desenhos em um só, representando simultaneamente as duas visões. A resposta é **não!!!** Tentar fazer isso corresponde à pretensão a uma visão do problema que independe de referenciais particulares, superior e mais poderosa do que as permitidas aos humanos. Seria equivalente, no exemplo da casa, a tentar fazer um desenho mostrando todas as suas faces de uma só vez.

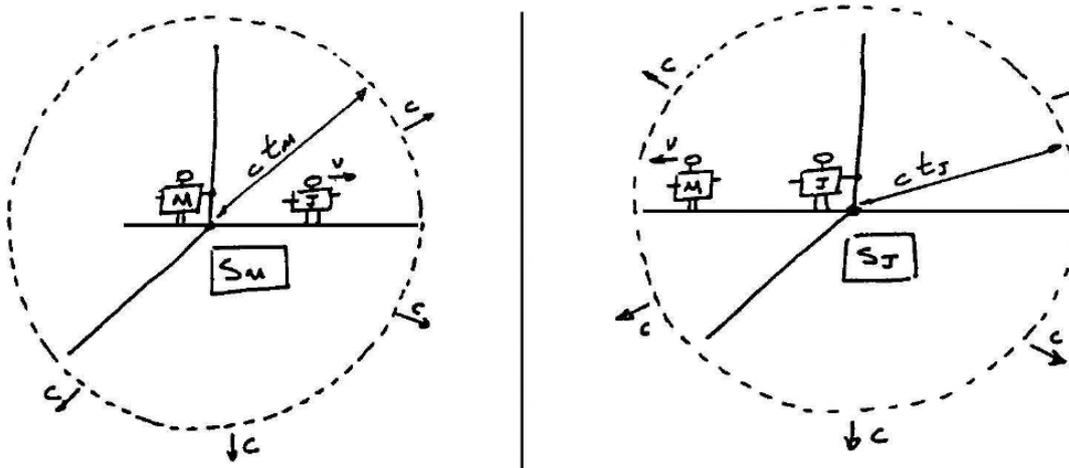


Figura 20.4: A evolução do pulso luminoso nos dois referenciais.

Os seres humanos e os aparelhos empregados em medições estão sempre ligados a referenciais. Por isso, na teoria da relatividade, observações de processos envolvendo espaço e tempo somente podem ser feitas a partir de referenciais específicos. Os nossos sentidos, mesmo estendidos por instrumentos, são prisioneiros dos referenciais. Por isso, os problemas colocados pelas figuras 20.1 e 20.4 são muitos semelhantes. Em ambos os casos, os desenhos envolvem perspectivas, mas não há, nenhuma incompatibilidade entre as visões de Maria e João.

O lado esquerdo da figura 20.4 indica que Maria observa, depois do instante inicial, uma frente de onda esférica que se propaga. Um ponto genérico dessa frente é caracterizado

por quatro coordenadas, $(x_M, y_M, z_M; t_M)$, que satisfazem a equação de uma esfera, de raio proporcional à velocidade da luz. Assim

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2 t_M^2 \quad \longleftrightarrow \quad x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - c^2 t_M^2 = 0. \quad (20.3)$$

No referencial de João, por outro lado, as coordenadas da frente de onda são $(x_J, y_J, z_J; t_J)$ e, como mostra o lado direito da figura 20.4, também satisfazem a equação de uma esfera

$$x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2 t_J^2 \quad \longleftrightarrow \quad x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 - c^2 t_J^2 = 0. \quad (20.4)$$

Suponhamos, agora, que um grão de poeira seja iluminado pela frente de onda. Chamando esse segundo evento de E , as suas descrições nos dois referenciais são dados por

$$\text{evento E} \quad S_M : (x_M^E, y_M^E, z_M^E; t_M^E) \quad (20.5)$$

$$S_J : (x_J^P, y_J^P, z_J^P; t_J^P) \quad (20.6)$$

Esses conjuntos de coordenadas, que descrevem o mesmo evento E , são diferentes para Maria e para João e, por isso, incorporam a perspectiva de cada observador.

• transformações de Lorentz

Em relatividade, as regras que permitem relacionar as descrições de um *mesmo* evento, em referenciais com movimento relativo, são as **transformações de Lorentz**.

A obtenção das transformações de Lorentz (TL) é baseada numa hipótese muito geral: a de que as transformações de coordenadas sejam lineares. Ela visa preservar a **homogeneidade do espaço** e a **uniformidade do tempo** nos dois referenciais. A homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo correspondem à idéia de que as propriedades de um sistema físico não se alteram quando de um deslocamento de todo o sistema no espaço ou no tempo. Ou, em outras palavras, que a física não pode depender da escolha das origens das coordenadas espaciais e temporais. Ou, ainda, intuitivamente, que o espaço é o “mesmo” em qualquer ponto e em qualquer instante, e que o tempo “passa” com a mesma “velocidade” em qualquer ponto e em qualquer instante. Por exemplo, se temos um laboratório com um sistema físico em São Paulo, nada muda se ele for transportado para o Rio de Janeiro ou se fizermos experimentos no ano que vem, ao invés de hoje.

Em uma transformação linear, as novas coordenadas são combinações lineares das antigas. Um exemplo de transformação linear seria: $x_M = a x_J + b t_J$, com a e b constantes. Como exemplo de regras de transformação não lineares, temos: $x_M = x_J^2$, $x_M = A e^{B x_J}$, $x_M = k \ln(B t_J)$. Transformação não lineares não mantêm a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo nos dois referenciais.

Neste estudo da relatividade, supomos sempre que os eixos dos sistemas S_M e S_J sejam paralelos e que a velocidade relativa entre os dois seja paralela aos eixos y , como mostram as figuras 20.2 e 20.3. Essa escolha permite uma grande simplificação nas contas, sem nenhuma perda de conteúdo.

A hipótese de linearidade das transformações corresponde a escrever as coordenadas do evento no referencial S_J em função das coordenadas em S_M como

$$x_J = L_{xx} x_M + L_{xy} y_M + L_{xz} z_M + L_{xt} t_M, \quad (20.7)$$

$$y_J = L_{yx} x_M + L_{yy} y_M + L_{yz} z_M + L_{yt} t_M, \quad (20.8)$$

$$z_J = L_{zx} x_M + L_{zy} y_M + L_{zz} z_M + L_{zt} t_M, \quad (20.9)$$

$$t_J = L_{tx} x_M + L_{ty} y_M + L_{tz} z_M + L_{tt} t_M. \quad (20.10)$$

Nestas expressões, os coeficientes da transformação são representados por L , sendo que o primeiro índice corresponde à coordenada em S_J e o segundo, à coordenada S_M . O problema de determinar as TL corresponde a obter os valores dos coeficientes L , em função da velocidade relativa v . Este problema tem simetria cilíndrica, em torno do eixo y e, por isso, é conveniente distinguir as coordenadas x e z , transversais à velocidade, da coordenada y , que é paralela.

O sistema determinado pelas eqs. (20.7-20.10) envolve 16 incógnitas, que podem ser determinadas por meio de um conjunto de eventos particulares.

Evento E_1 : Maria observa a posição da origem de S_J , em um instante t_M qualquer.

$$\text{evento } \mathbf{E}_1 \quad S_M : (0, vt_M, 0; t_M) \quad (20.11)$$

$$S_J : (0, 0, 0; t_J) \quad (20.12)$$

Substituindo (20.12) no lado direito das eqs.(20.7-20.10) igualando o lado esquerdo a (20.12), temos

$$0 = (L_{xy} v + L_{xt}) t_M, \quad (20.13)$$

$$0 = (L_{yy} v + L_{yt}) t_M, \quad (20.14)$$

$$0 = (L_{zy} v + L_{zt}) t_M, \quad (20.15)$$

$$t_J = (L_{ty} v + L_{tt}) t_M. \quad (20.16)$$

Evento E_2 : Maria observa a extremidade superior de uma régua de comprimento a , fixa no referencial S_J e paralela ao eixo z , como mostra o lado esquerdo da figura 20.5.

$$\text{evento } \mathbf{E}_2 \quad S_M : (0, vt_M, a; t_M) \quad (20.17)$$

$$S_J : (0, 0, a; t_J) \quad (20.18)$$

Neste caso, as eqs. (20.7-20.10) fornecem

$$0 = (L_{xy} v + L_{xt}) t_M + L_{xz} a, \quad (20.19)$$

$$0 = (L_{yy} v + L_{yt}) t_M + L_{yz} a, \quad (20.20)$$

$$a = (L_{zy} v + L_{zt}) t_M + L_{zz} a, \quad (20.21)$$

$$t_J = (L_{ty} v + L_{tt}) t_M + L_{tz} a. \quad (20.22)$$

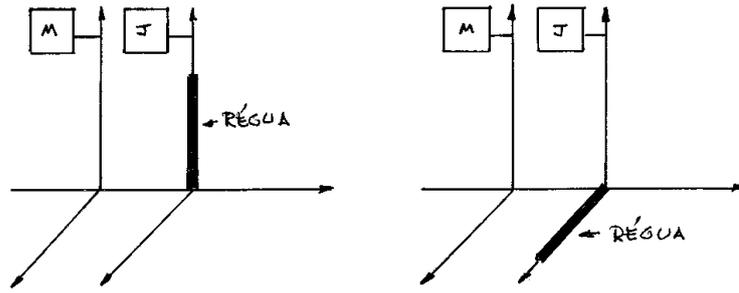


Figura 20.5:

Comparando os conjuntos de equações (20.19-20.22) com (20.13-20.16), obtemos

$$L_{xz} = L_{yz} = L_{tz} = 0, \quad (20.23)$$

$$L_{zz} = 1. \quad (20.24)$$

Evento E_3 : Maria observa a extremidade de uma régua de comprimento b , horizontal, fixa no referencial S_J e paralela ao eixo x , representada do lado direito da figura 20.5.

$$\text{evento } \mathbf{E}_3 \quad S_M : (b, vt_M, 0; t_M) \quad (20.25)$$

$$S_J : (b, 0, 0; t_J) \quad (20.26)$$

Usando as eqs. (20.7-20.10) obtemos

$$b = L_{xx} b + (L_{xy} v + L_{xt}) t_M, \quad (20.27)$$

$$0 = L_{yx} b + (L_{yy} v + L_{yt}) t_M, \quad (20.28)$$

$$0 = L_{zx} b + (L_{zy} v + L_{zt}) t_M, \quad (20.29)$$

$$t_J = L_{tx} b + (L_{ty} v + L_{tt}) t_M, \quad (20.30)$$

e a comparação com (20.13-20.16) fornece

$$L_{xx} = 1, \quad (20.31)$$

$$L_{yx} = L_{zx} = L_{tx} = 0. \quad (20.32)$$

Evento E_4 : João observa a posição da origem de S_M em um instante t_J qualquer

$$\text{evento } \mathbf{E}_4 \quad S_M : (0, 0, 0, t_M) \quad (20.33)$$

$$S_J : (0, -vt_J, 0, t_J) \quad (20.34)$$

As eqs. (20.7-20.10) tornam-se então

$$0 = L_{xt} t_M, \quad (20.35)$$

$$-vt_J = L_{yt} t_M, \quad (20.36)$$

$$0 = L_{zt} t_M, \quad (20.37)$$

$$t_J = L_{tt} t_M, \quad (20.38)$$

e, portanto,

$$L_{yt} = L_{zt} = 0. \quad (20.39)$$

Usando esses resultados nas eqs. (20.13) e (20.15), temos

$$L_{xy} = L_{zy} = 0. \quad (20.40)$$

Os resultados obtidos até aqui, expressos pelas eqs. (20.23), (20.24), (20.31), (20.32), (20.39) e (20.40), permitem-nos reescrever o sistema (20.7-20.10) como

$$x_J = x_M, \quad (20.41)$$

$$y_J = L_{yy} y_M + L_{yt} t_M, \quad (20.42)$$

$$z_J = z_M, \quad (20.43)$$

$$t_J = L_{ty} y_M + L_{tt} t_M. \quad (20.44)$$

Esses resultados indicam que as coordenadas transversais ao movimento não se alteram pela mudança de referencial e que, das combinações gerais de todas as coordenadas, sobram apenas duas combinações lineares, envolvendo y_M e t_M . Das equações (20.14), (20.36) e (20.38) aprendemos que

$$L_{yt} = -v L_{yy}, \quad (20.45)$$

$$L_{yt} = -v L_{tt}, \quad (20.46)$$

e, portanto,

$$L_{tt} = L_{yy}. \quad (20.47)$$

Para obter os valores dos coeficientes L_{yy} e L_{ty} , voltamos ao grão de poeira iluminado pela frente de luz descrita nas figuras 20.4. As coordenadas desse evento nos referenciais M e J são dadas pelas eqs. (20.6) e (20.6) e estão vinculadas pelas condições (20.3) e (20.4). Por isso, podemos escrever

$$(x_J^E)^2 + (y_J^E)^2 + (z_J^E)^2 - c^2 (t_J^E)^2 = (x_M^E)^2 + (y_M^E)^2 + (z_M^E)^2 - c^2 (t_M^E)^2. \quad (20.48)$$

As eqs. (20.41) e (20.43) permitem simplificar esse resultado, e temos

$$(y_J^E)^2 - c^2 (t_J^E)^2 = (y_M^E)^2 - c^2 (t_M^E)^2. \quad (20.49)$$

Usando as eqs. (20.42), (20.44), (20.45) e (20.46), obtemos

$$L_{yy}^2 (y_M^E - v t_M^E)^2 - c^2 (L_{ty} y_M^E - L_{yy} t_M^E)^2 = (y_M^E)^2 - c^2 (t_M^E)^2 \quad (20.50)$$

ou, o que é equivalente,

$$\begin{aligned} & (L_{yy}^2 - c^2 L_{ty}^2) (y_M^E)^2 - 2 L_{yy} (v L_{yy} + c^2 L_{ty}) y_M^E t_M^E + L_{yy}^2 (v^2 - c^2) (t_M^E)^2 \\ & = (y_M^E)^2 - c^2 (t_M^E)^2. \end{aligned} \quad (20.51)$$

Impondo que essa igualdade valha como um polinômio em y_M^E e t_M^E , obtemos:

$$L_{yy}^2 + c^2 L_{ty}^2 = 1 , \quad (20.52)$$

$$v L_{yy} + c^2 L_{ty} = 0 , \quad (20.53)$$

$$L_{yy}^2 (v^2 - c^2) = -c^2 . \quad (20.54)$$

Estas condições nos fornecem

$$L_{yy} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad (20.55)$$

$$L_{ty} = - \frac{v}{c^2} L_{yy} . \quad (20.56)$$

O último passo consiste em determinar o sinal de L_{yy} . Isso é feito impondo que S_J e S_M coincidam quando $v = 0$, o que corresponde a escolher o sinal positivo.

Todos estes resultados determinam as **transformações de Lorentz** para $S_M \rightarrow S_J$. Usado a definição

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad (20.57)$$

obtemos

$$x_J = x_M , \quad (20.58)$$

$$y_J = \gamma (y_M - v t_M) , \quad (20.59)$$

$$z_J = z_M , \quad (20.60)$$

$$t_J = \gamma \left(t_M - \frac{v}{c^2} y_M \right) . \quad (20.61)$$

Essas equações constituem o instrumento que permite que, conhecendo as coordenadas de um evento em S_M , possamos encontrar as novas coordenadas que descrevem o *mesmo* evento em S_J .

• a transformação inversa

As transformações de Lorentz, dadas pelas eqs. (20.58 - 20.61) permitem a passagem de S_M para S_J . O conjunto de equações que permite voltar de S_J para S_M corresponde à *transformação inversa*. Existem diversas maneiras de obter esta transformação. Uma possibilidade seria refazer todo o procedimento anterior, trocando J por M em todas as passagens. Uma alternativa, bastante menos trabalhosa, para chegar ao mesmo resultado consiste em isolar x_M, y_M, z_M, t_M no lado direito das eqs. (20.58 - 20.61) e expressar essas variáveis em função de x_J, y_J, z_J, t_J . No caso de x_M e z_M , o problema já está resolvido,

pois basta escrever

$$x_M = x_J, \quad (20.62)$$

$$z_M = z_J. \quad (20.63)$$

Para obter y_M , multiplicamos a eq. (20.61) por v e somamos com a eq. (20.59), obtendo

$$y_J + v t_J = \gamma y_M \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \longleftrightarrow y_M = \gamma (y_J + v t_J). \quad (20.64)$$

Analogamente, para obter t_M , multiplicamos a eq. (20.59) por v/c^2 e somamos com a eq. (20.61)

$$t_J + \frac{v}{c^2} y_J = \gamma t_M \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \longleftrightarrow \gamma \left(t_J + \frac{v}{c^2} y_J\right) \quad (20.65)$$

Juntando as eqs. (20.62 - 20.65), obtemos as transformações de Lorentz para ir de S_J a S_M :

$$x_M = x_J, \quad (20.66)$$

$$y_M = \gamma (y_J + v t_J), \quad (20.67)$$

$$z_M = z_J, \quad (20.68)$$

$$t_M = \gamma \left(t_J + \frac{v}{c^2} y_J\right). \quad (20.69)$$

Observe o resultado a que chegamos: a única diferença entre a “ida” de S_M para S_J e a “volta” de S_J para S_M está no sinal da velocidade. De fato, o que determina a passagem de S_M para S_J é a velocidade v de João, em relação a Maria; o que determina a passagem de S_J para S_M é a velocidade $-v$ de Maria, em relação a João. Portanto, um modo mais simples de encontrar a transformação inversa consiste em, simplesmente, substituir os índices M por J e trocar o sinal de v na transformação original.

• alguns detalhes

Uma vez obtidas as transformações de Lorentz, fazemos um resumo do caminho percorrido. Utilizamos o segundo princípio para chegar às eqs. (20.3) e (20.4), nos apoiamos na homogeneidade do espaço e na uniformidade do tempo para argumentar que as transformações deveriam ser lineares e, enfim, consideramos os movimentos de régua e das origens de S_J e S_M para encontrar a forma das transformações. Essas hipóteses, embora não muito simples à primeira vista, são claras, e a dedução surge delas sem maiores tropeços.

As expressões que representam as transformações de Lorentz, foram obtidas supondo que os referenciais S_M e S_J tivessem uma origem espaço-temporal comum. Nossa dedução foi feita com base nesse fato e ele está, portanto, incorporado nas eqs.(20.58 - 20.61) e (20.66 - 20.69). Tanto isto é verdade, que elas relacionam diretamente o ponto $(0, 0, 0; 0)$ no

referencial S_M ao ponto $(0, 0, 0; 0)$ no referencial S_J . Por isso, sempre que formos utilizar as transformações na forma dada por estas equações, precisamos definir um evento para ser adotado como origem dos *dois* referenciais. Todos os demais, serão relacionados a ele.

O tamanho dos efeitos relativísticos é determinado pelo quociente v/c . A sua presença no fator $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ é tal que $\gamma \geq 1$, a igualdade valendo no caso particular $v = 0$. Quando v for comparável a c , o fator γ pode tornar-se grande e os efeitos relativísticos tornam-se correspondentemente importantes. Não há limite superior para γ e, portanto, $1 \leq \gamma < \infty$.

Quando a velocidade relativa v é muito menor que a da luz, $v \ll c$, o fator de escala γ aproxima-se de 1, e as transformações de Lorentz podem ser escritas como

$$x_J = x_M, \quad (20.70)$$

$$y_J \simeq y_M - v t_M, \quad (20.71)$$

$$z_J = z_M, \quad (20.72)$$

$$t_J \simeq t_M. \quad (20.73)$$

Assim, no limite, de velocidades baixas, os tempos nos dois referenciais tornam-se iguais e as transformações espaciais coincidem com as transformações de Galileu, usadas na mecânica clássica.

É muito importante notar que o fato de as TL ficarem parecidas com as transformações de Galileu no limite $v \ll c$ não significa que a física clássica seja um caso particular da relatividade. Os significados físicos das duas transformações são diferentes. Na relatividade, as transformações de Galileu são um limite, uma aproximação, enquanto que na mecânica clássica elas são a própria expressão da realidade. Por outro lado, na relatividade, a expressão da realidade está contida em seus dois princípios: equivalência de todos os referenciais, e constância da velocidade da luz em todos eles. Na mecânica clássica, a proposta de realidade assume a forma de espaço e tempo absolutos e totalmente independentes um do outro. Estas diferenças distinguem fundamentalmente uma concepção da outra.

• referência

[1] H. Minkowski, Space and Time, em “The principle of relativity”, Dover, 1952, pag. 73.

• exercícios

1. Quais das situações seguintes correspondem a eventos: o pingo de um i, colocar o pingo num i, um carro, entrar num carro, a existência de um carro numa garagem.
2. Do ponto de vista matemático, porque as transformações não lineares de coordenadas

não são compatíveis com a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo?

3. Escreva as transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas dos sistemas de Ana e de Pedro, sendo que Pedro se move em relação a Ana com velocidade $-v$, segundo o eixo z .

4. Qual os papéis do primeiro e do segundo princípio da relatividade na obtenção dos resultados apresentados na seção **transformações de Lorentz**?

Capítulo 21

transformações de Lorentz: exemplos

Nesta aula e na próxima, discutimos aplicações das transformações de Lorentz. Apesar das diferenças entre as várias situações abordadas, enfatizamos a existência de um padrão comum entre elas: a comparação das observações de personagens diferentes, em referenciais diferentes, de um *mesmo* conjunto de eventos.

A nossa educação em mecânica clássica ocorre desde o ensino médio e é bastante forte no ensino superior. Ao longo desse processo, construímos uma intuição acerca da cinemática, baseada em relações entre grandezas espaciais e temporais, algumas das quais só valem na mecânica clássica. Por isso, essa intuição não pode ser facilmente transferida para o contexto da relatividade.

Como já discutimos anteriormente, no contexto da relatividade, os conceitos genéricos de espaço e tempo não são necessariamente úteis, e é muito mais conveniente prestar atenção aos eventos. Como todo problema de relatividade envolve apenas *relações entre eventos*, as suas soluções podem ser obtidas através de um procedimento analítico, envolvendo os seguintes passos:

1. *Identificar e rotular os eventos importantes do problema.* Por exemplo, no caso da aula anterior, escrever algo do tipo: evento E, o grão de poeira é iluminado pela frente de onda.
2. *Extrair, a partir das informações fornecidas pelo problema, as 4 coordenadas espaço-temporais de cada evento, em cada um dos referenciais.*

Se os referenciais forem os de Maria e João, escrevemos

$$\text{evento E} \quad S_M : (x_M^E, y_M^E, z_M^E; t_M^E) \quad (21.1)$$

$$S_J : (x_J^E, y_J^E, z_J^E; t_J^E) \quad (21.2)$$

e existem 8 valores a serem determinados. Pelo menos quatro deles precisam ser extraídos

do enunciado do problema e não precisam ser necessariamente referentes a um único referencial. Por exemplo, o problema pode ser resolvido se formos capazes de extrair x_M^E, y_J^E, z_J^E e t_M^E a partir do enunciado.

3. Usar as transformações de Lorentz para obter as 4 coordenadas desconhecidas de um dado evento a partir das 4 coordenadas já conhecidas daquele mesmo evento.

4. Repetir esse procedimento para todos os eventos importantes do problema.

A partir do conhecimento das coordenadas espaço-temporais de cada evento, em cada um dos referenciais, podemos reconstruir as relações entre eles e as maneiras como os dois observadores percebem os fenômenos. Esta forma de pensar aparece em todos os problemas que discutimos a seguir.

• exemplo 1: duas bombas

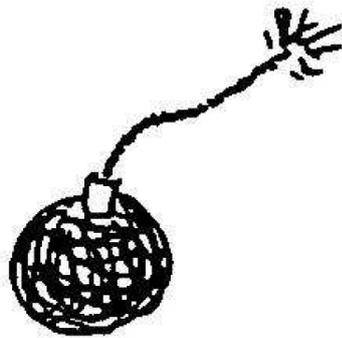


Figura 21.1: Uma bomba...

Existem duas bombas idênticas, com pavios de igual tamanho, que levam um tempo τ para explodir quando estão em repouso. Ou seja, τ representa o tempo próprio de explosão de cada bomba. Maria, em São Paulo, acende os pavios das duas ao mesmo tempo. No instante em que as bombas são acesas, João passa de carro, toma a bomba número 2 e a leva, com uma velocidade v , para a uma cidade à direita de São Paulo.

Para estudar como as explosões das duas bombas são observadas nos referenciais S_M e S_J , listamos abaixo os principais eventos, bem como suas *descrições* nos dois referenciais. Adotamos, como origem espaço-temporal dos dois referenciais, o acionamento das duas bombas, que coincide com a passagem de João por Maria, e supomos que o movimento relativo se dê ao longo dos eixos y dos dois referenciais.

evento de referência E_R - acendimento das duas bombas e passagem de João por Maria.

$$\text{evento } E_R \quad S_M : (0, 0, 0; 0) \quad (21.3)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \quad (21.4)$$

evento a - explosão da bomba 1, estacionária em relação a Maria:

$$\text{evento a} \quad S_M : (0, 0, 0; \tau) \quad (21.5)$$

$$S_J : (x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) \quad (21.6)$$

evento b - explosão da bomba 2, estacionária em relação a João:

$$\text{evento b} \quad S_M : (x_M^b, y_M^b, z_M^b; t_M^b) \quad (21.7)$$

$$S_J : (0, 0, 0; \tau) \quad (21.8)$$

Estas expressões incorporam o fato que os dados do problema permitem-nos conhecer diretamente as coordenadas espaço-temporais das explosões da bomba 1, em relação ao referencial S_M , e da bomba 2, no referencial S_J que são dadas pelas eqs (21.6) e (21.8).

Neste ponto, ainda não conhecemos os valores das coordenadas das eqs. (21.6) e (21.8), que serão determinadas com o auxílio das transformações de Lorentz. Para obter as coordenadas do evento a no referencial S_J , usamos as transformações $S_M \rightarrow S_J$, eqs.(20.58-20.61) e, depois das contas, obtemos

$$(x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) = (0, \gamma v \tau, 0; \gamma \tau) . \quad (21.9)$$

Já para obter as coordenadas do evento b no referencial de João, usamos as transformações $S_J \rightarrow S_M$, eqs.(20.66-20.69), que nos levam a

$$(x_M^b, y_M^b, z_M^b; t_M^b) = (0, -\gamma v \tau, 0; \gamma \tau) . \quad (21.10)$$

Incorporando esses resultados nas eqs. (21.6)-(21.8), obtemos as descrições das duas bombas nos dois referenciais:

evento a - explosão da bomba 1, estacionária em relação a Maria:

$$\text{evento a} \quad S_M : (0, 0, 0; \tau) \quad (21.11)$$

$$S_J : (0, \gamma v \tau, 0; \gamma \tau) \quad (21.12)$$

evento b - explosão da bomba 2, estacionária em relação a João:

$$\text{evento b} \quad S_M : (0, -\gamma v \tau, 0; \gamma \tau) \quad (21.13)$$

$$S_J : (0, 0, 0; \tau) \quad (21.14)$$

Os resultados anteriores permitem-nos reconstituir os acontecimentos nos dois referenciais. Começamos pelo referencial S_M , mostrado na figura 21.2. Inicialmente, ocorre o acendimento dos pavios, em $(0, 0, 0; 0)$. Em seguida, a explosão da bomba de Maria em $(0, 0, 0; \tau)$. Finalmente, ocorre a explosão da bomba de João, em $(0, 0, \gamma v \tau; \gamma \tau)$. Assim, no referencial S_M as duas bombas, apesar de serem idênticas, não explodem simultaneamente. Se a velocidade relativa entre os dois referenciais for não nula, $\gamma > 1$, indicando

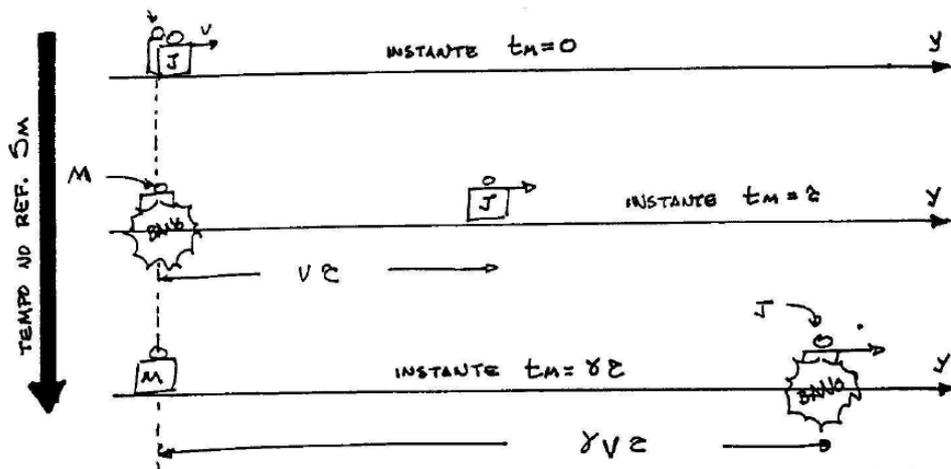


Figura 21.2: A sucessão de eventos no referencial de Maria.

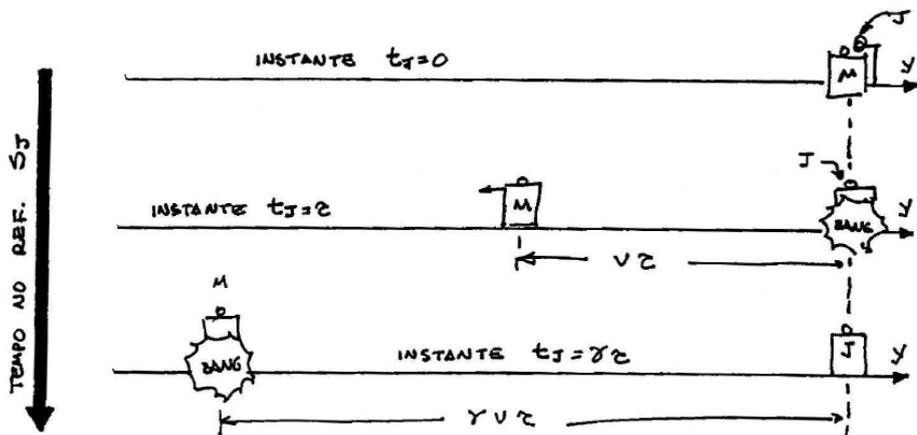


Figura 21.3: A sucessão de eventos no referencial de João.

que $t_M^b > t_M^a$ ou seja, que a bomba 2, em movimento em relação a S_M , demora mais para explodir do que a que ficou em repouso.

No referencial S_J , também, as duas bombas não explodem simultaneamente. Entretanto, agora, os resultados obtidos a partir das transformações de Lorentz indicam $t_J^a > t_J^b$. A bomba 2 explode antes da bomba 1 e os eventos se sucedem como na figura 21.3.

• **mais exemplo 1:** depois do dedo, a lua....

Os resultados formais, dados pelas eqs. (21.12-21.14), podem dar margem a muitas reflexões, algumas das quais são discutidas a seguir.

o primeiro princípio da relatividade:

As expressões (21.12-21.14) indicam que as descrições das duas explosões, nos dois referenciais, são totalmente equivalentes. A única diferença formal está associada ao sinal da velocidade relativa v , que é arbitrário.

dilatação do tempo:

Como discutimos em aulas anteriores, nem sempre as relações entre eventos de um problema podem ser enquadrados como indicando a ocorrência de *dilatação do tempo*. Entretanto, neste exemplo, isso pode ser feito, porque a bomba 2, que se move em relação a S_M , está em repouso em S_J e a bomba 1, que se move em relação a S_J , está em repouso em relação a S_M . Foi por esse motivo que pudemos falar em *tempo próprio* desde o início do problema.

a realidade dos efeitos:

Os efeitos descritos neste exemplo podem, em princípio, ser observados. A ressalva *em princípio* aparece na frase anterior apenas porque, com a tecnologia disponível atualmente, não podemos estudar os efeitos relativísticos em explosões de bombas reais. Ainda assim, como já ressaltamos anteriormente, a dilatação do tempo é um efeito real e não, aparente. Mesmo sem sair do seu referencial, Maria pode constatar isso. Ao explodir, a bomba 2, carregada por João, pode deixar na estrada uma cratera, real e objetiva, cuja posição pode ser medida por Maria. Como ela conhece a velocidade de João, ela pode calcular, facilmente, o instante em que a bomba 2 explodiu no seu referencial e comparar o resultado com a medida direta do instante em que a sua própria bomba explodiu.

a ordem dos eventos:

Neste exemplo, aparece um efeito que é muito típico da relatividade e que perturba a nossa intuição clássica: a ordem temporal das explosões depende do referencial. Na relatividade, a ordem de dois eventos pode depender do referencial, desde que não haja *relação causal* entre eles. Ou seja, se a ocorrência de um deles não puder influenciar a ocorrência do outro.

No caso das duas bombas, essa questão corresponde, no referencial S_M , a determinar se a explosão da bomba 1 pode, ou não, influenciar a explosão da bomba 2. Isso poderia acontecer, por exemplo, se o pavio da bomba 2 pudesse ser cortado por meio de um dispositivo acionado pela luz emitida pela bomba 1, ao explodir. Nesse cenário, a explosão da bomba 1 impediria a explosão da bomba 2.

Para estudar se isso é possível, consideramos um quarto evento E_c , que corresponde à luz emitida na explosão da bomba 1 atingir João. A figura 21.4 permite-nos expressar as coordenadas desse evento em S_M , em função de t_M^c , como

$$S_M : (0, v t_M^c, 0, t_M^c) \quad (21.15)$$

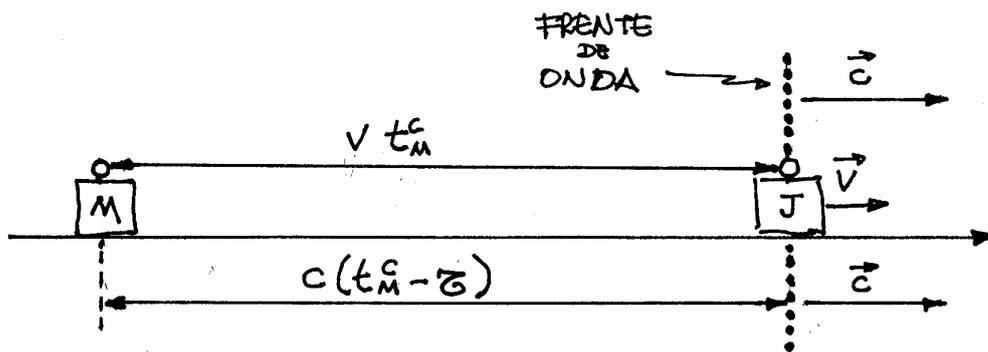


Figura 21.4:

O instante t_M^c é obtido a partir da condição de encontro entre João e a frente de luz e é dado por

$$t_M^c = \frac{1}{1 - v/c} \tau. \quad (21.16)$$

Para determinar a possibilidade de relação causal entre os eventos E_a e E_b , é preciso comparar os instantes t_M^b e t_M^c . Usando as eqs. (21.14) e (21.16), escrevemos

$$\frac{t_M^b}{t_M^c} = \frac{\gamma}{1/(1 - v/c)} = \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} < 1. \quad (21.17)$$

Esse resultado indica que a explosão da bomba 2 ocorre necessariamente antes que o sinal luminoso proveniente da bomba 1 chegue até João. Ou seja, a explosão da bomba 1 não pode alterar o destino da bomba 2 e, portanto, não pode haver relação causal entre esses dois eventos.

• exemplo 2: fotos de um relógio em movimento

João viaja num trem que se desloca para a direita, com velocidade $v = 3/5c$ em relação ao solo, e carrega um relógio. O trem passa por uma estação, onde Maria posicionou quatro máquinas fotográficas e, em frente a cada uma delas, um relógio idêntico ao de João. Esses relógios são digitais, têm forma de lâmina, e dois mostradores verticais, localizados em faces opostas, como se pode ver na figura 21.5. Eles foram construídos deste modo para que duas pessoas, uma em frente à outra, possam ver sua marcação simultaneamente.

As máquinas fotográficas de Maria estão separadas umas das outras, por uma distância L . Neste problema vamos supor que $L = 108 \times 10^8 \text{m}$, ou seja, $L = 10,8$ milhões de km. Esta não é uma distância fácil de imaginar, mas é o preço a ser pago para que possamos obter efeitos “observáveis” na escala de tempo de nossa vida diária, em segundos ou minutos.

No referencial S_M , os relógios estão sincronizados, marcando os quatro exatamente a mesma hora. Cada máquina fotográfica é acionada independentemente, pela passagem

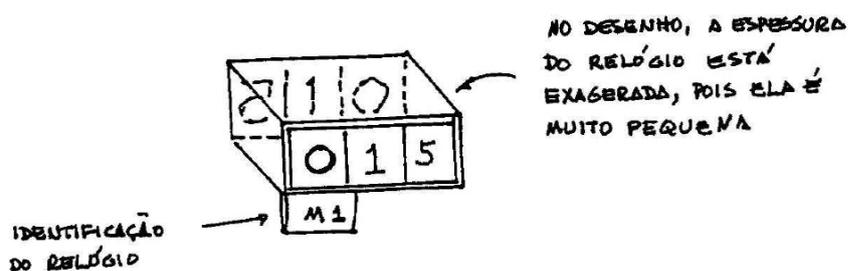


Figura 21.5: Um relógio digital com duas faces.

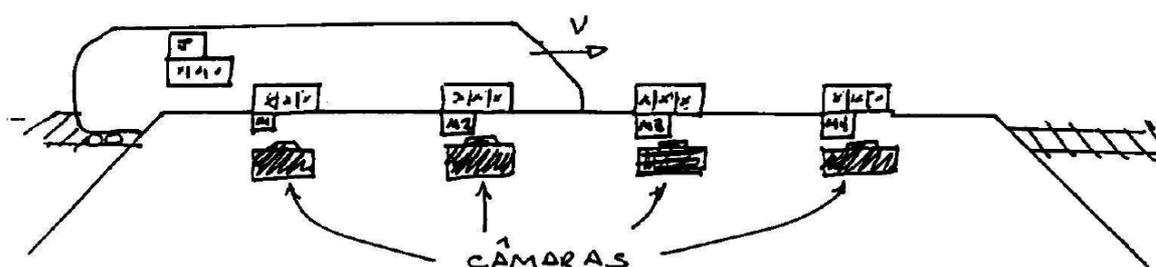


Figura 21.6: O arranjo experimental, no referencial de Maria.

de João e, no momento em que ele passa em frente a uma dada máquina, ela fotografa conjuntamente o relógio do trem e aquele na estação que está em frente a ela. Assim, João é sucessivamente fotografado por cada uma das quatro máquinas, mostradas na figura 21.6.

João e Maria combinaram um experimento de modo que, no instante em que o relógio do trem estivesse em frente ao relógio M1 da estação, este relógio e o de João deveriam começar a marcar o tempo. Assim, a primeira foto dos dois relógios é a mostrada na figura 21.7.

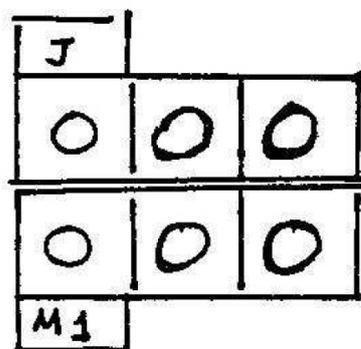


Figura 21.7: Foto dos relógios J e M1, tirada por Maria; a bem da simplicidade, nesta figura não representamos a contração do relógio de João.

O nosso objetivo, agora, consiste em saber como ficam as outras fotos. Para responder a esta questão, é conveniente nomear os vários eventos e explicitar as suas descrições nos dois referenciais. Neste problema, cada uma das fotos representa um evento. Em geral, a origem espaço-temporal dos sistemas de coordenadas é totalmente arbitrária e podemos colocá-la onde quisermos. O único critério a seguir é procurar tornar as coisas simples. Escolhendo a foto dos relógios J e M1 como referência para os demais, podemos representar os vários eventos do problema do seguinte modo:

evento a, de referência - foto dos relógios J e M1:

$$\text{evento a} \quad S_M : (0, 0, 0; 0) \quad (21.18)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \quad (21.19)$$

evento b - foto dos relógios J e M2:

$$\text{evento b} \quad S_M : (0, L, 0; L/v) \quad (21.20)$$

$$S_J : (0, 0, 0; t_J^b) \quad (21.21)$$

evento c - foto dos relógios J e M3:

$$\text{evento c} \quad S_M : (0, 2L, 0; 2L/v) \quad (21.22)$$

$$S_J : (0, 0, 0; t_J^c) \quad (21.23)$$

evento d - foto dos relógios J e M4:

$$\text{evento d} \quad S_M : (0, 3L, 0; 3L/v) \quad (21.24)$$

$$S_J : (0, 0, 0; t_J^d) \quad (21.25)$$

Note que as coordenadas dos eventos em S_M foram extraídas diretamente do enunciado do problema.

Os tempos dos eventos no referencial de João, que ainda não conhecemos, são determinadas por meio das transformações de Lorentz. Para obter a descrição completa do evento b , usamos a eq.(20.61) e escrevemos

$$t_J^b = \gamma \left(\frac{L}{v} - \frac{v L^2}{c^2} \right) = \frac{L}{\gamma v}. \quad (21.26)$$

Os tempos dos demais eventos são determinados de modo análogo, e obtemos

$$t_J^c = \frac{2L}{\gamma v}, \quad (21.27)$$

$$t_J^d = \frac{3L}{\gamma v}. \quad (21.28)$$

O valor de γ é sempre menor do que 1 e, portanto, para cada um dos eventos, a marcação do relógio de João é *menor* que o de Maria. Isso corresponde à dilatação do tempo de João,

J		
0	4	8
0	6	0
M2		

Figura 21.8: Foto dos relógios J e M2, tirada por Maria.

quando observado em S_M . Usando os números do problema temos, com as unidades do sistema internacional (SI): $v = 3c/5 = 1,8 \times 10^8 \text{ m/s}$, $t_M^b = L/v = 108 \times 10^8 / 1,8 \times 10^8 = 60 \text{ s}$ e $t_J^b = t_M^b \times \frac{4}{5} = 48 \text{ s}$. Assim, a segunda foto registra a dilatação do tempo e corresponde, real e concretamente, à situação mostrada na figura 21.8.

Os instantes dos eventos 3 e 4 nos dois referenciais, obtidos de modo totalmente análogo, são: $t_M^c = 2L/v = 120 \text{ s}$, $t_J^c = t_M^c \times \frac{4}{5} = 96 \text{ s}$, $t_M^d = 3L/v = 180 \text{ s}$ e $t_J^d = t_M^d \times \frac{4}{5} = 144 \text{ s}$. Estas marcações dos relógios correspondem às fotos mostradas na figura 21.9, que registram materialmente os eventos c e d . O conteúdo das quatro fotos são o nosso resultado. Exploramos, agora, alguns de seus aspectos físicos.

J		
0	9	6
J	2	0
M3		

J		
1	4	4
1	8	0
M4		

Figura 21.9: Fotos dos relógios J e M3 e J e M4, tiradas por Maria.

a dilatação do tempo e o relógio

Consultando a segunda "foto", mostrada na fig. 21.8, vemos que $t_M^b = 60 \text{ s}$ e $t_J^b = 48 \text{ s}$. O fato de t_M^b ser maior do que t_J^b indica que o tempo marcado pelo relógio J aparece dilatado ou contraído para Maria?

Poderíamos ser tentados a pensar que o tempo de João se contraiu, já que 48 é menor do que 60. Entretanto, esta maneira de encarar o problema é incorreta. Entre os dois mesmos eventos passaram-se 60s para Maria e 48s para João. Ou seja, passaram-se 12 unidades de tempo a mais para Maria, o que corresponde a mais tempo para Maria do que para João, entre esses dois mesmos eventos. Isso significa que o relógio J, visto por

Maria, *funciona mais devagar* do que os que ela possui. Por exemplo, se João piscar os olhos uma vez a cada 8s, ele piscará 6 vezes entre uma foto e outra. Para Maria, por outro lado, estas 6 piscadas levam 60s para ocorrer, indicando que, para ela, João pisca uma vez a cada 10s. Isso significa que os processos determinados pelo relógio J aparecem como sendo mais lentos para Maria. Isso vale, inclusive, para a mudança do marcador do relógio. Assim, a **dilatação** do tempo corresponde à idéia de que um observador vê o funcionamento de um relógio que se move em relação a ele ocorrer mais devagar.

a uniformidade do tempo

A uniformidade do tempo, ou seja a noção que o tempo passa “sempre” com a mesma “velocidade”, é muito importante em física e, por isso, é importante saber se ela é alterada no contexto da relatividade restrita. A tabela abaixo mostra os resultados das quatro fotos.

foto	1	2	3	4
$t_J(s)$	0	48	96	144
$t_M(s)$	0	60	120	180

Ela mostra que o *intervalo* entre dois eventos sucessivos em cada um dos referenciais é sempre o mesmo: 48s para João e 60s para Maria. Isso significa que a “velocidade” de passagem do tempo em *cada* dos referencial é sempre a mesma. O relógio de João é visto por Maria como funcionando sempre com a mesma “velocidade” e existe sempre uma razão constante entre os intervalos de tempo observados por ambos. Esta razão é dada pelo fator de conversão γ que, no nosso exemplo, vale $5/4$. Em resumo, para Maria, o relógio de João funciona sempre com o mesmo ritmo, ainda que mais lento do que o ritmo dos seus próprios relógios.

• exemplo 3: a simetria da dilatação do tempo

No título deste exemplo, usamos a construção “*dilatação do tempo*” apenas porque ela é popular e recorrente. Entretanto, conforme discutimos em aulas anteriores, essa idéia não pode ser usada indiscriminalmente em problemas de relatividade. Em algumas situações ela é boa e, em outras, não. Este exemplo foi construído com o propósito de discutir essa questão.

Ana e Maria viajam numa enorme nave espacial e cruzam, a uma velocidade $v = 3/5c$, com uma outra nave, onde estão João e Zé como mostra a figura 21.10. Em ambas as naves, cada passageiro possui um relógio de duas faces, semelhante ao dos exemplos da aula anterior e, *em cada uma das naves*, os relógios estão sincronizados entre si. Além disso, cada pessoa possui uma máquina fotográfica, colocada de modo a poder fotografar simultaneamente o seu relógio e o do passageiro da outra nave, que passa à sua frente num dado instante. Os vários passageiros estão dispostos nas naves de modo que, *no*

referencial S_M , tanto a distância entre Ana e Maria como a distância entre João e Zé são iguais a $L = 1,8 \times 10^9 \text{m}$.

Para facilitar a discussão supomos, também, que os relógios sejam coloridos, com a seguinte correspondência:

João \rightarrow branco; Zé \rightarrow laranja; Maria \rightarrow preto; Ana \rightarrow verde.

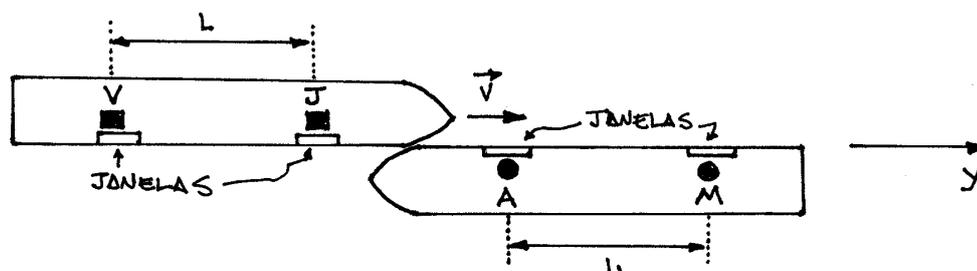


Figura 21.10: As duas naves, vistas no referencial S_M ; os homens são representados por quadradinhos e as mulheres, por bolinhas.

O objetivo deste exemplo é mostrar que a dilatação do tempo ocorre simetricamente nos referenciais S_M e S_J e, para tanto, consideramos três eventos, que correspondem aos encontros de João com Ana, de João com Maria e de Ana com Zé. Ou seja, os encontros do viajante mais à frente de cada uma das naves com os dois outros personagens da outra. Tomando o primeiro deles como referência, e extraindo do enunciado as coordenadas dos outros dois em S_M , temos **evento de referência** - encontro de Ana com João:

$$\text{evento R} \quad S_M : (0, 0, 0; 0) \quad (21.29)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \quad (21.30)$$

evento a - encontro de Maria com João:

$$\text{evento a} \quad S_M : (0, L, 0; L/v) \quad (21.31)$$

$$S_J : (x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) \quad (21.32)$$

evento b - encontro de Ana com Zé:

$$\text{evento b} \quad S_M : (0, 0, 0; L/v) \quad (21.33)$$

$$S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \quad (21.34)$$

Para obter os valores das coordenadas em S_J , usamos as transformações de Lorentz, dadas

pelas eqs.(21.35). No caso do evento a , temos

$$x_J^a = 0, \quad (21.35)$$

$$y_J^a = \gamma \left(L - v \frac{L}{v} \right) = 0, \quad (21.36)$$

$$z_J^a = 0, \quad (21.37)$$

$$t_J^a = \gamma \left(\frac{L}{v} - v \frac{L}{c^2} \right) = \frac{L}{\gamma v}. \quad (21.38)$$

O evento b , no referencial S_J , é determinado por

$$x_J^b = 0, \quad (21.39)$$

$$y_J^b = \gamma \left(0 - v \frac{L}{v} \right) = -\gamma L, \quad (21.40)$$

$$z_J^b = 0, \quad (21.41)$$

$$t_J^b = \gamma \left(\frac{L}{v} - 0 \right) = \gamma \frac{L}{v}. \quad (21.42)$$

A interpretação de fenômenos com base na idéia de dilatação do tempo envolve sutilezas importantes, e é muito menos simples do que aparenta. Como vimos na aula 18, a dilatação do tempo pode ser percebida quando o funcionamento de um *único* relógio, em repouso num dado referencial, é comparado com os relógios de *vários observadores*, num outro referencial. No caso deste exemplo que estamos considerando, esta situação ocorre com o relógio verde de Ana, que compara o seu funcionamento com os de João e Zé e, também, com o relógio branco de João, que compara o seu funcionamento com os de Ana e Maria.

Consideremos, inicialmente, o relógio verde. Nele decorre um intervalo de tempo próprio $\Delta\tau^v = t_M^b - 0 = L/v$, entre os encontros de Ana com João e Zé. Já no referencial S_J , o intervalo de tempo entre esses dois eventos é $\Delta t_J^v = t_J^b - 0 = \gamma L/v$. Usando esses resultados, podemos escrever

$$\Delta t_J^v = \gamma \Delta\tau^v, \quad (21.43)$$

o que indica que o tempo marcado pelo relógio de Ana é visto com dilatado no referencial S_J dos homens.

A situação do relógio branco é totalmente simétrica. O intervalo de tempo próprio decorrido entre os seus dois encontros é $\Delta\tau^b = t_J^a - 0 = L/\gamma v$, enquanto que o tempo que passou entre os mesmos dois eventos no referencial S_M é dado por $\Delta t_M^b = t_M^a - 0 = L/v$. Assim,

$$\Delta t_M^b = \gamma \Delta\tau^b. \quad (21.44)$$

Este resultado indica que o relógio branco é visto, pelas mulheres, como funcionando mais lentamente do que os que elas possuem.

Para tornar esta discussão um pouco mais concreta, vamos supor que, quando se encontram, cada personagem fotografa o próprio relógio e o do outro, o que é possível graças aos dois mostradores que cada relógio possui. As fotos envolvendo Ana e João aparecem nas figuras 21.11a e 21.12a. Usando os resultados anteriores e os dados numéricos do problema, temos $t_M^a = 10,0s$, $t_J^a = 8,0s$, $t_M^b = 10,0s$ e $t_J^b = 12,5s$ e, assim, os encontros de Ana com Zé e de João com Maria correspondem às fotos mostradas nas figuras 21.11b e 21.12b. Olhando estas figuras, podemos notar que o tempo do relógio verde de Ana é visto como dilatado pelos homens e que o tempo do relógio branco de João é visto como dilatado pelas mulheres.

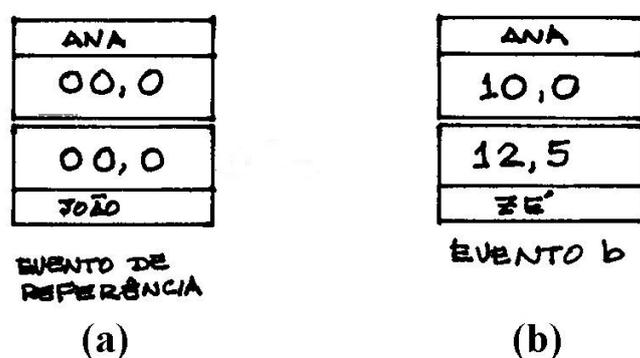


Figura 21.11: Ana é fotografada pelos homens.

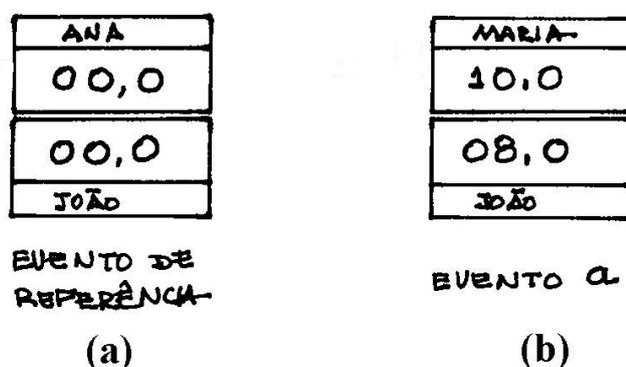


Figura 21.12: João é fotografado pelas mulheres.

Entre os eventos de referência e b , passam-se 10,0s no relógio verde de Ana, 12,5s no referencial dos homens, e o fator de escala é $\gamma = 5/4$. Neste caso, comparamos o tempo de *um relógio* em S_M , com o tempo do *referencial* S_J . Ou seja, comparamos o relógio verde com os relógios branco e laranja.

A outra dilatação pode ser percebida ao compararmos os intervalos de tempo entre os eventos de referência e a , vistos por João e pelas mulheres. Enquanto para João passam-se

8,0s, no referencial S_M decorrem 10,0s e o fator de escala também é $\gamma = 5/4$, idêntico ao anterior. Esta conclusão foi obtida a partir de uma comparação do relógio branco de João com os preto e verde das mulheres, ou seja, do tempo de um *relógio* em S_J , com o tempo do *referencial* S_M .

A simetria exigida pelo primeiro princípio apareceu: o tempo do relógio branco é visto como dilatado pelas *mulheres*, e o tempo do relógio verde é visto como dilatado pelos *homens*. **A dilatação do tempo é, portanto, simétrica nos dois referenciais!**

• exemplo 4: a régua contraída

João está num trem, que se move com velocidade $v = 4/5c$ para a direita, em relação à terra. No trem, existe uma régua de comprimento $\lambda = 10\text{m}$, paralelamente à direção da velocidade. Maria encontra-se na plataforma de uma estação, onde ela alinha um número muito grande de máquinas fotográficas, dispostas lado a lado e ligadas por fios de mesmo comprimento, a um único disparador, como mostra a figura 21.13. Assim, acionando o disparador, ela pode tirar fotos, simultâneas no seu referencial, capazes de abranger a régua inteira.

Este sistema de máquinas fotográficas permite a Maria medir o comprimento da régua estacionária no trem. Para tanto, ela deve fazer o seu sistema funcionar e, em seguida, inspecionar todas as fotos. Ela encontrará, em uma delas, a extremidade esquerda da régua e, em outra, a direita. Para obter o comprimento da régua, em S_M basta, em seguida, medir a distância entre os pontos na plataforma onde as máquinas que tiraram estas duas fotos estavam.

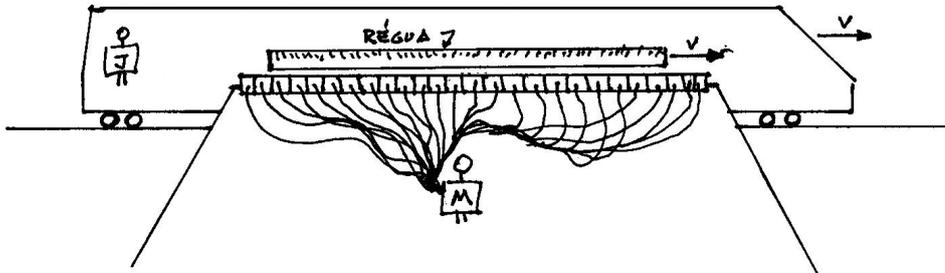


Figura 21.13: O problema visto no referencial de Maria.

As discussões feitas na aula 19 permitem-nos antecipar que o tamanho da régua, obtido a partir das fotos, será menor do que o tamanho próprio da régua no trem. O que queremos, agora, é obter esse resultado usando as transformações de Lorentz.

Os eventos mais importantes neste problema, que efetivamente mostram o tamanho da régua, são as fotos de seus dois extremos. Estes eventos são, por construção, simultâneos no referencial da estação. Entretanto, nada podemos afirmar, a priori, sobre os instantes em que eles ocorrem no referencial do trem, onde está João.

Tomando a foto do extremo esquerdo da régua como origens dos dois sistemas de coordenadas, temos:

evento de referência - foto da extremidade esquerda da régua

$$\text{evento R} \quad S_M : (0, 0, 0; 0) \quad (21.45)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \quad (21.46)$$

evento a - foto da extremidade direita da régua

$$\text{evento a} \quad S_M : (x_M^a, y_M^a, z_M^a; 0) \quad (21.47)$$

$$S_J : (0, \lambda, 0; t_J^a) \quad (21.48)$$

Existem quatro incógnitas no evento a, x_M^a , y_M^a , z_M^a e t_J^a , que podem ser obtidas por meio das transformações de Lorentz. Utilizando as expressões (20.58-20.61), obtemos

$$0 = x_M^a, \quad (21.49)$$

$$\lambda = \gamma y_M^a, \quad (21.50)$$

$$0 = z_M^a, \quad (21.51)$$

$$t_J^a = -v y_M^a / c^2. \quad (21.52)$$

O comprimento da régua no referencial S_M de Maria, é dado pela distância entre as duas máquinas fotográficas que participaram dos dois eventos descritos acima e, portanto, vale $L_M = y_M^a - 0 = \lambda / \gamma$. Usando os dados do problema, obtemos $\gamma = 5/3$ e $L_M = 6$ m. Concluimos, então, que o comprimento da régua é menor no referencial S_M . É importante notar que essa contração da régua não é aparente, ou uma ilusão de ótica. Ela é real e está objetivamente documentada nas fotos !

Um outro aspecto interessante deste problema diz respeito à simultaneidade entre os dois eventos. As eqs. (21.51) e (21.52) permitem-nos concluir que

$$t_J^a = -\frac{v \lambda}{c^2 \gamma} \quad (21.53)$$

e, portanto que, em S_J , a medida da extremidade direita da régua é anterior à medida da extremidade esquerda. Já em S_M , essas medidas são simultâneas, indicando que, na relatividade, a noção de simultaneidade depende do referencial.

• exercícios

1. Considere a situação descrita no exemplo 1, supondo que as bombas levem 0,5s para explodir e que a velocidade de João em relação a Maria seja $v = 4c/5$.

a) Determine numericamente as posições e tempos das explosões das duas bombas nos dois referenciais.

b) Faça dois gráficos, colocando o eixo y na horizontal e o eixo t na vertical, representando os eventos nos referenciais de Maria e de João. Tente imaginar um filme, mostrando os acontecimentos nos dois referenciais.

2. No caso do exemplo 2, o que mostraria a foto de um quinto relógio, M5, situado à esquerda do relógio M1, e separado deste por uma distância L ?

3. No caso do exemplo 2, o que mostrariam as quatro “fotos”, caso elas houvessem sido tiradas por João?

4. No caso do exemplo 2, por que o tempo marcado pelo relógio de João aparece dilatado em S_M , mas os tempos dos relógios de Maria parecem não exibir uma dilatação quando observados por João? Afinal de contas, não deve existir, neste problema, uma *simetria* entre S_J e S_M ?

5. Considere o encontro entre duas naves, representado na figura 21.10. No contexto da relatividade, este encontro pode ser considerado como um *único* evento? Ou, alternativamente, como um conjunto de eventos?

6. Considere a situação descrita no exemplo 3 e faça desenhos representando os relógios de Ana, Maria, João e Zé quando:

- Ana e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_M ;
- Ana e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_J ;
- Ana e Zé se encontram, do ponto de vista do referencial S_M ;
- Ana e Zé se encontram, do ponto de vista do referencial S_J ;
- Maria e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_M ;
- Maria e João se encontram, do ponto de vista do referencial S_J .

Para fazer este exercício, é importante lembrar que, na relatividade, a sincronização de relógio somente vale dentro de um referencial. Assim, a sincronização existente no interior de S_M não pode ser transferida automaticamente para a nave dos homens e, vice-versa.

7. Num dado instante, em S_M , os relógios das mulheres estão sincronizados, mas isso não acontece com os homens. Os tempos de *todos* os homens passam uniformemente, parecendo dilatados para as mulheres, e a dessincronização dos relógios não varia. Assim, por exemplo, o relógio de Zé, em S_M , está *sempre* 4,5s ($\approx 10,6$ s) adiantado em relação ao de João, e esta diferença se mantém inalterada à medida que o tempo passa.

8. Um foguete que se afasta da Terra com velocidade v emite, ao atingir a distância L , no referencial da Terra, um sinal luminoso em direção a ela. Calcule os instantes e posições da emissão e da recepção do sinal no referencial da Terra e no referencial do foguete.

• **respostas**

2. $t_M = -L/v, \quad t_J = -L/(\gamma v).$

3. As fotos de João seriam, a menos de distorções provocadas pela contração do espaço, iguais às tiradas por Maria. Esse resultado pode parecer estranho, mas é preciso lembrar que ambos fotografam os *mesmos* eventos, os encontros dos relógios, dois a dois. O fato de cada um estar em lados opostos de um dado par de relógios não faz a mínima diferença. Uma foto é um registro objetivo de um evento, um documento. Assim, um dia, João poderia descer do trem, encontrar Maria e comparar as duas fotos do mesmo evento. E elas teriam de mostrar a mesma coisa.

4. Neste problema, *não* existe uma simetria total entre João e Maria. É preciso notar que, em cada evento existe a comparação do *mesmo* relógio de João com um relógio *diferente* de Maria. Assim, o tempo do *relógio* de João é comparado com o tempo do *referencial* de Maria. Esse fato, sem importância no contexto da mecânica clássica, é responsável, na teoria da relatividade, por uma assimetria entre quem carrega o relógio e o outro referencial.

5. Um conjunto de eventos. Em particular, na solução apresentada no texto, os encontros Ana-João e Maria-Zé correspondem e são tratados como dois eventos distintos.

6. Observando as coordenadas espaço-temporais dos eventos notamos que, *no referencial dos homens*, os relógios de João e Zé estão sempre sincronizados, mas isso não acontece com os relógios das mulheres. O contrário acontece *no referencial das mulheres*: os relógios de Ana e Maria estão sincronizados, mas os dos homens, não. Essa situação decorre do fato de a simultaneidade entre eventos depender do referencial. Se uma série de relógios, distantes uns dos outros, ao longo da direção do movimento, estiverem sincronizados num dado referencial, eles certamente não o estarão num outro referencial, em movimento com relação ao primeiro.

7. Use os resultados do exercício anterior para explicar como é possível que os homens possam ver o tempo de Ana dilatado e, simetricamente, as mulheres possam ver o tempo de João dilatado.

8. Evento de referência: saída do foguete da Terra; evento a : emissão da luz; evento b : chegada da luz à Terra.

evento R $S_T : [0, 0, 0; 0]$

$$S_F : [0, 0, 0; 0]$$

evento a $S_T : \left[0, L, 0; \frac{L}{v}\right]$

$$S_F : \left[0, 0, 0; \frac{\gamma L}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$

evento b $S_T : \left[0, 0, 0; \frac{L}{v} + \frac{L}{c}\right]$

$$S_F : \left[0, -\gamma L \left(1 + \frac{v}{c}\right), 0; \frac{\gamma L}{v} \left(1 + \frac{v}{c}\right)\right]$$

Capítulo 22

transformações de Lorentz: mais exemplos

• exemplo 1: o problema dos dardos

João, viajando num trem de madeira, com velocidade $v = 3/5c$, passa por uma estação, onde se encontra Maria. Na plataforma ela colocou dois lançadores de dardos, separados pela distância $L_M = 10m$, e ligou cada um deles, por meio de fios de mesmo comprimento a um único interruptor, que permite lançar os dois dardos simultaneamente. No instante em que o trem passa pela estação, Maria aciona o disparador e os dardos cravam-se no trem, como mostra a figura 22.1.

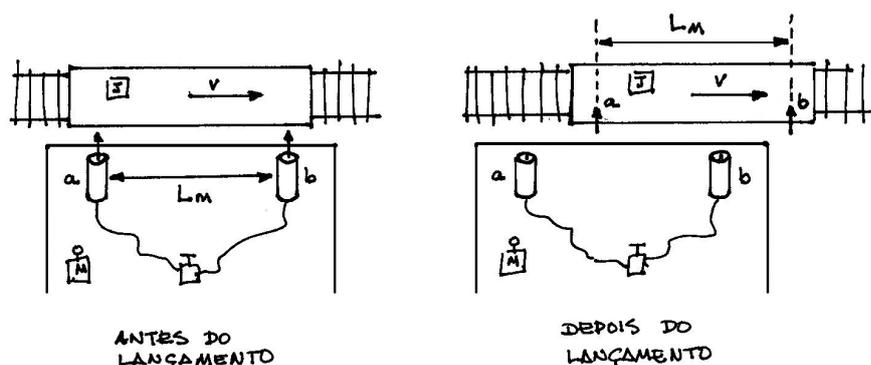


Figura 22.1: O problema, visto no referencial de Maria.

Posteriormente, o trem volta à estação e João desce dele. Na plataforma, João e Maria comparam a distância entre os dardos com aquela entre os disparadores. E constatam, objetivamente, que elas são diferentes, como indicado na figura 22.2. O propósito deste exemplo é obter a distância entre os dardos no referencial do trem e discutir as explicações dos acontecimentos nos dois referenciais.

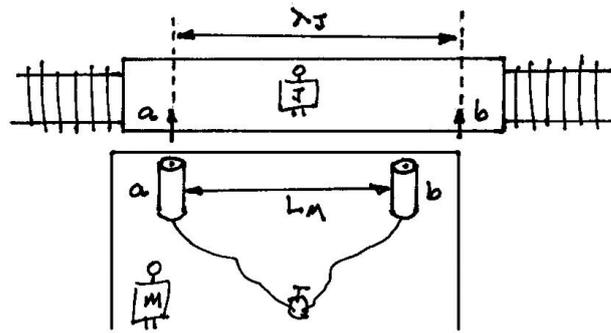


Figura 22.2: O trem está parado em relação à estação.

Neste problema ocorrem quatro eventos principais, as saídas dos dardos a e b da estação e as suas chegadas ao trem. Para simplificar um pouco as coisas, vamos supor que a distância entre os disparadores e o trem seja tão pequena, a ponto de podermos desprezar o intervalo de tempo entre a saída e a chegada de cada um dos dardos. Deste modo, precisamos considerar apenas dois eventos, os disparos dos dois dardos, e descrevê-los referenciais de S_J e S_M .

O evento a , o disparo do dardo a , é arbitrariamente escolhido como origem espaço-temporal dos dois referenciais. Além disso, no referencial S_M , os dois eventos ocorrem simultaneamente e a distância entre eles é conhecida. Temos, portanto

evento a , de referência - disparo do dardo a :

$$\text{evento a} \qquad S_M : (0, 0, 0; 0) \qquad (22.1)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \qquad (22.2)$$

evento b - disparo do dardo b :

$$\text{evento b} \qquad S_M : (0, L, 0; 0) \qquad (22.3)$$

$$S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \qquad (22.4)$$

As coordenadas do evento b no referencial de João são obtidas por meio das transformações de Lorentz:

$$(x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) = (0, \gamma L, 0; -\gamma v L/c^2) . \qquad (22.5)$$

A distância entre os dardos no trem corresponde a um comprimento próprio λ_J , dado por $\lambda_J = y_J^b - y_J^a = \gamma L_M$. Usando os dados do problema, obtemos $\lambda_J = 12,5\text{m}$.

O nosso cálculo mostra portanto que no trem, a distância entre os dardos é de 12,5m. Quando o trem passa pela estação, esses 12,5m aparecem contraídos, para 10m, quando observados por Maria. Quando o trem pára e volta à estação, a distância entre os dardos

cravados no trem continua a ser 12,5m, como mostra a figura 22.7. O trem e os disparadores, colocados lado a lado, em repouso, constituem uma demonstração inequívoca da contração do espaço. Ela *não* é uma ilusão, ou uma falsa impressão de Maria. No contexto da Relatividade, Maria pode compreender a discrepância entre as distâncias entre os lançadores e os dardos cravados no trem recorrendo à noção de contração do espaço.

a explicação de João

Como João, no trem, explica a situação da figura 22.2? Parte da sua explicação é que, em S_J , os dois dardos não atingem o trem simultaneamente. No seu referencial, há um intervalo de tempo entre os eventos a e b , dado por

$$\Delta t_J = t_J^b - t_J^a = -\gamma v L/c^2, \quad (22.6)$$

sendo que o sinal negativo indica que o evento b é anterior ao evento a . É importante notar que um tempo negativo não tem nada demais, ele é apenas o produto da nossa escolha arbitrária da origem dos tempos. O que acontece depois dessa origem é positivo, o que acontece antes, é negativo. O sinal indica, portanto, somente uma ordem relativa dos eventos, nada mais. Se o ano atual fosse adotado como origem da contagem de tempo você, provavelmente, teria nascido por volta do ano -20: qual o problema?

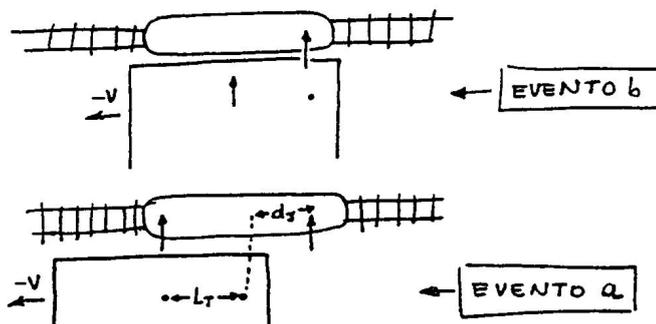


Figura 22.3: Os eventos no referencial de João, onde o trem não se move.

No referencial S_J , o dardo b é lançado, a estação se desloca para a esquerda uma distância $d_J = \gamma L_M v^2/c^2$ e, em seguida, o dardo a é lançado. Esta situação está representada na figura 22.3.

Sabemos que a distância entre os lançadores de dardos, na estação, é L_M . Quando vista do trem, entretanto, essa distância aparece contraída, pois a estação está em movimento, e ela vale L_M/γ .

Assim, João explica a distância entre os dardos no seu referencial através da soma

$$\lambda_J = \frac{L_M}{\gamma} + \gamma L_M \frac{v^2}{c^2} = \gamma L_M. \quad (22.7)$$

Ou seja, distância entre os dardos, no trem, é dada por λ_J , igual à distância entre os dois lançadores, vista do trem, somada à distância percorrida pela estação entre os dois eventos. Usando os dados do problema, a explicação de João para os seus 12,5 m contra os 10 m de Maria é a seguinte: para ele os 10m de Maria aparecem contraídos para 8 m. Além disso, os disparos dos dois dardos não são simultâneos, e a estação se move 4,5 m durante esse tempo. Logo, os seus 12,5 m são iguais a 8 m somados a 4,5 m.

Neste exemplo, podemos ver o primeiro princípio da relatividade em ação: os dois observadores, João e Maria, são indistinguíveis e qualquer um deles é capaz de explicar satisfatoriamente a relação entre dois eventos. Entretanto, cada observador produz uma explicação apropriada ao seu ponto de vista.

• exemplo 2: simultaneidade

São dados dois trens compridos, D e E , ao longo dos quais existem muitos relógios digitais, dispostos como na figura 22.4. Os relógios de *cada um* dos trens estão sincronizados *entre si*. Os trens D e E viajam, respectivamente, com velocidades $v\vec{j}$, para a direita, e $-v\vec{j}$, para a esquerda, por uma ferrovia retilínea, composta por dois pares de trilhos paralelos. Na região onde os trens se cruzam existe uma "ilha", entre os trilhos, sobre a qual estão dispostas quatro câmeras fotográficas, localizadas nos pontos A e B , representadas na figura 22.5. No referencial do solo, S_S , os dois pares de câmeras estão separados pela distância L e podem ser acionados simultaneamente, por meio de impulsos elétricos transmitidos por cabos de comprimentos iguais, ligados a um único interruptor I , equidistante deles.

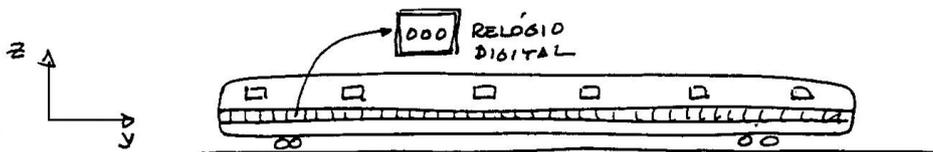


Figura 22.4: Relógios dispostos ao longo de um trem.

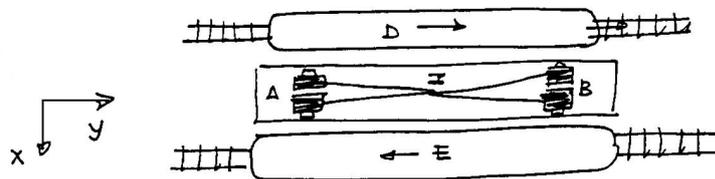


Figura 22.5: Fotos dos trens que se cruzam, no referencial do solo.

Num dado instante, as quatro câmeras são acionadas e cada uma delas fotografa o relógio do trem que está exatamente em frente a ela. No referencial do solo, estas quatro fotos são simultâneas, por construção. O nosso problema consiste, agora, em determinar

as marcações dos relógios dos dois trens. Para tanto, tomamos como evento de referência as duas fotos feitas no ponto A e, lembrando que estamos tratando com três referenciais, escrevemos

evento a , de referência - fotos das câmeras localizadas em A

$$\text{evento a} \quad S_s : (0, 0, 0; 0) \quad (22.8)$$

$$S_D : (0, 0, 0; 0) \quad (22.9)$$

$$S_E : (0, 0, 0; 0) \quad (22.10)$$

evento b - fotos das câmeras localizadas em B

$$\text{evento b} \quad S_s : (0, L, 0; 0) \quad (22.11)$$

$$S_D : (0, \gamma L, 0; -\gamma v L/c^2) \quad (22.12)$$

$$S_E : (0, \gamma L, 0, +\gamma v L/c^2) \quad (22.13)$$

sendo que as coordenadas do evento b , nos referenciais dos trens D e E , foram obtidas a partir das transformações de Lorentz das (22.12).

No referencial S_D , a foto em B é *anterior* à foto em A . Já no trem E , a foto em B é *posterior* à foto em A . Assim, os eventos simultâneos em S_s , deixam de sê-lo em outros referenciais, que se movem em relação ao solo. Estes resultados indicam, também, que a ordem dos eventos depende da velocidade relativa. Isso pode parecer espantoso, do ponto de vista da intuição clássica.

causalidade

Os resultados discutidos neste exemplo podem gerar uma dúvida perturbadora: se a ordem de dois eventos pode ser invertida somente pelo fato de invertermos o sentido do movimento de um observador, então será que a causa de um fenômeno físico pode virar efeito e esse efeito aparecer antes da causa? Será que, na relatividade, não vale mais o princípio da causalidade?

Isto não acontece e a relatividade mantém a noção de causalidade! Nesta teoria, causas e efeitos podem estar relacionados apenas por trocas de informações que se propaguem com velocidades iguais ou menores que a da luz. Em particular, eventos que ocorrem num mesmo ponto do espaço nunca podem ter a sua ordem temporal invertida. Mesmo na Relatividade, seu pai nunca poderia ter nascido antes de você.

No caso do presente exemplo, um raio de luz não viaja suficientemente rápido para que as fotos no ponto A possam influenciar as fotos no ponto B e, por isso, as fotos nos dois pontos não têm e nem podem ter correlação direta entre si. A simultaneidade entre elas no referencial da Terra pode ser considerada como uma espécie de coincidência e a ordem delas pode ser alterada por uma mudança de referencial.

• exemplo 3: sinais luminosos



Figura 22.6:

Desde o ano passado, Maria trabalha em um posto de gasolina, situado ao lado de uma estrada retilínea e muito longa. Ao longo da estrada, a uma distância L do posto, em S_M , existe uma casa de paredes brancas, como mostra a figura. Nas tediosas noites escuras, Maria passa o tempo mandando sinais luminosos com uma ponteira laser em direção à parede da casa e observando a volta deles. Numa dessas noites, o carro dirigido por seu amigo João passa pelo posto, com velocidade constante v e, imediatamente, Maria envia um sinal luminoso em direção à casa. Depois de ser refletido, o sinal é visto por João. Neste exemplo, tomando como origem das coordenadas e dos tempos a passagem de João por Maria, desejamos determinar, nos dois referenciais, as coordenadas espaço-temporais dos seguintes eventos:

- a, que corresponde à medida de posição da casa quando João passa por Maria;
- b, que corresponde à chegada da luz à casa;
- c, que corresponde à chegada do sinal refletido a João.

O evento R , de referência, que corresponde à passagem de João por Maria, é descrito por

$$\text{evento R} \quad S_M : (0, 0, 0; 0) \quad (22.14)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \quad (22.15)$$

No referencial S_M , os eventos a e R são simultâneos e, portanto,

$$\text{evento a} \quad S_M : (0, L, 0; 0) \quad (22.16)$$

$$S_J : (x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) \quad (22.17)$$

As coordenadas do evento a em S_J são obtidas por meio das TL e valem

$$(x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) = (0, \gamma L, 0, -\gamma v L/c^2). \quad (22.18)$$

No referencial S_M , o tempo que a luz emitida a partir do ponto leva para chegar à casa

é $t_M^b = L/c$. Assim, para o evento b , escrevemos:

$$\text{evento } b \quad S_M : \left(0, L, 0, \frac{L}{c}\right) \quad (22.19)$$

$$S_J : \left(0, \gamma L \left[1 - \frac{v}{c}\right], 0, \frac{\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right]\right), \quad (22.20)$$

sendo que as coordenadas em S_J foram obtidas por meio das TL .

O evento c ocorre, em S_M , no instante t_M^c , que é determinado pela condição

$$v t_M^c = L - c(t_M^c - t_M^b) \quad (22.21)$$

onde $v t_M^c$ corresponde à distância percorrida pelo cano e $L - c(t_M^c - t_M^b)$, à coordenada da luz no seu trajeto de volta. Essa condição fornece $t_M^c = 2L/(c + v)$ e, portanto,

$$\text{evento } c \quad S_M : \left(0, \frac{2vL}{c+v}, 0, \frac{2L}{c+v}\right) \quad (22.22)$$

$$S_J : \left(0, 0, 0, \frac{2\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right]\right) \quad (22.23)$$

onde, novamente, as coordenadas em S_J foram obtidas usando as TL .

Neste exercício, o enunciado enfatiza apenas o ponto de vista de Maria acerca dos acontecimentos. Por isso, é interessante pensarmos um pouco na perspectiva que João tem do problema. No referencial S_J , João está imóvel, fixo na origem do sistema. É por isso, por exemplo, que as coordenadas espaciais do evento c são todas nulas, já que ele ocorre no ponto onde João se encontra.

Em S_J , João está no assento do seu carro e, à medida que o tempo passa, a casa se aproxima dele. A velocidade da casa pode ser calculada a partir das coordenadas do evento a , dadas pelas eq. (22.16), usando

$$v_{casa} = \frac{y_J^a}{t_J^a} = -v, \quad (22.24)$$

segundo o eixo y . Este é um resultado esperado, pois a casa está fixa em S_M e este referencial se move com velocidade $\vec{v} = -v\vec{j}$ em relação a S_J .

No referencial S_J , entre os eventos b e c , a luz se move de encontro a João. A velocidade desse movimento pode ser determinada por meio da razão entre os intervalos

$$\Delta y = y_J^c - y_J^b = -\gamma L \left[1 - \frac{v}{c}\right] \quad (22.25)$$

e

$$\Delta t = t_J^c - t_J^b = \frac{2\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right] - \frac{\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right] = \frac{\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right], \quad (22.26)$$

que fornece

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -c. \quad (22.27)$$

Este resultado é, evidentemente, o que se espera do segundo princípio da relatividade.

• exemplo 4: o paradoxo dos gêmeos

Nesta seção, apresentamos o famoso paradoxo dos gêmeos que, de fato, não é um paradoxo de verdade. Ele é apenas aparente. Existem inúmeras formulações possíveis para ele e nós colocamos o problema do seguinte modo:

“Duas irmãs gêmeas, Ana e Bia, moram na cidade de SP, que supomos fixa em um referencial inercial. Um dia, elas vão à estação de trem e Bia faz uma viagem de ida e volta a uma outra cidade, chamada de R, enquanto que Ana a espera em SP. Após o retorno de Bia, elas notam que Ana havia envelhecido mais do que Maria, devido ao efeito de dilatação do tempo”.

O que é aparentemente paradoxal neste caso, é que Bia parece ter-se movido *relativamente* a Ana, do mesmo modo que Ana moveu-se *relativamente* a Bia. Ao pensarmos assim, parece haver uma simetria no problema, que não permite entender porque uma das irmãs acaba sendo mais velha do que a outra. A solução dessa aparente contradição passa por perceber que as situações das duas irmãs não são totalmente simétricas, já que Ana permanece sempre num único referencial, enquanto que, em seu percurso Bia precisa passar por três referenciais: SP, trem de ida, trem de volta, SP. Com Ana, isso não acontece.

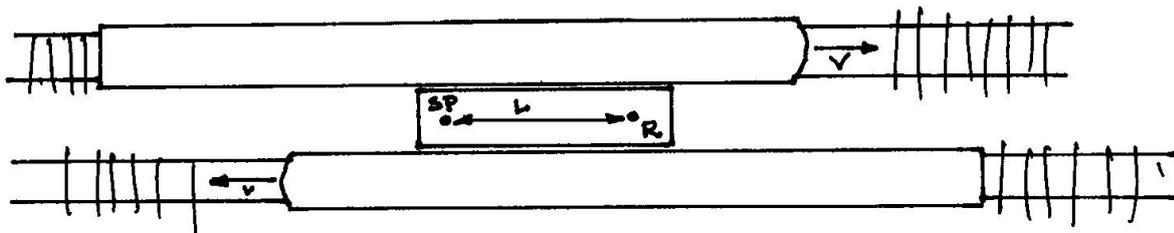


Figura 22.7: Vista dos dois trens, no referencial da Terra.

Para discutir este problema, supomos que as viagens de ida e volta sejam efetuadas em dois trens muito longos. O trem D se move para a direita, no sentido $SP \rightarrow R$ (sistema S_D) enquanto que o trem E se move para a esquerda, no sentido $R \rightarrow SP$ (sistema S_E). Os módulos das velocidades dos dois trens relativamente à Terra são iguais a v , como mostra a figura 22.7, que representa a visão de alguém no referencial S_T , da Terra, suposto inercial.

Por convenção, tomamos as origens espaço-temporais nos três referenciais como sendo coincidentes, determinadas pelo instante em que Bia pula da estação em SP para o trem que está indo para R. Assim:

evento a, de referência - Maria pula para o trem D

$$\text{evento a} \quad S_T : (0, 0, 0; 0) \quad (22.28)$$

$$S_D : (0, 0, 0; 0) \quad (22.29)$$

$$S_E : (0, 0, 0, ; 0) . \quad (22.30)$$

O segundo evento importante é a chegada de Bia a R, onde ela pula diretamente para o trem de volta, sem parar na estação. As coordenadas deste evento podem ser facilmente determinadas no referencial da Terra e escrevemos

evento b - Maria chega a R e entra no trem E

$$\text{evento b} \quad S_T : \left(0, L, 0; \frac{L}{v}\right) \quad (22.31)$$

$$S_D : \left(0, 0, 0; \frac{L}{\gamma v}\right) \quad (22.32)$$

$$S_E \left(0, 2\gamma L, 0; \frac{\gamma L}{v} \left[1 + \frac{v^2}{c^2}\right]\right) \quad (22.33)$$

sendo que as coordenadas em S_D e S_E foram obtidas por meio das TL . O resultado para as coordenadas espaciais em S_D não é surpresa, já que Bia, uma vez no trem D , sempre esteve parada na origem desse sistema de referência.

O terceiro e último evento importante é a chegada de Bia a SP, cujas coordenadas, no referencial da Terra, são obtidas notando que o tempo que o trem leva para vir de R a SP é o mesmo que o outro levou para ir de SP a R. Assim, escrevemos

evento c - Bia chega a SP

$$\text{evento c} \quad S_T : (0, 0, 0; 2L/v) \quad (22.34)$$

$$S_D : \left(0, -2\gamma L, 0; \frac{2\gamma L}{v}\right) , \quad (22.35)$$

$$S_E : \left(0, 2\gamma L, 0; \frac{2\gamma L}{v}\right) . \quad (22.36)$$

sendo os valores, para S_D e S_E determinados pelas TL . Esses resultados permitem-nos calcular o tempo total decorrido para Bia durante a sua viagem de ida e volta. Durante a ida, ela estava no referencial S_D e o tempo de viagem, observado tanto no relógio do trem D quanto no seu próprio, é dado por

$$\Delta t_{Bia}^{ida} = t_D^b - t_D^a = \frac{L}{\gamma v} . \quad (22.37)$$

A duração da viagem de volta, também determinada tanto pelo relógio do trem E quanto pelo de Bia, é

$$\Delta t_{Bia}^{volta} = t_D^c - t_E^b = 2\gamma \frac{L}{v} - \frac{\gamma L(1 + v^2/c^2)}{v} = \frac{L}{\gamma v} . \quad (22.38)$$

É interessante notar que, como esperado, $\Delta t_{Bia}^{ida} = \Delta t_{Bia}^{volta}$. Assim, o tempo total para a viagem de Bia, tal como indicado no seu relógio, é dado por

$$\tau_{Bia} = \Delta t_{Bia}^{ida} + \Delta t_{Bia}^{volta} = \frac{2L}{\gamma v}. \quad (22.39)$$

Por outro lado, o tempo próprio decorrido para Ana, que ficou em SP esperando a irmã, foi

$$\tau_{Ana} = \frac{2L}{v}, \quad (22.40)$$

maior do que τ_{Bia} . A diferença de idade entre Ana e Bia é

$$\Delta\tau = \tau_{Ana} - \tau_{Bia} = \frac{2L}{v} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]. \quad (22.41)$$

Como o tempo de vida de uma pessoa é determinado pelo relógio que ela carrega, Ana ficou, de fato, mais velha do que Bia. Existe, portanto, uma assimetria, real e concreta, entre os tempos decorridos nas vidas de Ana e Bia, que se deve ao fato de esta última ter mudado de referencial para poder sair e voltar a SP. Elas viveram felizes para sempre, mesmo tendo de comemorar seus aniversários em datas diferentes.

outras formulações

A apresentação que fizemos do problema conhecido como *o paradoxo dos gêmeos* é apenas uma, dentre muitas outras possíveis, que podem ser achadas em outros textos. Nós, aqui, limitamo-nos a mencionar algumas outras possibilidades, relativamente exóticas, de formas de reencontro entre Ana e Bia e as suas conseqüências.

- Bia vai de SP até R, onde desce do trem com velocidade v e fica parada na plataforma. Em seguida Ana, que havia ficado em SP, toma um outro trem, com velocidade v' , em direção a R. Ao descer dele, em R, as duas irmãs se encontram. Se $v = v'$ Bia e Ana terão a mesma idade, se $v > v'$, Bia é mais nova do que Ana, se $v < v'$, Bia é mais velha do que Ana.
- Bia vai até R, onde desce do trem e telefona para Ana, que ficou em SP, combinando um reencontro no meio do caminho. Cada uma delas toma uma bicicleta, cuja velocidade é v' e parte em direção ao ponto de encontro. Quando este ocorre, a diferença de idade entre as duas irmãs é de

$$\Delta\tau = \frac{L}{v} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]. \quad (22.42)$$

- Bia vai até R, desce do trem e volta de bicicleta a SP. Quando ela reencontra Ana, a diferença de idade entre elas é $\Delta\tau$, que está no intervalo

$$\frac{L}{v} = \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right] < \Delta\tau < \frac{2L}{v} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]. \quad (22.43)$$

uma confirmação experimental

No universo em que vivemos, não é possível fazer uma viagem que se inicie e termine no mesmo ponto do espaço, sem algum tipo de aceleração. Em 1971, relógios atômicos de césio foram colocados em aviões, que circunavegaram a Terra nos sentidos horário e anti-horário. Suas marcações foram comparadas com as de relógios estacionários na Terra e as diferenças observadas eram compatíveis com as previsões da teoria da relatividade^[1].

• referência

[1] J.C. Hafele e R.E. Keating, Science, vol. 177, págs. 166 e 168 (1972).

• exercícios

1. Numa estação de trem, existem duas catapultas, separadas por uma distância L , cada uma delas contendo um relógio, sincronizado com o da outra. As catapultas são acionadas simultaneamente, por meio de dispositivos elétricos, de modo que os dois relógios são lançados no interior de um trem que passa em frente à estação, com velocidade v . No interior do trem, os dois relógios são apanhados por dois passageiros que, em seguida, caminham com velocidades iguais e muito baixas, um em direção ao outro, até se encontrarem. Determine a diferença entre os tempos marcados pelos dois relógios, supondo que eles permaneçam funcionando normalmente quando são atirados no trem.

2. Na discussão do paradoxo dos gêmeos, vimos que $\tau_{Ana} > \tau_{Bia}$. Um certo dia, depois da viagem, as duas irmãs passam a discutir. Bia diz que, como ambas nasceram juntas e, naquele dia ela (Bia) tem menos idade que Ana, então ela (Bia) *viveu tanto quanto* a irmã, só que precisou de menos tempo para fazer isso. Ana retruca, dizendo que isso é bobagem, já que Bia é efetivamente mais nova e, por isso mesmo, *viveu menos* que ela (Ana). Quem está com a razão?

3. No caso do paradoxo dos gêmeos:

a) Quais deveriam ser os valores de L e v para que a diferença de idade entre as duas irmãs pudesse ser de um dia?

b) Haveria alguma diferença de idade entre elas se Bia tivesse descido do trem em R e voltado a pé para SP?

c) Imagine uma outra situação. Bia chega ao Rio, mas não sai do trem de ida, referencial S_D . Nesse instante, Ana pula para dentro deste trem, e caminha, pelo seu interior, até encontrar Bia. Existe diferença de idade entre as duas irmãs quando elas se encontram?

4. No problema do paradoxo dos gêmeos, adote $v = 3/5c$, $L = 400.000\text{km}$, e preencha a tabela abaixo:

referencial		S_T	S_D	S_E
evento a	y			
	t			
evento b	y			
	t			
evento c	y			
	t			

Faça um desenho, para cada um dos referenciais, indicando os instantes e posições onde ocorreram os vários eventos. Interprete, se possível, os vários resultados em termos de contrações do espaço e dilatações do tempo.

• **respostas**

1. o módulo da diferença é

$$|\Delta t| = \frac{\gamma v L}{c^2}$$

3. a) Um dia tem $8,64 \times 10^4$ segundos. Existem muitos conjuntos de valores que, substituídos na eq. (22.36), reproduzem este valor. Adotando $c = 3 \times 10^8$ m/s, um deles pode ser $v = 1,8 \times 10^8$ m/s e $L = 3,888 \times 10^{13}$ m.

b) sim, Bia continua mais nova.

c) sim, Ana é um pouco mais nova.

Capítulo 23

adição de velocidades

Na relatividade, os comportamentos dos intervalos de espaço e de tempo por mudanças de referencial são bastante diferentes dos da mecânica clássica. Nesta aula, mostramos que o mesmo acontece com a chamada *adição de velocidades*, que relaciona as velocidades de um mesmo móvel em referenciais diferentes. Na mecânica clássica, se um trem se move em relação ao solo com velocidade \vec{v} e um corpo se desloca com velocidade \vec{u}_T em relação ao trem, então a velocidade deste corpo em relação ao solo é $\vec{u}_S = \vec{u}_T + \vec{v}$. Na relatividade, entretanto, esta relação precisa ser modificada. Para nos convencer disto tomemos, por exemplo, $\vec{u}_T = \vec{v}$, com $|\vec{v}| = 0,8c$, e o resultado clássico corresponde a $|\vec{u}_S| = 1,6c$, em contradição com a noção relativística de que a velocidade da luz no vácuo não pode ser superada.

• a adição de velocidades na relatividade

Na relatividade, as descrições do movimento de *um mesmo corpo*¹, em vários referenciais diferentes, são relacionadas pelas transformações de Lorentz. Tanto na mecânica clássica como na relatividade, a velocidade de um corpo é dada pelo quociente da distância percorrida, pelo tempo necessário para percorrê-la. Na relatividade, entretanto, tanto os intervalos espaciais como os temporais dependem do referencial e, por isso, num referencial S_q , qualquer, a velocidade instantânea de um corpo é dada por

$$\vec{v}_q = \frac{d\vec{r}_q}{dt_q}, \quad (23.1)$$

onde dt_q é o tempo gasto no percurso do intervalo $d\vec{r}_q$, naquele referencial.

O problema da adição de velocidades pode ser colocado da seguinte forma: se Maria observa um corpo movendo-se com velocidade \vec{u}_M no referencial S_M , como João, que se move com velocidade \vec{v} relativamente a ela, descreve o movimento deste mesmo corpo no

¹Nós, aqui, discutimos apenas situações nas quais as dimensões dos corpos são irrelevantes e eles podem ser considerados como pontos materiais.

referencial S_J ? Em outras palavras, se representarmos por \vec{u}_J a velocidade do corpo em relação S_J , qual é a relação entre \vec{u}_J e \vec{u}_M ?

Para obter esta relação, inicialmente expressamos as velocidades *do mesmo corpo* nos referenciais S_M e S_J , em termos das suas componentes cartesianas:

$$\vec{u}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt_M} = \frac{dx_M}{dt_M} \vec{i} + \frac{dy_M}{dt_M} \vec{j} + \frac{dz_M}{dt_M} \vec{k}, \quad (23.2)$$

$$\vec{u}_J = \frac{d\vec{r}_J}{dt_J} = \frac{dx_J}{dt_J} \vec{i} + \frac{dy_J}{dt_J} \vec{j} + \frac{dz_J}{dt_J} \vec{k}. \quad (23.3)$$

Em seguida, diferenciamos as expressões das transformações de Lorentz, dadas pelas eqs.(20.58-20.61), e obtemos

$$dx_J = dx_M = u_M^x dt_M, \quad (23.4)$$

$$dy_J = \gamma (dy_M - v dt_M) = \gamma (u_M^y - v) dt_M, \quad (23.5)$$

$$dz_J = dz_M = u_M^z dt_M \quad (23.6)$$

$$dt_J = \gamma \left(dt_M - \frac{v}{c^2} dy_M \right) = \gamma \left(1 - \frac{v u_M^y}{c^2} \right) dt_M. \quad (23.7)$$

Dividindo as eqs.(23.4-23.6) pela eq.(23.7), obtemos a relação desejada entre \vec{u}_J e \vec{u}_M que, em componentes, tem a forma

$$u_J^x = \frac{u_M^x}{\gamma (1 - v u_M^y/c^2)}, \quad (23.8)$$

$$u_J^y = \frac{u_M^y - v}{1 - v u_M^y/c^2}, \quad (23.9)$$

$$u_J^z = \frac{u_M^z}{\gamma (1 - v u_M^y/c^2)}. \quad (23.10)$$

Estes resultados permitem conhecer \vec{u}_J , a partir de \vec{u}_M e \vec{v} . Como no caso das transformações de Lorentz, discutidas na aula 21, a solução para a operação inversa pode ser obtida trocando os índices J e M e o sinal de v : $J \leftrightarrow M$, $v \rightarrow -v$. Assim,

$$u_M^x = \frac{u_J^x}{\gamma (1 + v u_J^y/c^2)}, \quad (23.11)$$

$$u_M^y = \frac{u_J^y + v}{1 + v u_J^y/c^2}, \quad (23.12)$$

$$u_M^z = \frac{u_J^z}{\gamma (1 + v u_J^y/c^2)}. \quad (23.13)$$

Note que, nos dois conjuntos de relações, as expressões para as duas componentes da velocidade perpendiculares a \vec{v} são semelhantes entre si, mas diferentes da componente paralela a \vec{v} .

Os resultados (23.8-23.10) e (23.11-23.13) representam as regras relativísticas para a adição de velocidades. Para tornar mais claro os seus significados apresentamos, a seguir, algumas aplicações.

• **exemplo 1.**

Maria, no referencial S_M , observa João passando para a direita, com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$. Pedro também passa por Maria, com velocidade $\vec{u}_M = u\vec{j}$, como mostra a figura 23.1. Qual a velocidade \vec{u}_J , de Pedro relativamente a João?



Figura 23.1: Os movimentos de João e Pedro, observados por Maria.

Segundo a mecânica clássica, tal velocidade seria

$$\vec{u}_J^{cl} = \vec{u}_M - \vec{v} = (0, u - v, 0) \quad (23.14)$$

No caso da relatividade, entretanto, usamos as eqs.(23.8-23.10) e obtemos

$$u_J^x = 0, \quad (23.15)$$

$$u_J^y = \frac{u - v}{1 - v u/c^2}, \quad (23.16)$$

$$u_J^z = 0. \quad (23.17)$$

Esses resultados podem ser agrupados na expressão vetorial,

$$\vec{u}_J = \left(0, \frac{u - v}{1 - v u/c^2}, 0 \right). \quad (23.18)$$

A comparação com a eq.(23.14) indica que ela é diferente da clássica. Para explorar este resultado, consideramos uma situação particular, em que João move-se para a direita em relação a Maria, com velocidade $\vec{v} = 3c/5\vec{j}$ e Pedro move-se para a esquerda em relação a Maria, com velocidade $\vec{u}_M = -4c/5\vec{j}$. Num caso como este, a *previsão clássica* para a velocidade de Pedro relativamente a João seria $\vec{u}_J^{cl} = (0, -7c/5, 0)$, que corresponde a uma velocidade para a esquerda, com módulo maior do que c . Já a *previsão relativística* é $\vec{u}_J = (0, -35c/37, 0)$, cujo módulo é menor do que c . Deste modo, a regra relativística de adição de velocidades produz um resultado coerente com o fato de c ser a velocidade limite.

• exemplo 2.

João está numa plataforma, que se move paralelamente ao eixo y , com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, em relação a S_M , onde está Maria. Sobre esta plataforma, existe um corpo que se move segundo o eixo x , com velocidade $\vec{u}_J = u\vec{i}$, em relação à origem de S_J , como indica a figura 23.2. Quais são as previsões clássica e relativística para a velocidade do corpo, relativamente a Maria?

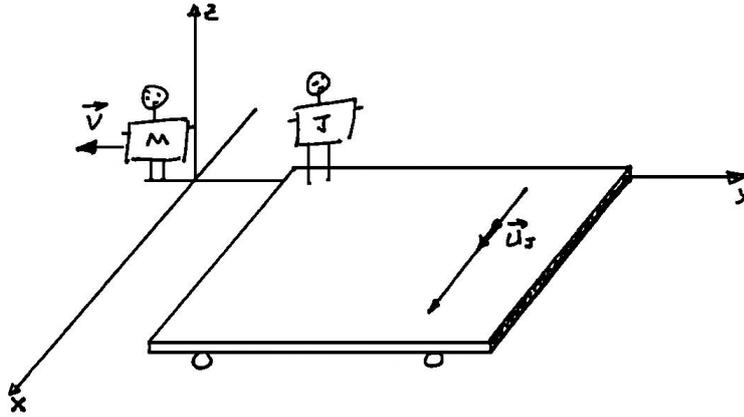


Figura 23.2: Os movimentos do corpo, e de Maria, observados por João.

A prescrição clássica fornece

$$\vec{u}_M^{cl} = (u, v, 0), \quad (23.19)$$

enquanto que, na relatividade, de acordo com as eqs.(23.11)-(23.13), temos

$$\vec{u}_M = \left(\frac{u}{\gamma}, v, 0 \right). \quad (23.20)$$

Se, por exemplo, adotarmos, $v = 3c/5$ e $u = 4c/5$, temos $\vec{u}_M^{cl} = (4c/5, 3c/5, 0)$ e $\vec{u}_M = (16c/25, 3c/5, 0)$, cujos, módulos são, respectivamente, $|\vec{u}_M^{cl}| = c$ e $|\vec{u}_M| = \sqrt{481} c / \sqrt{625}$. Assim, novamente, notamos que o cálculo relativístico é consistente com o fato de que o módulo da velocidade de um corpo tem de ser sempre *menor* do que c .

• o limite de baixas velocidades

Quando dois observadores se movem relativamente, com velocidade v , sendo $v \ll c$, podemos desprezar o quociente v/c nas eqs.(23.8)-(23.10) e escrever a relação vetorial aproximada $\vec{u}_J \cong \vec{u}_M - \vec{v}$. Este resultado é formalmente parecido com as transformações de Galileu, utilizadas na mecânica clássica. Entretanto, isso não significa que esta mecânica newtoniana seja um caso limite da relatividade, já que as duas teorias correspondem a visões do mundo muito diferentes.

• exemplo 3. a velocidade da luz

No interior de um trem existe uma fonte de laser, que emite um feixe horizontal, formando um ângulo α_T com o eixo do trem, como mostra a figura 22.3. Quando o trem se move ao longo do eixo y , com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, qual é a velocidade da luz em relação ao solo?

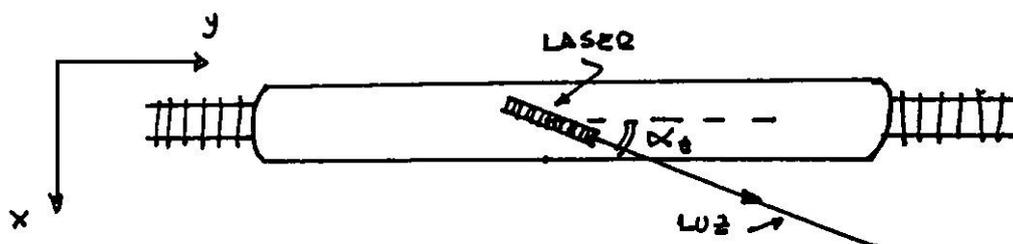


Figura 23.3: O laser e o seu feixe, vistos do referencial do trem.

Neste tipo de questão, é conveniente pensarmos no feixe de laser como sendo composto por muitos fótons, cada um deles com velocidade

$$\vec{c}_T = (c \operatorname{sen} \alpha_T, c \operatorname{cos} \alpha_T, 0), \quad (23.21)$$

no referencial do trem. A velocidade de cada fóton em relação ao solo pode ser obtida por meio das eqs.(23.8)-(23.10) e suas componentes são

$$c_S^x = \frac{c \operatorname{sen} \alpha_T}{\gamma(1 - v \operatorname{cos} \alpha_T/c)}, \quad (23.22)$$

$$c_S^y = \frac{c \operatorname{cos} \alpha_T - v}{1 - v \operatorname{cos} \alpha_T/c}, \quad (23.23)$$

$$c_S^z = 0. \quad (23.24)$$

Para interpretar este resultado calculamos, inicialmente, o módulo do vetor \vec{c}_S , dado por

$$|\vec{c}_S|^2 = \frac{(1 - v^2/c^2) c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_T + (c \operatorname{cos} \alpha_T - v)^2}{(1 - v \operatorname{cos} \alpha_T/c)^2} = c^2. \quad (23.25)$$

Assim, o módulo da velocidade da luz em relação ao solo é também igual a c , independentemente dos valores adotados para v e α_T . Este resultado indica que as regras de adição de velocidades, obtidas nesta aula, são compatíveis com o segundo princípio da relatividade, segundo o qual o *módulo* da velocidade da luz no vácuo é sempre o mesmo em qualquer referencial inercial.

É interessante notar que, neste problema, a direção da velocidade da luz depende do referencial. Para determinar o ângulo α_S , entre o feixe de laser e o eixo y , no referencial

do solo, escrevemos $\vec{c}_S = (c \sin \alpha_S, c \cos \alpha_S, 0)$ e comparamos com as eqs.(23.22)-(23.24), obtendo

$$\sin \alpha_S = \frac{\sin \alpha_T}{\gamma(1 - v \cos \alpha_T/c)}, \quad (23.26)$$

$$\cos \alpha_S = \frac{\cos \alpha_T - v/c}{1 - v \cos \alpha_T/c}. \quad (23.27)$$

Deste modo,

$$\alpha_S = \arctan \left[\frac{\sin \alpha_T}{\gamma} \left(\cos \alpha_T - \frac{v}{c} \right) \right]. \quad (23.28)$$

Nos casos particulares em que o feixe de luz é paralelo ou antiparalelo à velocidade do trem, temos $\alpha_T = 0$ e $\alpha_T = \pi$ e os vetores velocidade da luz são dados, respectivamente, por $\vec{c}_T = \vec{c}_S = (0, c, 0)$ e $\vec{c}_T = \vec{c}_S = (0, -c, 0)$, respectivamente. Por outro lado, quando o laser é orientado perpendicularmente ao trem, temos $\alpha_T = \pi/2$ e, portanto, os dois vetores são diferentes, apesar de terem os módulos iguais: $\vec{c}_T = (c, 0, 0)$ e $\vec{c}_S = (c/\gamma, -v, 0)$.

• exemplo 4: o decaimento do π^0

Na física das partículas elementares, são comuns os processos em que uma partícula pode decair em outras duas. Por exemplo, um méson π , neutro, representado por π^0 , pode decair em dois fótons, num processo representado por $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Nosso interesse, neste problema, é determinar o ângulo entre os dois fótons provenientes do decaimento, porque esse ângulo pode ser medido em experimentos. Em geral, nesses experimentos, o π^0 que decai está em movimento. Por isso, neste exemplo, supomos que a velocidade do π^0 , antes do decaimento, seja $\vec{v} = \vec{j}$, no sistema S_L do laboratório.

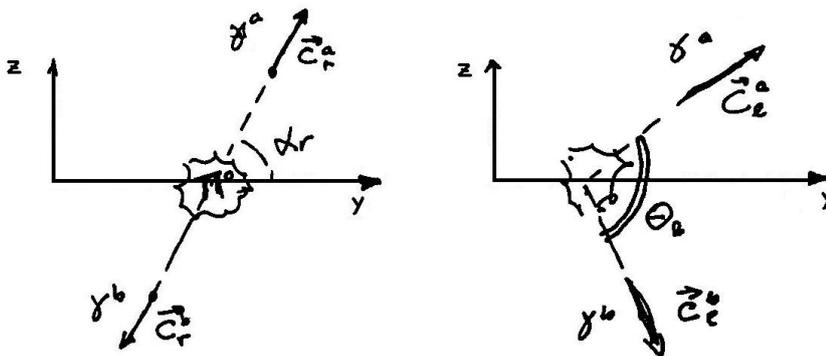


Figura 23.4: O decaimento do π^0 , nos referenciais S_R e S_L .

Para resolver este problema, é conveniente raciocinar, inicialmente, no referencial S_R , onde o π^0 está em repouso. Neste referencial, a descrição do problema é mais simples, pois a quantidade de movimento do pión é nula e os fótons têm velocidades opostas, como mostra a figura 23.4a. Sem perda de generalidade vamos supor que as velocidades dos

dois fótons, designados por a e b , estejam contidas no plano yz , e escrevemos

$$\vec{c}_{Ra} = (0, c \cos \alpha_R, c \sin \alpha_R), \quad (23.29)$$

$$\vec{c}_{Rb} = (0, -c \cos \alpha_R, -c \sin \alpha_R). \quad (23.30)$$

Usando as eqs.(23.11)-(23.13), podemos escrever os vetores velocidades dos fótons no referencial do laboratório como

$$\vec{c}_{La} = \left(0, \frac{c \cos \alpha_R + v}{1 + v \cos \alpha_R/c}, \frac{c \sin \alpha_R}{\gamma(1 + v \cos \alpha_R/c)} \right), \quad (23.31)$$

$$\vec{c}_{Lb} = \left(0, \frac{-c \cos \alpha_R + v}{1 - v \cos \alpha_R/c}, \frac{-c \sin \alpha_R}{\gamma(1 - v \cos \alpha_R/c)} \right). \quad (23.32)$$

Para determinar o ângulo entre \vec{c}_{La} e \vec{c}_{Lb} , usamos o fato de que o produto escalar de dois vetores quaisquer \vec{A} e \vec{B} sempre pode ser escrito como $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre \vec{A} e \vec{B} . Como no exemplo 3, eq. (23.25), podemos mostrar que $|c_{La}| = |c_{Lb}| = c$. Por isso, para o ângulo entre as velocidades dos dois fótons provenientes do π^0 , podemos escrever

$$\cos \theta_L = \frac{\vec{c}_{La} \cdot \vec{c}_{Lb}}{c^2} = \frac{-1 + v^2(1 + \sin^2 \alpha_R)/c^2}{1 - v^2 \cos^2 \alpha_R/c^2}. \quad (23.33)$$

É interessante comparar este resultado com o correspondente produzido pela mecânica clássica. Usando a regra newtoniana para a adição de velocidades, as velocidades dos fótons no referencial S_L seriam

$$\vec{c}_{La}^{cl} = (0, c \cos \alpha_R + v, c \sin \alpha_R) \quad (23.34)$$

$$\vec{c}_{Lb}^{cl} = (0, -c \cos \alpha_R + v, -c \sin \alpha_R) \quad (23.35)$$

e, portanto,

$$\cos \theta_L^{cl} = \frac{\vec{c}_{La}^{cl} \cdot \vec{c}_{Lb}^{cl}}{|\vec{c}_{La}^{cl}| |\vec{c}_{Lb}^{cl}|} = \frac{-1 + v^2/c^2}{\sqrt{(1 + v^2/c^2)^2 - 4v^2 \cos^2 \alpha_R/c^2}}. \quad (23.36)$$

Este resultado clássico é bastante diferente do relativístico, dado em (23.33). A importância desse fato é que, em princípio, o ângulo θ_L pode ser observado por meio de experimentos e, portanto, através de medidas, podemos determinar qual das duas teorias descreve melhor a natureza.

• exemplo 5: o decaimento do K^0

Um outro decaimento envolve o méson K^0 , sem carga elétrica, que pode se transformar em dois mésons π , com massas iguais e cargas elétricas positiva e negativa, denotados por π^+ e π^- , respectivamente. Estes mésons são chamados de kaons e píons, por simplicidade, e o decaimento é representado simbolicamente por $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$.

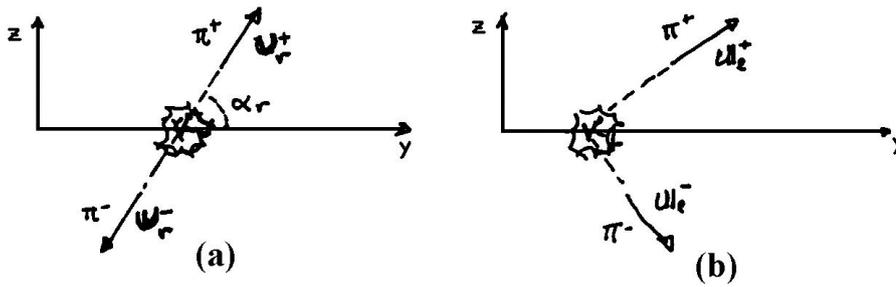


Figura 23.5: O decaimento do K^0 , nos referenciais S_R e S_L .

No sistema de referência S_R , em que o kaon está em repouso, a conservação de momento obriga que as velocidades dos dois píons tenham módulos e direções iguais e sentidos opostos. Em S_R , o módulo das velocidades pode ser determinado a partir dos dados experimentais como sendo $u_R = 0,83c$. Supondo que, neste sistema, as trajetórias dos dois píons estejam contidas no plano yz e que o ângulo entre a velocidade do π^+ e o eixo y seja α_R , como mostra a figura 23.4, podemos escrever

$$\vec{u}_{R+} = (0, u_R \cos \alpha_R, u_R \sin \alpha_R), \quad (23.37)$$

$$\vec{u}_{R-} = (0, -u_R \cos \alpha_R, -u_R \sin \alpha_R). \quad (23.38)$$

Nos experimentos realizados no sistema S_L , do laboratório, os káons que decaem não estão, em geral, em repouso. Por isso, neste exemplo, estamos interessados em determinar as velocidades dos píons resultantes do decaimento em S_L onde o kaon se move com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$. Como o kaon está em repouso no sistema S_R , \vec{v} é também a velocidade relativa entre os referenciais S_L e S_R . Usando as eqs.(23.11-23.13), podemos escrever, em componentes, as velocidades dos dois píons como

$$u_{L+}^x = 0, \quad (23.39)$$

$$u_{L+}^y = \frac{u_R \cos \alpha_R + v}{1 + vu_R \cos \alpha_R / c^2}, \quad (23.40)$$

$$u_{L+}^z = \frac{u_R \sin \alpha_R}{\gamma(1 + vu_R \cos \alpha_R / c^2)}, \quad (23.41)$$

$$u_{L-}^x = 0, \quad (23.42)$$

$$u_{L-}^y = \frac{-u_R \cos \alpha_R + v}{1 - vu_R \cos \alpha_R / c^2}, \quad (23.43)$$

$$u_{L-}^z = \frac{-u_R \sin \alpha_R}{\gamma(1 - vu_R \cos \alpha_R / c^2)}. \quad (23.44)$$

Estes resultados determinam \vec{u}_{L+} e \vec{u}_{L-} em função dos dados u_R e α_R e indicam que, em geral, os dois píons terão velocidades diferentes, em módulo e orientação, no referencial do laboratório, como indica a figura 23.4b.

Na física das partículas elementares, as velocidades envolvidas são, em geral, comparáveis à da luz. Mesmo em um processo como o $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, que não tem nada de excepcional, as velocidades dos píons em S_R já são de $0,83c$. Por isso, o estudo das partículas oferece muitas situações onde é possível testar, experimentalmente, as previsões da relatividade contra as da mecânica clássica. Uma delas ocorre neste exemplo. Enquanto, na sistema S_R , o ângulo entre os momentos dos píons é 180° , em S_L ele é menor e pode ser obtido a partir do produto escalar entre as velocidades dos dois píons. Chamando de θ_L este ângulo, temos

$$\cos\theta_L = \frac{\vec{u}_{L+} \cdot \vec{u}_{L-}}{|u_{L+}| |u_{L-}|} \quad (23.45)$$

e, portanto, ele pode ser obtido a partir das eqs.(23.39)-(23.44). Efetuando os cálculos, encontramos

$$\cos\theta_L = \frac{-u_R^2 + v^2 + u_R^2 v^2 \sin^2 \alpha_R / c^2}{\sqrt{[u_R^2 + v^2 - u_R^2 v^2 \sin^2 \alpha_R / c^2]^2 - 4u_R^2 v^2 \cos^2 \alpha_R}} \quad (23.46)$$

Neste problema, o resultado correspondente do cálculo clássico pode ser obtido tomando o limite $c \rightarrow \infty$ do resultado relativístico. Fazendo isso, obtemos

$$\cos\theta_L^{cl} = \frac{-u_R^2 + v^2}{\sqrt{[u_R^2 + v^2]^2 - 4u_R^2 v^2 \cos^2 \alpha_R}}. \quad (23.47)$$

Como no caso discutido no exemplo 4, as previsões da relatividade e da mecânica clássica são diferentes entre si e podem ser discriminadas por meio de experimentos.

Finalmente, podemos adquirir um sentimento acerca das ordens de grandeza deste problema consideramos, inicialmente, a situação particular em que $\alpha_R = 0$, que corresponde a

$$\vec{u}_{L+} = \left(0, \frac{u_R + v}{1 + vu_R/c^2}, 0 \right), \quad (23.48)$$

$$\vec{u}_{L-} = \left(0, \frac{u_R - v}{1 - vu_R/c^2}, 0 \right). \quad (23.49)$$

Supondo, por exemplo, que $v = 0,5c$ e adotando o valor experimental $u_R = 0,83c$, temos $\vec{u}_{L+} = (0, 0,94c, 0)$ e $\vec{u}_{L-} = (0, 0,56c, 0)$. Por outro lado, se $\alpha_R = \pi/2$, obtemos

$$\vec{u}_{L+} = (0, v, u_R/\gamma), \quad (23.50)$$

$$\vec{u}_{L-} = (0, v, -u_R/\gamma). \quad (23.51)$$

e, assim, $\vec{u}_{L+} = (0, 0,5c, 0,72c)$ e $\vec{u}_{L-} = (0, 0,5c, -0,72c)$.

• exercícios

1. Considere a situação descrita no exemplo 1. Calcule a velocidade de Pedro relativamente a João:

- no caso em que ambos têm a mesma velocidade em relação a Maria.
- quando $\vec{v} = 3c/5\vec{j}$ e $\vec{u}_M = 4c/5\vec{j}$. Qual é a razão entre o módulo desta velocidade e a previsão clássica?

2. Ana está num carro, que se move para a direita com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, ao longo de uma estrada retilínea, paralela ao eixo y . Num dado ponto desta estrada está Pedro, no interior de um carro parado. Ana passa por Pedro e, depois de decorrido um intervalo de tempo T , no referencial do solo, Pedro passa a perseguir o carro de Ana, com uma velocidade u_S , ($u_S > v$). Tomando como origem a passagem de Ana por Pedro, determine:

- o instante e a posição da saída de Pedro, nos referenciais do solo e de Ana;
- o instante e a posição em que Pedro alcança Ana, nos referenciais do solo e de Ana;
- a velocidade de Pedro em relação a Ana, usando os resultados anteriores.
- a velocidade de Pedro em relação a Ana, usando as regras de adição de velocidades, eqs. (23.8-23.13).

3. Um trem move-se para a direita em relação ao solo, com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$ e, no seu interior, existe uma fonte de luz, que emite um feixe vertical.

- calcule o vetor velocidade do feixe de luz em relação ao solo;
- usando o resultado do item anterior, calcule o módulo, a direção e o sentido da velocidade da luz, em relação ao solo.

4. Maria está parada na origem do referencial S_M , enquanto que João desloca-se com velocidade constante $\vec{v} = v\vec{j}$ ao longo da reta $x = L, z = 0$, como mostra a figura 23.6. No instante em que João cruza o eixo x , Maria parte ao seu encontro, com uma velocidade \vec{u}_M .

- determine o valor de u supondo que o encontro ocorra no instante T , em S_M .
- neste caso, qual é o vetor velocidade de Maria relativamente a João?

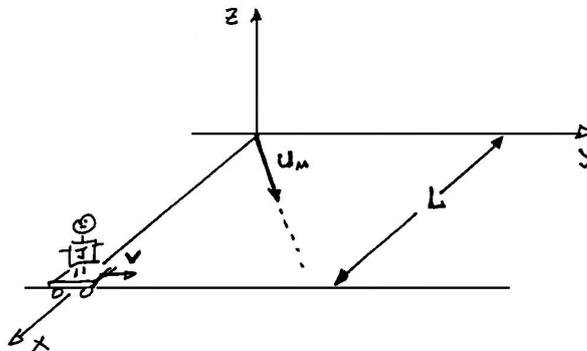


Figura 23.6: A situação do exercício 4.

• respostas

1. a) $\vec{u}_M = \vec{v} \rightarrow \vec{u}_J = 0$

b) 25/13

2. a) evento $E_1 \rightarrow S_S : (0, 0, 0, T); S_A : (0, -\gamma v T, 0, \gamma T)$

b) evento $E_2 \rightarrow S_S : (0, \frac{u_S v T}{u_S - v}, 0, \frac{u_S T}{u_S - v}); S_A : (0, 0, 0, \frac{u_S T}{\gamma(u_S - v)})$

c) e d) $\vec{u}_A = \frac{u_S - v}{1 - u_S v / c^2} \vec{j}$

3. a) $\vec{c}_S : (0, V, c/\gamma)$

b) $|\vec{c}_S| = c$, o feixe de luz faz um ângulo $\alpha_S = \tan^{-1}[c/(\gamma v)]$ com o eixo y e o sentido é ascendente.

4. a) $\vec{u}_M = L/T \vec{i} + v \vec{j}$

b) $\vec{u}_J = \gamma L/T \vec{i}$

Capítulo 24

relatividade: transformações de campos e densidades

Na teoria da relatividade, as quatro coordenadas de um evento são grandezas dependentes do referencial. Nesta aula e nas seguintes, mostramos que os campos elétrico e magnético também são grandezas dependentes do referencial. Isto quer dizer que, se houver velocidade relativa entre dois observadores, fenômenos que um deles atribui ao campo elétrico podem ter uma componente magnética no outro, e vice-versa.

Talvez o exemplo mais famoso desta relatividade dos campos seja a explicação da corrente induzida que se observa quando há movimento relativo entre um ímã e uma espira. Consideremos, por exemplo, um ímã em forma de barra e uma espira circular, como na figura 24.1, e as explicações para a origem da corrente induzida, nos referenciais S^I , do ímã e S^E , da espira. Nos dois referenciais, a corrente que aparece na espira quando há movimento relativo entre os dois corpos, é explicada com base em forças que agem sobre os elétrons da espira, dadas pela expressão de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

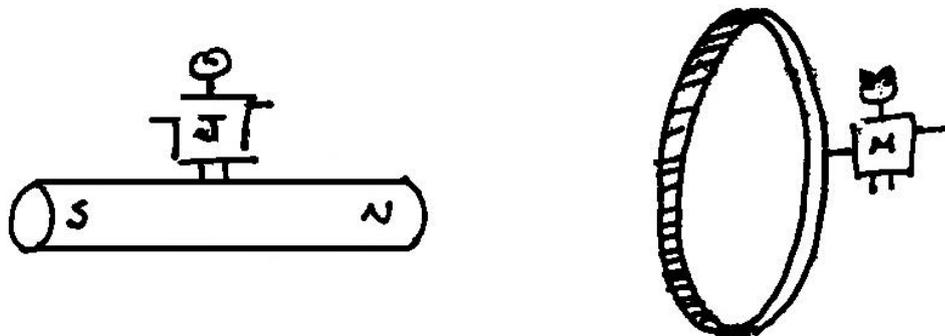


Figura 24.1: O ímã e a espira.

Entretanto, para o observador João, no referencial S^J só existe campo magnético, e ele explica a corrente na espira por meio de uma força dada por $\vec{F}^J = q(\vec{v} \times \vec{B}^J)$. Já para Maria, que está no referencial S_E , a força sobre os elétrons decorre do campo elétrico devido à variação temporal do campo magnético do ímã e, portanto, ela observa uma força $\vec{F}^M = q(\vec{E}^M)$. Como se trata de um único fenômeno, descrito por dois observadores diferentes, deve haver uma conexão entre as duas explicações e, portanto, entre \vec{B}^J e \vec{E}^M .

Esta questão tem grande relevância histórica, pois ela aparece no primeiro capítulo do artigo intitulado *SOBRE A ELETRODINÂMICA DE CORPOS EM MOVIMENTO*, no qual Einstein apresenta a teoria da relatividade restrita, em 1905. Segue, abaixo, uma tradução deste primeiro parágrafo:

“É sabido que a eletrodinâmica de Maxwell - como usualmente entendida no presente - quando aplicada a corpos em movimento, conduz a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenômenos. Tome, por exemplo, a ação eletrodinâmica recíproca de um ímã e um condutor. O fenômeno observável aqui depende apenas do movimento relativo entre o condutor e o ímã, enquanto que a visão costumeira estabelece uma distinção clara entre os dois casos nos quais ou um ou o outro dentre estes corpos está em movimento. Pois, se o ímã está em movimento e o condutor está em repouso, aparece na vizinhança do ímã um campo elétrico com uma certa energia definida, produzindo uma corrente nos lugares onde as partes do condutor estão situadas. Mas, se o ímã está em repouso e o condutor em movimento, não aparece campo elétrico na vizinhança do ímã. No condutor, entretanto, encontramos uma força eletromotriz, para a qual não existe energia correspondente, mas que dá origem - supondo a igualdade do movimento relativo nos dois casos discutidos - a correntes elétricas de mesma trajetória e intensidade que aquelas produzidas pelas forças elétricas no caso anterior.”

Na relatividade, admitimos que o eletromagnetismo é uma boa teoria física. Com isso, queremos dizer que as equações de Maxwell e a força de Lorentz devem ser covariantes, ou seja, ter a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Por isso, a relação geral entre as formas dos campos elétricos e magnéticos, observados por duas pessoas diferentes, Maria e João, situadas em referenciais inerciais com movimento relativo, é obtida supondo que as equações de Maxwell sejam válidas nestes dois referenciais.

• a invariância da carga elétrica

A carga elétrica é a entidade central do eletromagnetismo e o seu papel na relatividade é, também, bastante especial: o seu valor independe do referencial. Quaisquer observadores, com velocidades relativas constantes, medem sempre o mesmo valor para a carga de um sistema. Por exemplo, se a carga elétrica deste sistema vale q no referencial de Maria, ela também vale q no referencial de João. A carga é um invariante relativístico e, por isto, a designamos simplesmente por q , e não por q^M ou q^J . A carga elétrica tem, portanto, um status na relatividade, semelhante ao da velocidade da luz.

Esta característica da carga nos permite concluir, imediatamente, que as densidades de carga e de corrente devem depender do referencial. No caso da densidade de carga,

isto ocorre porque ela representa uma carga distribuída por um volume e este depende do referencial, pois é afetado pela contração do espaço. Já a densidade de corrente está associada às velocidades das cargas, que também dependem do referencial.

• a covariância das equações de Maxwell

No referencial S_M , onde está Maria, existe um sistema de cargas elétricas, que podem estar tanto em repouso como em movimento e ela pode, a partir das equações de Maxwell, calcular os campos elétrico \vec{E}^M e magnético \vec{B}^M . João, por outro lado, está no referencial S_J , que se move com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, relativamente a Maria. Neste referencial, ele também pode observar o *mesmo* sistema de cargas e pode, por meio das equações de Maxwell, obter os campos \vec{E}^J e \vec{B}^J .

Para obter as relações entre as várias grandezas eletromagnéticas nos dois referenciais, consideramos uma situação genérica em que, no referencial de João, são conhecidas as distribuições de cargas e de correntes de um dado sistema físico. Este sistema pode ser, por exemplo, uma usina hidroelétrica, uma barra metálica carregada, um próton, uma espira percorrida por uma corrente, um átomo de hidrogênio...

No seu sistema de referência, João observa os campos elétrico \vec{E}^J e \vec{B}^J , criados pelas cargas e correntes, e os descreve usando as suas coordenadas espaço-temporais \vec{r}_J e t_J , e juntamente com as equações de Maxwell que, para ele, são dadas pelas expressões:

$$\vec{\nabla}^J \cdot \vec{E}^J(\vec{r}_J, t_J) = \frac{\rho^J(\vec{r}_J, t_J)}{\varepsilon_0}, \quad (24.1)$$

$$\vec{\nabla}^J \times \vec{E}^J(\vec{r}_J, t_J) = - \frac{\partial \vec{B}^J(\vec{r}_J, t_J)}{\partial t_J}, \quad (24.2)$$

$$\vec{\nabla}^J \times \vec{B}^J(\vec{r}_J, t_J) = \mu_0 \vec{j}^J(\vec{r}_J, t_J) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^J(\vec{r}_J, t_J)}{\partial t_J}. \quad (24.3)$$

$$\vec{\nabla}^J \cdot \vec{B}^J(\vec{r}_J, t_J) = 0, \quad (24.4)$$

onde

$$\vec{\nabla}^J = \left[\frac{\partial}{\partial x^J} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y^J} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z^J} \hat{k} \right]. \quad (24.5)$$

Já Maria, no referencial S_M , usando as coordenadas \vec{r}_M e t_M , observa os campos \vec{E}^M e \vec{B}^M e as distribuições de cargas e correntes ρ^M e \vec{j}^M . Para Maria, os campos também

são determinados pelas equações de Maxwell que, agora, têm a seguinte forma:

$$\vec{\nabla}^M \cdot \vec{E}^M(\vec{r}_M, t_M) = \frac{\rho^M(\vec{r}_M, t_M)}{\epsilon_0}, \quad (24.6)$$

$$\vec{\nabla}^M \times \vec{E}^M(\vec{r}_M, t_M) = - \frac{\partial \vec{B}^M(\vec{r}_M, t_M)}{\partial t_M}, \quad (24.7)$$

$$\vec{\nabla}^M \times \vec{B}^M(\vec{r}_M, t_M) = \mu_0 \vec{j}^M(\vec{r}_M, t_M) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^M(\vec{r}_M, t_M)}{\partial t_M}. \quad (24.8)$$

$$\vec{\nabla}^M \cdot \vec{B}^M(\vec{r}_M, t_M) = 0, \quad (24.9)$$

sendo

$$\vec{\nabla}^M = \left[\frac{\partial}{\partial x^M} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y^M} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z^M} \hat{k} \right]. \quad (24.10)$$

Ao escrever as equações de Maxwell com a mesma forma matemática nos dois referenciais, admitimos implicitamente o que é conhecido como covariância destas leis físicas. Note que esta covariância *não* significa supor as igualdades entre os campos \vec{E}^J e \vec{E}^M , ou entre \vec{B}^J e \vec{B}^M , e nem das fontes de cargas ρ^J e ρ^M e de correntes \vec{j}^J e \vec{j}^M . Na verdade, a covariância das equações de Maxwell significa que as *relações* entre campos e fontes são as mesmas nos dois referenciais. Esta questão é muito importante e o seu significado somente poderá ficar totalmente claro depois da discussão dos seus detalhes técnicos.

• a transformação dos campos

Para relacionar as observações do mesmo sistema físico feitas nos referenciais S_M e S^J , supomos que a velocidade de João relativamente a Maria seja $\vec{v} = v\vec{j}$ e que o evento de referência seja o cruzamento de suas origens:

evento de referência R:

$$S_M : (x_M^R, y_M^R, z_M^R; t_M^R) = (0, 0, 0; 0)$$

$$S^J : (x_J^R, y_J^R, z_J^R; t_J^R) = (0, 0, 0; 0)$$

Neste caso, as transformações de Lorentz são dadas pelas eqs.(20.58-20.61):

$$x_J = x_M, \quad (24.11)$$

$$y_J = \gamma(y_M - vt_M), \quad (24.12)$$

$$z_J = z_M, \quad (24.13)$$

$$t_J = \gamma(t_M - vy_M/c^2), \quad (24.14)$$

como $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Para obter as propriedades de transformação dos campos consideramos, inicialmente, as equações que não contêm cargas ou correntes, correspondentes às leis de Faraday e Gauss magnética. Em coordenadas cartesianas, as eqs.(23.2) e (23.4), em S^J , são escritas como

$$\frac{\partial E_z^J}{\partial y_J} - \frac{\partial E_y^J}{\partial z_J} = - \frac{\partial B_x^J}{\partial t_J}, \quad (24.15)$$

$$\frac{\partial E_x^J}{\partial z_J} - \frac{\partial E_z^J}{\partial x_J} = - \frac{\partial B_y^J}{\partial t_J}, \quad (24.16)$$

$$\frac{\partial E_y^J}{\partial x_J} - \frac{\partial E_x^J}{\partial y_J} = - \frac{\partial B_z^J}{\partial t_J}, \quad (24.17)$$

$$\frac{\partial B_x^J}{\partial x_J} + \frac{\partial B_y^J}{\partial y_J} + \frac{\partial B_z^J}{\partial z_J} = 0. \quad (24.18)$$

No referencial S_M , por outro lado, as eqs.(23.6) e (23.8) correspondem a

$$\frac{\partial E_z^M}{\partial y_M} - \frac{\partial E_y^M}{\partial z_M} = - \frac{\partial B_x^M}{\partial t_M}, \quad (24.19)$$

$$\frac{\partial E_x^M}{\partial z_M} - \frac{\partial E_z^M}{\partial x_M} = - \frac{\partial B_y^M}{\partial t_M}, \quad (24.20)$$

$$\frac{\partial E_y^M}{\partial x_M} - \frac{\partial E_x^M}{\partial y_M} = - \frac{\partial B_z^M}{\partial t_M}, \quad (24.21)$$

$$\frac{\partial B_x^M}{\partial x_M} + \frac{\partial B_y^M}{\partial y_M} + \frac{\partial B_z^M}{\partial z_M} = 0. \quad (24.22)$$

O nosso problema consiste, agora, em traduzir um desses conjuntos de equações no outro. Para fixar idéias, consideramos o caso $S_M \rightarrow S_J$. Com este objetivo, inicialmente relacionamos as coordenadas espaço-temporais dos dois sistemas, usando as transformações de Lorentz. Uma função genérica $f[x^M, y^M, z^M; t^M]$ das coordenadas do referencial S^M pode ser reexpressa em termos das coordenadas do referencial S_M e passa a ser escrita como $f[x^M(x^J, y^J, z^J, t^J), y^M(x^J, y^J, z^J), z^M(x^J, y^J, z^J, t^J), t^M(x^J, y^J, z^J, t^J)]$. As deriva-

das desta função, nos dois referenciais, são relacionadas pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x_M} = \frac{\partial x_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_M} = \frac{\partial x_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_M} = \frac{\partial x_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_M} = \frac{\partial x_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial t_J}. \quad (24.26)$$

Das relações (24.11)-(25.14), decorrem as igualdades:

$$\frac{\partial y_J}{\partial x_M} = \frac{\partial z_J}{\partial x_M} = \frac{\partial t_J}{\partial x_M} = \frac{\partial x_J}{\partial y_M} = \frac{\partial z_J}{\partial y_M} = 0 \quad (24.27)$$

$$\frac{\partial x_J}{\partial z_M} = \frac{\partial y_J}{\partial z_M} = \frac{\partial t_J}{\partial z_M} = \frac{\partial x_J}{\partial t_M} = \frac{\partial z_J}{\partial t_M} = 0, \quad (24.28)$$

$$\frac{\partial x_J}{\partial x_M} = \frac{\partial z_J}{\partial z_M} = 1, \quad (24.29)$$

$$\frac{\partial y_J}{\partial y_M} = \frac{\partial t_J}{\partial t_M} = \gamma, \quad (24.30)$$

$$\frac{\partial t_J}{\partial y_M} = -\gamma \frac{v}{c^2}, \quad (24.31)$$

$$\frac{\partial y_J}{\partial t_M} = -\gamma v. \quad (24.32)$$

Substituindo estes resultados nas eqs.(23.23)-(23.26), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_M} = \frac{\partial}{\partial x_J}, \quad (24.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_M} = \gamma \frac{\partial}{\partial y_J} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_M} = \frac{\partial}{\partial z_J}, \quad (24.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_M} = \gamma \frac{\partial}{\partial t_J} - \gamma v \frac{\partial}{\partial y_J}. \quad (24.36)$$

Depois desses preparativos, voltamos às duas equações de Maxell consideradas, as leis de Faraday e Gauss magnética, equações (24.19-24.22) e, usando (24.33-24.36) e coorde-

nando os termos, as reescrevemos como

$$\frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma E_y^M - \gamma v B_x^M] - \frac{\partial}{\partial z_J} [E_z^M] = - \frac{\partial}{\partial t_J} \left[\gamma B_x^M - \gamma \frac{v}{c^2} E_z^M \right] , \quad (24.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_J} [E_x^M] - \frac{\partial}{\partial x_J} [E_z^M] = - \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma B_y^M] + \left\{ \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma v B_y^M] \right\} , \quad (24.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [E_y^M] - \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma E_x^M + \gamma v B_z^M] = - \frac{\partial}{\partial t_J} \left[\gamma B_z^M + \gamma \frac{v}{c^2} E_x^M \right] , \quad (24.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [B_x^M] + \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma B_y^M] - \left\{ \frac{\partial}{\partial t_J} \left[\gamma \frac{v}{c^2} B_y^M \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z_J} [B_z^M] = 0 . \quad (24.40)$$

As relações entre os campos nos dois referenciais são obtidas comparando este conjunto de resultados com as equações de Maxwell no sistema S^J . Para encontrar a correspondência entre as várias componentes dos campos, consideramos isoladamente os termos sujeitos às mesmas derivadas das coordenadas. Assim, usando as eqs.(23.15) e (23.37) e comparando os termos operados por $\partial/\partial y^J$, $\partial/\partial z^J$ e $\partial/\partial t^J$, identificamos

$$E_z^J = \gamma (E_z^M - v B_x^M) , \quad (24.41)$$

$$E_y^J = E_y^M , \quad (24.42)$$

$$B_x^J = \gamma \left(B_x^M - \frac{v}{c^2} E_z^M \right) . \quad (24.43)$$

É natural estender este procedimento às demais equações. Entretanto, ao tentarmos fazer isto com as eqs.(23.16) e (23.38), encontramos uma dificuldade, associada ao fato de apenas a última delas conter um termo envolvendo $\partial/\partial y^J$, indicado entre chaves. Esta dificuldade pode ser superada notando que a eq.(23.40) também contém um termo sem equivalente na eq.(23.18), novamente indicado entre chaves. Isto permite que os termos indesejáveis possam ser eliminados por meio de combinações lineares das eqs.(23.38) e (23.40).

Multiplicando a eq.(23.38) por γ , a eq.(23.40) por γv e somando os resultados, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial z_J} [\gamma E_x^M + \gamma v B_z^M] - \frac{\partial}{\partial x_J} [\gamma E_z^M - \gamma v B_x^M] = - \frac{\partial}{\partial t_J} [B_y^M] , \quad (24.44)$$

depois de usar $\gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$. A comparação com a eq.(23.18) nos fornece, além da eq.(23.41), as novas relações

$$E_x^J = \gamma (E_x^M + v B_z^M) , \quad (24.45)$$

$$B_y^J = B_y^M . \quad (24.46)$$

Um outro resultado é obtido somando as eqs.(24.38) e (24.40), multiplicadas por $\gamma v/c^2$ e γ , respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_J} \left[\gamma B_x^M - \gamma \frac{v}{c^2} E_z^M \right] + \frac{\partial}{\partial y_J} [B_y^M] + \frac{\partial}{\partial z_J} \left[\gamma B_z^M + \gamma \frac{v}{c^2} E_x^M \right] = 0 . \quad (24.47)$$

Esta expressão tem a mesma estrutura que a lei de Gauss magnética, eq.(23.20), e fornece

$$B_z^J = \gamma \left(B_z^M + \frac{v}{c^2} E_x^M \right) , \quad (24.48)$$

além das eqs.(23.44) e (23.47).

Finalmente, notamos que a comparação das eqs.(23.19) e (23.40) permite-nos apenas obter um vez mais as eqs.(23.43), (23.46) e (23.49).

• resumo parcial: campos

As equações (23.41)-(23.43), (23.45), (23.46) e (23.48) constituem as relações entre as componentes dos campos nos referenciais S_M e S_J , que desejávamos obter. Colocando todas elas juntas, escrevemos

$$E_x^J = \gamma \left(E_x^M + v B_z^M \right) , \quad (24.49)$$

$$E_y^J = E_y^M , \quad (24.50)$$

$$E_z^J = \gamma \left(E_z^M - v B_x^M \right) , \quad (24.51)$$

$$B_x^J = \gamma \left(B_x^M - \frac{v}{c^2} E_z^M \right) , \quad (24.52)$$

$$B_y^J = B_y^M , \quad (24.53)$$

$$B_z^J = \gamma \left(B_z^M + \frac{v}{c^2} E_x^M \right) . \quad (24.54)$$

Estes resultados mostram que as componentes do campo elétrico e do campo magnético na direção do movimento permanecem inalteradas, enquanto que as perpendiculares ao movimento mudam. Por isso, é conveniente escrever $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ e $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$, onde os símbolos \parallel e \perp indicam as componentes dos campos paralelas e perpendiculares ao *vetor* velocidade. Neste caso, as transformações dos campos podem ser escritas de forma mais compacta, como segue:

$$\vec{E}_{\parallel}^J = \vec{E}_{\parallel}^M , \quad (24.55)$$

$$\vec{E}_{\perp}^J = \gamma \left[\vec{E}_{\perp}^M + \vec{v} \times \vec{B}^M \right] , \quad (24.56)$$

$$\vec{B}_{\parallel}^J = \vec{B}_{\parallel}^M , \quad (24.57)$$

$$\vec{B}_{\perp}^J = \gamma \left[\vec{B}_{\perp}^M - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^M \right] , \quad (24.58)$$

$$(24.59)$$

onde usamos $\vec{v} \times \vec{E}_{\parallel}^M = 0$ e $\vec{v} \times \vec{B}_{\parallel}^M = 0$. As transformadas inversas podem ser obtidas, como de costume, simplesmente trocando o sinal da velocidade e os rótulos J e M :

$$E_x^M = \gamma (E_x^J - v B_z^J) , \quad (24.60)$$

$$E_y^M = E_y^J , \quad (24.61)$$

$$E_z^M = \gamma (E_z^J + v B_x^J) , \quad (24.62)$$

$$B_x^M = \gamma \left(B_x^J + \frac{v}{c^2} E_z^J \right) , \quad (24.63)$$

$$B_y^M = B_y^J , \quad (24.64)$$

$$B_z^M = \gamma \left(B_z^J - \frac{v}{c^2} E_x^J \right) \quad (24.65)$$

ou, alternativamente,

$$\vec{E}_{\parallel}^M = \vec{E}_{\parallel}^J , \quad (24.66)$$

$$\vec{E}_{\perp}^M = \gamma \left[\vec{E}_{\perp}^J - \vec{v} \times \vec{B}^J \right] , \quad (24.67)$$

$$\vec{B}_{\parallel}^M = \vec{B}_{\parallel}^J , \quad (24.68)$$

$$\vec{B}_{\perp}^M = \gamma \left[\vec{B}_{\perp}^J + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^J \right] . \quad (24.69)$$

• as transformações das densidades de carga e corrente

As relações entre as densidades de carga e de corrente nos referenciais S^J e S_M podem ser obtidas a partir das duas equações de Maxwell não utilizadas na seção anterior, que representam as leis de Gauss elétrica e de Ampère-Maxwell.

No referencial S^J , em coordenadas cartesianas, as eqs.(23.1) e (23.3) são escritas como

$$\frac{\partial E_x^J}{\partial x_J} + \frac{\partial E_y^J}{\partial y_J} + \frac{\partial E_z^J}{\partial z_J} = \frac{\rho^J}{\epsilon_0} , \quad (24.70)$$

$$\frac{\partial B_z^J}{\partial y_J} - \frac{\partial B_y^J}{\partial z_J} = \mu_0 j_x^J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x^J}{\partial t_J} , \quad (24.71)$$

$$\frac{\partial B_x^J}{\partial z_J} - \frac{\partial B_z^J}{\partial x_J} = \mu_0 j_y^J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y^J}{\partial t_J} , \quad (24.72)$$

$$\frac{\partial B_y^J}{\partial x_J} - \frac{\partial B_x^J}{\partial y_J} = \mu_0 j_z^J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z^J}{\partial t_J} . \quad (24.73)$$

$$(24.74)$$

Já no referencial S_M , as eqs.(23.7) e (23.9) são dadas por

$$\frac{\partial E_x^M}{\partial x_M} + \frac{\partial E_y^M}{\partial y_M} + \frac{\partial E_z^M}{\partial z_M} = \frac{\rho^M}{\varepsilon_0}, \quad (24.75)$$

$$\frac{\partial B_z^M}{\partial y_M} - \frac{\partial B_y^M}{\partial z_M} = \mu_0 j_x^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x^M}{\partial t_M}, \quad (24.76)$$

$$\frac{\partial B_x^M}{\partial z_M} - \frac{\partial B_z^M}{\partial x_M} = \mu_0 j_y^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y^M}{\partial t_M}, \quad (24.77)$$

$$\frac{\partial B_y^M}{\partial x_M} - \frac{\partial B_x^M}{\partial y_M} = \mu_0 j_z^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z^M}{\partial t_M}. \quad (24.78)$$

Para obter as propriedades de transformação das densidades de carga e de corrente, substituímos as expressões (23.33)-(23.36) nas equações (??)-(??), do referencial S_M e, usando $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [E_x^M] + \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma E_y^M] + \frac{\partial}{\partial z_J} [E_z^M] = \frac{\rho^M}{\varepsilon_0} + \left\{ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma v E_y^M] \right\}, \quad (24.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_J} \left[\gamma B_z^M + \gamma \frac{v}{c^2} E_x^M \right] - \frac{\partial}{\partial z_J} [B_y^M] = \mu_0 j_x^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma E_x^M + \gamma v B_z^M] \quad (24.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_J} [B_x^M] - \frac{\partial}{\partial x_J} [B_z^M] + \left\{ \frac{\partial}{\partial y_J} \left[\gamma \frac{v}{c^2} E_y^M \right] \right\} = \mu_0 j_y^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma E_y^M] \quad (24.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [B_y^M] - \frac{\partial}{\partial y_J} \left[\gamma B_x^M - \gamma \frac{v}{c^2} E_z^M \right] = \mu_0 j_z^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma E_z^M - \gamma v B_x^M] \quad (24.82)$$

Para prosseguir, utilizamos as eqs.(23.49)-(??) e expressamos as componentes de \vec{E}^M e \vec{B}^M em termos das de \vec{E}^J e \vec{B}^J . No caso das eqs.(??) e (??), isto pode ser feito imediatamente e temos

$$\frac{\partial}{\partial y_J} [B_z^J] - \frac{\partial}{\partial z_J} [B_y^J] = \mu_0 j_x^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [E_x^J], \quad (24.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [B_y^J] - \frac{\partial}{\partial y_J} [B_x^J] = \mu_0 j_z^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [E_z^J]. \quad (24.84)$$

Comparando com as eqs.(??) e (??), obtemos as relações entre duas das componentes de \vec{j} :

$$j_x^J = j_x^M, \quad (24.85)$$

$$j_z^J = j_z^M. \quad (24.86)$$

No caso das eqs.(??) e (??), os termos entre chaves impedem a comparação direta com as equações no referencial S^J e, como anteriormente, precisamos eliminar estes termos

por meio de combinações lineares. Assim, multiplicando a eq.(??) por γ e somando com a eq.(??) multiplicada por $-\gamma v/c^2$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_J} \left[\gamma B_x^M - \gamma \frac{v}{c^2} E_z^M \right] - \frac{\partial}{\partial x_J} \left[\gamma B_z^M + \gamma \frac{v}{c^2} E_x^M \right] \\ = \mu_0 \left[\gamma (j_y^M - v \rho^M) \right] + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} \left[E_y^M \right] . \end{aligned} \quad (24.87)$$

Usando $\gamma^2 (1 - v^2/c^2) = 1$, os resultados (23.49)-(??) e comparando com a eq.(??), temos

$$j_y^J = \gamma (j_y^M - v \rho^M) . \quad (24.88)$$

Finalmente, multiplicando as eqs.(??) e (??) por γ e $-\gamma v$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_J} \left[\gamma E_x^M + \gamma v B_z^M \right] + \frac{\partial}{\partial y_J} \left[E_y^M \right] + \frac{\partial}{\partial z_J} \left[\gamma E_z^M - \gamma v B_x^M \right] \\ = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} (\rho^M - v j_y^M) , \end{aligned} \quad (24.89)$$

e a comparação com a eq.(??) fornece

$$\rho^J = \gamma \left(\rho^M - \frac{v}{c^2} j_y^M \right) . \quad (24.90)$$

• resumo parcial: densidades

As relações entre as densidades de carga e corrente nos sistemas S_M e S_J são dadas pelas eqs.(??), (??), (??) e (??) e reescritas abaixo:

$$j_x^J = j_x^M , \quad (24.91)$$

$$j_y^J = \gamma (j_y^M - v \rho^M) , \quad (24.92)$$

$$j_z^J = j_z^M . \quad (24.93)$$

$$\rho^J = \gamma \left(\gamma \rho^M - \frac{v}{c^2} j_y^M \right) . \quad (24.94)$$

Estes resultados mostram que as componentes da densidade de corrente perpendiculares ao *vetor* velocidade não se alteram, enquanto que a paralela e a densidade de carga combinam-se entre si.

As transformações inversas, que permitem escrever as grandezas S_M a partir das de S^J , são obtidas trocando o sinal de v e os rótulos M e J :

$$j_x^M = j_x^J , \quad (24.95)$$

$$j_y^M = \gamma (j_y^J + v \rho^J) , \quad (24.96)$$

$$j_z^M = j_z^J , \quad (24.97)$$

$$\rho^M = \gamma \left(\gamma \rho^J + \frac{v}{c^2} j_y^J \right) . \quad (24.98)$$

É importante notar que as equações que regem as transformações das densidades de carga e corrente são totalmente semelhantes às transformações de Lorentz para \vec{r} e t , apresentadas na aula 20, sendo \vec{j} análogo a \vec{r} e ρ , análogo a t .

• covariância e leis físicas

Uma das características mais notáveis do eletromagnetismo é que as suas leis básicas, agrupadas nas equações de Maxwell, entre 1860 e 1870, são compatíveis com a relatividade, restrita, uma teoria proposta em 1905. A evidência desta compatibilidade é que os conjuntos de expressões relacionando os campos \vec{E} e \vec{B} e as densidades ρ e \vec{j} nos referenciais S^J e S_M permitem que as equações de Maxwell tenham a mesma forma em ambos. Do ponto de vista histórico, a teoria proposta por Einstein foi baseada no eletromagnetismo, como indica o próprio título do seu artigo de 1905: “*SOBRE A ELETRODINÂMICA DOS CORPOS EM MOVIMENTO*”. Depois da relatividade, as equações de Maxwell adquiriram o status de uma grande teoria física, pois elas são válidas em qualquer referencial inercial.

Por outro lado, a relatividade mudou a maneira formal de encarar o eletromagnetismo, uma vez que unificou tanto as densidades de carga e corrente como os campos elétrico e magnético em entidades maiores. Um aspecto muito interessante deste novo modo de olhar o eletromagnetismo diz respeito ao conceito de lei física. Até o momento, vimos apresentando as equações de Maxwell como um conjunto de quatro leis: Gauss elétrica, Faraday, Ampère-Maxwell e Gauss magnética. Entretanto, como mostramos na parte desta aula onde discutimos as transformações dos campos, as leis da Faraday e Gauss magnética não são independentemente covariantes, pois as três equações (23.19)-(23.21) não se transformam nas três equações (23.15)-(23.19) e, também a eq.(23.22) não se transforma na eq.(23.18). Entretanto, o conjunto das quatro eqs.(23.19)-(23.22) se transforma no conjunto das eqs.(23.15)-(23.18). Isso indica que, na relatividade, as leis de Faraday e Gauss magnética passam a ser componentes de uma única lei maior. Com as leis de Gauss elétrica e de Ampère-Maxwell acontece algo análogo, pois a covariância relativística somente ocorre entre os dois conjuntos de quatro equações, (23.69)-(23.72) e (23.73)-(23.76). Assim, na relatividade, as quatro equações de Maxwell se fundem em duas leis independentes.

• **exercícios**

1. Usando os resultados obtidos nesta aula, mostre que as combinações de campos $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ e $\vec{E} \cdot \vec{B}$ são invariantes por mudança de referencial. Para tanto, basta mostrar que $(\vec{E}^J)^2 - (\vec{B}^J)^2 = (\vec{E}^M)^2 - (\vec{B}^M)^2$ e que $\vec{E}^J \cdot \vec{B}^J = \vec{E}^M \cdot \vec{B}^M$. Essas invariâncias são muito importantes. Você consegue imaginar porquê?

2. Usando os resultados dados pelas eqs.(23.33)-(23.36) e (23.49)-(23.54) mostre que, por uma mudança de referencial, a lei de Faraday em S_M se transforma numa combinação linear das leis de Faraday e de Gauss magnética em S_J . Obtenha o valor dos coeficientes desta combinação e interprete os seus significados no limite $v \rightarrow 0$.

• **resposta**

$$2. [\vec{\nabla}^M \times \vec{E}^M = -\frac{\partial B^M}{\partial t^M}] \longrightarrow \gamma [\vec{\nabla}^J \times \vec{E}^J = -\frac{\partial B^J}{\partial t^J}] - \gamma_V [\vec{\nabla}^J \cdot \vec{B}^J = 0]$$

Capítulo 25

eletromagnetismo: mudanças de referencial

• exemplo 1

João viaja num trem, onde existe uma barra em forma de paralelepípedo, de lados a , b e c , na qual uma quantidade de carga Q está distribuída uniformemente. Este trem se move para a direita em relação a Maria, que está parada numa estação, com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$, ao longo do eixo y . Os referenciais S_J e S_M , onde estão João e Maria, são mostrados na figura 25.1. Neste exemplo, desejamos determinar as densidades de carga e corrente observadas por João e Maria.

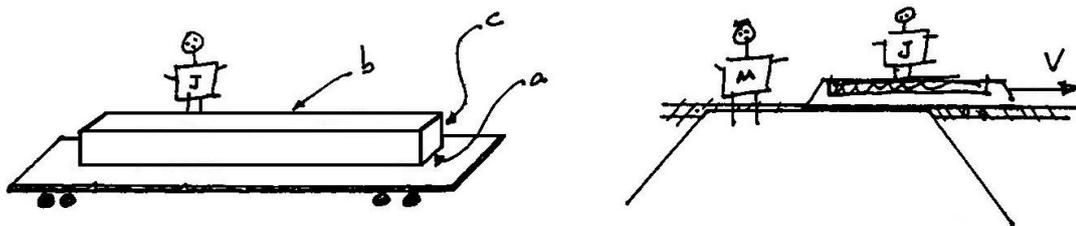


Figura 25.1: Os referenciais de S_J e S_M .

Como a barra está em repouso em relação a João, as densidades em S_J são dadas por

$$\rho^J = \frac{Q}{abc}, \quad (25.1)$$

$$\vec{j}^J = 0. \quad (25.2)$$

Estes resultados e as eqs.(23.93)-(23.96) permitem obter as densidades em relação a Maria:

$$j_x^M = 0, \tag{25.3}$$

$$j_y^M = \gamma v \rho^J = v \frac{\gamma Q}{abc}, \tag{25.4}$$

$$j_z^M = 0, \tag{25.5}$$

$$\rho^M = \gamma \rho^J = \frac{\gamma Q}{abc}. \tag{25.6}$$

O resultado para ρ^M pode ser explicado notando que, no referencial S_M , o lado da barra paralelo ao movimento relativo aparece contraído por um fator γ e o volume da barra é, portanto, dado por $a(b/\gamma)c$. Por outro lado, a quantidade de carga Q é um invariante relativístico e o seu valor é o mesmo para qualquer observador. Assim, a densidade de carga para Maria é, de fato, dada por $\rho^M = Q/a(b/\gamma)c = \gamma Q/abc$.

O resultado obtido para a densidade de corrente também pode ser explicado em termos geométricos. Para tanto, lembramos que, no referencial S_M , a corrente elétrica I^M é dada pela quantidade de carga dQ , que atravessa uma superfície matemática perpendicular à velocidade, num intervalo de tempo dt_M . Na figura 24.2 são representadas as situações nos instantes t_M e $t_M + dt_M$, onde a região hachurada corresponde à parte da barra que atravessou a superfície matemática no intervalo de tempo dt_M . O volume desta região é dado por $a(v dt_M)c$ e contém a carga $dQ = \rho^M a(v dt_M)c$. Portanto, a corrente em S_M vale

$$I^M = \frac{dQ}{dt_M} = ac v \rho^M = v \frac{\gamma Q}{b}. \tag{25.7}$$

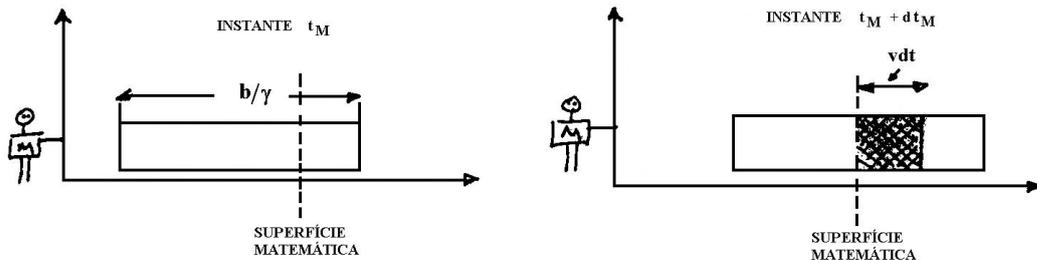


Figura 25.2: A barra no referencial S_M , em dois instantes diferentes.

A densidade superficial de corrente é, portanto, um vetor paralelo ao eixo y , cujo módulo vale

$$j_y^M = \frac{I^M}{ac} = v \frac{\gamma Q}{abc}. \tag{25.8}$$

Esta densidade de corrente está relacionada à densidade de carga por

$$\vec{j}^M = \vec{v} \rho^M. \tag{25.9}$$

• exemplo 2

É dado um capacitor plano, no vácuo, formado por duas placas paralelas, quadradas, de lados L , separadas pela distância d e carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$.

Consideramos, neste exemplo, o caso em que este capacitor está em repouso no referencial S_J , com as placas dispostas paralelamente ao plano xy . Este referencial, por sua vez, move-se para a direita em relação S_M , e o nosso problema consiste em determinar os campos e densidades de carga e corrente nos dois referenciais. Esta situação está ilustrada na figura 25.3.

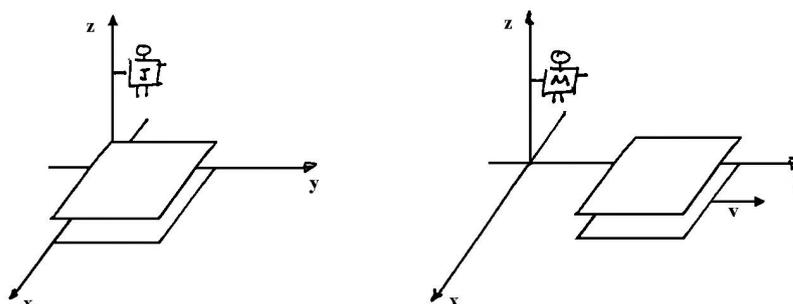


Figura 25.3: O capacitor nos referenciais S_J e S_M .

Neste problema, podemos antecipar que, no sistema S_J , existe apenas um campo eletrostático, pois as placas estão em repouso. Já no referencial S_M , o capacitor se move, arrastando consigo as cargas e dando origem a correntes. Por isso, Maria observa campos elétricos e magnéticos.

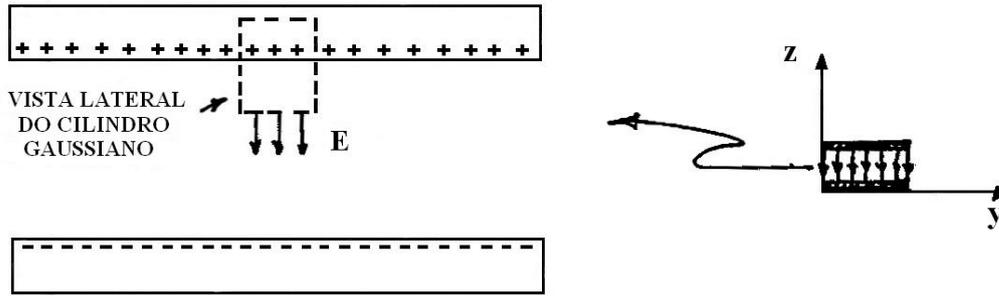
Para descrever estes campos, inicialmente colocamo-nos no referencial S_J . Como não há cargas em movimento e nem campos elétricos variáveis com o tempo, o campo magnético vale $\vec{B}^J = 0$. Se considerarmos que a distância d , entre as placas, é muito menor do que o comprimento L dos lados, podemos desprezar os efeitos de borda e supor que o campo elétrico seja nulo fóra do capacitor. Neste caso, \vec{E}^J pode ser calculado por meio da lei de Gauss. Para tanto, tomamos uma superfície gaussiana (matemática) na forma de um cilindro de raio r e altura a , com a base superior dentro do condutor e a inferior entre as placas, como indicado na figura 25.4.

O fluxo do campo elétrico através da parte da superfície gaussiana imersa no condutor é nulo porque, nesta região, $\vec{E}^J = 0$. O mesmo acontece com o fluxo através da parede lateral do cilindro, uma vez que aí a sua normal é perpendicular a \vec{E}^J . Assim, o fluxo através de toda a superfície é dado por

$$\Phi_{E^J} = \pi r^2 E^J. \quad (25.10)$$

Por outro lado, a lei de Gauss permite escrever

$$\Phi_{E^J} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\pi r^2 \sigma^J}{\epsilon_0}, \quad (25.11)$$

Figura 25.4: O capacitor no referencial S_J .

onde σ^J é a densidade superficial de cargas, dada por ???. Deste modo obtemos, para o módulo do campo elétrico,

$$\sigma^J = \frac{Q}{L^2} \quad (25.12)$$

$$E^J = \frac{\sigma^J}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} e. \quad (25.13)$$

o vetor campo elétrico \vec{E} , quando se desprezam os efeitos de borda, vale $\vec{E}^J = 0$, fora das placas, e

$$\vec{E} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} \vec{k}, \quad (25.14)$$

entre elas.

Para obter os campos e as correntes no referencial S_M , existem dois procedimentos alternativos:

1. calculam-se as densidades de carga e corrente por meio dos resultados obtidos na aula 24 e, em seguida, calculam-se os campos usando as equações de Maxwell. Simbolicamente, este procedimento é representado por $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$.
2. calculam-se os campos, usando os resultados da aula 24 e, a partir deles, as densidades, por meio das equações de Maxwell. Ou seja, $(\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M)$.

Os resultados obtidos destes dois modos são sempre totalmente equivalentes, indicando a completa consistência entre as regras de mudança de referencial e as equações de Maxwell. Na verdade, é precisamente este o significado da covariância das leis básicas do eletromagnetismo. Para deixar evidente esta equivalência calculamos, em seguida, as grandezas no referencial S_M através dos dois procedimentos.

Procedimento 1: $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$

O primeiro passo ao longo deste caminho é conhecer as densidades no referencial S_M a partir dos dados no referencial S_J . Existe, entretanto, um pequeno problema preliminar, uma vez que as leis de transformação obtidas na aula anterior envolvem densidades *volumétricas* de carga, enquanto que os dados do capacitor referem-se a densidades *superficiais* de carga. Para relacionar estas duas grandezas, notamos que uma densidade superficial de carga corresponde, na verdade, a um conjunto de cargas distribuído por uma região de espessura muito pequena. No caso do nosso capacitor plano, as cargas estão predominantemente nas superfícies internas das placas, como indicado na figura 25.5.

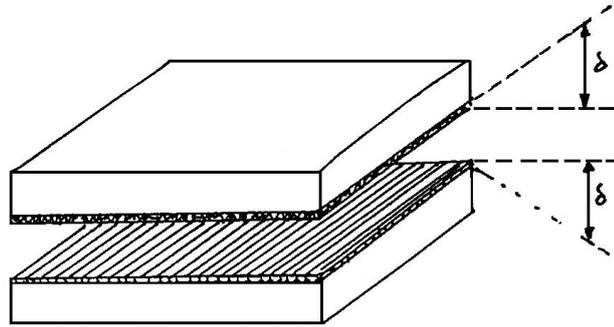


Figura 25.5: As cargas no capacitor plano.

Chamando de δ a espessura desta camada de cargas e lembrando que a quantidade de carga nela contida é Q , podemos escrever

$$Q = \sigma^J L^2 = \rho^J \delta L^2, \quad (25.15)$$

e, portanto,

$$\rho^J = \frac{\sigma^J}{\delta}. \quad (25.16)$$

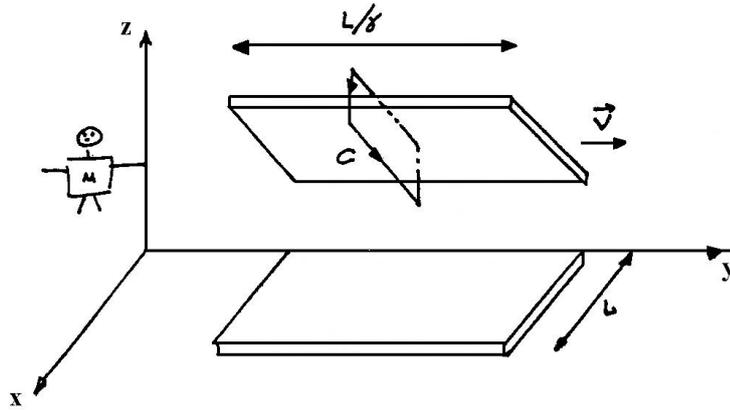
As densidades volumétricas de carga e corrente na placa superior são $\rho^J = Q/\delta L^2$ e $\vec{j}^J = 0$. Usando as eqs. (22.37)-(22.40), obtemos

$$\rho^M = \gamma \rho^J = \frac{\gamma Q}{\delta L^2}, \quad (25.17)$$

$$\vec{j}^M = \vec{v} \frac{\gamma Q}{\delta L^2}. \quad (25.18)$$

Como no exemplo anterior, ρ^M incorpora o efeito de contração das placas e $\vec{j}^M = \vec{v} \rho^M$, pois o capacitor tem as características indicadas na figura 25.6.

Para calcular os campos no referencial S_M , é conveniente reescrever estes resultados

Figura 25.6: O capacitor no referencial S_M .

em função da densidade superficial de carga σ e da corrente elétrica. Para tanto, multiplicamos estas duas expressões por δ e δL , respectivamente, e obtemos

$$\sigma^M = \gamma \sigma^J = \gamma \frac{Q}{L^2}, \quad (25.19)$$

$$I^M = v \gamma \frac{Q}{L}. \quad (25.20)$$

O campo elétrico no referencial de Maria aponta na direção $-\vec{k}$ e o seu módulo é determinado a partir da lei de Gauss elétrica, para uma superfície como a da figura 25.4, e dado por

$$E^M = \frac{\sigma^M}{\epsilon_0} = \frac{\gamma Q}{\epsilon_0 L^2}. \quad (25.21)$$

Como no caso da linha de transmissão, o campo \vec{B}^M é muito mais intenso na região entre as placas e o uso da regra da mão direita nos permite concluir que ele aponta na direção $-\vec{i}$. O seu módulo é obtido por meio da lei de Ampère aplicada ao caminho C , mostrado na figura 25.6 e vale

$$B^M = \mu_0 I^M = \mu_0 \frac{v \gamma Q}{L}. \quad (25.22)$$

Assim, os campos que Maria observa no interior do capacitor são dados pelos vetores

$$\vec{E}^M = -\frac{\gamma Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{k}, \quad (25.23)$$

$$\vec{B}^M = -\mu_0 v \frac{\gamma Q}{L^2} \vec{i}. \quad (25.24)$$

A configuração dos campos no referencial de Maria é mostrada na figura 25.7.

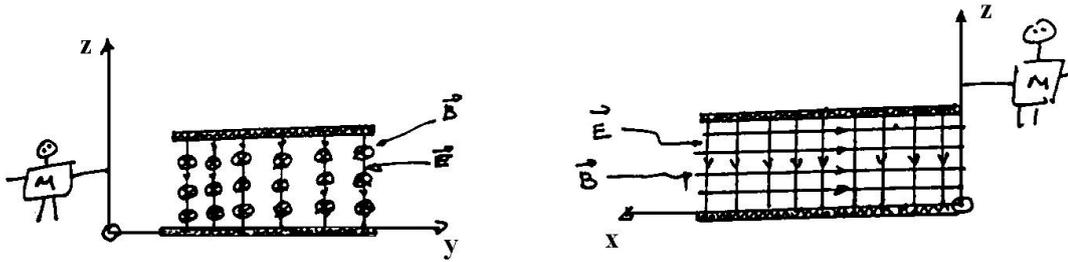


Figura 25.7: Os campos \vec{E} e \vec{B} no referencial de Maria.

Procedimento 2: $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M)$

Uma outra maneira possível para chegar aos resultados dados pelas eqs.(26.19)-(26.20) e (26.23)-(26.24) consiste em usar diretamente as transformações dos campos, obtidas na aula anterior. Para tanto, partimos dos campos no referencial de João, que são dados por

$$\vec{E}^J = -\frac{Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{k}, \quad (25.25)$$

$$\vec{B}^J = 0, \quad (25.26)$$

quando se desprezam os efeitos de borda.

Utilizando as relações entre os campos nos referenciais S_J e S_M , dadas pelas eqs.(??)-(??),

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel}^M &= \vec{E}_{\parallel}^J, & \vec{E}_{\perp}^M &= \gamma \left[\vec{E}_{\perp}^J - \vec{v} \times \vec{B}^J \right], \\ \vec{B}_{\parallel}^M &= \vec{B}_{\parallel}^J, & \vec{B}_{\perp}^M &= \gamma \left[\vec{B}_{\perp}^J + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^J \right], \end{aligned}$$

obtemos

$$\vec{E}^M = (0, 0, \gamma E^J) = \left(0, 0, -\frac{\gamma Q}{\epsilon_0 L^2} \right), \quad (25.27)$$

$$\vec{B}^M = (v E^J / c^2, 0, 0) = \left(-\frac{\mu_0 v \gamma Q}{L^2}, 0, 0 \right). \quad (25.28)$$

onde usamos $c^2 \epsilon_0 = 1/\mu_0$. Estes resultados são idênticos aos obtidos anteriormente. A partir deles, podemos obter novamente as densidades de carga e corrente, utilizando as eqs.(26.21) e (26.22).

Neste exemplo, mostramos que os dois procedimentos para o cálculo dos campos e das densidades são totalmente equivalentes. Por isso, num dado problema, a escolha de um dos caminhos é motivada apenas por critérios de conveniência.

• exemplo 3

Estudamos aqui o comportamento do mesmo capacitor considerado no exemplo anterior só que, agora, ele tem as placas dispostas perpendicularmente ao movimento, como mostra a figura 25.8.

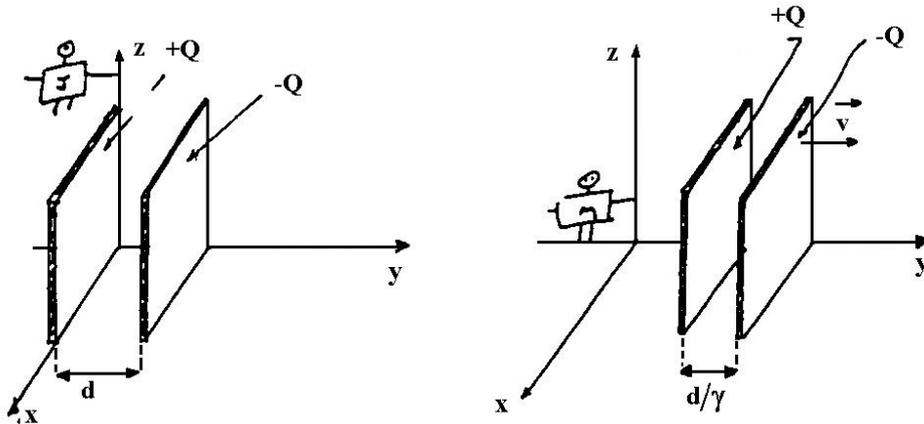


Figura 25.8: O capacitor nos referenciais S_J e S_M .

Neste caso, no referencial S_J , os campos são dados por

$$\vec{E}^J = \frac{Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{j}, \tag{25.29}$$

$$\vec{B}^J = 0. \tag{25.30}$$

Como a única componente não nula destes campos é paralela ao movimento, as equações de mudança de referencial para os campos, eqs. (??), nos permitem concluir que, no referencial S_M ,

$$\vec{E}^M = \frac{Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{j}, \tag{25.31}$$

$$\vec{B}^M = 0. \tag{25.32}$$

Ou seja, os campos no interior do capacitor nos referenciais de João e Maria são iguais. Isto ocorre porque a contração relativística afeta apenas a distância entre as placas, que não tem influência sobre o valor dos campos no interior do capacitor.

• exercício

1. Um fio dielétrico, retilíneo, muito longo, paralelo ao eixo y , está carregado com densidade superficial de carga λ , positiva.

a) determine os campos elétrico e magnético criados em todo o espaço por este fio, no referencial S_J , onde o fio está em repouso.

- b) determine os campos elétrico e magnético criados por este fio no referencial S_M , em relação ao qual o fio se move com velocidade $v\vec{j}$.
 c) determine as densidades de carga e corrente do fio, no referencial S_M .

• resposta

1.a) Para um ponto de coordenadas x^J, y^J e z^J em S_J , obtemos

$$\vec{E}^J = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x^J\vec{i} + z^J\vec{k}}{(x^J)^2 + (z^J)^2}, \quad \vec{B}^J = 0$$

b) As eqs. (??) fornecem

$$\vec{E}^M = \gamma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x^J\vec{i} + z^J\vec{k}}{(x^J)^2 + (z^J)^2}, \quad \vec{B}^M = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z^J\vec{i} - x^J\vec{k}}{(x^J)^2 + (z^J)^2}$$

Para completar esta resposta, é preciso expressar x^J e z^J em função de x^M e z^M . Usando, as transformações de Lorentz, eqs. (??), obtemos $x^M = x^J$ e $z^M = z^J$, o que fornece

$$\vec{E}^M = \gamma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x^M\vec{i} + z^M\vec{k}}{(x^M)^2 + (z^M)^2}, \quad \vec{B}^M = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z^M\vec{i} - x^M\vec{k}}{(x^M)^2 + (z^M)^2}$$

c) As leis de Gauss e Ampère em S_M fornecem $\lambda^M = \gamma\lambda^J$ e $I^M = v\gamma\lambda$.

Capítulo 26

eletromagnetismo: mudanças de referencial II

• exemplo 1

João está num trem, onde existe um fio metálico retilíneo, muito longo, paralelo ao eixo y e de seção circular, de raio a . Neste referencial, o fio é percorrido por uma corrente constante I^J , no sentido dos valores de y positivos. Maria, por outro lado, está parada na plataforma de uma estação, em relação à qual o trem se move com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$ e, neste exemplo, desejamos obter os valores das densidades de carga e corrente que ela observa. Os referenciais de João e Maria são mostrados na figura 25.1.

O fio está em repouso em relação a João e portanto, S^J corresponde ao sistema próprio do fio. Neste referencial, há igual número de cargas negativas (elétrons) e positivas (íons) no material condutor. Estas cargas estão distribuídas de modo uniforme pelo material e, no caso de correntes estacionárias, os íons estão praticamente em repouso enquanto que os elétrons se movimentam com velocidade média constante em relação ao fio. Por isso, escrevemos

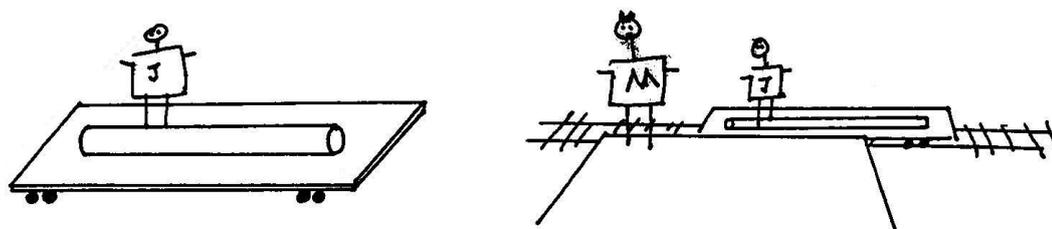


Figura 26.1: Os referenciais de João e Maria.

$$\rho^J = 0 , \quad (26.1)$$

$$J_x^J = 0 , \quad (26.2)$$

$$J_y^J = \frac{I^J}{\pi a^2} , \quad (26.3)$$

$$J_z^J = 0 . \quad (26.4)$$

As densidades no referencial de Maria são obtidas por meio das eqs.(24.91)-(24.94):

$$J_x^M = 0 , \quad (26.5)$$

$$J_y^M = \gamma J_y^J = \gamma \frac{I^J}{\pi a^2} , \quad (26.6)$$

$$J_z^M = 0 , \quad (26.7)$$

$$\rho^M = \frac{\gamma v}{c^2} J_y^J = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{I^J}{\pi a^2} . \quad (26.8)$$

Estas expressões mostram que Maria observa tanto uma corrente mais intensa do que João como uma densidade de positiva de carga. A interpretação destes resultados no contexto da relatividade é bastante interessante, como mostramos a seguir.

Para interpretar as obsevações nos dois referenciais, é preciso lembrar que um fio metálico contém, na verdade, duas densidades de carga e corrente: a dos íons positivos da rede cristalina, e a dos elétrons, rotuladas respectivamente por p (positivo) e n (negativo).

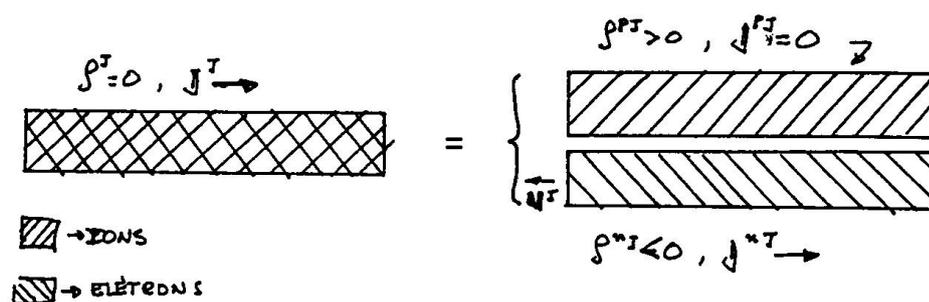


Figura 26.2: As densidades no referencial de João.

No referencial de João, a densidade total de cargas é nula e, portanto,

$$\rho^{pJ} = -\rho^{nJ} . \quad (26.9)$$

Além disso, o fio está em repouso o que, na verdade, significa que é a rede cristalina que está em repouso e, assim,

$$J^{pJ} = 0 . \quad (26.10)$$

Como a corrente I^J tem o sentido dos eixo y positivo, os elétrons movem-se com velocidade média no sentido contrário e, por isso representada por $\vec{u}_J^n = -u_J \vec{j}$. Assim, a relação usual entre as densidades de carga e corrente nos fornece

$$J^{nJ} = \vec{u}_J^n \rho^{nJ} = u_J \rho^{pJ} \vec{j} = \frac{I^J}{\pi a^2} \vec{j} , \quad (26.11)$$

onde usamos (25.9). As distribuições de cargas em S_J são mostradas na figura 25.2.

No referencial de Maria, as densidades positivas e negativas podem ser obtidas por meio das eqs.(24.91)-(24.94) como

$$J_x^{pM} = 0 , \quad (26.12)$$

$$J_y^{pM} = \gamma v \rho^{pJ} , \quad (26.13)$$

$$J_z^{pM} = 0, \quad (26.14)$$

$$\rho^{pM} = \gamma \rho^{pJ} \quad (26.15)$$

e

$$J_x^{nM} = 0, \quad (26.16)$$

$$J_y^{nM} = \gamma (-u_J + v) \rho^{nJ} \quad (26.17)$$

$$J_z^{nM} = 0, \quad (26.18)$$

$$\rho^{nM} = \gamma \left(1 - \frac{v u_J}{c^2}\right) \rho^{nJ}. \quad (26.19)$$

Estes resultados são compatíveis com as eqs.(25.5)-(25.8), pois $\vec{j}^{pM} + \vec{j}^{nM} = \vec{j}^M$ e $\rho^{pM} + \rho^{nM} = \rho^M$.

As características das densidades positivas podem ser entendidas com base no que foi discutido no exemplo 1 da aula 25. Ou seja, a contração do espaço na direção do movimento faz com que, para Maria, a densidade de carga ρ^{pM} seja maior do que ρ^{pJ} por um fator γ . Por outro lado, em S_M , a densidade de carga ρ^{pM} se move com uma velocidade \vec{v} e, por isto, corresponde a uma densidade de corrente $\vec{j}^{pM} = \rho^{pM} \vec{v}$.

O caso das densidades negativas é um pouco mais sutil. Para estudá-lo, convém notar, inicialmente, que ρ^{nM} é, em módulo, menor do que ρ^{pM} . Ou seja, as duas densidades de carga, que eram iguais no referencial de João, passam a ser diferentes quando observadas por Maria. Isto ocorre porque, em S_J , as situações das cargas negativas e positivas não são totalmente simétricas, pois os elétrons estão em movimento, enquanto que os íons da rede cristalina estão em repouso. Assim, para João, as grandezas eletromagnéticas já incorporam contrações relativísticas.

Neste problema, é possível encontrar um referencial, designado por S_e , onde os elétrons estão em repouso. Em relação a João, ele se move com velocidade $\vec{u}_J = -u_J \vec{j}$ e, por isso, para os comprimentos ao longo do movimento nos referenciais S_e e S_J , podemos escrever

$$L^J = \sqrt{1 - u_J^2/c^2} L^e . \quad (26.20)$$

Como vimos na aula anterior, isso faz com que as densidades sejam relacionadas por

$$\rho^{nJ} = \frac{1}{\sqrt{1 - u_J^2/c^2}} \rho^{ne} . \quad (26.21)$$

Por outro lado, a velocidade média dos elétrons no referencial de Maria é dada pela regra relativística de adição de velocidades discutida na aula 23. Assim,

$$u^M = \frac{-u^J + v}{1 - u^J v/c^2} \quad (26.22)$$

e, portanto,

$$\rho^{nM} = \frac{1}{\sqrt{1 - u_M^2/c^2}} \rho^{ne} . \quad (26.23)$$

Eliminando ρ^{ne} destas expressões, obtemos

$$\rho^{nM} = \sqrt{\frac{c^2 - u_J^2}{c^2 - u_M^2}} \rho^{nJ} . \quad (26.24)$$

Este resultado é idêntico ao dado pela eq.(25.19). Para mostrar isso, usamos a eq.(25.21) e escrevemos

$$\rho^{nM} = \sqrt{\frac{(1 - u_J v/c^2)^2 (c^2 - u_J^2)}{c^2(1 - u_J v/c^2)^2 - (-u_J + v)^2}} \rho^{nJ} = \sqrt{\frac{(1 - u_J v/c^2)^2}{(1 - v^2/c^2)}} \rho^{nJ} = \gamma \left(1 - \frac{u_J v}{c^2}\right) \rho^{nJ} \quad (26.25)$$

Finalmente, interpretamos o resultado para as densidades de corrente. Eliminando ρ^{nJ} das eqs.(25.17) e (25.19), podemos escrever

$$\vec{j}^{nM} = \frac{(-u_J + v)}{1 - u_J v/c^2} \rho^{nM} \vec{j} = \vec{u}^M \rho^{nM} . \quad (26.26)$$

Ou seja, o conteúdo deste resultado é exatamente o esperado do ponto de vista físico.

• exemplo 2

É dado um fio metálico, muito longo, de forma cilíndrica e com seção transversal de raio a . Este fio está em repouso em relação a João, disposto ao longo do eixo y e, neste referencial, é percorrido por uma corrente constante I^J , no sentido positivo do eixo. Maria está num outro referencial, em relação ao qual João desloca-se com velocidade $\vec{v} = v \vec{j}$. O objetivo deste exemplo é calcular os campos para os dois observadores. Esta situação corresponde novamente à descrita na figura 25.1.

Neste problema, os dados referem-se ao sistema S_J e, como discutimos na aula anterior, existem dois procedimentos alternativos que podem ser utilizados para determinar os campos no referencial de Maria:

1. calculam-se, inicialmente, as densidades de carga e corrente em S_M e, em seguida, os campos, por meio das equações de Maxwell; ou seja, $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$.
 2. calculam-se, primeiro, os campos no referencial de João e, a partir deles, os campos em S_M , utilizando as regras de mudança de referencial: $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$.
- Como também foi enfatizado na aula anterior, os resultados obtidos destes dois modos são sempre totalmente equivalentes e a escolha de um dado caminho é, em geral, motivada apenas por razões de conveniência.

A seguir, obtemos os campos no referencial de Maria, através destes dois procedimentos.

caminho 1: $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$

No referencial de João, o campo elétrico \vec{E}^J é nulo em todo o espaço, pois $\rho^J = \rho^{pJ} + \rho^{nJ} = 0$. Para calcular o campo magnético \vec{B}^J , num ponto genérico P que dista d^J do eixo y , podemos utilizar a lei de Ampère. Para tanto, é conveniente construir um caminho circular C , passando por P , pois a direção e sentido de \vec{B}^J neste ponto são dados pela tangente ao caminho. Como o ponto P pode estar tanto dentro como fora do fio, existem duas situações a serem consideradas, como mostra a figura 25-3. No caso $d^J \leq a$, temos

$$\oint_C \vec{B}^J \cdot d\vec{c} = 2\pi d^J B^J = \iint_S \mu_0 \vec{j}^J \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \frac{I^J}{\pi a^2} \pi (d^J)^2 \quad (26.27)$$

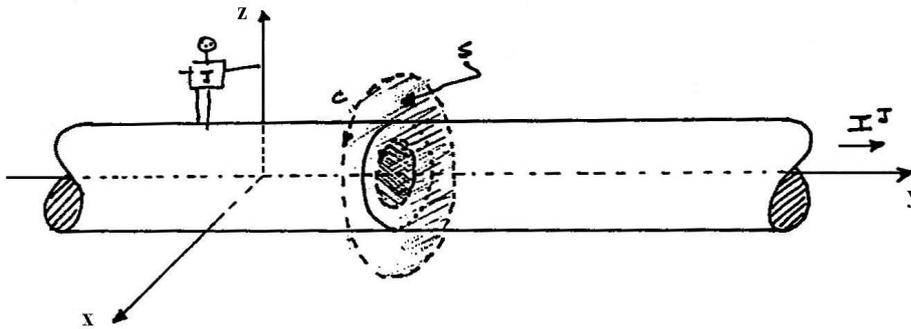


Figura 26.3: O fio, no referencial de João.

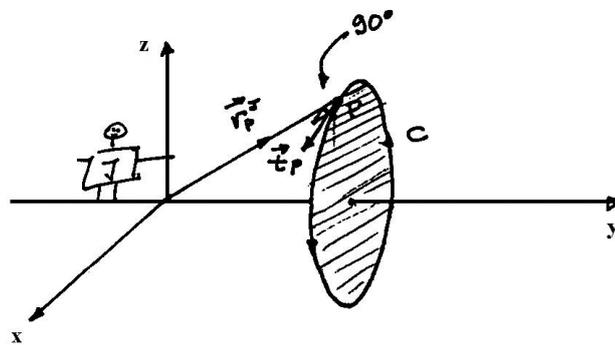


Figura 26.4: Os vetores que definem a direção e o sentido do campo magnético, no referencial de João.

O caso $j_P^J \geq a$, por outro lado, corresponde a

$$\oint_C \vec{B}^J \cdot d\vec{c} = 2\pi d^J B^J = \iint_S \mu_0 \vec{j}^J \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \frac{I^J}{\pi a^2} \pi a^2. \quad (26.28)$$

Para representar o campo magnético por meio de vetores, é preciso determinar a forma do versor \vec{t}_P^J , tangente ao caminho C no ponto P , como mostra a figura 25.4. A expressão matemática deste versor pode ser obtida a partir do vetor posição do ponto P em relação à origem, dada por $\vec{r}_P^J = x_P^J \vec{i} + y_P^J \vec{j} + z_P^J \vec{k}$, e do versor \vec{j} , normal ao plano que contém C . Para qualquer P sobre o caminho C , o versor tangente é perpendicular tanto a \vec{r}_P^J como a \vec{j} , o que indica que \vec{t}_P^J deve ser proporcional ao produto vetorial destes dois vetores. De fato, o vetor $\vec{j} \times \vec{r}_P^J = z_P^J \vec{i} - x_P^J \vec{k}$ é paralelo a \vec{t}_P^J . Para transformá-lo num versor, basta dividi-lo pelo seu módulo, que é dado por $\sqrt{x_P^{J2} + z_P^{J2}} = d^J$, e obtemos

$$\vec{t}_P^J = \frac{\vec{j} \times \vec{r}_P^J}{d^J}. \quad (26.29)$$

Assim, os vetores \vec{E}_P^J e \vec{B}_P^J , observados por João no ponto P do seu referencial, são dados por

$$\vec{E}_P^J = 0, \quad (26.30)$$

$$\vec{B}_P^J = B_P^J \frac{(z_P^J \vec{i} - x_P^J \vec{k})}{d^J}, \quad (26.31)$$

onde

$$B_P^J = \mu_0 I^J d^J / 2\pi a^2, \quad (26.32)$$

no interior do fio, e

$$B_P^J = \mu_0 I^J / 2\pi d^J, \quad (26.33)$$

na região externa a ele.

Para determinar os campos no referencial de Maria, utilizamos as densidades de carga e corrente obtidas no exemplo 1. A eq.(25.8) indica que, neste referencial, existe uma densidade de carga positiva e, conseqüentemente, um campo elétrico \vec{E}^M , que aponta radialmente para fóra do fio e pode ser calculado pela lei de Gauss. Para tanto, consideramos um ponto P genérico, distante d^M do eixo y , que pode estar tanto dentro como fora do fio, e passamos por ele uma superfície gaussiana cilíndrica de comprimento h , como indicado na figura 25.5. É importante notar que o fato de o fio estar disposto paralelamente ao eixo y faz com que a sua seção transversal fique inalterada pela mudança de referencial considerada neste problema. Por isso, também para Maria, o raio do fio vale a .

Para o interior do fio, temos

$$\iint_S \vec{E}^M \cdot \vec{n} dS = 2\pi d^M h E^M = \iiint_V \frac{\rho^M}{\varepsilon_0} dV = \pi (d^M)^2 h \frac{\rho^M}{\varepsilon_0}. \quad (26.34)$$

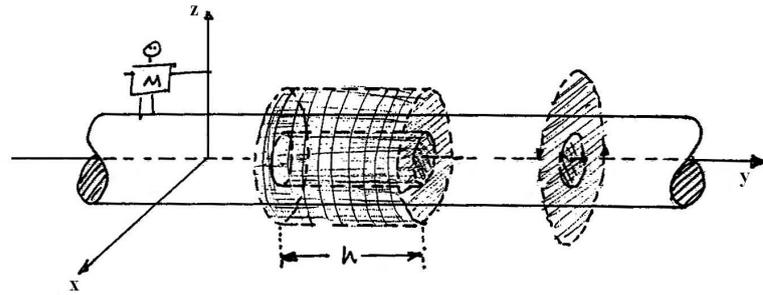


Figura 26.5: Superfícies e caminhos utilizados para o cálculo dos campos, no referencial de Maria.

No caso $d^M \geq a$, por outro lado,

$$\iint_S \vec{E}^M \cdot \vec{n} dS = 2\pi d^M h E^M = \iiint_V \frac{\rho^M}{\epsilon_0} dV = \pi a^2 h \frac{\rho^M}{\epsilon_0}. \quad (26.35)$$

No referencial de Maria, o campo elétrico aponta radialmete para fóra do eixo y e, portanto, a sua direção e sentido são paralelos à componente do vetor $r_P^M = x_P^M \vec{i} + y_P^M \vec{j} + z_P^M \vec{k}$ perpendicular ao eixo y , dada por $\vec{r}_\perp^M = x_P^M \vec{i} + z_P^M \vec{k}$, cujo módulo é $\sqrt{x_P^{M2} + z_P^{M2}} = d^M$. Assim, a direção e sentido do campo elétrico são dados por

$$\hat{\mathbf{r}}_\perp^M = \frac{(x_P^M \vec{i} + z_P^M \vec{k})}{d^M}. \quad (26.36)$$

O cálculo do campo magnético no referencial de Maria é totalmente análogo ao feito no referencial de João e, por isso, \vec{B}^M pode ser obtido diretamente a partir da eq.(25.31), bastando substituir os índices J por M . Assim, os campos observados por Maria são dados por

$$\vec{E}_P^M = E_P^M \frac{(x_P^M \vec{i} + z_P^M \vec{k})}{d^M}, \quad (26.37)$$

$$\vec{B}_P^M = B_P^M \frac{(z_P^M \vec{i} - x_P^M \vec{k})}{d^M}, \quad (26.38)$$

onde

$$E_P^M = \rho^M d^M / 2\varepsilon_0 , \quad (26.39)$$

$$B_P^M = \mu_0 I^M d^M / 2\pi a^2 , \quad (26.40)$$

para $d^M \leq a$ e

$$E_P^M = \rho^M a^2 / 2\varepsilon_0 d^M , \quad (26.41)$$

$$B_P^M = \mu_0 I^M / 2\pi d^M , \quad (26.42)$$

para $d^M \geq a$. Para colocar esta resposta em função do dado do problema, que é a corrente I^J no referencial de João, basta lembrar que as eqs.(25.5)-(25.8) nos permitem escrever $\rho^M = \gamma v I^J / (c^2 \pi a^2)$ e $I^M = \gamma I^J$. Portanto, no interior do fio, temos

$$E_P^M = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{d^M}{2\pi \varepsilon_0 a^2} I^J , \quad (26.43)$$

$$B_P^M = \gamma \frac{\mu_0 d^M}{2\pi a^2} I^J , \quad (26.44)$$

e, na região externa a ele,

$$E_P^M = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 d^M} I^J , \quad (26.45)$$

$$B_P^M = \gamma \frac{\mu_0}{2\pi d^M} I^J . \quad (26.46)$$

Para completar esta discussão, notamos que também é possível expressar os campos \vec{E}_P^M e \vec{B}_P^M diretamente em termos de \vec{B}_P^J . Para fazer isto, eliminamos I^J entre as eqs.(25.32)-(25.33) e (25.43)-(25.46), para obter os seguintes resultados, válidos tanto para o interior como para o exterior do fio:

$$E_P^M = \gamma v B_P^J, \quad (26.47)$$

$$B_P^M = \gamma B_P^J, \quad (26.48)$$

onde usamos $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$ e a igualdade entre d^M e d^J , pois estas distâncias são perpendiculares à velocidade relativa. Notando que as coordenadas nas direções x e z também são iguais nos dois referenciais, obtemos relações vetoriais diretas entre os campos observados por João e Maria, dadas por

$$\vec{E}_P^M = -\gamma \vec{v} \times \vec{B}_P^J \quad (26.49)$$

$$\vec{B}_P^M = \gamma \vec{B}_P^J. \quad (26.50)$$

Uma forma ainda mais compacta para a eq.(25.49) pode ser obtida usando a eq.(25.50) para escrever

$$\vec{E}_P^M = -\vec{v} \times \vec{B}_P^M. \quad (26.51)$$

Ou seja, neste problema é possível expressar o campo elétrico no referencial de Maria em função do campo magnético neste mesmo referencial.

• **caminho 2:** $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M)$

Neste outro caminho, podemos utilizar diretamente as eqs.(23.54)-(23.59) ou, alternativamente, as eqs.(23.65)-(23.68), que descrevem as relações entre os campos nos dois referenciais. Neste exemplo, optamos pelo primeiro conjunto, escrito em termos das componentes e utilizamos as expressões dos campos no referencial de João, dadas pela eqs.(25.30) e (25.31), para escrever

$$E_x^M = \gamma (E_x^J - v B_z^J) = -\gamma v B_P^J \frac{x_P^J}{d^J}, \quad (26.52)$$

$$E_y^M = E_y^J = 0, \quad (26.53)$$

$$E_z^M = \gamma (E_z^J + v B_x^J) = \gamma v B_P^J \frac{z_P^J}{d^J}, \quad (26.54)$$

$$B_x^M = \gamma \left(B_x^J + \frac{v}{c^2} E_z^J \right) = \gamma B_P^J \frac{z_P^J}{d^J}, \quad (26.55)$$

$$B_y^M = B_y^J = 0, \quad (26.56)$$

$$B_z^M = \gamma \left(B_z^J - \frac{v}{c^2} E_x^J \right) = -\gamma B_P^J \frac{x_P^J}{d^J}, \quad (26.57)$$

com B_P^J dado pelas eqs.(25.32) ou (25.33), dependendo de o ponto considerado estar dentro ou fóra do fio. Este resultado é totalmente equivalente ao dado pelas eqs.(25.49) e (25.50) e corresponde à resposta do problema, expressa em termos dos dados originais.

• exercícios

1. Considere a situação descrita no exemplo 1 desta aula e suponha que, agora, a velocidade do trem relativamente ao solo tenha o seu sentido invertido.

a) analise o problema fisicamente e tente identificar quais as densidades de carga e corrente que variam de um caso para outro;

b) verifique as suas expectativas efetuando novamente os cálculos, usando $\vec{v} = -v \vec{j}$ para a velocidade de João relativamente a Maria;

c) interprete fisicamente os seus resultados.

2. Considere os resultados dados pelas eqs.(25.49) e (25.50) e mostre que, no referencial de Maria, o campo elétrico aponta radialmente para "fora" do eixo y e que o campo

magnético tem a direção e o sentido previstos pela regra da mão direita.

3. Considere novamente o fio condutor do exemplo 2 e determine, no referencial de Maria, os campos elétricos e magnéticos devidos:

- a) aos elétrons livres;
- b) aos íons da rede cristalina;
- c) obtenha, a partir dos resultados anteriores, os campos resultantes.

4. Antonio mede os campos elétrico e magnético criados por um fio retilíneo muito longo e muito fino, e observa as seguintes características:

- i) o campo elétrico aponta radialmente para o eixo do fio;
 - ii) as linhas do campo magnético são circunferências, com centro no eixo do fio;
 - iii) à distância b do eixo do fio, os módulos dos campos elétrico e magnético são, respectivamente, E e B .
- a) determine as densidades de carga e corrente no referencial de Antonio; Carlos observa o mesmo fio e nota que, no seu referencial, não existe campo elétrico.
 - b) qual a velocidade de Carlos em relação a Antonio?
 - c) determine as densidades de carga e corrente no referencial de Carlos.

Capítulo 27

os campos de uma carga em movimento uniforme

Quando uma carga elétrica puntiforme está em repouso em relação a um referencial inercial, à sua volta existe um campo eletrostático, com módulo, direção e sentido dados pela lei de Coulomb. O objetivo desta aula é discutir a forma dos campos elétrico e magnético observados num outro referencial, em relação ao qual esta carga ela se move com velocidade constante.

Este é, por si só, um problema muito importante, pois ele nos permite compreender aspectos sutis do comportamento da natureza. Além disso, como veremos nas aulas seguintes, a produção de radiações eletromagnéticas, tais como luz ou ondas de rádio, está sempre associada à existência de acelerações, ou seja, a movimentos não uniformes. Por isso, para poder compreender o significado eletromagnético da não uniformidade de um movimento, é preciso estudar o comportamento cargas em sistemas inerciais, que se movem relativamente com movimento uniforme.

• a forma dos campos elétrico e magnético

João está num referencial inercial, na origem do qual existe uma carga puntiforme q , positiva, em repouso. Ele, por outro lado, move-se com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$ em relação a Maria e o nosso objetivo consiste em determinar as formas dos campos nos dois referenciais. João e Maria estão localizados nas origens dos respectivos referenciais e os seus relógios marcam $t^J = 0$ e $t^M = 0$ quando estas origens se cruzam.

No sistema de João, o campo elétrico \vec{E}^J é dado pela lei de Coulomb e não existe campo magnético \vec{B}^J . Num instante t^J , João mede estes campos num ponto P do seu sistema, descrito pelo vetor $\vec{r}^J = x^J\vec{i} + y^J\vec{j} + z^J\vec{k}$, como mostra a figura 26.1.

Portanto, esta medida corresponde a um evento e , que ocorre no ponto $(x^J, y^J, z^J; t^J)$

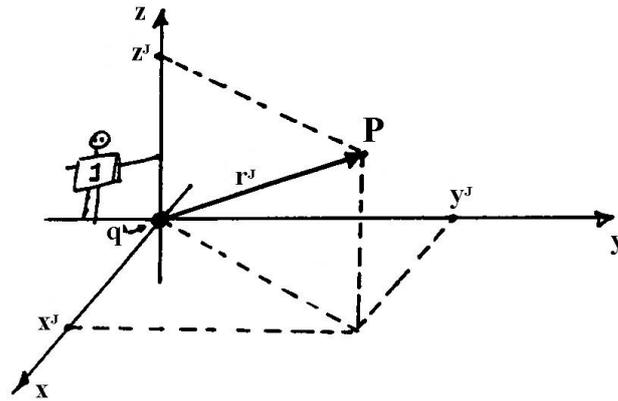


Figura 27.1: O ponto P e a carga elétrica, no referencial de João.

e resulta em

$$\vec{E}^J(\vec{r}^J; t^J) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}^J}{(r^J)^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^J\vec{i} + y^J\vec{j} + z^J\vec{k})}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}, \quad (27.1)$$

$$\vec{B}^J(\vec{r}^J; t^J) = 0. \quad (27.2)$$

Note que estas expressões não dependem do instante t^J em que a medida é feita, já que a configuração dos campos no referencial de João permanece sempre a mesma, é eterna. Se preferirmos representar este campo em termos das componentes paralela e perpendicular ao movimento relativo, podemos escrever

$$\vec{E}^J(\vec{r}^J; t^J) = \vec{E}_{\parallel}^J(\vec{r}^J; t^J) + \vec{E}_{\perp}^J(\vec{r}^J; t^J), \quad (27.3)$$

onde

$$\vec{E}_{\parallel}^J(\vec{r}^J; t^J) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^J\vec{j}}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}, \quad (27.4)$$

$$\vec{E}_{\perp}^J(\vec{r}^J; t^J) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^J\vec{i} + z^J\vec{k})}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}. \quad (27.5)$$

Para obter os campos eletromagnéticos no referencial de Maria, usamos as equações (23.63)-(23.66) , que nos permitem escrever

$$\vec{E}_{\parallel}^M = \vec{E}_{\parallel}^J = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^J \vec{j}}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}} , \quad (27.6)$$

$$\vec{E}_{\perp}^M = \gamma \left[\vec{E}_{\perp}^J - \vec{v} \times \vec{B}^J \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x^J \vec{i} + z^J \vec{k})}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}} , \quad (27.7)$$

$$\vec{B}_{\parallel}^M = \vec{B}_{\parallel}^J = 0 , \quad (27.8)$$

$$\vec{B}_{\perp}^M = \gamma \left[\vec{B}_{\perp}^J + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp}^J \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma v (z^J \vec{i} - x^J \vec{k})/c^2}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}} . \quad (27.9)$$

Uma característica importante deste resultado é que, no referencial de Maria, o campo magnético pode ser obtido a partir do campo elétrico. De fato, a condição $\vec{B}^J = 0$, permite-nos escrever as eqs.(26.7) e (26.9) como $\vec{E}_{\perp}^M = \gamma \vec{E}_{\perp}^J$ e $\vec{B}_{\perp}^M = \gamma \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}^J / c^2$, respectivamente. Eliminando \vec{E}_{\perp}^J entre estes dois resultados, obtemos a relação

$$\vec{B}^M = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^M . \quad (27.10)$$

Assim, o conhecimento de \vec{E}^M é suficiente para determinar univocamente \vec{B}^M .

Nas eqs.(26.6)-(26.9), os campos elétrico e magnético observados por Maria, estão escritos em termos das coordenadas do referencial de João. Para representar os campos coerentemente no sistema de Maria, é preciso usar as transformações de Lorentz, dadas pelas eqs.(20.22)-(20.25), que nos permitem escrever o campo elétrico como

$$\begin{aligned} \vec{E}^M &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(y^M - vt^M) \vec{j}}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}} \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x^M \vec{i} + z^M \vec{k})}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \left[x^M \vec{i} + (y^M - vt^M) \vec{j} + z^M \vec{k} \right]}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}} . \end{aligned} \quad (27.11)$$

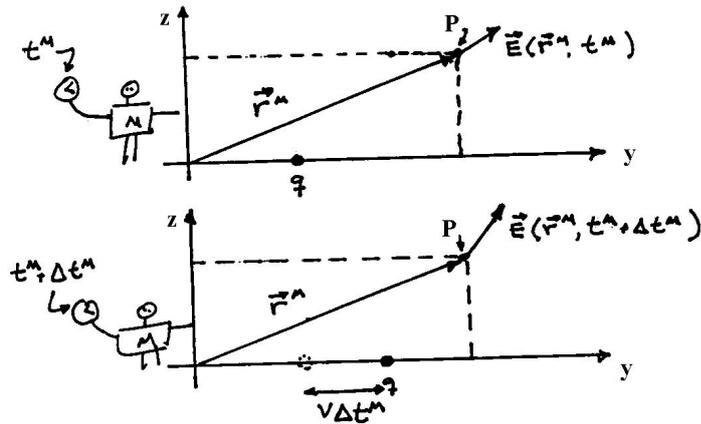


Figura 27.2: O ponto P e a carga elétrica em dois instantes diferentes, no referencial de Maria; a bem da simplicidade do desenho, consideramos o ponto P no plano yz .

Esta expressão representa de modo completo o campo elétrico observado por Maria. É interessante notar que, neste referencial, o campo no ponto P varia com o tempo. Isso ocorre porque o vetor $\vec{R}^M = x^M \vec{i} + y^M \vec{j} + z^M \vec{k}$, que descreve a posição deste ponto em relação à origem, é constante, enquanto que a carga elétrica se move à medida que o tempo passa, como indica a figura 26.2.

Do ponto de vista físico, espera-se que a forma do campo no ponto P fique mais transparente quando expressa em termos da posição deste ponto relativamente à carga, e não à origem. De fato, é isto o que ocorre com o campo dado pela eq.(26.11). Chamando de $\vec{R}^M = X^M \vec{i} + Y^M \vec{j} + Z^M \vec{k}$ o vetor com origem na carga e extremidade em P , como mostra a figura 26.3, e notando que a posição da carga no instante t^M é dada por $\vec{r}_q^M = v t^M \vec{j}$, temos

$$\begin{aligned} \vec{R}^M &= \vec{r}^M - \vec{r}_q^M \\ &= x^M \vec{i} + (y^M - v t^M) \vec{j} + z^M \vec{k}. \end{aligned} \tag{27.12}$$

Assim, podemos reescrever a eq.(26.11) como

$$\begin{aligned} \vec{E}^M &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma [X^M \vec{i} + Y^M \vec{j} + Z^M \vec{k}]}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \vec{R}^M}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \tag{27.13}$$

Esta última expressão permite-nos concluir que \vec{E}^M é paralelo a \vec{R}^M se $q > 0$ e anti-

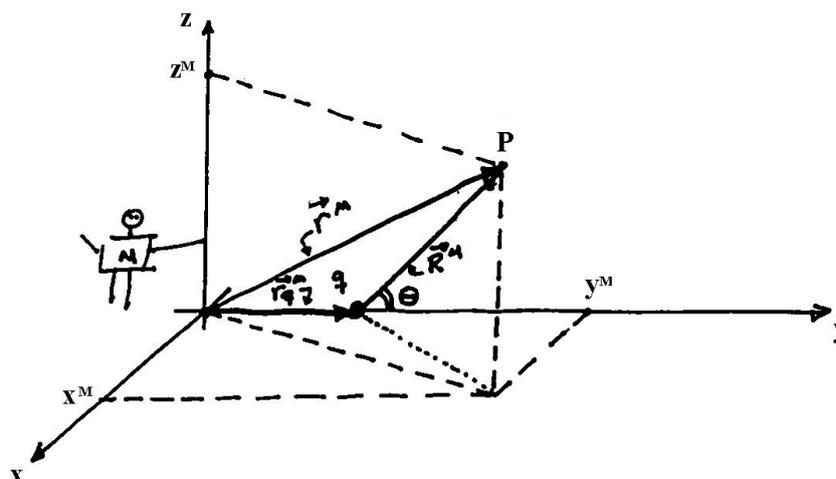


Figura 27.3: O ponto P , a carga elétrica e os vetores usados na descrição dos campos, no referencial de Maria.

paralelo, se $q < 0$. Por isso, no referencial de Maria, o campo pode ser representado por linhas de campo retílineas, que se cruzam sobre a carga e "saem" dela quando a carga é positiva e "entram" nela quando a carga é negativa.

Para estudar o módulo do campo, definimos o ângulo θ como sendo o ângulo entre o vetor \vec{R}^M e o eixo y positivo, mostrado na figura 26.3. Isto nos permite escrever a componente de \vec{R}^M paralela ao movimento como

$$Y^M = R^M \cos\theta \quad (27.14)$$

e a soma dos quadrados das componentes perpendiculares, como

$$(X^M)^2 + (Z^M)^2 = (R^M)^2 \sin^2\theta. \quad (27.15)$$

A função das coordenadas no denominador da eq.(26.13) pode, então ser colocada na forma

$$\begin{aligned} (X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2 &= \gamma^2(R^M)^2 \cos^2\theta + (R^M)^2 \sin^2\theta \\ &= \gamma^2 (R^M)^2 \left[\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2} \right] \\ &= \gamma^2 (R^M)^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\theta \right] \end{aligned} \quad (27.16)$$

e o campo elétrico, expresso por

$$\vec{E}^M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}^M}{\gamma^2 (R^M)^3 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right]^{3/2}}. \quad (27.17)$$

Esta expressão sintetiza todas as características do campo elétrico de uma carga puntual com velocidade constante, no referencial de Maria. Algumas destas propriedades de \vec{E}^M são análogas às do campo coulombiano \vec{E}^J , observado por João, tais como:

- i:** o campo elétrico \vec{E}^M é radial, pois \vec{E}^M e \vec{R}^M têm a mesma direção;
- ii:** ele "sai" de cargas positivas e "entra" em cargas negativas;
- iii:** o módulo do campo elétrico varia com o inverso do quadrado da distância da carga ao ponto considerado;

Por outro lado, existem outras características marcadamente diferentes, associadas ao módulo de \vec{E}^M , dado por

$$E^M(R^M, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - v^2/c^2]}{(R^M)^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right]^{3/2}}. \quad (27.18)$$

Assim,

- i:** $|\vec{E}^M|$ depende de v , a velocidade da carga;
- ii:** ele depende, também, de θ , o ângulo entre a direção do ponto P relativamente à carga e o eixo y , o que significa que não há simetria esférica do campo.

Finalmente, é interessante lembrar que o campo elétrico determina o campo magnético, através da eq.(26.10).

• interpretação dos resultados

Quando uma carga se move, o seu campo elétrico torna-se diferente do coulombiano. A principal novidade é que esse campo elétrico não é mais esfericamente simétrico, pois ele agora depende do ângulo θ , com um coeficiente proporcional a v^2/c^2 . Para estudar a forma desta dependência, é conveniente reescrever a eq.(26.17) como

$$\vec{E}^M = f(v, \theta) \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}^M}{(R^M)^3} \right]. \quad (27.19)$$

onde

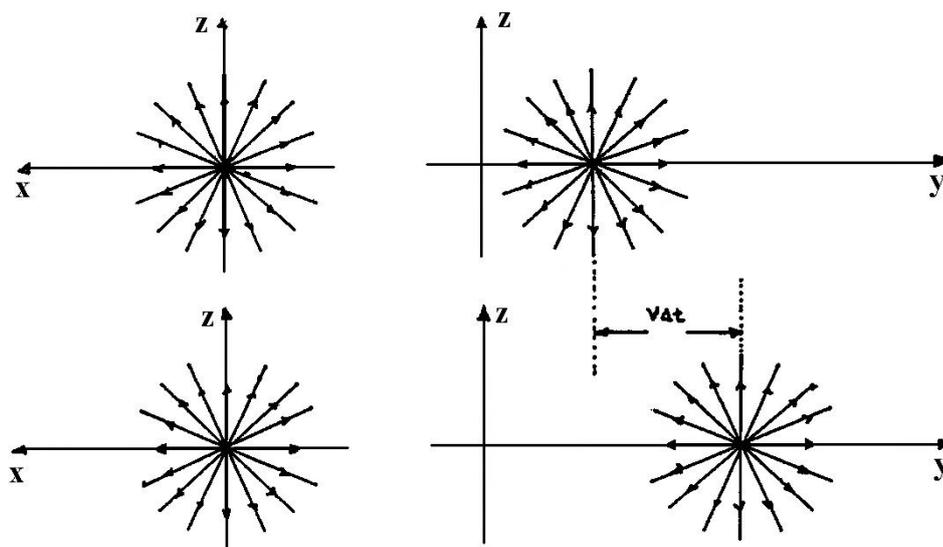


Figura 27.4: O campo elétrico de uma carga com velocidade baixa, no referencial de Maria, em dois instantes diferentes.

$$f(v, \theta) = \frac{1 - v^2/c^2}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right]^{3/2}}. \quad (27.20)$$

Nesta representação, o fator entre colchetes tem a forma do campo coulombiano usual, enquanto que o fator $f(v, \theta)$ incorpora a dependência do módulo de \vec{E}^M com o ângulo θ , quando a velocidade da carga é v .

Uma consequência imediata desta expressão é que, para velocidades baixas comparadas à da luz, o fator $f(v, \theta)$ torna-se praticamente igual a 1 e o campo \vec{E}^M pode ser considerado, em boa aproximação, como sendo esfericamente simétrico. Assim, no referencial de Maria, temos simplesmente o arrastamento de um campo quase coulombiano, como mostra a figura 26.4.

Uma característica importante do fator $f(v, \theta)$ é que ele não depende do ângulo azimutal e, portanto, todos os pontos com um mesmo θ e um dado R^M têm o mesmo valor de E^M . Estes pontos estão apoiados sobre um cone de abertura angular θ , com um vértice na carga, como mostra a figura 26.5.

Na tabela 26.1 apresentamos alguns valores da função $f(v, \theta)$, que exemplificam as dependências com o ângulo e a velocidade. No caso do comportamento angular, podemos notar uma simetria em torno da direção $\theta = 90^\circ$, que decorre do fato de a dependência em θ estar toda contida no fator $\sin^2 \theta$.

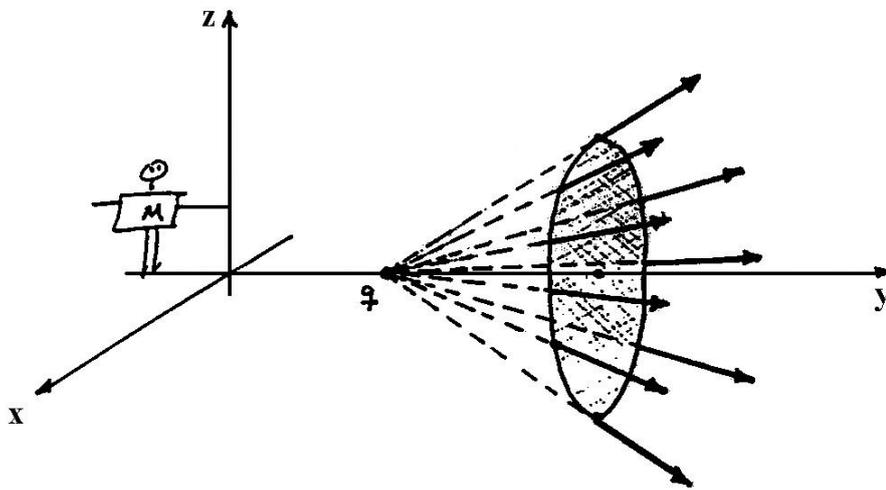


Figura 27.5: O cone tem abertura θ , os vetores mostrados representam o campo elétrico e todos eles têm o mesmo módulo.

θ (graus)	$v = 0.1 c$	$v = 0.5 c$	$v = 0.9 c$	$v = 0.99 c$
0	0.990	0.750	0.190	0.020
30	0.994	0.826	0.267	0.030
60	1.001	1.024	0.773	0.146
90	1.005	1.155	2.294	7.089
120	1.001	1.024	0.773	0.146
150	0.994	0.826	0.267	0.030
180	0.990	0.750	0.190	0.020

A tabela mostra, também que, para qualquer valor não nulo de v , a função $f(v, \theta)$ assume valores menores do que 1 para direções paralelas ao eixo y e maiores do que 1 para direções perpendiculares a ele. De fato, usando $\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$ na eq.(26.20), temos

$$f(v, \theta = 0) = f(v, \theta = 180^\circ) = \frac{1}{\gamma^2} \leq 1 . \quad (27.21)$$

Por outro lado, para o plano que contém a carga e é perpendicular ao eixo y , escrevemos

$$f(v, \theta = 90^\circ) = \gamma \geq 1 . \quad (27.22)$$

Assim, os módulos do campo elétrico nestas direções particulares são dados por

$$E^M(R^M, \theta = 0) = E^M(R^M, \theta = 180^\circ) = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^M)^2} \right] , \quad (27.23)$$

$$E^M(R^M, \theta = 90^\circ) = \gamma \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^M)^2} \right] . \quad (27.24)$$

Estes são os valores extremos de E^M . Para valores de θ nos intervalos $0 < \theta < \pi/2$ e $\pi/2 < \theta < \pi$, temos que $0 < \text{sen}^2\theta < 1$ e, portanto $E^M(R^M, \theta = 0) = E^M(R^M, \theta = 180^\circ) < E^M(R^M, \theta) < E^M(R^M, \theta = 90^\circ)$. Assim, no referencial de Maria, para uma distância R^M fixa, os maiores valores do módulo de \vec{E}^M estão no plano que contém a carga e é perpendicular a y , enquanto que os menores valores estão sobre este eixo, como ilustra a figura 26.6.

A mesma situação pode, também, ser representada por meio de linhas de campo, como mostra a figura 26.7. Neste caso, o aumento da densidade de linhas campo sobre o plano perpendicular à velocidade da carga corresponde ao aumento da intensidade do campo naquela região.

Um outro aspecto importante dese problema é que a assimetria das linhas de campo aumenta com a velocidade da carga. Quanto maior for esta velocidade, tanto maior será a concentração de linhas de campo na direção perpendicular ao movimento, como evidencia a linha da tabela 26.1 correspondente a 90° .

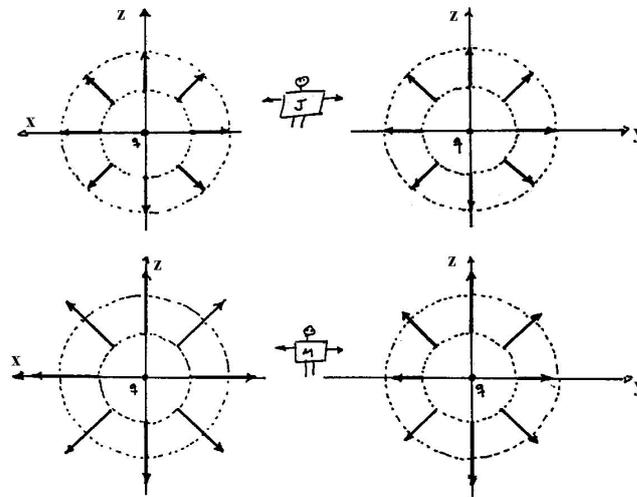


Figura 27.6: Os campos elétricos à mesma distância da carga nos referenciais de João e Maria, nos planos xz e yz .

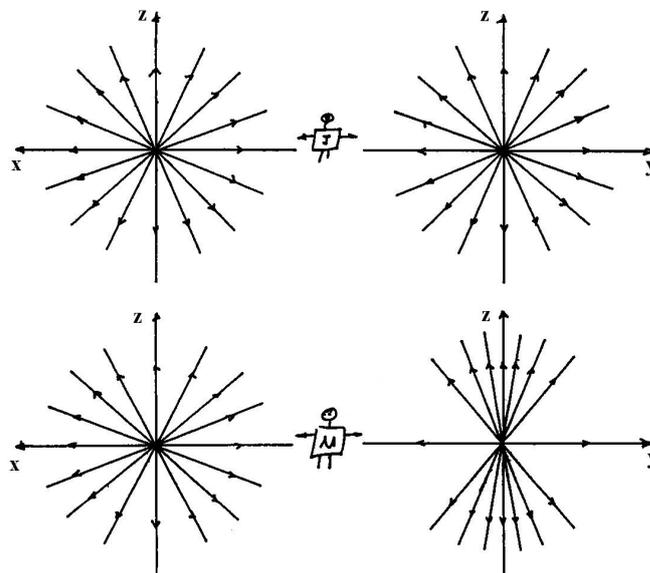


Figura 27.7: As linhas de campo elétrico nos referenciais de João e Maria, nos planos xz e yz .

• um pouco de intuição

O fato de o campo elétrico de uma carga em movimento ser menos intenso ao longo da direção da velocidade e mais intenso nas direções perpendiculares a ela, quando comparado ao campo de uma carga idêntica e em repouso, pode ser associado a uma espécie de migração das linhas de campo devida ao movimento.

As linhas de campo elétrico de uma dada carga podem ser pensadas como um conjunto de varetas rígidas, cada uma delas de comprimento infinito e com uma das pontas presa à carga. Além disso, podemos também pensar que cada uma das linhas está "costurada" no espaço, "grudada" nele. Quando a carga está em repouso, estas varetas estão distribuídas isotropicamente em torno da carga. Por outro lado, se a carga estiver em movimento, as varetas passam a se acumular na direção transversal à velocidade, devido à contração do espaço.

O funcionamento deste mecanismo pode ser ilustrado, determinando a orientação de uma linha de campo elétrico genérica, de uma carga que se move com velocidade v , ao longo do eixo y . Para tanto, colocamo-nos, inicialmente, no referencial de João, onde a carga está em repouso, e consideramos a linha L , situada sobre o plano yz e formando o ângulo θ^J com o eixo y , como mostra o lado esquerdo da figura 26–8. Um ponto P sobre esta linha tem coordenadas $P : (0, y_P^J, z_P^J)$ e, para θ^J , vale a relação

$$\tan\theta^J = \frac{z_P^J}{y_P^J}. \quad (27.25)$$

No referencial de Maria, por outro lado, o espaço de João aparece contraído e, portanto, as coordenadas do ponto P passam a ser $P : (0, y_P^M = y_P^J/\gamma, z_P^M = z_P^J)$. Conseqüentemente, a linha L , em S_M , faz um ângulo θ^M com o eixo y , onde

$$\tan\theta^M = \frac{z_P^M}{y_P^M} = \gamma \tan\theta^J. \quad (27.26)$$

Este resultado indica que, para velocidades não nulas, $\theta^M > \theta^J$. Ou seja, que a linha L "migra" em direção ao plano perpendicular ao movimento. Tudo se passa como se, ao se contrair numa mudança de referencial, o espaço carregasse consigo as linhas de campo elétrico grudadas nele.

Esta característica do campo elétrico está diretamente relacionada ao fato de a carga ser uma grandeza que independe do referencial. De acordo com a lei de Gauss, o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada qualquer é proporcional à carga nela

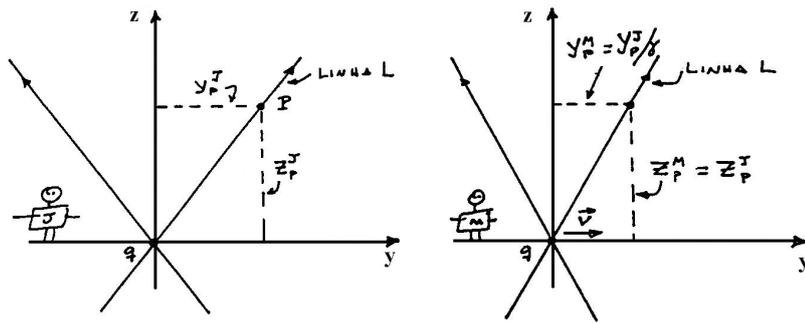


Figura 27.8: A migração das linhas de campo elétrico.

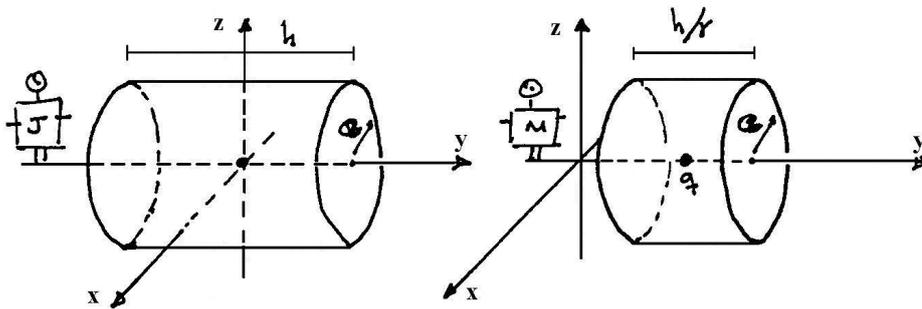


Figura 27.9: Superfícies gaussianas nos referenciais de João e Maria.

contida. Como esta carga é um invariante por transformações relativísticas, o mesmo acontece com o fluxo do campo através da superfície que a contém.

Consideremos, por exemplo, a figura 26.9, que mostra como João e Maria observam uma mesma caixa cilíndrica, que envolve a carga q . Nos dois referenciais, as superfícies perpendiculares à direção do movimento são idênticas, enquanto que, em S_M , a superfície paralela à direção do movimento aparece contraída por um fator $1/\gamma$. Para estudar o comportamento do fluxo do campo elétrico através dessas duas superfícies, consideramos, inicialmente, o que acontece com as "tampas" circulares.

No referencial S_J , o fluxo de \vec{E}^J sobre a "tampa" direita do cilindro é dado por

$$\phi_{\vec{E}^J} = \iint \vec{E}^J \cdot \vec{j} dS^J = \int_0^a d\alpha \alpha \int_0^{2\pi} d\phi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{[\alpha^2 + h^2]^{3/2}}, \quad (27.27)$$

onde $\alpha = \sqrt{(x^J)^2 + (z^J)^2}$. Efetuando a integração, obtemos

$$\phi_{\vec{E}^J}^{tampa} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right]. \quad (27.28)$$

Já no referencial de Maria, o fluxo de \vec{E}^M sobre a superfície direita do cilindro é calculado usando-se a eq.(26.13) e obtemos

$$\phi_{\vec{E}^M}^{tampa} = \iint \vec{E}^M \cdot \vec{j} dS^M = \int_0^a d\alpha \alpha \int_0^{2\pi} d\phi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(h/\gamma)}{[\alpha^2 + \gamma^2(h/\gamma)^2]^{3/2}}, \quad (27.29)$$

onde usamos o fato de que, em S_M , a altura do cilindro é h/γ . Comparando este resultado com a eq.(26.27), podemos concluir que os fluxos sobre as tampas dos cilindros são idênticos nos dois referenciais. Isto corresponde à idéia de que o mesmo "número" de linhas de força atravessa as bases de ambos os cilindros.

Por outro lado, a lei de Gauss aplicada às duas superfícies fechadas nos fornece

$$\phi_{\vec{E}^J}^{cilindro} = \phi_{\vec{E}^M}^{cilindro} = \iint_{S^J} \vec{E}^J \cdot \vec{n}^J dS^J = \iint_{S^M} \vec{E}^M \cdot \vec{n}^M dS^M = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (27.30)$$

Para que isto aconteça, os fluxos através das superfícies laterais dos dois cilindros devem ser iguais e, portanto, as linhas de campo no referencial de Maria, devem ser "arrastadas" em direção ao plano perpendicular ao movimento.

• o campo magnético

No referencial de Maria existe um campo magnético que, como discutimos anteriormente, pode ser obtido a partir do campo elétrico, por meio da eq.(26.10). Assim,

$$\begin{aligned} \vec{B}^M &= \frac{v\vec{j}}{c^2} \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma [X^M\vec{i} + Y^M\vec{j} + Z^M\vec{k}]}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{v}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma [-X^M\vec{k} + Z^M\vec{i}]}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (27.31)$$

Esta expressão mostra que o campo magnético é sempre perpendicular a \vec{v} e \vec{E}^M e seu módulo é proporcional ao seno do ângulo entre estes dois vetores. Deste modo, $|\vec{B}^M|$ é nulo ao longo do eixo y , e máximo no plano que contém a carga e é paralelo a xz . Além disso, a simetria em torno do eixo y , direção do movimento, faz com que as linhas do campo magnético sejam círculos com centro neste eixo. Este resultado indica que a direção e o sentido de \vec{B}^M são coerentes com o uso da regra da mão direita, enquanto que

o seu módulo é diretamente proporcional ao do campo elétrico. Como o módulo de \vec{E}^M aumenta com a velocidade nas direções perpendiculares à velocidade, o mesmo acontece com a intensidade do campo magnético, dada por

$$B^M = \frac{v}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\sqrt{(X^M)^2 + (Z^M)^2}}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}}. \quad (27.32)$$

O fato de B^M ser proporcional a v indica que, no sistema de repouso da partícula, temos o resultado esperado de um campo magnético nulo. Por outro lado, para qualquer velocidade v não nula, há um campo magnético em todo o espaço. No limite de partículas extremamente relativísticas, o campo magnético fica predominantemente confinado no plano perpendicular ao movimento, o que acontece também com o campo elétrico.

Para completar esta apresentação dos campos de uma carga em movimento uniforme, é interessante discutir como Maria explica a existência de um campo magnético no seu próprio referencial. É correto pensar que, em S_M , o movimento da carga está associado a uma corrente elétrica I^M que, pela lei de Ampère, dá origem a \vec{B}^M . Entretanto, é difícil estabelecer a relação matemática entre I^M e \vec{B}^M , porque a corrente elétrica existe, em cada instante, apenas no ponto onde está a carga.

Por isso, é mais conveniente associar o campo magnético à variação temporal do campo elétrico, por meio da lei de Maxwell. Para calcular o campo \vec{B}^M num ponto P genérico, tomamos o caminho fechado C , passando por este ponto, sobre o qual apoiamos uma superfície plana S , como mostra a figura 26–10. Como a direção e o sentido de \vec{B}^M são conhecidos de antemão, a lei de Maxwell nos permite obter o módulo do campo, que está relacionado ao fluxo da variação temporal do campo elétrico através da superfície S .

A eq.(26.11) nos permite escrever

$$\frac{d\vec{E}^M}{\vec{E}^M} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \left\{ \frac{3\gamma^2(y^M - vt^M) [x^M\vec{i} + (y^M - vt^M)\vec{j} + z^M\vec{k}]}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{5/2}} - \frac{\vec{j}}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}} \right\} \quad (27.33)$$

e o fluxo de $d\vec{E}^M/dt^M$ através da superfície S , cuja normal é \vec{j} , é dado por

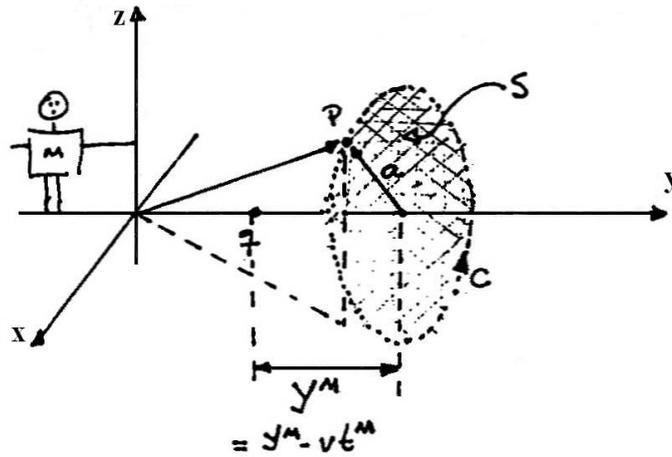


Figura 27.10: O caminho e a superfície usados no cálculo do campo magnético, no referencial de Maria.

$$\begin{aligned} \Phi_{d\vec{E}^M/dt^M} &= \iint_S \frac{d\vec{E}^M}{dt^M} \cdot \vec{n} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \iint_S dS \left\{ \frac{3\gamma^2(Y^M)^2}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{5/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (27.34)$$

onde usamos as variáveis definidas na eq.(26.12). Para efetuar a integração, é conveniente utilizar as mesmas variáveis empregadas na eq.(26.27) e escrevemos

$$\begin{aligned} \Phi_{d\vec{E}^M/dt^M} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \int_0^a \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \frac{3\gamma^2(Y^M)^2}{[\alpha^2 + \gamma^2(Y^M)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[\alpha^2 + \gamma^2(Y^M)^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \pi \int_{\gamma Y^M}^{\sqrt{a^2 + \gamma^2(Y^M)^2}} d\beta \left\{ \frac{3\gamma^2(Y^M)^2}{\beta^{5/2}} - \frac{1}{\beta^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v 2\pi \frac{a^2}{[a^2 + \gamma^2(Y^M)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (27.35)$$

com $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2(Y^M)^2}$.

Usando o fato de $|\vec{B}^M|$ ser constante sobre o caminho C e a eq.(26.33), podemos escrever a lei de Maxwell como

$$\oint_C \vec{B}^M \cdot d\vec{c} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}^M}{\partial t^M} \cdot \vec{n} dS, \quad (27.36)$$

$$2\pi a B^M = \mu_0 \epsilon_0 \Phi_{d\vec{E}^M/dt^M}$$

e, portanto,

$$B^M = \mu_0 \epsilon_0 v \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \gamma \frac{a}{[a^2 + \gamma^2 (Y^M)^2]^{3/2}}. \quad (27.37)$$

Este resultado é idêntico ao da eq.(26.32), indicando que, de fato, Maria pode atribuir a existência de um campo magnético no seu referencial à variação temporal do campo elétrico.

• exercícios

1. Mostre que a direção e o sentido do campo magnético expresso pela eq.(26.10) são coerentes com a "regra da mão direita".
2. Considere a figura 26.3, suponha que os vetores \vec{r}^M e \vec{r}_q^M sejam conhecidos e calcule:
 - a) a distância do ponto P à carga q;
 - b) a distância da projeção do ponto P no plano xy à carga q;
 - c) $\cos\theta$.
3. Considere as linhas de campo elétrico de uma carga em repouso, situadas sobre o plano yz e formando os ângulos de 30° , 45° e 60° com o eixo z . Determine as orientações destas mesmas linhas quando a carga se move com velocidade $v = 0,95c$, ao longo do eixo y .
4. Faça um desenho semelhante à figura 26.6 representando, em escala, o campo elétrico de uma carga que se move com velocidade $v = 0,95c$. Adote uma escala tal que a maior flecha possível tenha 10 cm.
5. Faça um desenho análogo ao da figura 26.6, representando o campo magnético por meio de flechas.

Capítulo 28

radiação I

Uma carga elétrica puntiforme em repouso tem, ao seu redor, um campo eletrostático radial e esfericamente simétrico. Quando esta carga se move com velocidade constante, ela “arrasta” consigo um campo elétrico radial que não apresenta simetria esférica e um campo magnético que pode ser determinado pelo campo elétrico, através da expressão 26.10, da aula anterior. O objetivo desta aula e da seguinte consiste em estudar como se comportam os campos desta carga quando ela é acelerada. Veremos que, neste caso, as linhas de campo elétrico deixam de ser retilíneas e que isto corresponde à existência de ondas eletromagnéticas. De modo muito geral, a aceleração de uma carga elétrica está sempre associada à produção de ondas eletromagnéticas, ou seja, à radiação. E a recíproca também é verdadeira: toda radiação eletromagnética é devida a cargas aceleradas. Para podermos discutir este processo extremamente importante é preciso, inicialmente, compreender um pouco melhor se comportam os campos de uma carga em movimento uniforme à medida em que ela se move.

• a direção do campo elétrico

Quando uma carga elétrica q , positiva, se move com velocidade constante v ao longo do eixo y , as suas linhas de campo têm, num dado instante, as características mostradas na figura 27.1. Suponhamos que um observador, fixo em um ponto P do espaço, deseje medir, neste instante, a direção deste campo elétrico. Para tanto, ele poderia usar uma “bússola elétrica”, como a da figura 27.2, constituída por duas cargas pontuais de sinais opostos, separadas por uma barra isolante. Esse aparelho, que nada mais é do que um dipolo elétrico com centro fixo, tende a se alinhar paralelamente ao campo elétrico existente nas vizinhanças do ponto onde ele está localizado. Se este sistema tiver pouca inércia, este alinhamento pode ocorrer muito rapidamente.

Como o campo elétrico criado pela carga q em movimento uniforme é sempre radial, esta carga e as duas do dipolo elétrico estão sempre alinhadas, como mostra a figura 27.3. À medida em que a carga se move, a “bússola elétrica” acompanha esse movimento,

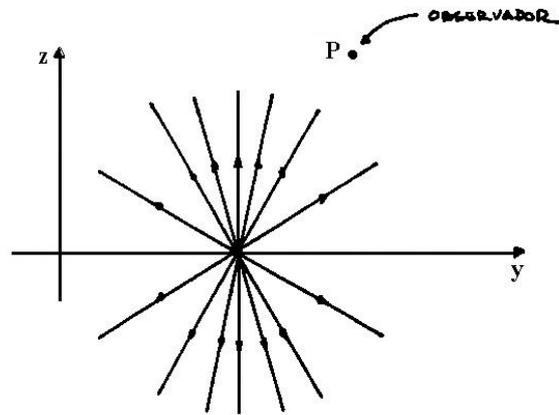


Figura 28.1: Linhas de campo de uma carga positiva em movimento uniforme e o ponto P , onde se encontra um observador.

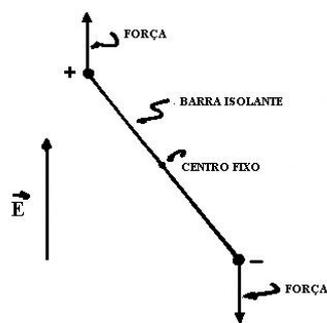


Figura 28.2: A “bússola elétrica”.

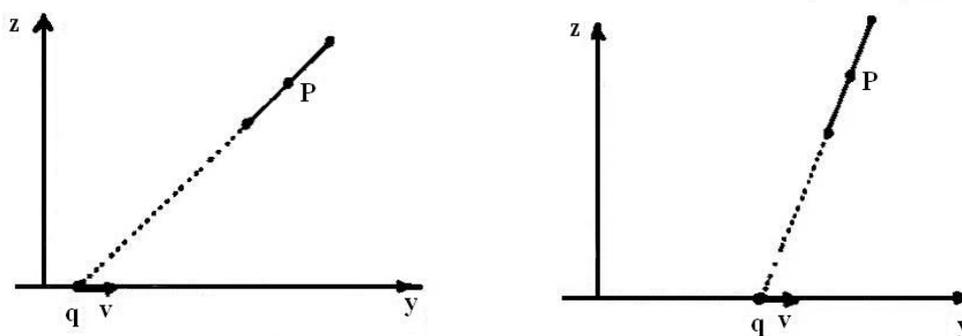


Figura 28.3: A “bússola elétrica”, apontando para a carga em dois instantes diferentes.

girando em torno do ponto P . Como a “bússola” indica a direção de \vec{E} , o observador pode afirmar que o movimento da carga é acompanhado por uma rotação do campo elétrico em torno do ponto P .

Esta situação bastante simples dá margem a várias perguntas interessantes. Uma delas é a seguinte: num certo instante, a “bússola elétrica” aponta para onde a carga está ou para onde ela esteve? Para elucidar esta questão lembramos que, no caso de uma carga em movimento uniforme, o campo elétrico é sempre radial, o que faz com que a sua direção no ponto P seja, em qualquer instante, a da reta que une este ponto à carga. Portanto, o dipolo aponta para onde a carga está. Isto ocorre porque a carga e as suas linhas de campo formam um único desenho, que se translada sem modificações. Em particular, as linhas de campo não podem ser simultaneamente retilíneas e apontar para onde a carga esteve, já que isto corresponderia a desgrudar as linhas da carga, e a lei de Gauss seria violada.

As linhas de campo elétrico de uma carga com velocidade constante **não** são análogas aos raios emitidos por uma fonte luminosa puntiforme, tal com uma lâmpada pequena. A lâmpada emite luz, mas a carga **não** emite campo e, por isto estas duas situações não são semelhantes. Por exemplo, se pusermos uma lâmpada acesa e uma carga elétrica num único carrinho pequeno, que se move com velocidade constante, aparelhos de medida das direções do campo e dos raios de luz, colocados num mesmo lugar, apontariam em direções diferentes. O detetor de luz apontaria para onde o carrinho havia estado alguns instantes antes, enquanto que o dipolo elétrico apontaria exatamente para onde ele está, pois as linhas de campo elétrico não se atrasam, como acontece com os raios de luz. Esta situação está ilustrada na figura 27.4.

O fato de as linhas de campo elétrico de uma carga em movimento uniforme serem retas que passam por ela dá origem a uma outra questão: é possível que um observador, medindo apenas a direção deste campo elétrico num dado instante, possa saber com certeza a posição da carga neste mesmo instante, independentemente da distância dela ao ponto onde ele se encontra? A resposta é sim, ele pode. Para tanto, basta que ele calcule a interseção da direção do campo elétrico que ele mede, com o eixo y . Por outro

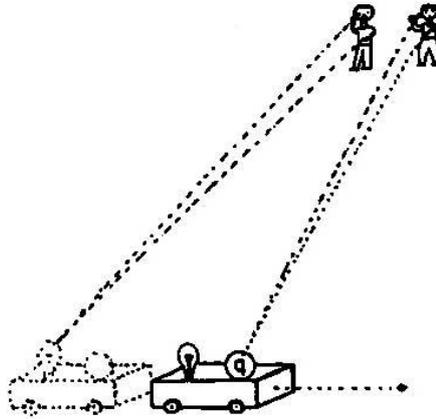


Figura 28.4: A lâmpada e a carga, observadas por meio de raios de luz e linha de campo elétrico.

lado, esta resposta parece ser paradoxal pois, no contexto da relatividade, não é possível a transmissão instantânea de informação entre dois pontos do espaço. A maior velocidade com que essa informação pode viajar é a velocidade da luz. Para podermos entender porque este paradoxo é apenas aparente, é preciso saber o que acontece com os campos de uma carga quando ela é acelerada.

• o efeito da aceleração

Imagine um observador no interior de um laboratório, na forma de um cubo, com as dimensões e localização indicadas na figura 27.5. Na sua parede traseira, contida no plano yz , está instalada uma bússola elétrica e, nas paredes laterais esquerda e direita, existem orifícios juntos ao eixo y . Uma carga elétrica positiva move-se, com velocidade constante v , ao longo do eixo y , passando pela origem no instante $t = 0$. É possível, numa situação como esta, que um observador no interior do laboratório, olhando apenas o dipolo elétrico, possa prever o instante em que a carga entrará no laboratório, pelo buraco na parede?

De modo geral, a resposta é **não**. Isto é, não necessariamente. O que se pode afirmar com certeza é que, se não houver alteração no movimento da partícula até o instante $t = 2l/v$, a bússola estará apontando para o buraco da parede esquerda exatamente no instante em que a carga nele aparece. Mas, para que isso aconteça, é fundamental que a velocidade da carga não seja alterada. O nosso objetivo aqui é estudar o que acontece quando essa condição não é satisfeita.

Suponha, por exemplo, que sobre o eixo y , um pouco antes do buraco na parede esquerda, haja um obstáculo capaz de parar a partícula, não permitindo que ela entre no laboratório. Quando a carga pára, o que acontece com a bússola elétrica? Será que ela pode parar de girar exatamente no mesmo instante? Para que isto ocorra, seria necessário

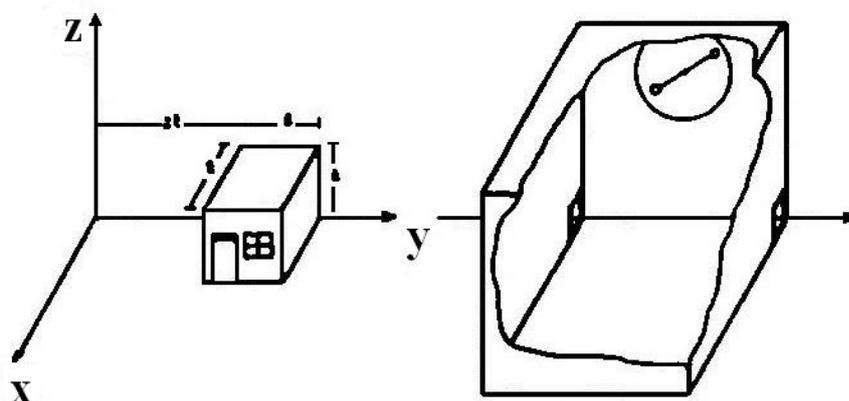


Figura 28.5: O laboratório é o cubo de lado ℓ e o dipolo elétrico está pendurado na parede traseira.

que o dipolo elétrico fosse instantaneamente informado de que a carga parou. Entretanto, de acordo com a relatividade, isso não pode acontecer.

De fato, uma das conseqüências mais importantes da teoria da relatividade é a impossibilidade de troca instantânea de informação entre dois pontos. Isto corresponderia a esta informação viajar com velocidade infinita enquanto que, segundo a relatividade, a maior velocidade com que um sinal pode ir de um ponto a outro é c , a velocidade da luz. Por isso, bússola elétrica leva necessariamente algum tempo para saber que a carga parou. O que faz ela enquanto isso? Qual é o campo elétrico na região em que ela se encontra, desde que a carga pára até a chegada desta informação nesta região?

Do ponto de vista lógico, a resposta a tal pergunta é simples: se a informação de que a carga parou ainda não chegou às vizinhanças bússola, então o campo elétrico nessa região se comporta como se a carga ainda estivesse em movimento. A bússola, portanto, continua a girar, apontando para a posição em que a partícula deveria estar se a sua velocidade não houvesse sido alterada. Apesar de poder parecer estapafúrdia, tal resposta é consistente.

Para compreender melhor o que acontece numa situação destas, consideremos uma carga q , que se move com velocidade v ao longo do eixo y , sobre o qual existe um obstáculo, num ponto distando ℓ da origem, como mostra a figura 27.6. Se chamarmos de $t = 0$ o instante em que a partícula passa pela origem, o choque com o obstáculo ocorre em $t_1 = \ell/v$. A partir daí, a partícula permanece em repouso e a informação de que ela parou começa a viajar em todas as direções do espaço, com velocidade c . Assim, num instante $t_2 = \ell/v + T$, a superfície esférica que carrega a informação tem centro na carga e raio cT . Ela divide o espaço em torno da carga em tres regiões distintas: o interior da esfera, onde todos os pontos já foram informados de que a carga parou, o seu exterior, onde isto ainda não aconteceu, e a própria superfície, que contém a informação acerca da variação de movimento da carga. À medida em que o tempo passa, o raio desta bolha vai aumentando e cada vez mais pontos vão sendo informados de que a carga foi acelerada.

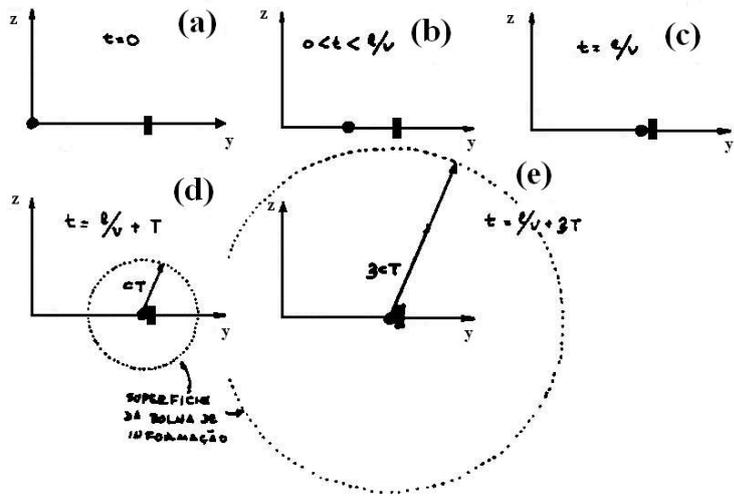


Figura 28.6: A propagação da informação: (a) e (b) a carga antes de atingir o obstáculo; (c) o instante do choque; (d) e (e) a propagação da “bolha de informação”.

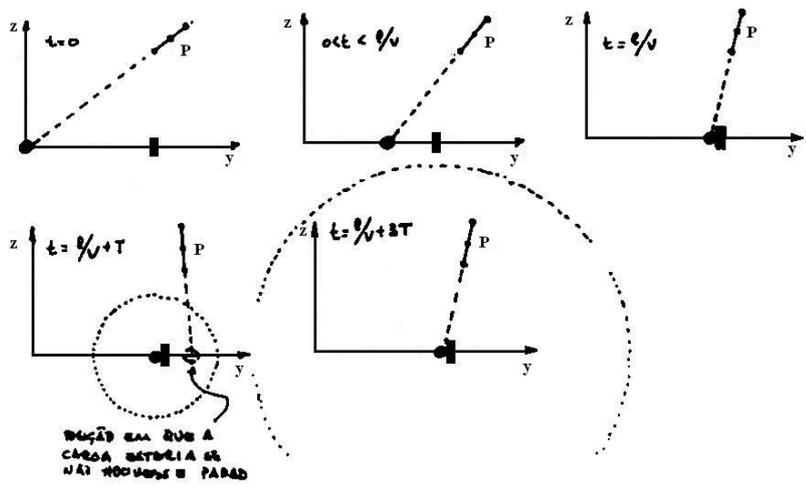


Figura 28.7: O comportamento da “bússola elétrica”.

Suponhamos, agora, que o campo elétrico da carga q seja monitorado por uma bússola elétrica, localizada no ponto $P = (0, a, b)$, sobre o plano yz , como na figura 27.7. Até o instante $t_1 = \ell/v$, a partícula move-se uniformemente para a direita, e a bússola aponta continuamente para ela. Neste instante, a carga encontra o obstáculo, e passa a permanecer em repouso. A informação de que isto aconteceu começa, então, a viajar em todas as direções do espaço, com velocidade c . Assim, o intervalo de tempo entre a parada da partícula e a chegada desta informação ao ponto P é

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(a - \ell)^2 + b^2}}{c}. \quad (28.1)$$

Portanto, para $\ell/v < t < \ell/v + \Delta t$, a bússola continua a girar, apontando para a posição do eixo y em que a partícula estaria se não houvesse parado, como indicado na figura 27-7. No instante $t + \Delta t$, a informação de que a carga está parada chega ao ponto P e a bússola passa a apontar novamente para ela, o que permanece válido para $t > \ell/v + \Delta t$.

• a rotação da bússola elétrica

O exemplo anterior envolve uma característica muito interessante, qual seja, a rotação do dipolo no intervalo $\ell/v < t < \ell/v + \Delta t$, que parece ocorrer “sozinha”, automaticamente. Isso nos leva à questão: o que causa a rotação da bússola? Ou, o que é equivalente, por que a direção do campo elétrico no ponto P varia com o tempo? Uma resposta apenas parcialmente correta seria afirmar que o dipolo gira porque a carga se move.

Como foi visto acima, esta explicação pode ser boa para o caso em o movimento da partícula é uniforme. Quando este movimento é interrompido, vimos que o campo elétrico no ponto P continua a girar por um intervalo de tempo Δt depois de a carga ter parado, o que indica a existência de algo agindo no ponto P , responsável pela variação do campo elétrico.

Este “algo” são campos eletromagnéticos, regidos pelas equações de Maxwell, especialmente as leis de Faraday e Ampère-Maxwell. A primeira delas diz que um campo magnético variável com o tempo cria um campo elétrico, enquanto que a outra afirma que um campo elétrico dependente do tempo cria um campo magnético.

De modo muito geral, a carga é responsável por um campo elétrico no ponto P . Quando ela se move, este campo varia com o tempo e, simultaneamente, reorienta a bússola e cria um campo magnético. Por sua vez, a variação deste com o tempo recria um novo campo elétrico, que por sua vez recria um campo magnético, que por sua vez recria... Esta é uma situação totalmente análoga à das ondas eletromagnéticas, discutida em aulas anteriores.

Assim, os campos elétrico e magnético de uma carga em movimento uniforme variam com o tempo “por conta própria”, sendo esse fato o responsável pela rotação da bússola

elétrica no intervalo $\ell/v < t < \ell/v + \Delta t$, entre a parada da partícula e a chegada desta informação ao ponto P . Para tornar este fato mais claro, suponhamos que, num instante qualquer, designado por T , sejam conhecidos os campos \vec{E} e \vec{B} numa região fora do eixo y . Este conhecimento determina, automaticamente, os campos \vec{E} e \vec{B} na mesma região, no instante seguinte $T + dt$, sem que seja necessário fazer referência á posição da carga.

A relação entre os campos elétricos, num mesmo ponto, em dois instantes consecutivos, pode ser expressa como

$$\vec{E}(\vec{r}, T + dt) = \vec{E}(\vec{r}, T) + dt \left[\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]_{t=T}. \quad (28.2)$$

Por isso, se soubermos $\vec{E}(\vec{r}, T)$, o conhecimento de $\partial \vec{E} / \partial t$ permite o cálculo de $\vec{E}(\vec{r}, T + dt)$, o campo elétrico no instante seguinte. Por outro lado, a derivada temporal de \vec{E} está relacionada a \vec{B} pela lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (28.3)$$

Assim, podemos escrever

$$\vec{E}(\vec{r}, T + dt) = \vec{E}(\vec{r}, T) + c^2 [\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, T)] dt. \quad (28.4)$$

Conhecendo $\vec{E}(\vec{r}, T)$ e $\vec{B}(\vec{r}, T)$, seremos capazes de calcular o campo elétrico no instante $T + dt$. Deste modo, o conhecimento de \vec{E} e \vec{B} no presente determina o \vec{E} no futuro imediato! Portanto, a rotação do campo elétrico com o tempo num ponto P é causada pelos próprios campos nesse ponto e não é necessário saber o que a partícula está fazendo nesse instante. Ou seja, \vec{E} gira de forma autônoma...

O campo elétrico gira por conta própria porque o movimento da partícula desencadeou um processo em que \vec{E} e \vec{B} variam com o tempo de tal forma que fazem com que em um dado ponto, o campo elétrico \vec{E} sempre aponte para a posição onde a partícula está ou deveria estar. O comportamento do campo magnético pode ser explicado, de modo totalmente análogo, sem menção ao movimento da partícula.

$$\vec{B}(\vec{r}, T + dt) = \vec{B}(\vec{r}, T) + dt \left[\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]_{t=T} \quad (28.5)$$

Pela lei de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (28.6)$$

e, portanto,

$$\vec{B}(\vec{r}, T + dt) = \vec{B}(\vec{r}, T) - dt[\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)] \quad (28.7)$$

Resumindo; o que permite à “bússola” “acompanhar” a direção do campo elétrico, no caso de velocidade constante, é o fato de a variação espaço-temporal dele ser sempre a mesma. Quando há aceleração da partícula, muda a forma da variação espaço-temporal do campo, e a informação sobre esta mudança, que ocorre num dado ponto do espaço, não pode chegar instantaneamente a cada ponto do espaço, mas leva um tempo compatível com uma velocidade c da informação.

É de fato, como veremos nas próximas aulas, a onda gerada por esta variação na velocidade que “informa” cada ponto do espaço sobre o novo movimento da carga. Vamos discutir quais são as condições físicas que dão origem às ondas eletromagnéticas, ou seja, que situações físicas geram no espaço campos \vec{E} e \vec{B} que obedecem às equações de Maxwell e satisfazem uma equação de onda, com propagação de energia eletromagnética, com a velocidade da luz, no vácuo.

Discutimos anteriormente que é possível a existência de ondas eletromagnéticas no vácuo e suas principais características. Estudamos também uma possível maneira de produzir estas ondas, que foi nas chamadas linhas de transmissão. Vimos como é possível gerar uma onda por aplicação de uma tensão variável no tempo, entre os dois condutores da linha. A aplicação desta diferença de potencial variável faz com que haja dentro dos condutores, um movimento de cargas com velocidade variável no tempo, que em última análise é responsável pela onda eletromagnética gerada no vácuo entre os mesmos.

Para argumentar sobre a validade desta interpretação, vamos, nas aulas que seguem, estudar as consequências, nos campos \vec{E} e \vec{B} , da alteração de velocidade, ou seja, da aceleração de uma partícula carregada.

• exercícios

1. Uma carga q se move com velocidade v ao longo do eixo y . O campo elétrico criado por essa carga é observado no ponto $P = (0, \ell, \ell)$. Calcule a velocidade angular ω de rotação

desse campo elétrico em função de tempo. Em que instante essa velocidade é máxima? Faça um gráfico $\omega \times t$.

2. Uma carga q se move com velocidade v ao longo do eixo y até se chocar com uma barreira localizada no ponto $P_B = (0, \ell, 0)$. A partícula pára após o choque. O campo elétrico criado por essa carga é observado no ponto $P = (0, \ell, \ell)$. Calcule a velocidade angular ω de rotação desse campo elétrico em função do tempo. Faça um gráfico $\omega \times t$.

3. Uma partícula com carga q se move com velocidade $v = 0,8c$ ao longo do eixo dos y . Desenhe, em escala, o vetor campo elétrico medido por um observador situado no ponto $P = (0, \ell, \ell)$ nos instantes:

a) $t = 0$; b) $t = \ell/v$; c) $t = 3\ell/v$

Compare, em cada instante, o campo elétrico da carga em movimento com o criado por uma carga de mesma intensidade e parada na mesma posição.

4. Uma partícula com carga q se move com velocidade $v = 0,8c$ ao longo do eixo dos y . Calcule, no instante em que a partícula passa pela origem, o vetor campo elétrico nos seguintes pontos de uma superfície esférica de raio R e centro na carga:

a) $P_1 = (0, R, 0)$

b) $P_2 = (0, -R, 0)$

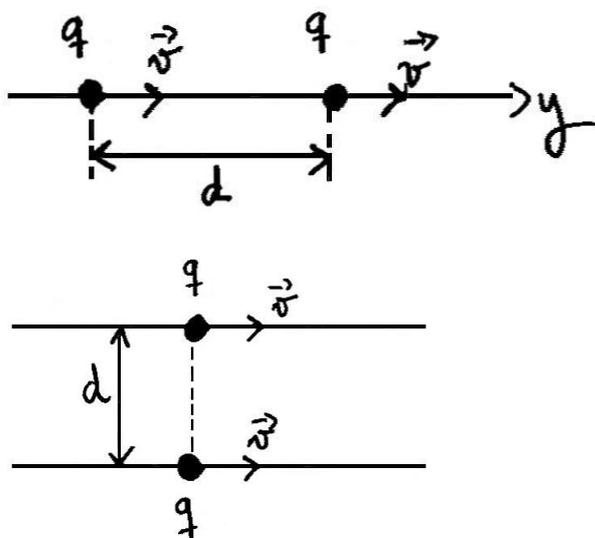
c) $P_3 = (0, 0, R)$

d) $P_4 = \left[0, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}} \right]$

Onde o módulo do campo elétrico é maior? Compare, nesses pontos, o campo elétrico da carga em movimento com o de uma carga de mesma intensidade e parada na origem. Faça um desenho, em escala, desses vetores no plano xy .

5. Qual a forma da superfície em que $|\vec{E}| = cte$, para uma partícula de carga q que se move com velocidade v ao longo do eixo dos y ?

6. Qual deve ser a velocidade de um elétron para que seu campo elétrico num ponto na direção do movimento seja 1% menor que o que ele criaria no mesmo ponto se ele estivesse parado?



7. Duas partículas de carga q se movem paralelamente ao eixo y com velocidade v , como mostra a figura. A separação entre elas é d . Mostre que as forças entre elas no referencial do laboratório e no referencial em que elas estão paradas são iguais.
8. Duas partículas com carga q se movem ao longo do eixo y com velocidade v . A separação entre elas é d , como mostra a figura. Calcule as forças que agem entre elas nos referenciais do laboratório e da partícula. Qual a relação entre essas forças?
9. Uma partícula com carga q se move ao longo do eixo y com velocidade $v = 0,8c$. Como o observador de laboratório vê a linha de campo que no referencial da partícula forma 45° com o eixo y ?
10. Descreva, qualitativamente, as trajetórias de duas partículas de mesma massa e carga que são jogadas uma contra a outra com velocidade v e $-v$. No instante inicial a separação entre as partículas é muito grande e elas se movem ao longo das retas $z = b$ e $z = -b$, respectivamente. Considere os casos a) $v \ll c$ e b) $v = c$.
11. Mostre que o fluxo do vetor de Poynting de uma partícula com velocidade constante $\vec{v} = v\vec{i}$, através de uma superfície esférica de raio R centrada na carga, tem valor nulo. Discuta o que representa a variação temporal da energia eletromagnética e o valor nulo do fluxo de \vec{S} .

Capítulo 29

radiação II

• carga acelerada e radiação

Nas aulas anteriores estudamos o campo elétrico de uma carga em movimento uniforme. Vimos também que, quando a carga é breçada, o campo elétrico em um dado ponto P do espaço continua, durante um certo intervalo de tempo, a ter valores como se a carga mantivesse sua velocidade constante. Só depois de certo tempo, o campo assume o valor de uma situação estática.

Isto acontece porque, durante o citado intervalo de tempo, o ponto P não recebeu ainda a informação de que foi alterado o estado de movimento da carga. E nada no universo físico, segundo a relatividade, se move com velocidade maior que c . Só depois de a informação chegar no ponto P o campo passa a ter o valor de campo eletrostático dado pela Lei de Coulomb.

Vamos analisar, de forma um pouco mais elaborada, o campo elétrico de uma carga, em movimento uniforme, que é breçada até parar. Vamos definir como instante t_0 aquele em que a carga começa a ser desacelerada. Portanto, para instantes anteriores a t_0 ($t < t_0$), as linhas de força do campo elétrico no referencial do lab são como as mostradas na figura 28.1.

Vamos supor também que a desaceleração seja muito grande, ou seja, que depois de um pequeno intervalo de tempo τ , a carga esteja completamente parada.

A questão que nos propomos responder é: como são as linhas de força do campo elétrico em todo o espaço num instante $t > t_0 + \tau$ para o referencial do lab?

No instante em que a carga pára, ou seja, em $t_0 + \tau$, inicia-se a propagação da informação de que há uma carga estática no espaço. Vamos supor que esta informação viaje com a maior velocidade possível, ou seja, c . Também, dada a isotropia do espaço, é razoável

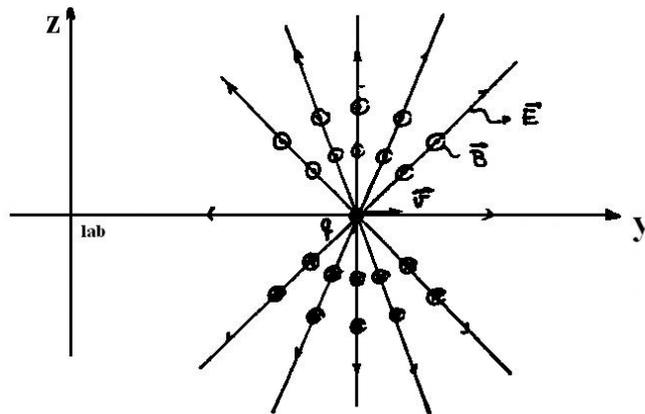


Figura 29.1: As linhas de campo de uma partícula que se move com velocidade $\vec{v} = v\vec{j}$ no referencial de laboratório.

supor que esta informação se propague em todas as direções com igual velocidade. Desta forma, todos os pontos que estiverem dentro da esfera de raio $c(t - t_0 - \tau)$ já receberam a informação de que há uma carga parada no ponto $0'$. Logo, todos os pontos dentro desta esfera, que chamaremos região I, têm campo eletrostático, ou seja, campo radial e com simetria esférica com centro na carga parada, no ponto $0'$ da figura 28.2a.

Porém, já no instante t_0 , quando a partícula estava no ponto $0''$, começou a se propagar a informação de que já não havia no espaço uma partícula com velocidade constante v . Assim, todos os pontos dentro de uma superfície esférica com centro em $0''$ e raio $c(t - t_0)$ “sabiam” que algo se modificava no espaço. Esta esfera tem centro em $0''$ com um raio $c(t - t_0) > c(t - t_0 - \tau)$, como mostra a figura 28.2b.

No limite $\tau \cong 0$, estas esferas são concêntricas. Na figura 28.2b, ficam definidas duas outras regiões: uma entre as superfícies esféricas, que chamaremos região II, e outra fora da superfície mais externa, que definiremos como região III.

Todos os pontos da região III não receberam ainda qualquer informação de mudança no estado de movimento da partícula. Assim, em todos esses pontos há campos \vec{E} gerando \vec{B} que gera $\vec{E}...$, da mesma forma que ocorria no espaço todo em instantes anteriores a t_0 . Isto quer dizer que o campo \vec{E} aponta para a posição onde a partícula estaria caso não encontrasse quem a brecasse. Esta posição é a posição Q na figura 28.2b, distante $v(t - t_0 - \tau)$ de $0'$. As linhas desenhadas na região III da figura 28.2b são as linhas de força do campo \vec{E} num instante t de uma partícula que se “encontra” em Q , com velocidade $v\vec{j}$. Os pontos da região II sabem que já não há uma partícula com velocidade constante $v\vec{j}$, mas ainda não sabem que ela parou. Como seria o campo elétrico nesta região de transição?

Por hipótese, só há uma carga no espaço que é esta que até t_0 tinha movimento uniforme e depois de $t_0 + \tau$ está parada em $0'$. Assim, deve haver continuidade das linhas de força,

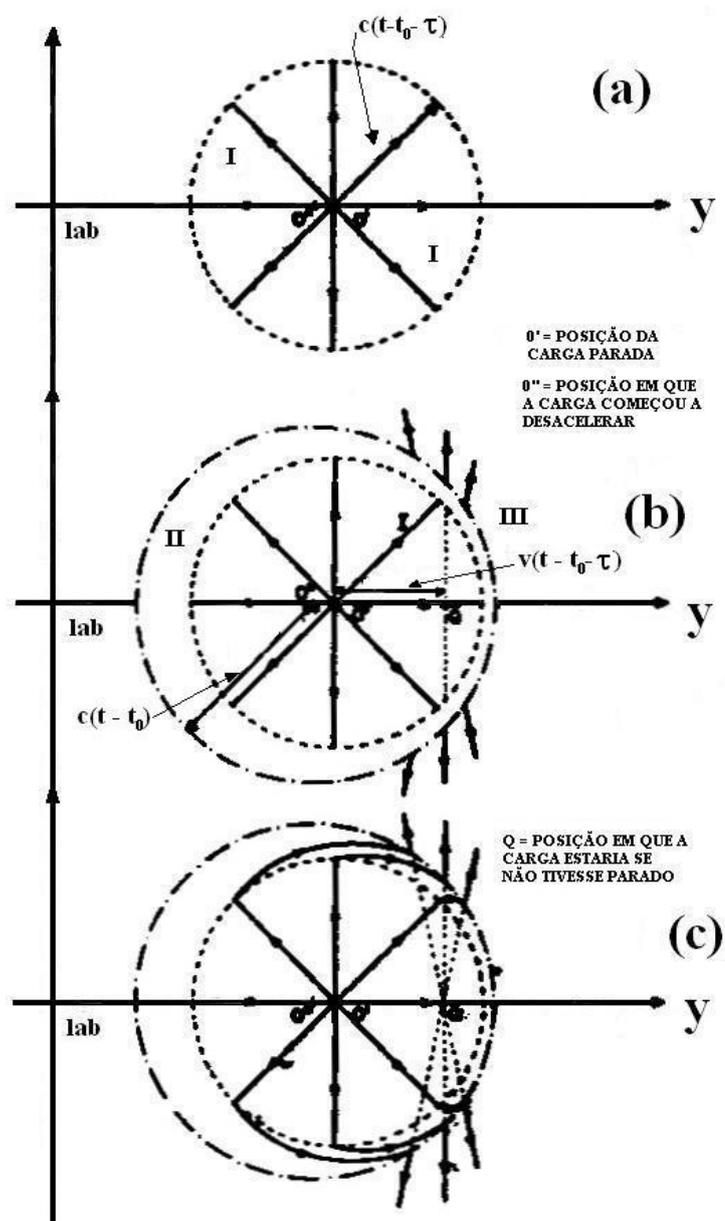


Figura 29.2: A “construção” das linhas de campo elétrico de uma carga puntiforme que é rapidamente breçada a partir de uma velocidade constante v .

uma vez que as linhas que “nascem” na carga devem “morrer” no infinito. A figura 28.2c mostra “possíveis” linhas de força da região II, que garantem a continuidade das linhas exigida pela lei de Gauss. Note que, como o campo \vec{E} é tangente à linha de força, existe nesta região II uma componente transversal (perpendicular à radial) do campo elétrico. De novo, no limite $\tau \simeq 0$ só existe a componente transversal de \vec{E} .

Vamos agora, com a imagem da “foto” das linhas de força no instante t , pensar no que deve ocorrer com estas linhas através do tempo, desde o instante t_0 em que a partícula começou a ser brecada.

O que ocorre é que até t_0 , todo o espaço era, digamos assim, uma região III. Neste instante começa a nascer a superfície externa da região II, que avisa: “algo mudou”! Este “aviso” corresponde à criação da região II. Conforme o tempo passa, já no instante $t_0 + \tau$, aparece a superfície interna da região II que propala: “aí vem um campo estático”. Podemos pensar, então, em duas bolhas não concêntricas, que crescem com o tempo com velocidade constante c . E se esperarmos um tempo infinito, todo o espaço que até t_0 era região III ficará com campo eletrostático (região I).

Supusemos no início que a informação viajava com velocidade c . É por isto que as bolhas viajam com essa velocidade.

Recapitulando o que ocorreu: até t_0 a partícula tinha movimento uniforme e os campos (\vec{E}, \vec{B}) variavam no espaço-tempo de acordo com essa realidade. Entre t_0 e $t_0 + \tau$ ocorre uma brusca variação neste movimento: um choque. Aí aparece uma “bolha” que viaja com velocidade c . Dentro da bolha interna, que cresce com o tempo, há campo eletrostático. Este campo vai “sumindo” com o campo de partícula em movimento uniforme. E esta transição é feita pela região II, que tem, necessariamente, uma componente transversal do campo, ou seja, perpendicular à direção radial.

Poderíamos fazer uma certa analogia entre esta situação física e a de uma corda longa parada. Num dado instante t_0 , dá-se um chocoalhão em uma das extremidades, aparecendo então um pulso, que se propaga na corda na direção horizontal. Para a frente e para trás do pulso, a corda continua parada. O pulso se propaga no espaço-tempo, como uma onda.

Voltando ao problema eletromagnético, a região II é como um pulso que viaja com velocidade c na direção radial, e nesta região há uma componente transversal do campo, \vec{E}_t . Estas são características que existem em ondas. Para sacramentar esta interpretação, \vec{E}_t deve satisfazer uma equação de onda, devendo haver um campo magnético \vec{B} a ele associado, que também satisfaça uma equação de onda.

Você pode achar esta discussão muito especulativa, porque partimos da suposição de que a “informação” viajava com velocidade c . Mas analisar o mundo físico de forma coerente, a partir de seu comportamento previamente conhecido, e chegar a novos conhecimentos, é de fato o processo de criação em física. A formalização é apenas a forma

adequada (e precisa) de descrever este comportamento da natureza. Uma dedução formal dos campos na região intermediária pode ser encontrada na referência^[1].

Note que, na região III, há \vec{E} e \vec{B} como esquematizado na figura 28.1, ou seja, o campo \vec{B} “entra” abaixo do eixo y e sai acima dele. Não há \vec{B} na região I, e na região II o campo \vec{B} deve “sair” em pontos abaixo de y e entrar em pontos acima do eixo.

A alteração no tipo de comportamento de \vec{E} e \vec{B} no espaço-tempo, ocorre com a passagem do pulso eletromagnético que foi gerado na mudança do estado de movimento da carga. Em resumo, a onda eletromagnética tem origem na desaceleração da partícula.

• questões

1. Faça cuidadosamente um esquema das linhas de força dos campos elétrico e magnético num instante $t > t_0$, na situação em que uma única carga estática no espaço é rapidamente acelerada a partir de t_0 , durante um intervalo de tempo τ , até atingir a velocidade constante v .

2. A partir das linhas de força mostradas na figura 28.2c, justifique o comportamento da “bússola” elétrica da seção anterior.

Uma outra situação interessante que ajuda a ilustrar o processo de geração de ondas eletromagnéticas, é o caso de mudança na direção do movimento uniforme da partícula.

Considere uma carga puntual q , que se move com velocidade $\vec{v} = v\vec{i}$. No instante t_0 , a carga muda sua direção de movimento e em $(t_0 + \tau)$ passa a se mover com velocidade $\vec{v} = -v\vec{j}$.

A figura 28.3 mostra as linhas de força do campo elétrico em todo o espaço.

Nesta figura a carga estava em $0'$ (eixo x) em t_0 quando a partícula começou a mudar de direção e, em $t_0 + \tau$, a partícula já estava com velocidade constante na direção de y negativo.

As linhas de força foram desenhadas para o instante $t > t_0 + \tau$ em que a partícula se encontra em Q . Todos os pontos dentro da esfera centrada em $0'$ com raio $c[t - (t_0 + \tau)]$, já receberam a informação (pulso de onda) da mudança de direção da carga. Por isto, as linhas de força nesta região I “saem” da posição real Q de carga neste instante, sendo a distância entre Q e $0'$ dada por $v[t - (t_0 + \tau)]$. Os pontos na região III não receberam a informação da mudança de direção da carga, portanto, apontam para o ponto Q' , distante $v[t - (t_0 + \tau)]$ de $0'$ que é a posição onde a carga estaria se não tivesse mudado a direção de seu movimento. Novamente, a lei de Gauss exige uma continuidade das linhas de força, e há uma componente de \vec{E} perpendicular à direção de propagação. Este campo é compatível com a existência de uma onda gerada pela aceleração da carga.

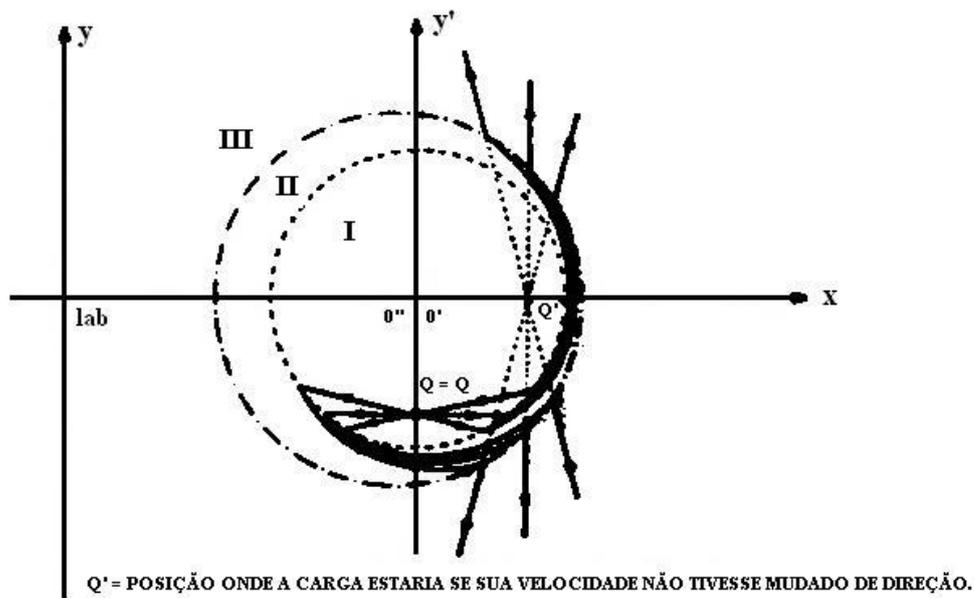


Figura 29.3: O campo elétrico de uma carga cuja direção de sua velocidade é alterada.

Questão 3: Suponha uma carga que a cada intervalo τ de tempo muda quase instantaneamente o sentido de sua velocidade de módulo constante. Como seriam os campos \vec{E} e \vec{B} de onda gerada por este movimento de vai e vem das cargas? Relacione este seu resultado com a onda senoidal gerada na linha de transmissão discutida anteriormente.

• processos usuais de produção de radiação

Para terminar nosso estudo da radiação, vamos considerar situações que ocorrem freqüentemente na tecnologia e na pesquisa em Física. São os casos de um dipolo oscilante, presente na radiotecnica, e de uma carga uniformemente acelerada, por exemplo, em um acelerador de partículas. É possível, nestes casos, tirar conclusões interessantes a respeito da radiação, discutindo apenas seus aspectos qualitativos.

Um dipolo oscilante é constituído de duas cargas de sinais opostos, oscilando entre dois pontos, com mesma frequência e em sentido contrário. Poderia ser o caso de uma corrente oscilante em uma antena de uma estação de rádio. O campo deste dipolo é a superposição dos campos das duas cargas, e sua construção não é trivial. No entanto, podemos simular esta situação utilizando apenas os aspectos qualitativos da radiação. Para isso, consideremos um modelo simplificado de dipolo, onde as cargas oscilam entre dois obstáculos, e no intervalo entre um choque e outro têm velocidades constantes. O campo de apenas uma das partículas está desenhado na figura 28.4. Superpondo-se este campo ao da partícula de carga oposta, obtemos o campo do dipolo oscilante.

Se a aceleração destas partículas fosse uma função senoidal, as linhas de campo seriam mais arredondadas. Obteríamos então o campo do dipolo oscilante, mostrado na figura

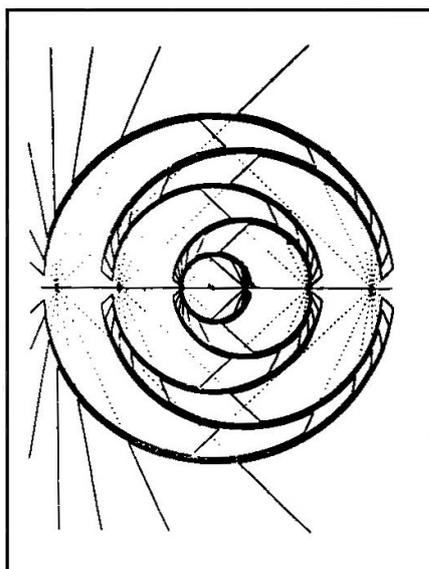


Figura 29.4: Linhas de campo elétrico de uma carga que oscila entre dois pontos com velocidade $v = 0.9c$.

28.5.

Através da figura 28.5 podemos verificar uma propriedade interessante da radiação do dipolo oscilante, qual seja, que sua intensidade possui uma dependência angular. Ela é máxima no plano perpendicular ao eixo do dipolo e nula ao longo dele. É esta a razão por que as antenas de radiotransmissão são verticais. Isto faz com que a direção onde a intensidade de radiação é nula, seja dirigida para fora do planeta, onde não há receptores. Desta maneira, a potência irradiada é máxima na direção paralela à superfície da Terra. Na região intermediária entre o plano equatorial e a direção do eixo do dipolo, o fluxo de energia irradiada depende do ângulo, conforme está mostrado na figura 28.5.

Outro caso de interesse, é o da radiação devida a uma carga uniformemente acelerada. Para construir o campo elétrico desta partícula consideramos, inicialmente, uma situação simplificada, onde a velocidade aumenta em saltos de $0,2c$ até atingir $v = 0,8c$. Este campo está representado na figura 28.6.

No caso (a), a aceleração uniforme é simulada por sucessivas etapas de aceleração instantânea e velocidade constante, correspondendo às linhas quebradas. Numa simulação mais realística da aceleração uniforme, a distinção entre os dois tipos de etapas é imperceptível, e as linhas de campo são curvas contínuas, ilustradas na figura 28.6b. Estas linhas de campo têm componentes transversais, que levam a informação de que a carga foi acelerada. Correspondem à parte elétrica de uma onda eletromagnética.

A energia irradiada por uma carga uniformemente acelerada possui uma dependência angular representada na figura 28.7. Ela é simétrica em relação ao plano do movimento,

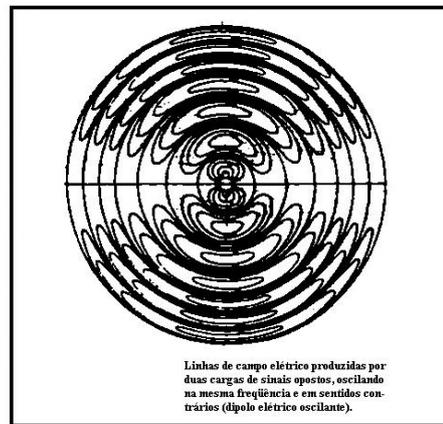


Figura 29.5: O campo elétrico de um dipolo oscilante.

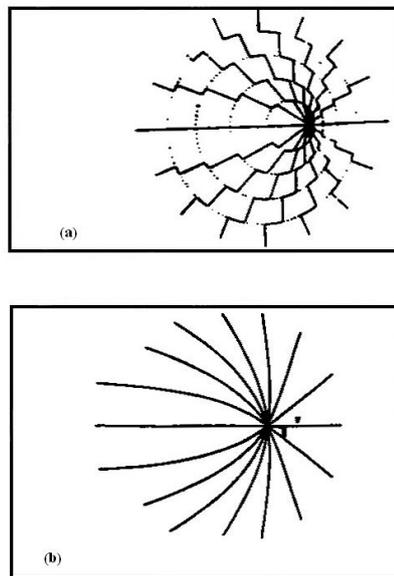


Figura 29.6: O campo elétrico de uma carga acelerada. (a) Em saltos de velocidade de $0.2c$. (b) Com aceleração constante.

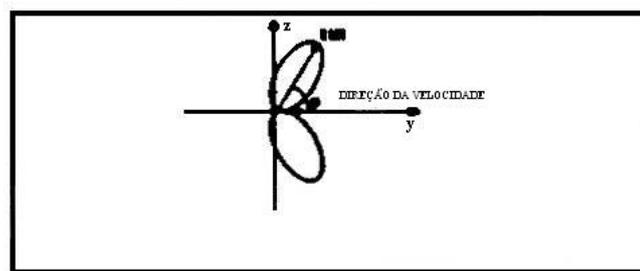


Figura 29.7: Dependência angular da radiação de uma carga uniformemente acelerada.

sendo nula na direção da velocidade, e máxima sobre uma superfície cônica com vértice na partícula.

Quando uma carga é acelerada em um acelerador linear, parte da energia que lhe é fornecida é perdida em forma de radiação. A intensidade de energia irradiada é significativa quando a carga atinge a velocidade próxima à da luz e, por isso, é necessário que se tenha cuidado com a blindagem do aparelho que a acelera, para evitar a contaminação do ambiente.

Finalizando nossa discussão, queremos ressaltar que, na relatividade, a velocidade finita de propagação da informação torna o campo uma realidade física. A compreensão da natureza da radiação é consequência dos postulados da relatividade, e da realidade do conceito do campo, atualmente de importância fundamental para a Física.

O campo na relatividade tem significado profundo. A respeito da evolução do conceito de campo, Einstein e Infeld^[2] escreveram o seguinte:

“[Nos primórdios do século XIX] o conceito de campo nada mais era do que um meio para facilitar a compreensão de fenômenos do ponto de vista mecânico. Na nova linguagem de campo, é a descrição do campo entre duas cargas, e não as cargas em si, o que é essencial para uma compreensão de sua ação. O reconhecimento dos novos conceitos cresceu consistentemente, até que a substância foi ocupada pelo campo. Percebeu-se que algo de grande importância havia aparecido em Física. Uma nova realidade foi criada, um novo conceito para o qual não havia lugar na descrição mecânica. Lentamente e com luta, o conceito de campo firmou para si um lugar de predominância em Física e permaneceu um dos conceitos físicos básicos. O campo eletromagnético é, para a Física moderna, tão real quanto a cadeira que sentamos.”

• referências

[1] J.R. Tessinan - American Journal of Physics 35 (1967) 523.

[2] “A evolução da Física”, A. Einstein e L. Infeld - Zahar editores, Rio de Janeiro, 2ª edição (1966) p. 125.

Capítulo 30

radiação: o espelho

Espelho, espelho meu, existe alguém mais inteligente do que Eu?¹

Você se olha no espelho e vê a sua própria imagem. Isso acontece porque o seu rosto é iluminado por alguma fonte de luz externa, como a do sol que entra pela janela ou a de uma lâmpada próxima. Essa luz é difundida no seu rosto e parte dela vai em direção ao espelho, “bate” nele e volta. Vivenciamos esta situação diariamente e tudo parece muito simples. Entretanto se você refletir um pouco, o problema mostra uma face complexa. E podemos especular: como é que a luz “bate” no espelho? Porque ele reflete a luz?

Um espelho comum, tal como os que temos em casa, é constituído por uma fina camada de metal depositada sobre uma lâmina de vidro. O vidro tem apenas a função de suporte mecânico, ou seja, serve para sustentar a camada metálica e impedir que ela oxide e se desfaça, não tendo papel óptico importante. A reflexão é, de fato, produzida pelo metal. Mais precisamente, pelos movimentos acelerados dos elétrons livres no seu interior.

Para discutir o lado eletromagnético deste fenômeno, nesta aula estudamos a radiação produzida por um plano infinito carregado que oscila. Embora planos infinitos não existam na natureza, eles permitem capturar os aspectos essenciais do problema, por meio de um tratamento matemático simples.

• a luz incide sobre o espelho

No caso em que o espelho da figura 29.1 é iluminado por uma luz monocromática de frequência ω , polarizada linearmente segundo o eixo y , o campo incidente, denotados pelo

¹Fábula infantil adaptada à vaidade dos físicos...

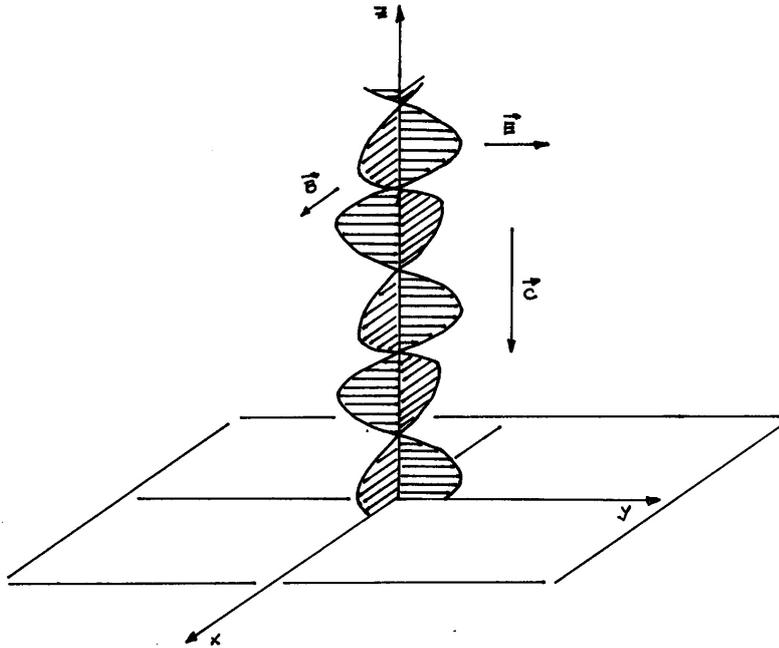


Figura 30.1: A luz incide sobre o espelho, situado no plano $z = 0$.

índice i , têm a forma

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(kz + \omega t) \vec{j}, \quad (30.1)$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz + \omega t) \vec{i}. \quad (30.2)$$

Quando o metal do espelho é banhado por esses campos, eles causam sobre um elétron livre uma força dada por

$$\vec{F}_i = -e \left(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i \right), \quad (30.3)$$

onde e é o módulo da sua carga e \vec{v} é a sua velocidade.

Para determinar a importância relativa das componentes elétrica e magnética dessa força, lembramos que, num metal à temperatura ambiente, os elétrons livres podem ter dois tipos de movimento. O primeiro deles é desordenado, com velocidades típicas da ordem de 10^5 m/s. Quando um campo elétrico externo está presente no interior do metal existe, também, uma velocidade média ordenada, tal que $\langle v \rangle \sim m/h \sim 10^{-3}$ m/s. O campo elétrico da luz que incide sobre o espelho faz com que uma velocidade $\langle \vec{v} \rangle$ ordenada apareça no seu interior, sendo que $|\langle \vec{v} \rangle| \ll c$. Como os módulos dos campos magnético e elétrico são relacionados por $|\vec{B}_i| = |\vec{E}_i|/c$, podemos concluir que a força de origem magnética é totalmente desprezível. Por isso, a força que age sobre o elétron é dada por

$$\vec{F}_i = -e E_{0i} \cos(\omega t) \vec{j}, \quad (30.4)$$

sendo que usamos o fato de o espelho estar localizado sobre o plano $z = 0$. Ela faz com que o elétron oscile com a mesma frequência ω da onda incidente. Para simplificar o tratamento deste movimento, suporemos que a massa do elétron possa ser desprezada². Como o movimento de um objeto sem inércia sujeito a uma força externa é sempre paralelo a essa força, escrevemos

$$\vec{v} = -v_0 \cos(\omega t) \vec{j}, \quad (30.5)$$

onde v_0 é uma amplitude. O mesmo tipo de raciocínio se aplica a todos os elétrons livres do metal e o movimento coletivo resultante pode ser modelado por meio da oscilação de um plano carregado negativamente. Esse movimento de cargas é acelerado e produz radiação. Para estudar como isso acontece, precisamos determinar a forma dos campos elétrico e magnético *criados* por esse movimento.

• plano infinito sujeito a acelerações bruscas

Para simular o que acontece com os elétrons dentro do metal consideramos, inicialmente, um plano carregado negativamente, com densidade superficial de carga $-\sigma^J$, sendo $\sigma^J > 0$. Supomos que esse plano esteja em repouso no referencial de João e que ele seja paralelo aos eixos x e y . Nesse caso, as equações de Maxwell nos fornecem

$$z > 0 \rightarrow \vec{E}^J = -\frac{\sigma^J}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad z < 0 \rightarrow \vec{E}^J = +\frac{\sigma^J}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad (30.6)$$

$$\vec{B}^J = 0. \quad (30.7)$$

Os campos no referencial de Maria, em relação ao qual o de João se move com velocidade $v \vec{j}$, podem ser obtidos pelas regras mostradas na aula 23 e são dados por

$$z > 0 \rightarrow \vec{E}^M = -\frac{\sigma^M}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad z < 0 \rightarrow \vec{E}^M = +\frac{\sigma^M}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad (30.8)$$

$$\sigma^M = \gamma \sigma^J, \quad (30.9)$$

$$\vec{B}^M = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^M, \quad (30.10)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Esses resultados permitem-nos ter uma idéia da forma dos campos em torno de um plano carregado, que está em repouso e é acelerado durante um intervalo de tempo Δt , até atingir uma velocidade constante $\vec{v} = v \vec{j}$. Como o que acontece com uma carga puntiforme acelerada, a variação da velocidade do plano carregado produz radiação. A principal diferença entre os dois casos é que, devido ao caráter extenso do plano, muitos pontos estão envolvidos e existem muitas bolhas de informação produzidas simultaneamente. Por isso, as transições entre as regiões de campos diferentes correspondem, agora, a planos

²Os efeitos devidos à massa do elétron serão devidamente considerados nas aulas finais do curso.

infinitos paralelos ao plano carregado. Essa situação está representada na figura 29.2. Como o plano é infinito, o emprego de linhas de campo torna-se difícil e as intensidades são representadas pelas suas expressões matemáticas.

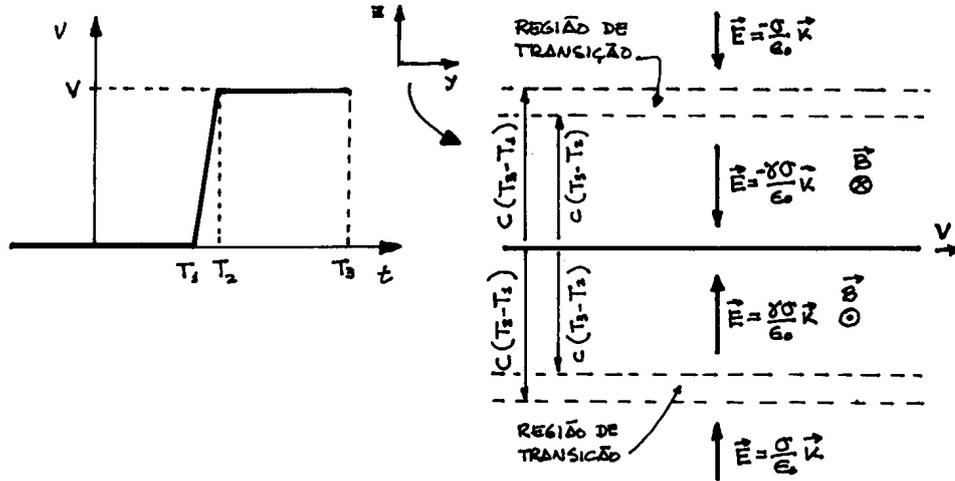


Figura 30.2: A velocidade do plano carregado e os campos à sua volta, em função do tempo.

Casos mais complicados, onde existem várias alterações na velocidade, podem ser compreendidos pela aplicação repetida do mesmo tipo de raciocínio.

• radiação do espelho

Para determinar os campos *criados* pelo espelho, designados pelo índice r , devemos somar as contribuições dos íons positivos com a dos elétrons livres que oscilam no seu interior. Essa oscilação coletiva tem uma velocidade típica muito menor do que a da luz, da ordem de $\langle v \rangle / c \sim 10^{-11}$, o que nos permite adotar $\gamma = 1$ e desprezar os efeitos associados à contração da densidade de cargas. Por isso, eliminamos os índices da densidade de carga e escrevemos $\sigma^J = \sigma^M \equiv \sigma$.

No interior da fina lâmina metálica, que supomos estar no vácuo, as densidades das cargas positivas dos íons e das cargas negativas dos elétrons livres são iguais, em módulo. Isso faz com que o campo elétrico resultante fóra do metal seja nulo, já que as contribuições das duas densidades de carga são iguais e opostas. O mesmo *não* acontece com o campo magnético, pois a densidade positiva está em repouso, enquanto que a negativa oscila.

O módulo do campo magnético criado por este movimento num ponto muito próximo do metal, distante ϵ dele, é calculado a partir da lei de Ampère aplicada ao caminho mostrado na figura 29.3. A regra da mão direita determina a direção e o sentido e temos

$$z = +\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{i}, \quad z = -\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = -\frac{\mu_0 I}{2a} \vec{i}, \quad (30.11)$$

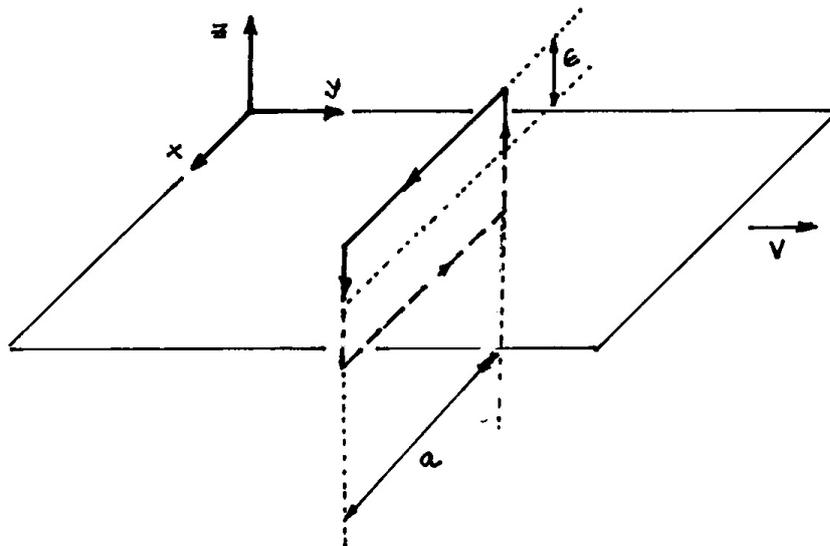


Figura 30.3: O caminho utilizado na lei de Ampère.

onde I é a corrente que atravessa o caminho matemático e a é o comprimento dos seus trechos horizontais.

A intensidade da corrente é obtida a partir da eq.(30.5), que corresponde à velocidade todos os pontos do plano carregado negativamente. A corrente que atravessa o caminho matemático é obtida a partir da figura 29.4 e dada por

$$I = \sigma a v = \sigma a v_0 \cos(\omega t), \quad (30.12)$$

sendo que utilizamos o fato de a carga do elétron ser negativa. Assim,

$$z = +\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = \frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{i}, \quad z = -\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = -\frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{i}. \quad (30.13)$$

Esses resultados indicam que a oscilação dos elétrons livres no interior do metal produz, nas proximidades da sua superfície, campos magnéticos que variam com o tempo. De acordo com a lei de Faraday, essa variação temporal dá origem a campos elétricos, que também variam com o tempo. Ou seja, a oscilação dos elétrons produz uma onda eletromagnética nas vizinhanças do metal, cujo campo magnético a uma distância ϵ é dado pela eq.(30.13).

Como no caso de qualquer onda eletromagnética que se propaga no vácuo, os campos elétrico e magnético são ortogonais entre si e seus módulos relacionados por $|\vec{E}| = |\vec{B}|/c$. Como acontece sempre que ondas são *produzidas* por uma fonte, elas se propagam para longe da região onde a produção ocorre. Isto também vale no caso de ondas eletromagnéticas produzidas pelo movimento acelerado dos elétrons do metal do espelho. Assim, a velocidade da radiação produzida pelo espelho é dada por

$$z > 0 \rightarrow \vec{c}_r = c \vec{k}, \quad z < 0 \rightarrow \vec{c}_r = -c \vec{k} \quad (30.14)$$

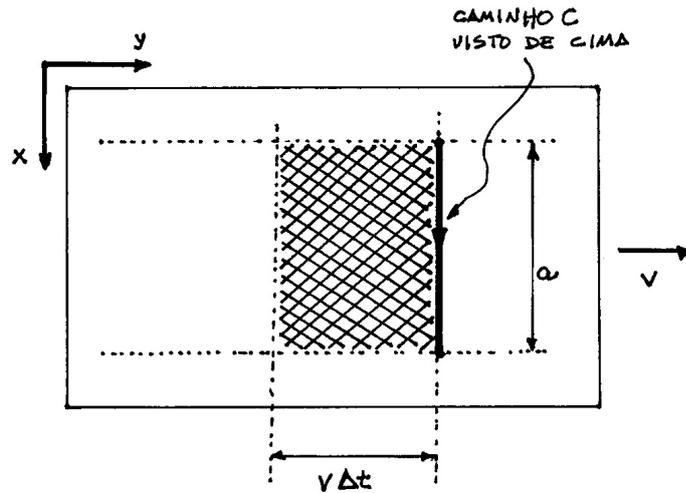


Figura 30.4: O trecho hachurado atravessa o caminho num tempo Δt .

e, conseqüentemente, o campo elétrico à distância ϵ do metal é expresso por

$$z = +\epsilon \rightarrow \vec{E}_r = -\frac{c\mu_0\sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{j}, \quad z = -\epsilon \rightarrow \vec{E}_r = -\frac{c\mu_0\sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{j}. \quad (30.15)$$

As eqs.(30.13) e (30.15) descrevem os campos nas proximidades do espelho e dependem de $\cos(\omega t)$. Para pontos distantes dele, é preciso incorporar a esta fase os atrasos devidos à propagação da onda, como fizemos no caso da linha de transmissão. Assim, para valores positivos de z , $\cos(\omega t) \rightarrow \cos[\omega(t - z/c)]$ e, para valores negativos, $\cos(\omega t) \rightarrow \cos[\omega(t + z/c)]$. Juntando todos esses resultados, podemos escrever as expressões que descrevem os campos produzidos pela oscilação dos elétrons em qualquer ponto do espaço

$$z > 0 \rightarrow \vec{E}_r = -E_{0r} \cos(kz - \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_r = E_{0r}/c \cos(kz - \omega t) \vec{i}, \quad (30.16)$$

$$z < 0 \rightarrow \vec{E}_r = -E_{0r} \cos(kz + \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_r = -E_{0r}/c \cos(kz + \omega t) \vec{i}, \quad (30.17)$$

onde

$$E_{0r} = \frac{c\mu_0\sigma v_0}{2}. \quad (30.18)$$

• a conservação da energia

Num problema como este, o plano carregado negativamente não pode oscilar sozinho. No caso do espelho, a energia necessária à oscilação provem da luz incidente e a potência fornecida a *um* elétron é obtida a partir das eqs.(30.4) e (30.5) e dada por

$$p_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v} = e E_{0i} v_0 \cos^2(\omega t). \quad (30.19)$$

A potência *fornecida* a um pedaço de metal com área A é obtida pelo produto de p_i pelo número de elétrons livres nele existentes, que é dado por $\sigma A/e$. Assim, a potência

fornecida por unidade de área da placa vale

$$P_i/A = E_{0i} \sigma v_0 \cos^2(\omega t) . \quad (30.20)$$

Já a potência irradiada pelo metal por unidade de área, pode ser calculada usando uma propriedade extremamente interessante do processo de radiação. Inspeccionando as equações (30.16) e (30.17), notamos que o campo elétrico \vec{E}_r é contínuo sobre o plano $z = 0$, indicando que as cargas que oscilam estão imersas no campo elétrico que elas mesmas criam. Por esse motivo, o próprio ato de criação requer que um trabalho seja realizado. A força que o campo irradiado causa sobre um elétron é dada por

$$\vec{F}_r = e E_{0r} \cos(\omega t) \vec{j} \quad (30.21)$$

e a potência fornecida *pelo* elétron é

$$p_r = \vec{F}_r \cdot \vec{v} = - e E_{0r} v_0 \cos^2(\omega t) . \quad (30.22)$$

A potência *irradiada* por unidade de área é dada por

$$P_r/A = -E_{0r} \sigma v_0 \cos^2(\omega t) . \quad (30.23)$$

Note que os sinais de p_r e p_i são opostos.

Quando um espelho é iluminado por luz ocorrem correntes no seu interior, que podem causar dissipação por efeito Joule. Entretanto, num espelho real essa dissipação é muito pequena e pode ser desprezada. Isso equivale a dizer que toda potência incidente sobre o metal é reirradiada. Igualando as eqs.(30.20) e (30.23), obtemos

$$E_{0i} = E_{0r} . \quad (30.24)$$

Assim, num espelho perfeito, os módulos dos campos elétrico e magnético das ondas incidente e refletida são iguais.

• a luz “bate” no espelho...

Usando $E_{0i} = E_{0r} = E_0$, e as eqs. (30.1), (30.2), (30.16) e (30.17), reescrevemos os campos antes e depois do espelho como

• antes do espelho ($z > 0$):

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(kz + \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_i \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t) \vec{i}, \quad (30.25)$$

$$\vec{E}_r = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_r \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \vec{i}, \quad (30.26)$$

sendo o campo resultante dado por

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r) = E_{0r} [\cos(kz + \omega t) - \cos(kz - \omega t)] \vec{j}, \quad (30.27)$$

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r) = E_{0r}/c [\cos(kz + \omega t) + \cos(kz - \omega t)] \vec{i}. \quad (30.28)$$

• depois do espelho ($z < 0$):

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(kz + \omega t)\vec{j}, \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t)\vec{i}, \quad (30.29)$$

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(kz + \omega t)\vec{j}, \quad \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t)\vec{i}, \quad (30.30)$$

e, neste caso,

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r) = 0 \quad (30.31)$$

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r) = 0 \quad (30.32)$$

Note que as diferenças de fase entre as ondas tem papel determinante nestes resultados.

Eles indicam que, na região à frente do espelho, existem duas ondas que se propagam em sentidos diferentes enquanto que os campos resultantes são nulos na parte de trás, como mostra a figura 29.5. É muito importante que você inspecione cuidadosamente esta figura. É importante notar que:

1. os campos \vec{E} e \vec{B} são ortogonais entre si;
2. o campo \vec{E}_r é contínuo sobre o eixo y ;
3. o campo magnético é descontínuo sobre o eixo y .

É deste modo que o eletromagnetismo explica como a luz “bate” no espelho e não aparece atrás dele...

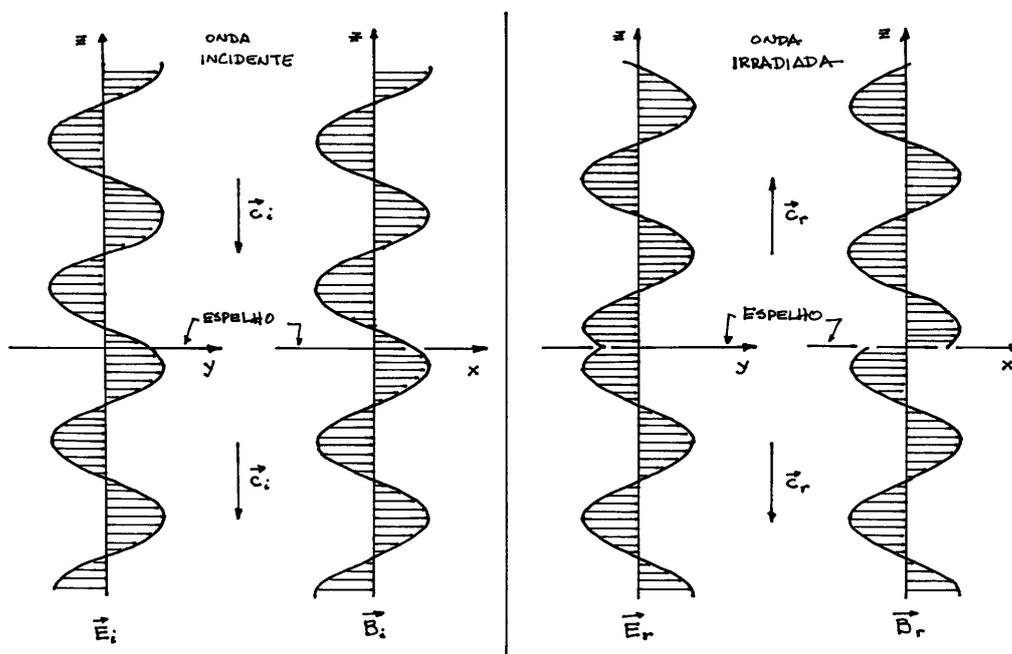


Figura 30.5: Campos elétricos e magnéticos das ondas incidente e irradiada.

Capítulo 31

campos magnéticos na matéria: diamagnetismo e paramagnetismo

Até este ponto do curso estudamos a criação de campos pelas cargas elétricas, os efeitos desses campos sobre outras cargas e a propagação de campos através do espaço vazio. Neste estudo, concentramo-nos principalmente na estrutura dos fenômenos básicos, fazendo poucas referências à fenomenologia da matéria que nos cerca. Entretanto, o estudo do comportamento elétrico da matéria é extremamente rico e interessante. Por isso, nesta e nas próximas aulas vamos discutir alguns dos efeitos mais importantes que podem ser atribuídos às características elétricas da matéria.

As principais propriedades da matéria, numa escala que vai desde o tamanho da terra até as menores partículas elementares conhecidas, são determinadas ou fortemente influenciadas pelo eletromagnetismo. Cargas elétricas estão presentes nos átomos, nos núcleos atômicos, nos prótons e neutrons que constituem os núcleos e nos quarks, que constituem prótons e neutrons. Em geral, as cargas elétricas que constituem os vários entes materiais não estão paradas em seu interior; ao contrário, elas estão se movendo, e as propriedades da matéria resultam de um equilíbrio dinâmico, envolvendo trocas de energia potencial e cinética. As equações de Maxwell indicam que cargas elétricas em movimento dão origem a campos elétricos e magnéticos. A expressão da força de Lorentz, por outro lado, indica que cargas em movimento podem sentir a presença de campos elétricos e magnéticos. Por isso, é de se esperar que o comportamento de qualquer pedaço de matéria, seja ele um grão de areia, uma molécula, um átomo, um núcleo ou mesmo um próton, seja o resultado de um complexo conjunto de interações elétricas e magnéticas.

Tomemos, por exemplo, o mais simples dos átomos, o do hidrogênio. Ele é formado por um elétron e um próton. Prótons e elétrons isolados são partículas carregadas que têm spin, ou seja, uma rotação intrínseca. Por isso, eles têm em volta de si campos elétricos e magnéticos. No átomo de hidrogênio o próton e o elétron estão ligados entre si por uma força de origem elétrica, que é a interação dominante, mas não única. No interior

deste sistema existem também dois tipos de interações magnéticas: uma entre os spins do próton e do elétron e a outra entre o spin do próton com o movimento orbital do elétron. Essas interações são conhecidas no jargão da física atômica como interações spin-spin e spin-órbita. Elas dão origem a pequenos deslocamentos nas linhas espectrais do átomo de hidrogênio, que podem ser medidas experimentalmente.

Interações elétricas e magnéticas como as mencionadas acima também ocorrem tanto em outros átomos e moléculas como nos núcleos atômicos, e são internas a esses sistemas. Podemos, ainda, pensar em interações entre as cargas desses sistemas com campos elétricos e magnéticos externos, produzidos por geradores, eletroímãs ou outros aparelhos. Neste caso, os campos externos perturbam o funcionamento “normal” do sistema microscópico, e esta perturbação pode ser percebida por meio de uma resposta do sistema que, muitas vezes, pode ser medida experimentalmente. Na verdade, essas medidas constituem uma fonte de informação importante acerca do que acontece no interior de sistemas microscópicos. Em geral, podemos perturbar os sistemas microscópicos por meio de campos elétricos ou magnéticos, estáticos ou dependentes do tempo. Em cada caso teremos um tipo de resposta diferente.

Vamos, inicialmente, estudar as respostas de vários materiais a estímulos magnéticos estáticos.

Estudos experimentais sobre a resposta de diferentes substâncias quando colocadas em uma região do espaço onde há um campo magnético \vec{B} não uniforme mostram que dependendo do material pode haver três tipos distintos de comportamento. Algumas substâncias sofrem a ação de uma força muito pequena, da ordem de $10^{-4}N/g$ (note que $1g$ de material tem peso 100 vezes maior que esta força) no sentido da intensidade decrecente do campo magnético. Outras substâncias experimentam uma força da mesma ordem de grandeza no sentido crescente do campo magnético. Em ambos os casos, o resultado independe do sentido de \vec{B} . Há ainda um terceiro tipo de material que sofre uma força intensa no sentido de \vec{B} crescente.

Substâncias que experimentam forças fracas no sentido do campo decrescente são chamadas diamagnéticas. As que sentem forças fracas no sentido crescente do campo magnético são denominadas paramagnéticas. O terceiro tipo de material, aquele que sofre força intensa no sentido de \vec{B} crescente, é chamado ferromagnético.

Exemplos de substâncias diamagnéticas são: água (H_2O), cobre (Cu), chumbo (Pb), cloreto de sódio ($NaCl$), enxofre (S), diamante (C), nitrogênio líquido (N_2). São substâncias paramagnéticas: sódio (Na), alumínio (Al), cloreto de cobre ($CuCl_2$), sulfato de níquel ($NiSO_4$), oxigênio líquido (O_2). Dentre os materiais ferromagnéticos pode-se mencionar o ferro (Fe) e a magnetita (Fe_3O_4).

Veremos em nosso estudo que todas as substâncias apresentam diamagnetismo. Materiais paramagnéticos ou ferromagnéticos apresentam comportamentos que se sobrepõem e superam os efeitos do diamagnetismo.

• diamagnetismo

Começaremos nosso estudo com o caso do efeito conhecido como diamagnetismo, que se manifesta em qualquer tipo de substância. Ele ocorre como reação do movimento

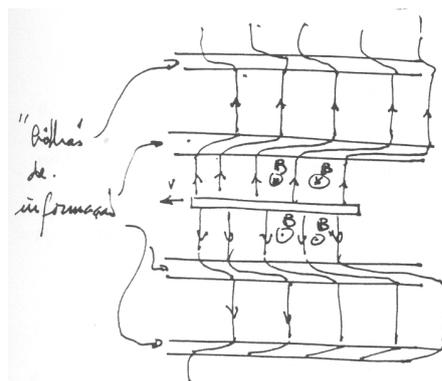


Figura 31.1: Ilustração de um átomo.

orbital dos elétrons dos átomos a um campo magnético externo, estático e não uniforme. Em geral, os comportamentos dos átomos no interior da matéria são determinados pela mecânica quântica. Para trazer a discussão para o contexto clássico, mais apropriado a este curso, vamos considerar um modelo muito simplificado, onde o átomo é representado por um único elétron que gira em torno do núcleo, como ilustra a figura 30.1.

Sendo m a massa do elétron e $-e$, a sua carga, podemos obter as relações entre o raio r de sua órbita e o módulo v de sua velocidade através da lei de Newton e da expressão da energia do sistema.

$$\vec{F} = m \vec{a} \rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (31.1)$$

Sendo E_c a energia cinética do elétron e, E , a energia total do átomo, podemos escrever:

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 r} \quad (31.2)$$

$$E = \frac{m v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} = -E_c \quad (31.3)$$

Assim,

$$r = \frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 E_c} \quad (31.4)$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \quad (31.5)$$

Neste tipo de órbita, o movimento do elétron corresponde a uma corrente elétrica dada por

$$I = \frac{\text{n}^\circ \text{ de vezes que o elétron passa por um ponto}}{\text{tempo}} \times \text{carga do elétron}$$

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \quad (31.6)$$

Colocar o átomo em um campo magnético externo, corresponde a variar temporalmente o valor deste campo, desde zero até seu valor final, \vec{B} , na região onde se encontra o átomo. Se o campo \vec{B} tiver a configuração final mostrada na figura 30.2, haverá uma componente $\partial\vec{B}/\partial t$ paralela ao eixo z . Pela lei de Faraday, haverá um campo elétrico induzido originado pela variação temporal de \vec{B} .

$$\oint_L \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (31.7)$$

Considerando a linha fechada L coincidente com a órbita do elétron, obtemos

$$E_{ind} 2\pi r = - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \pi r^2 \quad (31.8)$$

$$E_{ind} = - \frac{r}{2} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (31.9)$$

Ao longo de uma órbita, E_{ind} é responsável por uma força $F = -eE_{ind}$ sobre o elétron, que é paralela ao seu movimento e, portanto, aumenta a energia cinética do elétron.

Desta forma,

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + eE_{ind} v \Delta t \quad (31.10)$$

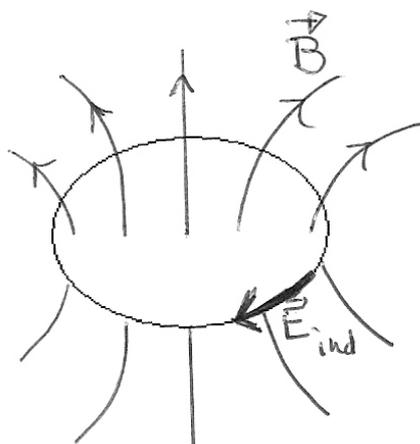


Figura 31.2: Campo magnético \vec{B} e campo elétrico induzido (\vec{E}_{ind}) por $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

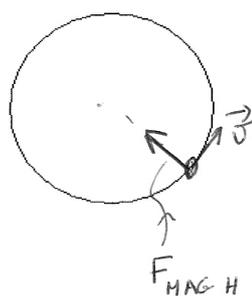


Figura 31.3: A força $\vec{F} = -e \vec{E}_{ind}$ provoca o aumento da velocidade do elétron.

onde v' é a velocidade final do elétron e Δt é o tempo que levou para o campo atingir a sua configuração final.

Assim,

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + e \frac{\Delta B}{\Delta t} \frac{r}{2} v \Delta t \quad (31.11)$$

onde $\Delta B = B_v - 0$, sendo B_v a componente vertical do campo magnético. Portanto,

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{eB_v r v}{2} \quad (31.12)$$

Poderíamos imaginar que este aumento de velocidade deveria acarretar o aumento do raio da órbita do elétron. Entretanto, antes de chegarmos a conclusões, é preciso lembrar que agora o elétron se move em presença de um campo magnético e, portanto, a lei de Newton deve ser escrita como

$$\frac{mv'^2}{r'} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} + F_{magh} \quad (31.13)$$

onde F_{magh} é a componente horizontal da força de origem magnética, dada por

$$F_{magh} = ev B_v \quad (31.14)$$

Neste exemplo, \vec{F}_{magh} aponta radialmente para dentro da órbita.

Assim, a lei de Newton passa a ser escrita:

$$\frac{mv'^2}{r'} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} + ev B_v \quad (31.15)$$

Usando (30.12), temos:

$$\frac{mv'^2}{r'} = \frac{mv^2}{r'} + e B_v v = +\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} + e B_v v \quad (31.16)$$

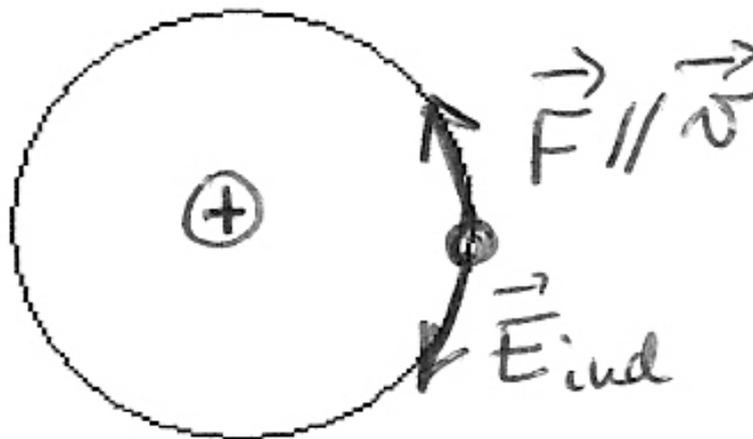


Figura 31.4: O elétron em movimento no campo \vec{B} sofre a ação de uma força magnética $\vec{F}_{mag} = -e \mathbf{v} \times \vec{B}$ com componente horizontal $F_{magh} = e v B_v$.

Os fatores $eB_v v$ cancelam nos dois membros, indicando que a órbita do elétron é determinada pela igualdade

$$\frac{mv^2}{r'} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} \quad (31.17)$$

Através de (30.1) podemos concluir que $r = r'$. Isso indica um fato curioso, qual seja, que a introdução do \vec{B}_{ext} muda a velocidade da órbita do elétron, mas não altera o seu raio.

A não uniformidade de \vec{B}_{ext} corresponde ao fato de ele ter uma componente horizontal que dá origem a uma força para cima.

Assim, o resultado global de todos estes efeitos é que o átomo passa a sofrer uma força na direção das linhas de \vec{B}_{ext} e sentido de \vec{B} decrescente. Ou seja, neste exemplo, uma força para cima, de módulo

$$F = ev' B_h$$

onde $v' > v$.

O módulo de v' é dado por

$$v' = \sqrt{\frac{2E + ev B_v r}{m}} > v \quad (31.18)$$

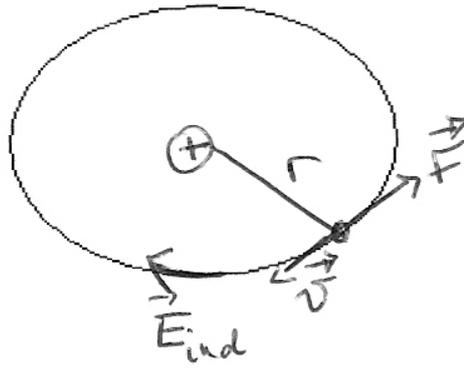


Figura 31.5: A força $\vec{F} = -e \vec{E}_{ind}$ provoca a diminuição da velocidade do elétron.

Caso a velocidade inicial do átomo fosse como mostrado na figura 30.5, ou seja, com sentido oposta a do caso anterior, o campo elétrico induzido \vec{E}_{ind} provocaria uma diminuição da velocidade do elétron. Sua velocidade final seria

$$v'' = \sqrt{\frac{2E - evB_0 r}{m}} < v \quad (31.19)$$

Isso significa que os átomos com momento angular paralelo a \vec{B} sofrem uma força para cima e os átomos com momento angular de sentido oposto ao de \vec{B} sofrem uma força para baixo. Como as velocidades dos elétrons do primeiro tipo são maiores que as do segundo, as forças sobre eles também serão maiores. Como nos átomos de uma amostra, o movimento dos elétrons não têm sentido preferencial, podemos considerar que há igual número de elétrons movendo-se nos diferentes sentidos. Assim, haverá uma força resultante no sentido de \vec{B} decrescente.

• **Questão:** Qual o sentido da força resultante sobre a amostra se o sentido do campo magnético \vec{B} for invertido?

O efeito que acabamos de discutir é conhecido como diamagnetismo. Ele ocorre em todos os materiais, já que só depende da existência de elétrons em movimento. Ele depende da não uniformidade do campo externo, que sem isso não teria uma componente B_h , horizontal.

O campo total no interior do material diamagnético é ligeiramente menor que $\vec{B}_{externo}$, uma redução da ordem de 10^{-6} vezes.

• paramagnetismo

Um outro fenômeno importante relacionado à resposta da matéria a campos magnéticos externos é o paramagnetismo. Ele é associado às reações dos spins dos elétrons ao \vec{B}_{ext} .

Quando uma espira percorrida por uma corrente está sujeita a um campo \vec{B}_{ext} , ela sofre forças do tipo $q \mathbf{v} \times \vec{B}$. Estas forças produzem momentos (torques) na espira, tendendo a levá-la a uma posição estável, onde o seu campo magnético torna-se paralelo ao campo externo. Ao interpretar este resultado, é preciso lembrar que ele não decorre da ação de \vec{B}_{ext} sobre o campo \vec{B} da espira. Afinal, campo não age sobre campo!

No paramagnetismo, o campo externo tende a provocar um “FLIP” [sacudidela] no elétron, mudando a sua orientação. Como resultado, o campo no interior do material sofre aumento ligeiro ($\sim 10^{-3}$). Além disso, o material paramagnético colocado em um \vec{B}_{ext} tende a se mover no sentido de \vec{B} crescente.

O paramagnetismo ocorre principalmente em átomos com números ímpares de elétrons, pois aí não existe o “emparelhamento” de Pauli completo. Mas não existe regra geral, conforme mostra a experimentação. O óxido nítrico, com 15 elétrons, é um exemplo de material paramagnético.

Nos casos em que ocorre, o paramagnetismo provoca efeitos mais intensos do que o diamagnetismo se sobrepondo a ele.

Capítulo 32

ferromagnetismo

• introdução

A resposta de um material a campos magnéticos externos pode ser estudada colocando amostras desse material no interior de um solenóide, como mostra a figura 31.1. Ao passar uma corrente I pelo solenóide, aparece um campo magnético no ponto P , que pode ser medido. Se o interior do solenóide estiver vazio, o campo em P tem um valor \vec{B}_P . Quando uma amostra de material é introduzida no interior do solenóide, para o mesmo valor de I , o valor do campo magnético no ponto P muda, passando a ser \vec{B}'_P . Deste modo, a diferença $\vec{B}'_P - \vec{B}_P$ fornece indícios importantes sobre a resposta do material ao campo externo.

No caso de materiais ferromagnéticos, essas respostas são muito intensas. Os campos \vec{B}_P e \vec{B}'_P são paralelos e o módulo de \vec{B}'_P pode chegar a ser milhares de vezes maior do que o de \vec{B}_P . Os principais materiais ferromagnéticos são ferro (Fe), cobalto (Co) e níquel (Ni). A figura 31.2 mostra um gráfico da relação típica dentre \vec{B}'_P e \vec{B}_P , para esses materiais.

As escalas são omitidas propositalmente, pois os aspectos quantitativos variam de um material para outro. A característica importante a ser notada é que, inicialmente, \vec{B}'_P cresce com o aumento de \vec{B}_P , até se estabilizar em um patamar, a partir de um valor

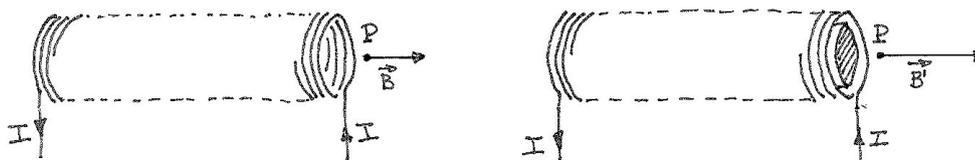


Figura 32.1:

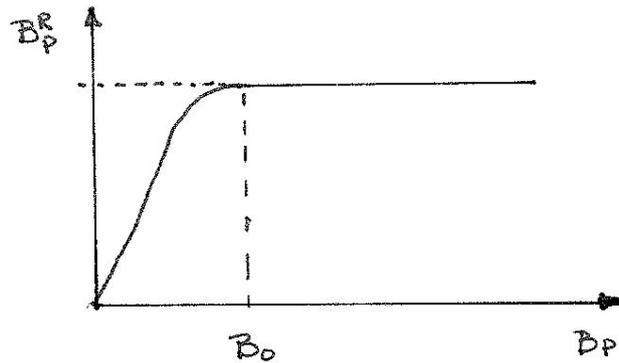


Figura 32.2:

\vec{B}_0 . Daí em diante, aumentos de \vec{B}_p não conseguem mais aumentar \vec{B}'_p , indicando uma saturação. Esse tipo de comportamento, observado nos vários materiais ferromagnéticos, levou o físico francês Pierre Weiss a propor, em 1906-1907, um modelo para a organização da matéria no interior de amostras ferromagnéticas, que permanece válido até hoje.

• átomos de ferro e efeitos coletivos

Weiss propôs *que* os átomos de Fe tendem a se organizar coletivamente quando colocados juntos uns aos outros. Entretanto, na sua época a mecânica quântica não era conhecida e, portanto, não era possível entender *porque* isso ocorre. Atualmente, sabemos que um átomo de Fe possui um núcleo com 26 prótons e um número de neutrons que pode variar entre 28 e 31, dependendo do isótopo. Um átomo neutro também possui, portanto, 26 elétrons, organizados em 6 camadas como mostra a tabela.

camada	número de elétrons
1S	2
2S	2
2P	6
3S	2
3P	6
3D	6
4S	2

Nessa configuração, as 5 primeiras camadas estão completas e contêm sempre números pares de elétrons, com spins opostos. De acordo com a mecânica quântica, a camada 3D, mais externa, poderia acomodar até 10 elétrons. Entretanto, no átomo de Fe existem apenas 6, o que permite a eles que se organizem de vários modos diferentes. Em particular, existem configurações nas quais o momento angular do sistema é não nulo. Como esse momento angular é devido a elétrons em movimento, ele indica a presença de correntes

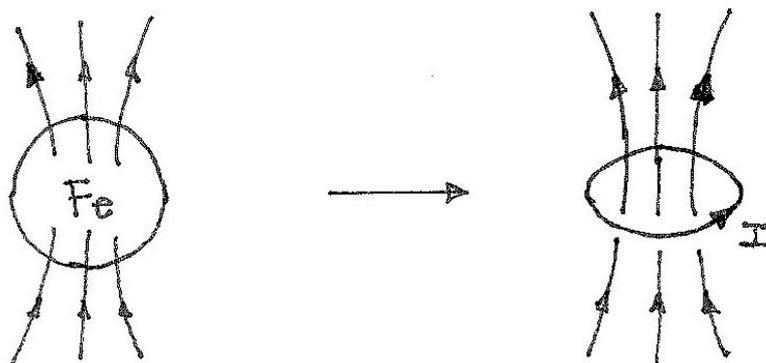


Figura 32.3:

e, conseqüentemente, que o átomo gera campo magnético. Por isso, do ponto de vista eletromagnético, um átomo de Fe pode ser pensado como sendo análogo a uma espira com corrente, como sugere a figura 31.3.

Quando dois átomos de Fe são colocados próximos um ao outro, ocorrem interações eletromagnéticas entre todos os pares de partículas carregadas, estejam elas em um único átomo ou em átomos diferentes. Assim, por exemplo, cada elétron interage com 26 prótons e 25 elétrons do seu átomo e, também, com os 26 prótons e 26 elétrons do outro átomo. Como os elétrons da camada $3D$ são mais externos e podem estar em várias configurações diferentes, eles são mais sensíveis à presença do átomo vizinho. Por isso, os elétrons da camada $3D$ de um átomo influem significativamente sobre o comportamento dos elétrons da camada $3D$ do vizinho.

O mesmo tipo de efeito ocorre na ligação entre os dois átomos de hidrogênio que formam a molécula de H_2 , como discutimos na aula 4 do curso de Física 3. No caso do H_2 , que envolve apenas 4 partículas, dois prótons e dois elétrons, a estrutura da molécula pode ser calculada com precisão e fica claro o papel do princípio de Pauli. Esse princípio afirma que dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado quântico e a sua influência sobre os resultados dos cálculos pode ser seguida. O caso de uma amostra de Fe é muito mais complexo, tanto devido à existência de 26 elétrons em cada átomo como pelo fato de a amostra conter muitos átomos. Por isso não existem, até o momento, cálculos de sistemas ferromagnéticos a partir de primeiros princípios. Apesar dessa limitação, sabemos que o efeito do princípio de Pauli em sistemas que contêm muitos átomos de Fe é fazer com que os seus momentos angulares se alinhem. Esse alinhamento faz com que as contribuições de cada átomo ao campo magnético se somem e deem origem espontaneamente, na região da amostra, a um campo magnético macroscópico \vec{B}_E . Tal situação está indicada na figura 31.4. Existem, também, interações magnéticas entre átomos vizinhos, mas eles são cerca de 1000 vezes menores que as devidas ao princípio de Pauli.

• domínios magnéticos

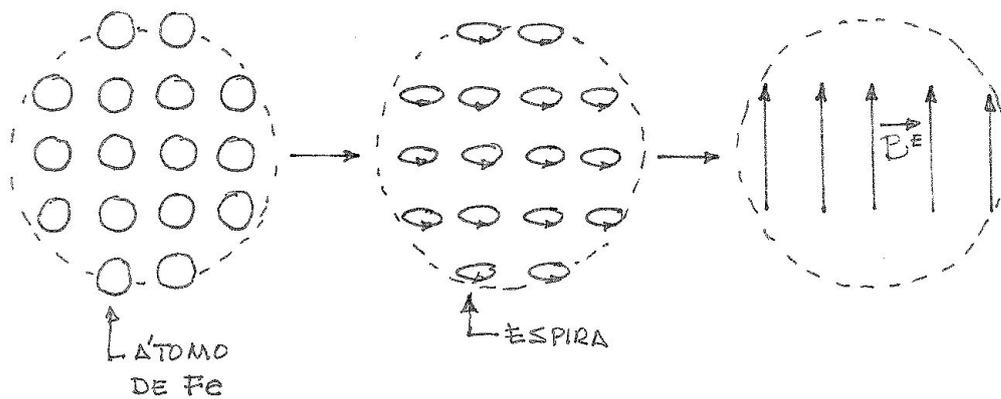


Figura 32.4:

O modelo proposto por Weiss, bem antes da mecânica quântica, é baseado na idéia de que a matéria no interior de uma substância ferromagnética divide-se espontaneamente em regiões ou *domínios*, sendo que, em cada um deles, o campo magnético é praticamente uniforme.

Para explicar a inexistência de efeitos magnéticos macroscópicos, o modelo admite, também, que os campos em regiões próximas entre si estão orientados em sentidos opostos, de modo que os efeitos magnéticos produzidos pelas várias regiões tendem, em conjunto, a se anular. Tal situação está mostrada esquematicamente na figura 31.5, para o caso de uma amostra de Fe sem campo magnético externo. A parte ampliada da figura mostra dois domínios vizinhos, separados por uma região de transição, chamada *parede do domínio*.

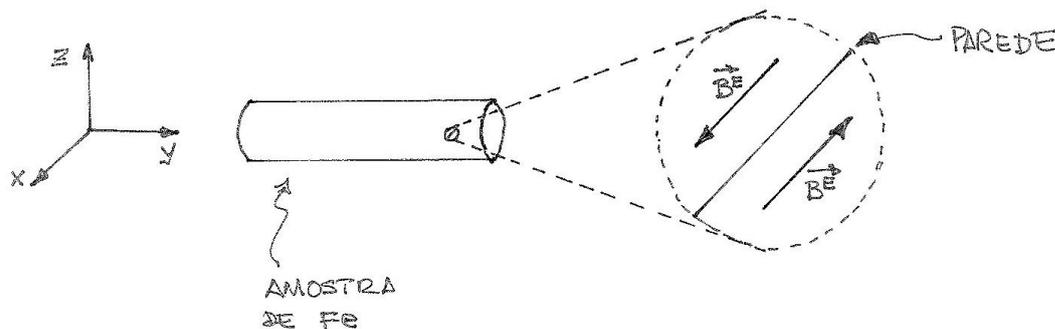


Figura 32.5:

Essas paredes são....

Para explicar o comportamento descrito na figura 31.2, Weiss supôs que, ao se colocar a amostra de Fe em presença de um campo magnético externo, o equilíbrio mostrado na figura anterior é alterado. Se esse campo for da forma $\vec{B}_{ext} = B_{ext} \vec{j}$, com $B_{ext} > 0$, ele tenderá a aumentar a magnetização na direção mais paralela ao eixo y e diminuí-la na

direção mais antiparalela.

As orientações dos átomos na parede são menos estáveis do que no interior do domínio e, por isso, elas são mais influenciáveis pelo campo externo. Isso faz com que, à medida que \vec{B}_{ext} é introduzido, esses átomos das paredes se reorientem e a parede, entendida como a região de transição, se mova. Essa idéia é sugerida na figura 31.6. Esse mecanismo produz um aumento nas populações dos domínios nos quais \vec{B}^E é predominantemente paralelo a \vec{B}_{ext} , e comecem a aparecer efeitos macroscópicos. À medida que \vec{B}_{ext} aumenta, a parede continua a se mover até que a região de magnetização predominantemente antiparalela desapareça e, com ela, a parede.

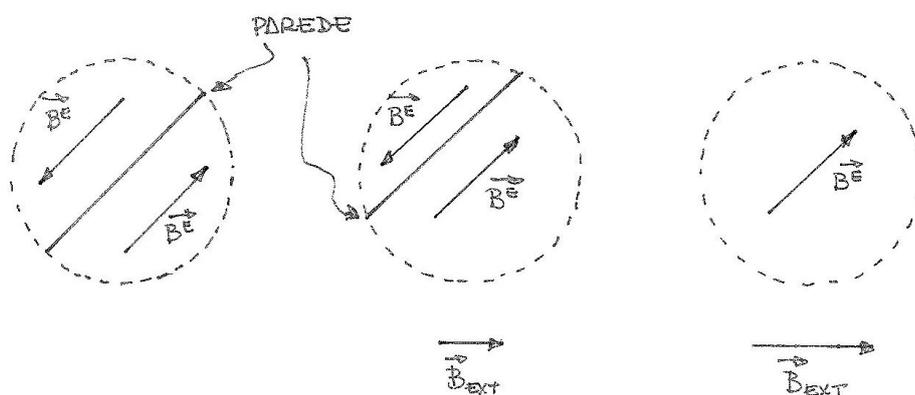


Figura 32.6:

A partir desse ponto, aumentos subsequentes de \vec{B}_{ext} começam a fazer com que os átomos passem a girar, de modo a tornar o campo espontâneo \vec{B}_E gradativamente paralelo ao campo externo. Quando esse paralelismo é alcançado, ocorre a saturação, pois \vec{B}_{ext} não consegue mais induzir aumentos na magnetização da amostra. Essa idéia é sugerida pela figura 31.7. Assim, o modelo proposto por Weiss, baseado na existência de domínio de magnetização no interior do Fe, permite-nos compreender a saturação da resposta de uma amostra de material ferromagnético a um campo magnético externo, mostrada na figura 31.2.

• histerese

Um outro fenômeno interessante, associado à existência de domínios, é o conhecido como histerese, nome derivado da palavra grega *memória*. Como discutimos anteriormente, quando uma amostra de Fe é submetida a um campo magnético muito intenso, ocorre a saturação da resposta magnética. O fenômeno da histerese está associado à irreversibilidade deste processo e está descrito na figura 31-8.

Uma amostra de Fe, totalmente desmagnetizada e sem campo externo, corresponde ao ponto A da figura. À medida que \vec{B}_{ext} é aplicado, as paredes entre os domínios se movem e os spins atômicos se orientam, o sistema se comporta como na curva (1) até ocorrer

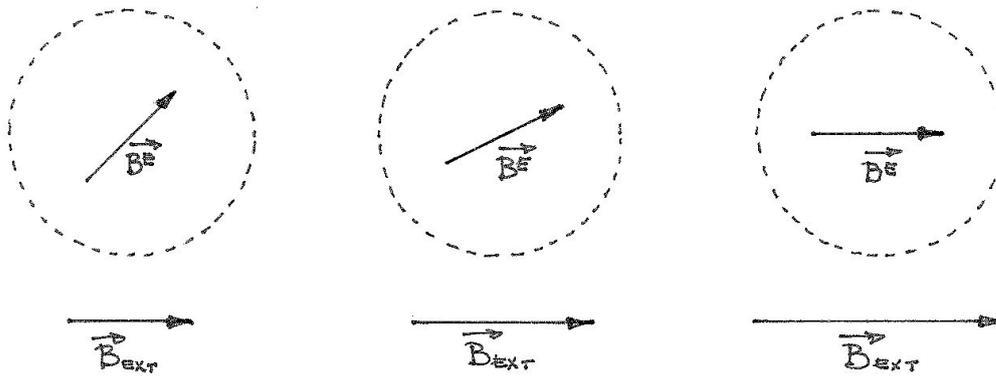


Figura 32.7:

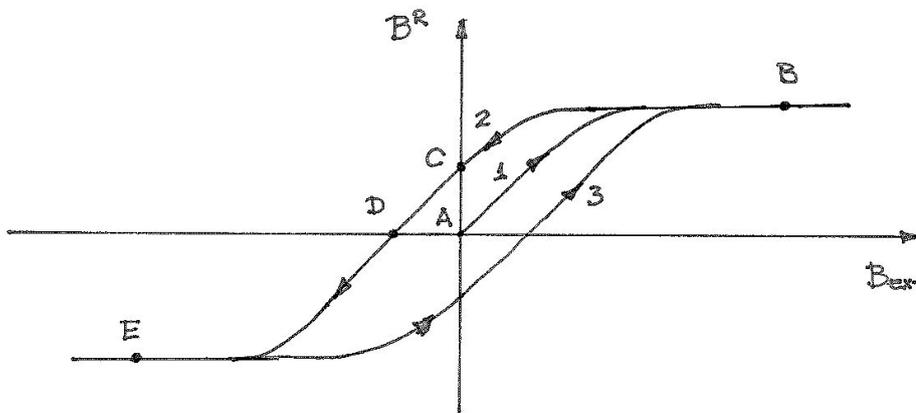


Figura 32.8:

a saturação, no patamar onde está o ponto B. Se, a partir daí, passarmos a diminuir o campo externo, a amostra começa a se desmagnetizar. Entretanto, nesse processo de volta, o sistema percorre o caminho (2) e, mesmo na ausência completa de campo externo, existe um efeito residual de magnetização, representado pelo ponto C. Por isso, para desmagnetizar completamente a amostra, é preciso colocá-la em presença de um campo magnético externo de sentido o oposto ao anterior, até o ponto D ser atingido. A partir desse ponto, se a intensidade do campo externo continuar a ser aumentada, o sistema tende a uma nova saturação, na região do ponto E. Uma nova reversão de \vec{B}_{ext} leva o sistema a percorrer o caminho (3), até uma eventual nova saturação, na região do ponto B. A figura 31.8 descreve um processo irreversível, pois as curvas (1), (2) e (3) não se superpõem. Elas são conhecidas como curvas de histerese dos materiais ferromagnéticos.

• efeito da temperatura

As propriedades de materiais ferromagnéticos que descrevemos acima envolvem o or-

denamento de átomos nos seus interiores. Sabemos, por outro lado, que a temperatura associada às energias cinéticas desses átomos, tende a desorganizar os sistemas, promovendo distribuições estatísticas. No interior do Fe esses dois efeitos competem e, por isso, a resposta de uma amostra desse material a campo externo depende da temperatura. A temperatura da amostra determina, em particular, o valor máximo da resposta a um campo externo. Quanto maior a temperatura, menor será o valor de saturação do campo, como sugere a figura 31.9.

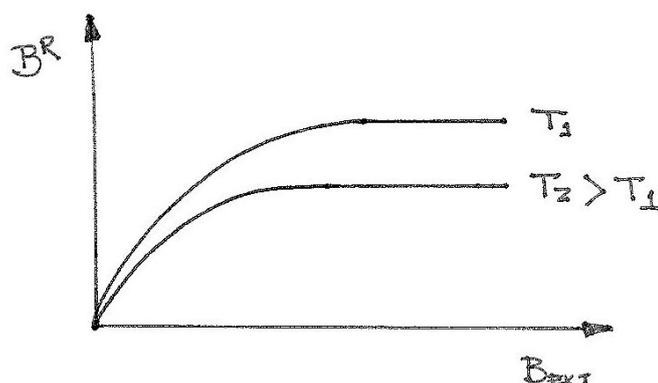


Figura 32.9:

Por esse motivo, respostas altas ocorrem a temperaturas muito baixas. De modo complementar, a resposta tenderá a se tornar pequena para temperaturas altas. A temperatura para a qual a resposta se anula é conhecida como temperatura de Curie, em homenagem ao físico francês Pierre Curie, que estudou esse fenômeno. As temperaturas de Curie para o Fe e para o Ni são, respectivamente $770^{\circ}C$ e $358^{\circ}C$. Acima dessas temperaturas, esses materiais tornam-se paramagnéticos.

Capítulo 33

campos elétricos estáticos na matéria I

• O campo eletrostático na matéria

Calcular o campo eletrostático criado por um sistema de cargas num meio material não é, em geral, uma tarefa fácil. Isso acontece porque, para um dado sistema, não existe nenhuma relação simples ou direta entre os campos no vácuo e em presença ou no interior de um meio material. Em particular, não é sempre verdade que o campo num ponto do interior de um dielétrico seja sempre o campo no vácuo dividido pela constante dielétrica do material. Considere, por exemplo, as duas situações ilustradas nas figuras 32-1. Na primeira delas, uma carga puntiforme q , positiva, cria em todo o espaço um campo coulombiano. A figura 1b representa um dielétrico colocado em presença da carga.

O dielétrico, evidentemente, não altera o campo da carga q em todo o espaço, já que ele é uma propriedade inalterável da carga. Por outro lado, o campo resultante em todo o espaço é modificado pela presença do dielétrico, tanto no ponto A , em seu interior, como no ponto B , fora dele.

A alteração do campo fora do dielétrico pode parecer estranha à primeira vista, mas ela ressalta um aspecto muito importante do problema, qual seja, o de que o dielétrico

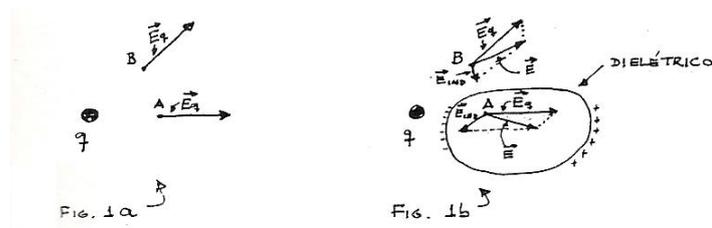


Figura 33.1:

não age diretamente sobre o campo da carga q . Por diretamente, queremos dizer que o dielétrico não é uma substância mágica, que ao ocupar uma região do espaço, “dilui” ou “rarefaz” o campo aí existente, dividindo-o pela constante dielétrica k . Se isso fosse verdade, o campo fora do dielétrico não seria modificado.

Assim, qual é a relação entre o dielétrico e o campo da carga q ? Para entender o que ocorre é fundamental notar que o dielétrico não age sobre o campo da carga, ele reage a esse campo. Por reagir, entendemos o seguinte processo. O dielétrico é formado por cargas elétricas, que sofrem forças devido à presença da carga q e, por isso, efetuam pequenos deslocamentos. Esses deslocamentos, por outro lado, provocam pequenos, mas significativos, acúmulos de cargas na superfície do dielétrico, que passam a criar campos em todo o espaço. Assim, o campo resultante é a soma vetorial dos campos criados pela carga q e pelas cargas induzidas na superfície do dielétrico.

Temos, então, a seguinte cadeia lógica de relações q cria \vec{E}_q , \vec{E}_q induz σ_{ind} , σ_{ind} cria \vec{E}_{ind} e, portanto, o campo total é $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{ind}$

Atenção: essa é uma sequência lógica de relações, não é uma sequência cronológica de EVENTOS. O que quer dizer isto?

Um aspecto importante do problema é que, em cada ponto, o deslocamento Δ das cargas no interior do dielétrico é proporcional a \vec{E} , o campo resultante. Essa relação entre Δ e \vec{E} envolve tanto a densidade volumétrica de cargas do dielétrico ρ , como a sua susceptibilidade elétrica χ_e , definida pela relação

$$\rho \Delta = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (33.1)$$

Note que nesta relação \vec{E} não é o campo criado pela carga q , mas sim, o campo resultante, que recebe uma contribuição de \vec{E}_{ind} . Esse campo \vec{E}_{ind} , por outro lado, depende dos deslocamentos de todas as cargas do sistema. Em outras palavras, o deslocamento de cargas num ponto depende dos deslocamentos de todas as outras cargas do sistema. Visto deste modo, fica claro que estamos em presença de um fenômeno bastante complexo.

Existem, porém, situações onde o problema se simplifica. Algumas dessas situações são discutidas a seguir, por meio de exemplos.

• exemplo 1: imersão total

Suponha uma situação em que um sistema de cargas esteja totalmente imerso no interior de um dielétrico. Isso pode acontecer, por exemplo, quando cargas puntiformes, condutores, esferas carregadas, capacitores, baterias ou quaisquer outros objetos são colocados no interior de um enorme recipiente contendo óleo. Se o recipiente for suficientemente grande para que os campos criados pelos objetos no interior do óleo sejam muito

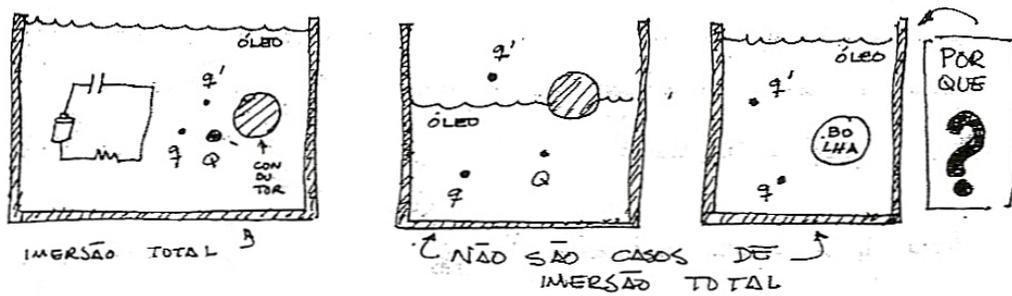


Figura 33.2:

fracos fora dele, temos um caso de imersão total.

No caso de haver imersão total num dielétrico de constante k , os campos são os do vácuo, divididos por k . As equações de Maxwell passam a ser dadas por

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{q_{int}}{k \epsilon_0} \text{ ou } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{k \epsilon_0} \quad (33.2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} ds \text{ ou } \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (33.3)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint [\mu_0 \vec{j} + \mu_0 k \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}] \cdot \vec{n} ds \text{ ou } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 k \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (33.4)$$

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0 \text{ ou } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (33.5)$$

O campo elétrico criado por uma carga parada, em particular, é dado pela expressão coulombiana

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi k \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}. \quad (33.6)$$

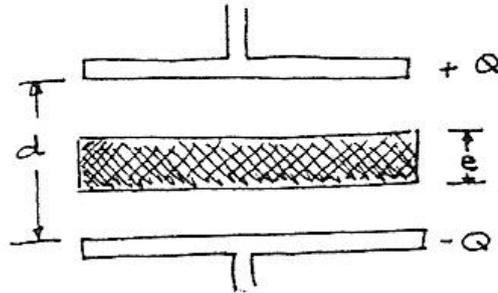


Figura 33.3:

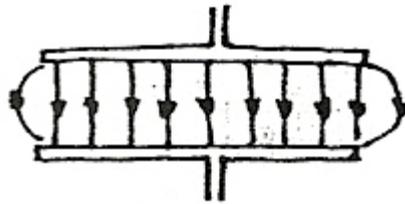


Figura 33.4:

• exemplo 2: capacitor plano parcialmente preenchido por dielétrico

É dado um capacitor plano, de placas circulares de raio R , separadas pela distância $d \ll R$, e carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$.

Entre as placas desse capacitor é colocada uma lâmina de material dielétrico de constante k e espessura $e < d$, como mostra a figura. O nosso problema consiste em calcular o campo elétrico em todo o espaço e as cargas induzidas nas superfícies do dielétrico.

Quando o dielétrico não está presente, o campo no interior do capacitor pode ser calculado tomando suas placas como sendo infinitas, e vale

$$E_Q = \frac{\sigma_Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} \quad (33.7)$$

Ao introduzirmos o dielétrico, ocorre uma indução de cargas nas suas superfícies, gerando uma densidade superficial

$$\sigma_{ind} < \sigma_Q$$

A simetria do problema permite-nos concluir que σ_{ind} será uniforme sobre as superfícies do dielétrico, levando à situação da figura.

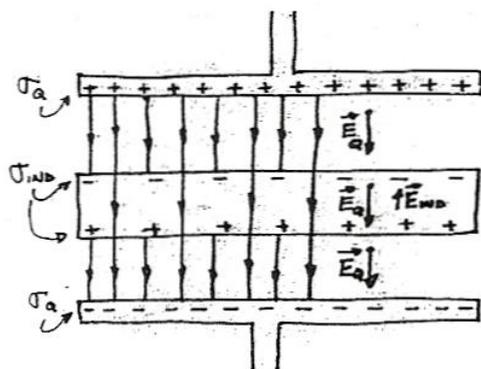


Figura 33.5:

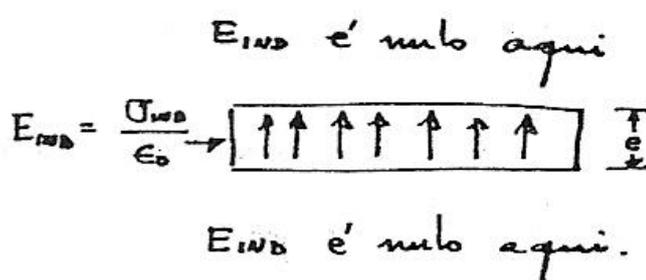


Figura 33.6:

O raio R da lâmina dielétrica é muito maior do que sua espessura e . Por isso, podemos supor que σ_{ind} esteja distribuída sobre superfícies infinitas, e concluímos que o campo induzido é não nulo no interior do dielétrico, onde vale

Assim, o campo resultante no interior do capacitor é dado por:

fora do dielétrico

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_Q| = \frac{\sigma_Q}{\epsilon_0} \quad (33.8)$$

dentro do dielétrico

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_Q + \vec{E}_{ind}| = \frac{\sigma_Q}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{ind}}{\epsilon_0} \quad (33.9)$$

Para terminar o problema, basta usarmos a eq. (32.1) no interior do dielétrico, onde \vec{E} é dado pela eq. (9), ρ é a densidade de carga que se deslocam e Δ é o deslocamento dessas cargas. No presente problema, como \vec{E} é uniforme, todas as cargas negativas do dielétrico deslocam-se de uma quantidade Δ para cima, relativamente às cargas positivas.

Por isso, esse deslocamento expõe cargas negativas na superfície superior e cargas positivas na superfície inferior, cuja quantidade total é dada por

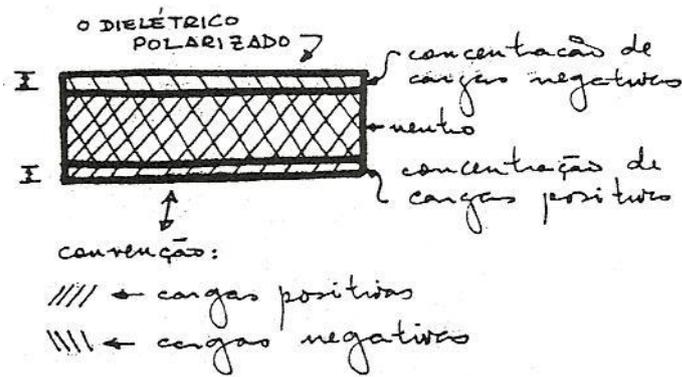


Figura 33.7: O dielétrico polarizado

$$q_{ind} = \rho \pi R^2 \Delta \quad (33.10)$$

onde $\pi R^2 \Delta$ é o volume ocupado pelas cargas expostas.

Assim, a densidade σ_{ind} é dada por

$$\sigma_{ind} = \rho \Delta \quad (33.11)$$

Usando a eq. (32.1), temos

$$\sigma_{ind} = \chi_e \varepsilon_0 E \quad (33.12)$$

Substituindo esse resultado na eq. (32.9), obtemos

$$E = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0} - \chi_e E \rightarrow (1 + \chi_e)_k E = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0} \quad (33.13)$$

Chamando $k = (1 + \chi_e)$ temos, no interior do dielétrico,

$$E = \frac{\sigma Q}{k \varepsilon_0}. \quad (33.14)$$

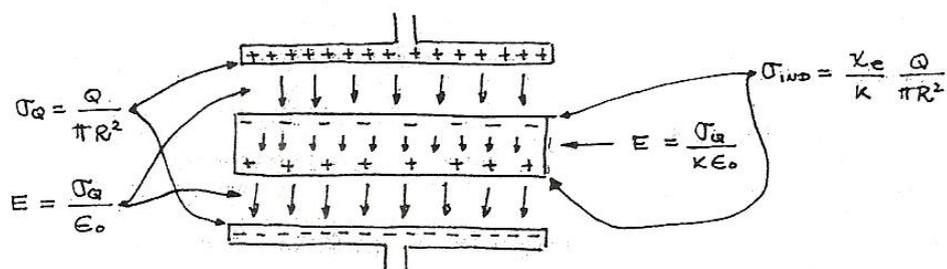


Figura 33.8:

Substituindo esse resultado na eq. (32.12), obtemos a densidade de cargas induzidas:

$$\sigma_{ind} = \frac{\chi_e}{k} \sigma_Q = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_Q = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \frac{Q}{\pi R^2} \quad (33.15)$$

Assim, a carga total induzida vale

$$Q_{ind} = \sigma_{ind} \pi R^2 = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} Q \quad (33.16)$$

As equações (32.14), (32.15) e (32.16) são as resposta ao nosso problema, a elas estão resumidas na figura acima. Para ajudar você a pensar um pouco sobre esses resultados, seguem algumas questões.

• questões

1. A carga induzida no dielétrico pode ser maior do que a carga no capacitor? A sua resposta é coerente com as equações dadas acima?
2. Qual o significado físico da constante χ_e ?
3. A susceptibilidade elétrica de uma substância A é maior que a da substância B; qual delas fica mais polarizada quando introduzida no interior do capacitor? Justifique sua resposta do ponto de vista físico.
4. Se o campo resultante no interior do dielétrico é menor que o campo em pontos externos a ele, então a densidade de linhas de campo dentro do dielétrico também é menor do

que fora dele. Faça um desenho representando essa situação, e explique como é possível que algumas das linhas de campo desapareçam na superfície do dielétrico.

5. Qual o campo criado pelas cargas induzidas em todo o espaço?

Capítulo 34

campos elétricos estáticos na matéria II

• a esfera dielétrica

Consideramos novamente o capacitor do exemplo anterior mas, ao invés da placa dielétrica, temos uma esfera de mesmo material, cujo raio é $a < \frac{d}{2}$. Vamos ver que, neste caso, o campo no interior da esfera NÃO é o campo externo dividido por k . Assim, este exemplo mostra que o campo no interior de um corpo dielétrico depende não somente do material de que ele é feito, mas também da sua forma geométrica.

Ao introduzirmos a esfera no campo do capacitor, este polariza seus átomos, fazendo com que apareçam cargas negativas na face superior e cargas positivas na face inferior. Essas cargas induzidas, por sua vez, criam um campo induzido em todo o espaço, tanto dentro como fora da esfera.

O nosso objetivo é calcular o campo induzido \vec{E}_{ind} . Para tanto, vamos SUPOR que \vec{E}_{ind} seja uniforme no interior da esfera. Essa hipótese é bastante forte mas, na sequência, mostramos que a resposta final do problema é coerente com ela. A hipótese de \vec{E}_{ind} ser uniforme no interior da esfera é equivalente a supor que ele pode ser representado por linhas de campo paralelas ao campo do capacitor.

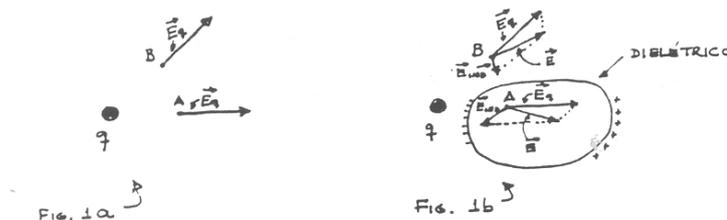


Figura 34.1: Esfera dielétrica entre as placas de um capacitor

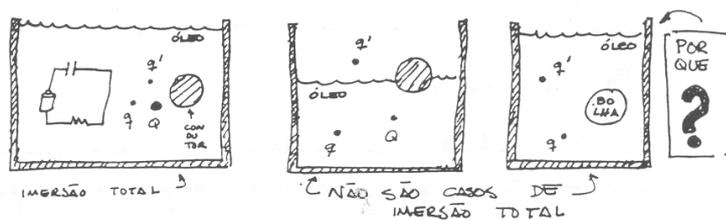


Figura 34.2: Campo induzido no interior da esfera dielétrica

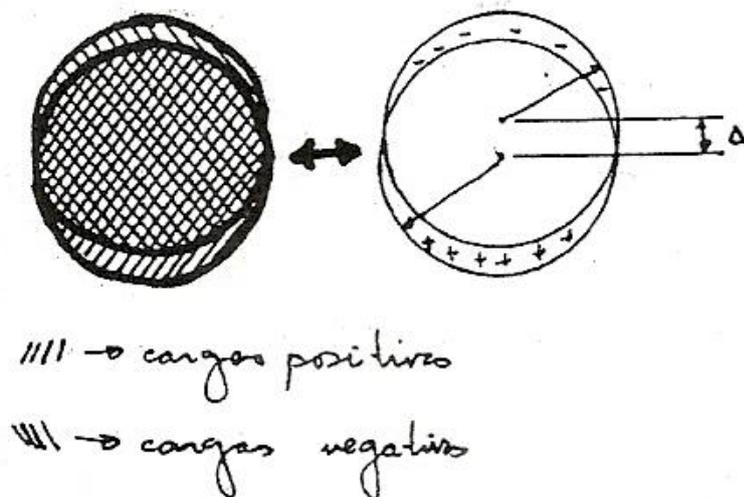


Figura 34.3: Deslocamento das cargas da esfera dielétrica

Assim, na verdade, estamos supondo que as coisas ocorram de modo que cada átomo do dielétrico seja deformado apenas na direção vertical, o que é equivalente a dizer que todas as cargas negativas se deslocam para cima sem perder a forma esférica, como mostram as figuras abaixo.

Deste modo, o problema de calcular \vec{E}_{ind} reduz-se ao cálculo do campo elétrico criado por duas esferas carregadas, de cargas opostas, e parcialmente superpostas, já que seus centros estão separados pela distância Δ , onde $\Delta \ll a$.

• cálculo de \vec{E}_{ind} dentro do dielétrico

Para efetuar este cálculo, tomamos um sistema de coordenadas cilíndricas com o eixo z coincidente com o eixo de simetria e cuja origem está sobre o centro da esfera positiva. Assim, o centro da esfera negativa está situado no ponto do eixo z onde $z = \Delta$. Desejamos calcular \vec{E}_{ind} no ponto P da figura, que tem coordenadas z e r , onde r é a distância ao eixo z .

O cálculo do campo de cada esfera é feito por meio da lei de Gauss, e obtemos:

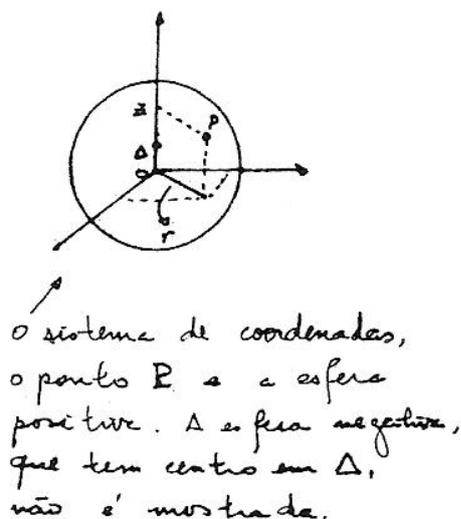


Figura 34.4:

campo da esfera positiva $\vec{E}_+ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} [r \vec{e}_r + z \vec{k}] \leftarrow$ aponta para fora da origem

campo da esfera negativa $\vec{E}_- = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} [r \vec{e}_r + (z - \Delta) \vec{k}] \leftarrow$ aponta para o ponto $z = \Delta$

O campo \vec{E}_{ind} é, então, dado por

$$\vec{E}_{ind} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \Delta \vec{k} \quad (34.1)$$

Este resultado mostra que \vec{E}_{ind} tem o mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos do interior do dielétrico. Em outras palavras, ele é uniforme nesta região, coerentemente com a hipótese feita no início deste exemplo. Outra característica importante de \vec{E}_{ind} é que ele é proporcional a Δ , o deslocamento relativo entre as partes negativa e positiva de cada átomo.

• cálculo do campo resultante dentro do dielétrico

O campo resultante dentro do dielétrico será chamado de \vec{E} e ele é a soma do campo \vec{E}_{ext} criado pelo capacitor com \vec{E}_{ind}

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} \quad (34.2)$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta}{a^3} \quad (34.3)$$

Para resolvermos o problema basta usarmos a eq. (32.1)

$$\rho \Delta = \chi_e \varepsilon_0 E \quad (34.4)$$

Usando

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi a^3} \quad (34.5)$$

e as equações (33.3) e (33.4), obtemos a seguinte relação entre os campos resultante e externo:

$$E = \frac{3}{3 + \chi_e} E_{ext} = \frac{3}{2 + k} E_{ext} = \frac{3}{2 + k} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (34.6)$$

Neste caso, o campo total não é o campo externo dividido por k !

• problemas:

1. Mostre que o \vec{E}_{ind} FORA da esfera dielétrica é dado por

$$\vec{E}_{ind} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\Delta}{r^3} [-3 \text{sen } \theta \text{cos } \theta \vec{e}_r + (1 - 3 \text{cos}^2 \theta) \vec{k}], \quad (34.7)$$

onde r é a distância da origem ao ponto considerado e θ é o ângulo relativo ao eixo z .

2. Mostre que a densidade de carga induzida é dada por $\sigma_{ind} = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi a^3} \Delta \text{cos } \theta$.

Capítulo 35

ondas em meios materiais: condutores

• Modelo de Drude

Quando existe uma onda eletromagnética no interior de um condutor, o campo elétrico da onda age sobre os portadores de carga existentes no interior do material, fazendo com que eles se movam. Em geral há resistência a esse movimento, sendo parte da energia da onda dissipada por efeito Joule. Desse modo, podemos esperar que a propagação de ondas eletromagnéticas em condutores seja substancialmente diferente da que se dá no vácuo.

O comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de condutores é determinado pelas equações de Maxwell:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (35.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (35.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (35.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (35.4)$$

Este conjunto de equações difere daquele usado no caso de propagação de ondas no vácuo pela presença das densidades de carga e corrente. Qualquer substância condutora é formada por partículas positivas e negativas, que podem se deslocar umas relativamente às outras. No presente estudo suporemos que esse deslocamento não acarreta concentrações de carga no interior da substância; ou seja, suporemos que, nessa região, valha sempre

$$\rho = 0 \quad (35.5)$$

Para prosseguirmos na solução do problema precisamos determinar também a expressão da densidade de corrente elétrica. Para muitos condutores, sujeitos a campos elétricos constantes, é válida a lei de Ohm microscópica, expressa por

$$\vec{j} = g_0 \vec{E} \quad (35.6)$$

onde a constante g_0 é a condutividade da substância. Essa lei, que foi obtida no caso da corrente contínua, deve ser modificada quando o campo elétrico depende do tempo, como ocorre na onda eletromagnética.

Para determinarmos a nova relação entre o campo elétrico da onda e a densidade de corrente elétrica vamos supor, para efeito de raciocínio, que o condutor seja um metal. Vamos estudar o movimento de seus elétrons livres usando o modelo desenvolvido por Paul Drude no fim do século XIX ¹. Nesse modelo, supomos que o movimento dos elétrons livres se dê sob a ação de duas forças:

1) força devida ao campo elétrico da onda eletromagnética:

$$\vec{F}_1 = -e \vec{E}(x, y, z, t) \quad (35.7)$$

onde $-e$ é a carga do elétron e $\vec{E}(x, y, z, t)$ é o campo da onda no instante t , no ponto (x, y, z) onde está localizado o elétron. Quando consideramos uma onda plana monocromática que se propaga na direção y , esse campo pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(y, t) \\ &= \vec{E}^* \cos(\omega t - ky - \phi) \\ &= \vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*) \end{aligned} \quad (35.8)$$

onde $\phi^* = ky + \phi$ e \vec{E}^* é a amplitude da onda no ponto y , onde está o elétron. Assim, a força \vec{F}_1 é dada por

¹Paul Drude - The Theory of Optics - ed. Dover, Estados Unidos, 1959

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (35.9)$$

2) força devido à resistência ao movimento do elétron:

$$\vec{F}_2 = -b\vec{v} \quad (35.10)$$

onde \vec{v} é a velocidade do elétron e b é um coeficiente de proporcionalidade. O sinal negativo indica que esta força é sempre oposta ao movimento.

A equação de movimento do elétron é determinada pela lei de Newton. Chamando de S o seu deslocamento, temos:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -b \frac{dS}{dt} - e E^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (35.11)$$

onde m é a massa do elétron.

A solução desta equação tem a seguinte forma:

$$S = A \cos(\omega t - \phi^* + \delta) \quad (35.12)$$

Substituindo esta expressão na equação de movimento do elétron, obtemos os valores das incógnitas A e δ :

$$-m \omega^2 A \cos(\omega t - \phi^* + \delta) = b \omega A \sin(\omega t - \phi^* + \delta) - e E^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (35.13)$$

Usando as expressões dos seno e cosseno da soma de dois ângulos, podemos escrever:

$$\begin{aligned} &(-m \omega^2 A \cos \delta - b \omega A \sin \delta + e E^*) \cos(\omega t - \phi^*) + \\ &+(m \omega^2 A \sin \delta - b \omega A \cos \delta) \sin(\omega t - \phi^*) = 0 \end{aligned} \quad (35.14)$$

Para que esta equação seja válida para quaisquer valores de t , os coeficientes do seno e do cosseno devem se anular. Temos, então, duas equações envolvendo as incógnitas A e δ :

$$m\omega^2 A \cos \delta + b\omega A \sin \delta = eE^* \quad (35.15)$$

$$m\omega^2 A \sin \delta - b\omega A \cos \delta = 0 \quad (35.16)$$

A última equação determina o valor de δ

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{m\omega} \quad (35.17)$$

Esta relação permite-nos concluir que

$$\sin \delta = \frac{b}{\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \quad (35.18)$$

$$\cos \delta = \frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \quad (35.19)$$

Usando esses valores na eq. (34.15), obtemos:

$$A = \frac{e \vec{E}^*}{\omega \sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \quad (35.20)$$

Está, assim, determinada a equação de movimento do elétron; ela é dada por

$$\vec{S} = \frac{e\vec{E}^*}{\omega\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \cos(\omega t - \phi^* + \delta) \quad (35.21)$$

O nosso objetivo é conhecer a relação entre a densidade de corrente e o campo elétrico, para podermos escrever a equação de Ampère-Maxwell (34.4) em função de \vec{B} e de \vec{E} . A densidade de corrente está relacionada à velocidade dos elétrons por

$$\vec{j} = -e N \vec{v} \quad (35.22)$$

onde N é o número de elétrons livres por unidade de volume. O sinal negativo deve-se à convenção que identifica o sentido da corrente elétrica com o do movimento de cargas positivas.

Temos então

$$\begin{aligned}\vec{j} &= -e N \frac{d\vec{S}}{dt} \\ &= e N \frac{e\vec{E}^*}{\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \text{sen}(\omega t - \phi^* + \delta) \\ &= \frac{Ne^2\vec{E}^*}{(m^2\omega^2 + b^2)} \left[b \cos(\omega t - \phi^*) + m\omega \text{sen}(\omega t - \phi^*) \right]\end{aligned}\quad (35.23)$$

A última passagem foi efetuada com auxílio das eqs. (34.18) e (34.19). Para estabelecermos a relação entre \vec{j} e \vec{E} basta lembrar que

$$\vec{E} = \vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (35.24)$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = -\omega\vec{E}^* \text{sen}(\omega t - \phi^*) \quad (35.25)$$

Finalmente substituindo esses resultados na eq. (34.23), obtemos a relação desejada entre a corrente e o campo elétrico:

$$\vec{j}(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2\omega^2 + b^2} \vec{E} - \frac{me^2 N}{m^2\omega^2 + b^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (35.26)$$

Esta expressão mostra que, para campos dependentes do tempo, a densidade de corrente é proporcional não somente a \vec{E} , mas a $\partial\vec{E}/\partial t$ também. Quando o campo elétrico é constante. $\partial\vec{E}/\partial t = 0$, obtemos

$$\vec{j}(\omega = 0) = \frac{e^2 N}{b} \vec{E} \quad (35.27)$$

Esta é a lei de Ohm, sendo a condutividade g_0 expressa por

$$g_0 = \frac{e^2 N}{b} \quad (35.28)$$

É conveniente expressarmos o coeficiente b em termos de resistividade do material, definida como

$$\rho \equiv \frac{1}{g_0}$$

Temos então:

$$b = e^2 N \rho \quad (35.29)$$

Sendo assim, o coeficiente de amortecimento b é proporcional à resistividade do corpo, correspondendo à idéia intuitiva de que a resistência de um material é tanto maior quanto mais difícil for o movimento dos elétrons em seu interior. O estudo do movimento de um elétron no interior de um metal permite-nos concluir, então, que para frequências baixas a lei de Ohm continua a ser aproximadamente válida, uma vez que $\partial \vec{E} / \partial t$ pode ser desprezado. Quando as frequências são altas, entretanto, esse termo deve ser levado em consideração.

A expressão (34.26), que relaciona a densidade de corrente ao campo elétrico e sua derivada, permite-nos estudar o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de condutores. Para tanto, consideremos novamente a lei de Ampère-Maxwell, que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \vec{E} + \mu_0 \left(\varepsilon_0 - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (35.30)$$

onde $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$ são funções dadas por

$$g(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \quad (35.31)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2} \quad (35.32)$$

Assim, as equações de Maxwell apropriadas ao estudo de ondas eletromagnéticas em metais são dadas por

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (35.33)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (35.34)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (35.35)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (35.36)$$

Desejamos, como no caso de ondas no vácuo, obter uma expressão que envolva o campo elétrico e outra que envolve o campo magnético. Com esse objetivo, calculamos o rotacional da eq. (34.34)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (35.37)$$

Usando a identidade vetorial demonstrada na aula 11

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right) \quad (35.38)$$

e também a eq. (34.33), obtemos a equação desejada

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (35.39)$$

Como no caso do vácuo, estas equações também admitem ondas planas como solução. Se escolhermos a direção y como direção de propagação, o fato de a onda ser plana é expresso pela relação

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t) \quad (35.40)$$

Neste caso, a equação para \vec{E} fica mais simples

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (35.41)$$

Quando N , o número de elétrons livres por unidade de volume, tende a zero esta equação reduz-se à equação de onda no vácuo, pois

$$\lim_{N \rightarrow 0} g(\omega) = 0 \quad (35.42)$$

$$\lim_{N \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0$$

A solução de onda no vácuo, como já vimos anteriormente, é do tipo

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(ky - \omega t + \phi) \quad (35.43)$$

onde \vec{E}_0 é o vetor perpendicular à direção de propagação da onda.

No caso em que $g(\omega)$ é não nulo, ou seja, a substância é de fato um condutor, a solução da eq. (34.41) será da forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi) \quad (35.44)$$

Os valores dos parâmetros β e k são obtidos pela substituição dessa solução na eq. (34.41). Temos, então

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 e^{-\beta y} [(\beta^2 - k^2) \cos(ky - \omega t + \phi) + 2\beta k \operatorname{sen}(ky - \omega t + \phi)] \\ + \mu_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}_0 e^{-\beta y} \omega^2 \cos(ky - \omega t + \phi) = \\ = \mu_0 g(\omega) \vec{E}_0 e^{-\beta y} \omega \operatorname{sen}(ky - \omega t + \phi) \end{aligned} \quad (35.45)$$

Para que esta equação seja válida para quaisquer valores de y e t , os coeficientes do seno e do cosseno devem se anular. Impondo essas condições, obtemos duas equações envolvendo β e k :

$$k^2 - \beta^2 = \mu_0 \varepsilon(\omega) \omega^2 \quad (35.46)$$

$$2\beta k = \mu_0 g(\omega) \omega \quad (35.47)$$

Essas duas equações determinam β e k

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega) \omega}{2k} \quad (35.48)$$

$$k = \pm \sqrt{\mu_0} \omega \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \quad (35.49)$$

Na última equação escolhemos o sinal positivo porque o produto βk é sempre positivo [veja as eqs.(34.47) e (34.31)] e β deve ser positivo porque a onda é amortecida ao longo do eixo y [veja a eq. (34.44)]. Quanto aos sinais no interior da raiz quadrada, escolhemos o positivo porque k deve ser um número real. Além disso, esta é a solução que se reduz a $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ (caso de propagação de onda no vácuo) no limite em que a densidade de elétrons livres tende a zero.

O campo magnético no interior do condutor pode ser determinado por meio da Lei de Faraday, eq. (34.34). Usando o valor de \vec{E} dado pela eq. (34.44), podemos escrever

$$\operatorname{rot} \vec{E} = e^{-\beta y} [\beta \cos(ky - \omega t + \phi) + k \operatorname{sen}(ky - \omega t + \phi)] (E_{0x} \vec{k} - E_{0z} \vec{l}) \quad (35.50)$$

A lei de Faraday permite-nos identificar o resultado acima à variação temporal de \vec{B} :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = e^{-\beta y} [\beta \cos(ky - \omega t + \phi) + k \operatorname{sen}(ky - \omega t + \phi)] (\vec{j} \times \vec{E}_0) \quad (35.51)$$

Integrando, obtemos

$$\vec{B} = e^{-\beta y} \left[-\frac{\beta}{\omega} \operatorname{sen}(ky - \omega t + \phi) + \frac{k}{\omega} \cos(ky - \omega t + \phi) \right] (\vec{j} \times \vec{E}_0) \quad (35.52)$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi + \eta) \quad (35.53)$$

onde

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} (\vec{j} \times \vec{E}_0) \quad (35.54)$$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\beta}{k} \quad (35.55)$$

Os resultados acima nos mostram que o campo magnético no interior de um condutor é, como no caso do vácuo, simultaneamente ortogonal ao campo elétrico e à direção de propagação. Entretanto, os campos \vec{E} e \vec{B} não estão em fase, sendo η o ângulo de defasagem.

É conveniente, neste ponto, resumirmos os resultados baseados no modelo de Drude obtidos nesta seção. Assim, os campos elétrico e magnético no interior de um condutor são dados por

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi) \quad (35.56)$$

$$k = \sqrt{\mu_0} \omega \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \quad (35.57)$$

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega)}{2k} \omega \quad (35.58)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{me^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{e^2 N / m \varepsilon_0}{\omega^2 + b^2 / m^2} \right) \quad (35.59)$$

$$g(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \quad (35.60)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi + \eta) \quad (35.61)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} (\vec{j} \times \vec{E}_0) \quad (35.62)$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\beta}{k} \quad (35.63)$$

O nosso problema, agora, consiste em estudar as propriedades destes campos. Inicialmente, notamos que cada um deles é composto por um termo oscilatório, representado pela função cosseno que, do ponto de vista físico, corresponde à propagação da onda. A expressão de cada um dos campos contém, também, um termo que decresce exponencialmente e que corresponde a amortecimento ao longo da direção de propagação. Deste modo, é possível interpretarmos as expressões dos campos \vec{E} e \vec{B} como descrevendo oscilações cujas amplitudes diminuem ao longo da direção de propagação, como está representado na figura 34.1.

O modelo de Drude prediz, como vemos, propagação com amortecimento para os campos elétrico e magnético no interior de um condutor. Dependendo da frequência da onda, um desses efeitos dominará o outro. A importância relativa desses dois efeitos pode ser avaliada estudando-se a amplitude da onda em dois pontos separados por um comprimento de onda, tais como os pontos A e B da figura 34.2. Se essas amplitudes forem pouco diferentes, há propagação, caso contrário, o amortecimento domina.

O amortecimento é caracterizado pela função $\beta(\omega)$, enquanto que a propagação o é pela função $k(\omega)$; o efeito dominante é determinado pela maior dentre elas. A eq. (34.46) nos fornece um meio fácil de determinar as regiões de frequência onde cada um dos efeitos é dominante. Assim, o estudo dessa equação permite-nos concluir que a propagação, que ocorre quando k

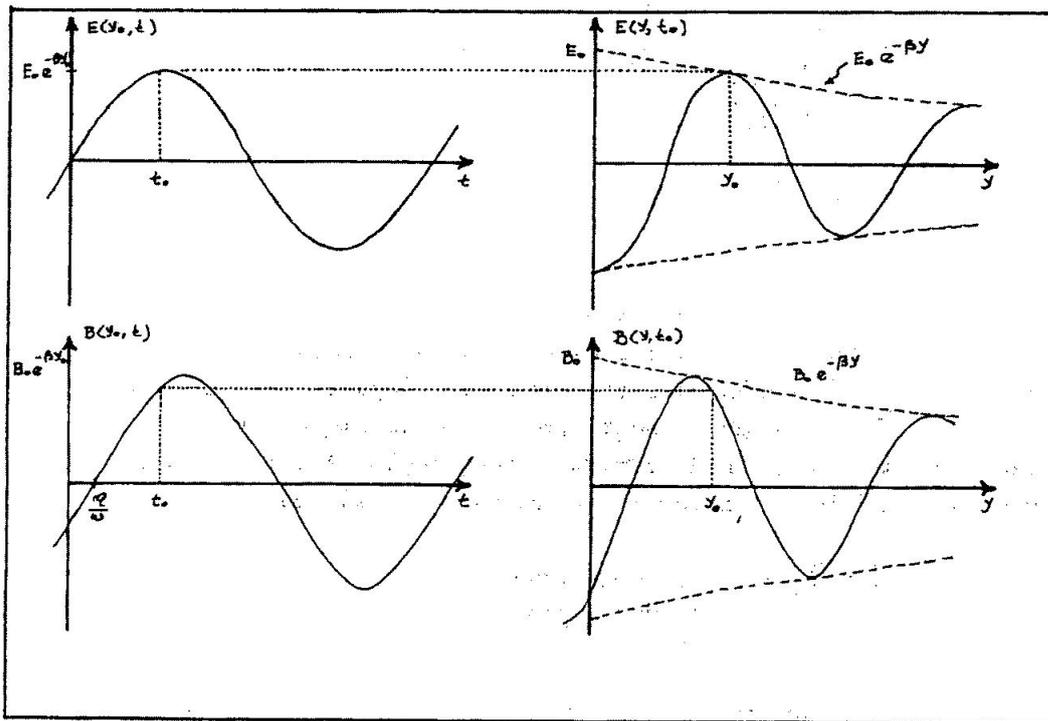


Figura 35.1: Dependências espaciais e temporais dos campos elétrico e magnético de uma onda no interior de um metal.

é maior que β , corresponde aos valores positivos de $\varepsilon(\omega)$, enquanto que seus valores negativos correspondem a atenuação. A transição entre essas duas regiões ocorre na frequência ω_P em que a função $\varepsilon(\omega)$ se anula. Consultando a eq.(34.42), vemos que ω_P é determinada pela condição

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{e^2 N / m \varepsilon_0}{\omega^2 + b^2 / m^2} \right) = 0 \quad (35.64)$$

Ou seja,

$$\omega_P^2 = \frac{e^2 N}{m \varepsilon_0} - \frac{b^2}{m^2} \quad (35.65)$$

Para a maioria dos metais, o primeiro termo do lado direito da igualdade é muito maior que o segundo; podemos, então, escrever

$$\omega_P = \sqrt{\frac{e^2 N}{m \varepsilon_0}} \quad (35.66)$$

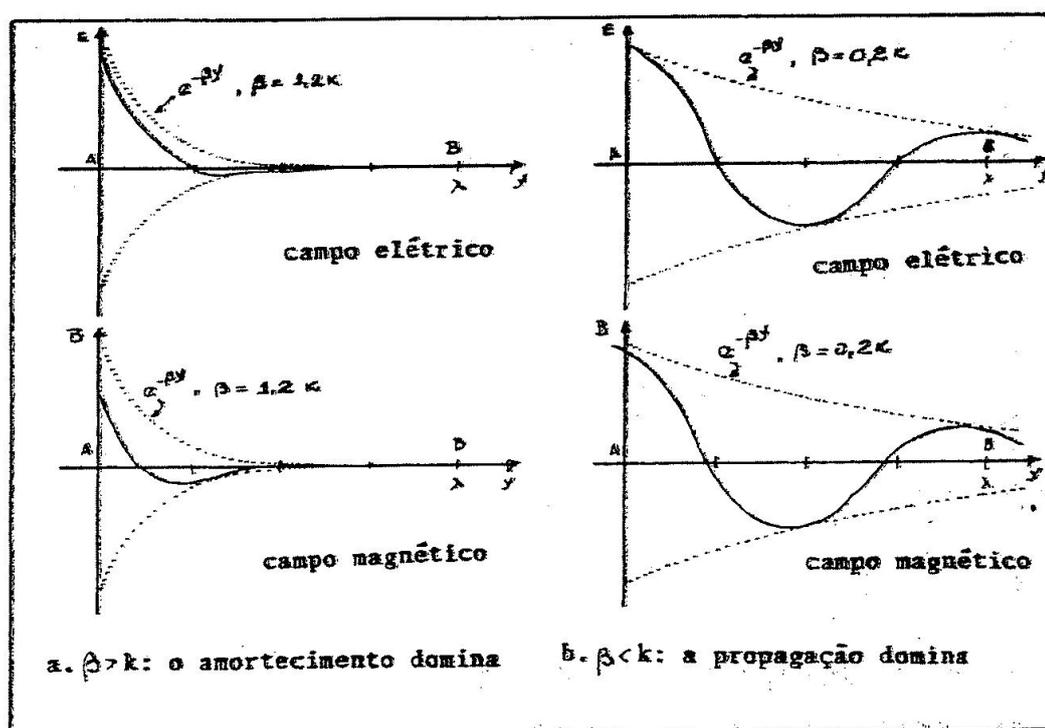


Figura 35.2: Amortecimento e propagação de ondas eletromagnéticas no interior de um metal.

Essa frequência é chamada frequência de plasma dos elétrons do metal e tem papel muito importante no estudo do comportamento de ondas eletromagnéticas em condutores. Se a frequência da onda for menor que ω_P , a função $\varepsilon(\omega)$ é negativa e o amortecimento domina. Quando ω for maior que ω_P , a onda se propaga.

A figura 34.3 representa os campos elétrico e magnético de uma onda plana, monocromática e polarizada que se propaga na direção y . A figura 34.3a representa uma onda que se propaga, cuja frequência está acima da frequência de plasma. Na figura 34.3b, por outro lado, temos uma onda de frequência abaixo da frequência do plasma, em que a atenuação domina. Note que neste caso, a defasagem entre os campos \vec{E} e \vec{B} é maior que $\pi/4$.

Para termos uma noção da ordem de grandeza dos fenômenos previstos pelo modelo de Drude vamos, na próxima aula, estudar o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de prata sólida que é um bom condutor. Discutiremos, também, as limitações do modelo.

• questões

q1. Um elétron livre no interior de um metal se move devido à ação de uma onda eletromagnética de frequência ω . Desenhe, num único gráfico, o campo elétrico e o deslocamento do elétron em função do tempo. Porque há uma diferença de fase entre as duas curvas. Qual a importância física dessa diferença de fase?

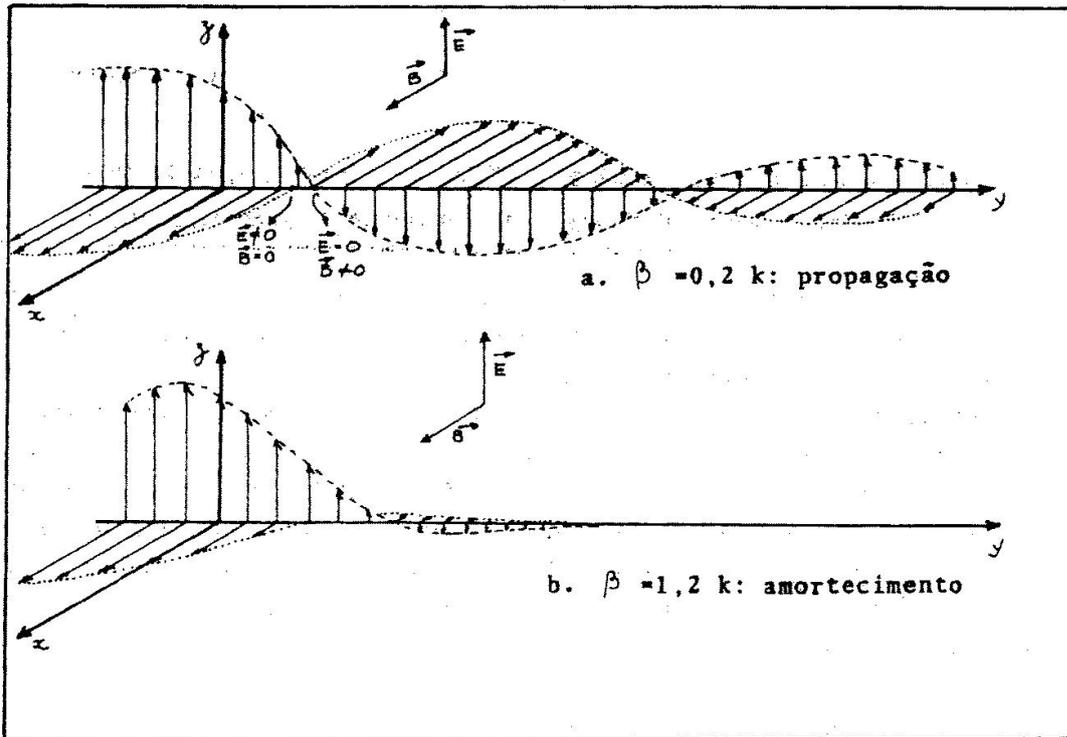


Figura 35.3: Os campo elétrico e mangético de uma onda no interior de um metal.

q2. Em que sentido a Lei de Ohm é uma lei? O modelo de Drude é compatível com a Lei de Ohm?

q3. O que significa a palavra modelo quando se fala em modelo Drude?

q4. No interior de um corpo metálico existe uma onda eletromagnética plana e monocromática. No ponto y_0 o campo elétrico da onda é descrito pela equação

$$\vec{E} = (A_x \vec{i} + A_z \vec{k}) \cos(k y_0 - \omega t).$$

I. Esboce um desenho com esse vetor em tres pontos diferentes do plano $y = y_0$ nos instantes

a) $t = 0$; b) $t = T/4$; c) $t = T/2$; d) $t = 3T/4$, sendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

II. Repita o item anterior para o plano $y = y_0 + \frac{\lambda}{2}$, onde λ é o comprimento da onda.

q5. Considere uma onda plana e monocromática no interior de um corpo metálico. No ponto

y_0 o campo elétrico da onda é dado por

$$\vec{E} = A \cos(ky_0 - \omega t) \vec{i} \quad (35.67)$$

I. Sendo λ o comprimento da onda, desenhe o campo elétrico no instante $T/4$, em tres pontos dos planos

a) $y = 0$; b) $y = \lambda/4$; c) $y = \lambda/2$; d) $y = 3\lambda/4$

b) Repita o item anterior para o campo magnético da onda

q6. As figuras abaixo mostram linhas de campo elétrico e magnético num dado plano. Quais delas podem corresponder a ondas eletromagnéticas no interior de um metal? Nestes casos, o que se pode afirmar sobre a direção de propagação da onda?

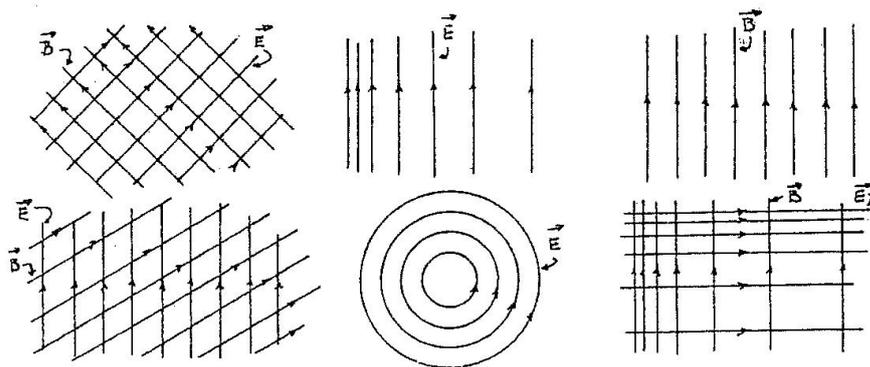


Figura 35.4:

Capítulo 36

ondas em meios materiais: o caso da prata

O modelo de Drude, estudado na aula anterior, prevê o comportamento dos campos elétrico e magnético de uma onda no interior de um condutor. Em particular, esse modelo permite-nos distinguir duas situações diversas, em que a onda pode ou não se propagar.

Muitas vezes, a capacidade que uma onda tem de se propagar em um meio condutor é representado pela grandeza δ definida como

$$\delta = \frac{1}{\beta} \quad (36.1)$$

Essa grandeza tem dimensão de comprimento e é denominada “espessura de penetração”. Ela é a distância ao longo da qual a amplitude dos campos elétrico e magnético se reduzem a $1/e$ (= 0,368) do seu valor.

A espessura de penetração prevista pelo modelo de Drude pode ser obtida a partir das eq. (34.48), sendo dada por

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\mu_0 g(\omega)}} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \quad (36.2)$$

A espessura de penetração de uma onda eletromagnética em uma dada substância depende crucialmente da frequência da onda. Para termos uma noção da ordem de grandeza dos valores de δ preditos pela eq. (35.2) vamos estudar o caso da prata sólida, que é um bom condutor.

Para as constantes ε_0 e μ_0 usamos os valores

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9874 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad (36.3)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (36.4)$$

A condutividade da prata é

$$g_0 = 6,25 \times 10^7 m^{-1} \Omega^{-1} \quad (36.5)$$

A massa e a carga de um elétron são respectivamente,

$$m = 9,11 \times 10^{-31} kg \quad (36.6)$$

$$q = -e = -1,60 \times 10^{-19} C \quad (36.7)$$

A grandeza N , o número de elétrons livres por unidade de volume, pode ser calculada a partir de resultados experimentais, sendo dada por

$$N = 6,94 \times 10^{28} m^{-3} \quad (36.8)$$

O valor do coeficiente de amortecimento b é calculado usando-se os valores numéricos acima na eq. (34.29), obtemos

$$b = 2,85 \times 10^{-17} kg s^{-1} \quad (36.9)$$

A frequência de plasma dos elétrons de um metal é dada pela eq. (34.66). No caso da prata, temos

$$\omega_p = 14,85 \times 10^{15} Hz \quad (36.10)$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 2,36 \times 10^{15} \text{ Hz} \quad (36.11)$$

As previsões do modelo de Drude para a espessura de penetração na prata de ondas eletromagnéticas de diversas frequências, calculadas pela eq. (35.2), são mostradas na tabela 35-1, juntamente com os valores das funções $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$.

Região do espectro	f[s ¹]	g(ω) [Ω ⁻¹ m ⁻¹]	ε(ω) [C ² s ² /kgm ³]	δ(ω) [m]
-	0	6,25 x 10 ⁷	-2,00 x 10 ⁻⁶	∞
ondas longas	1	6,25 x 10 ⁷	-2,00 x 10 ⁻⁶	6,36 x 10 ⁻²
ondas longas	10 ³	6,25 x 10 ⁷	-2,00 x 10 ⁻⁶	2,01 x 10 ⁻³
AM	10 ⁶	6,25 x 10 ⁷	-2,00 x 10 ⁻⁶	6,36 x 10 ⁻⁵
FM, TV	10 ⁹	6,25 x 10 ⁷	-2,00 x 10 ⁻⁶	2,01 x 10 ⁻⁶
infravermelho	10 ¹¹	6,25 x 10 ⁷	-2,00 x 10 ⁻⁶	2,01 x 10 ⁻⁷
infravermelho	10 ¹²	6,01 x 10 ⁷	-1,92 x 10 ⁻⁶	5,76 x 10 ⁻⁸
infravermelho	10 ¹³	1,24 x 10 ⁷	-3,97 x 10 ⁻⁷	4,53 x 10 ⁻⁸
visível	10 ¹⁴	1,54 x 10 ⁵	-4,95 x 10 ⁻⁹	2,02 x 10 ⁻⁸
visível	10 ¹⁵	1,55 x 10 ³	-4,07 x 10 ⁻¹¹	2,23 x 10 ⁻⁸
ultravioleta	10 ¹⁶	1,55 x 10 ¹	8,347 x 10 ⁻¹²	3,33 x 10 ⁻⁴
raios X	10 ¹⁸	1,55 x 10 ⁻³	8,842 x 10 ⁻¹²	3,42 x 10 ⁰
raios γ	10 ²¹	1,55 x 10 ⁻⁹	8,842 x 10 ⁻¹²	3,42 x 10 ⁶
raios γ	10 ²⁴	1,55 x 10 ⁻¹⁵	8,842 x 10 ⁻¹²	3,42 x 10 ¹²
-	∞	0	8,842 x 10 ⁻¹²	∞

Tabela 35-1: Previsões do modelo de Drude para ondas eletromagnéticas em prata.

A figura 35-1 foi construída com os dados da tabela e mostra num gráfico log-log a dependência da espessura de penetração com a frequência.

Nesta figura vemos que as espessuras de penetração previstas pelo modelo de Drude decrescem monotonicamente com o aumento da frequência no intervalo de zero até a frequência de plasma, onde ocorre a inversão dessa tendência.

A espessura de penetração caracteriza a propagação de ondas eletromagnéticas em um metal que, por sua vez, está relacionada às suas propriedades ópticas. No caso da prata, uma consulta à tabela nos mostra que as espessuras de penetração de ondas longas são da ordem de alguns milímetros, sendo mil vezes menor para frequências de TV. No caso da luz visível essas espessuras são ainda menores, estando bastante próximas do valor mínimo dessa grandeza. As pequenas espessuras de penetração na prata de ondas de frequências abaixo da frequência de plasma estão relacionadas à sua opacidade, ou seja, a propriedade de não serem atravessados por ondas eletromagnéticas.

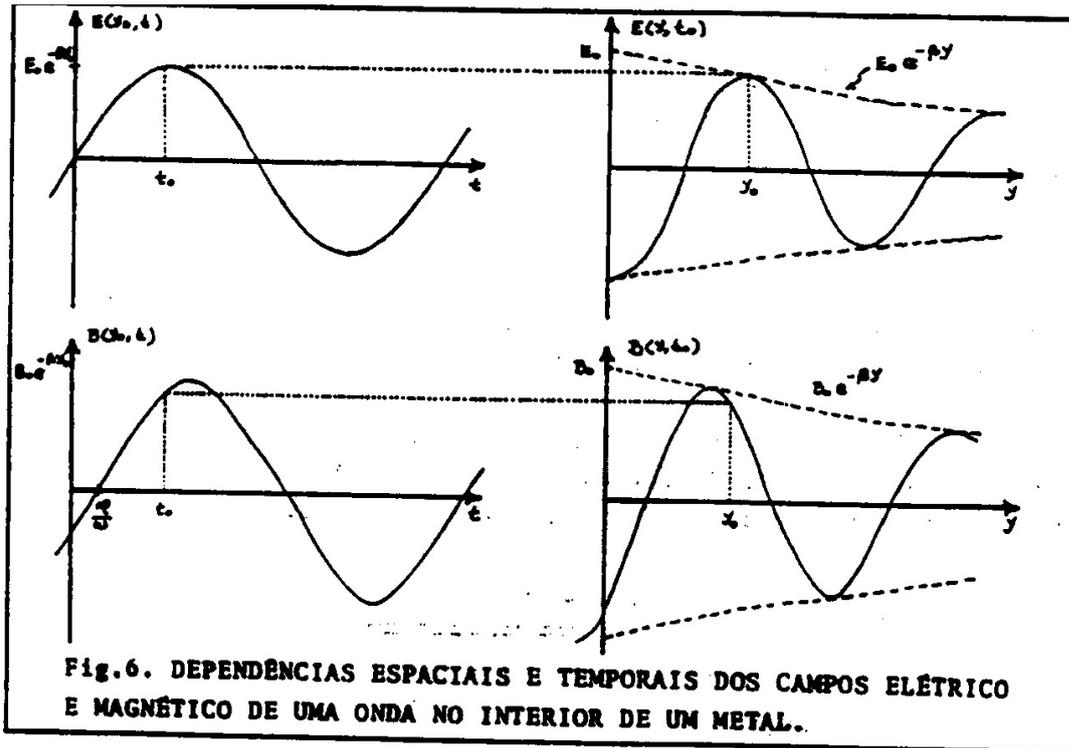


Figura 36.1: A espessura de penetração de ondas eletromagnéticas na prata em função da frequência

Quando ondas de frequências abaixo da frequência de plasma incidem sobre a superfície de um corpo de prata, elas praticamente não penetram em seu interior, sendo refletidas. Essa reflexão, observada também na grande maioria dos metais, ocorre geralmente para todas as frequências do espectro visível, fazendo com que eles tenham aparência incolor ou “prateada”. Existe, portanto, uma estreita relação entre o brilho que observamos nos metais e o fato de eles serem bons condutores.

Existem, entretanto, situações em que ondas eletromagnéticas podem atravessar corpos metálicos. Uma inspeção da tabela acima nos mostra que uma dessas situações ocorre quando a frequência da onda é extremamente baixa, ou seja, o campo é quase eletrostático. A prata, como inúmeros outros metais, torna-se transparente para ondas de frequências altas, acima da frequência de plasma. A tabela nos mostra, por exemplo, que raios X podem penetrar vários metros no interior de corpos de prata.

Uma outra situação em que metais podem ser atravessados por ondas eletromagnéticas ocorre quando esses metais formam películas muito finas, de espessuras comparáveis à espessura de penetração. Esse tipo de transparência pode ser observado nos espelhos de duas vistas, ou então, no caso de óculos “escuros” espelhados. Esse tipo de transparência, ao contrário das anteriores, pode ocorrer para quaisquer frequências.

Uma das consequências mais importantes do modelo de Drude é a mudança de comportamento da espessura de penetração nas proximidades da frequência de plasma. Nesse modelo,

como já vimos, supomos que o movimento de um elétron dentro de um metal seja o resultado do jogo entre três agentes: a força devida à onda, que causa o movimento; a força de resistência, que se opõe ao movimento, e a inércia do elétron, que tende a manter um dado movimento. Quando a força devida ao campo puxa o elétron para um certo lado, este tende a se mover para aquele lado. Quando a força muda de sentido, o elétron tende a seguir esta força, mas isso demora um certo tempo para acontecer, devido à sua inércia. Quando a frequência da onda é muito alta, o que acontece é que mal o elétron começa a se mover para um lado, ele é solicitado a ir para o lado oposto, sucessivamente. Com isso ele somente tem tempo de efetuar deslocamentos extremamente pequenos entre duas mudanças de direção da força devida à onda. O resultado é que ele quase não oscila, ficando praticamente parado, não conseguindo, por isso receber energia da onda eletromagnética. A onda, então, se propaga no interior do metal.

O modo como ondas eletromagnéticas se propagam em meios materiais depende crucialmente de como as partículas que constituem esse material reagem à presença do campo elétrico da onda. O modelo de Drude deve ser visto como uma tentativa de explicar como isso ocorre, supondo que os elétrons obedeçam as leis de Newton. Este modelo, embora consiga explicar algumas propriedades dos metais, também tem as suas limitações. Uma delas, por exemplo, se manifesta pela sua impossibilidade de explicar porque certos metais, tais como o ouro e o cobre, não são prateados. Essa limitação do modelo deve-se ao fato de havermos suposto que a onda interage apenas com os elétrons livres do metal, enquanto que ela também interage com os íons que formam a sua rede cristalina. Assim, para termos um modelo realístico, deveríamos considerar ambas as interações. A interação da onda eletromagnética com os íons da rede é semelhante à interação com moléculas de um dielétrico, que será estudada em seguida.

Outra limitação do modelo de Drude deve-se ao fato de tanto a onda eletromagnética como as partículas do meio material exibirem comportamento quântico. No que diz respeito ao elétron, em particular, supusemos que ele obedece à mecânica Newtoniana, enquanto que, na verdade, ele obedece a mecânica quântica. Existem, além disso, outros efeitos quânticos que não foram considerados no modelo de Drude de interação de ondas eletromagnéticas com metais. Os três mais importantes são:

- efeito Compton: um elétron, ao ser acelerado pela força devida ao campo da onda, passa a irradiar, emitindo ondas de frequências diferentes;
- efeito fotoelétrico: a onda que se propaga arranca elétrons do metal;
- produção de pares: quando a energia da onda é grande ela pode, ao passar pelas vizinhanças de um núcleo atômico, produzir um elétron e um pósitron simultaneamente.

Esses efeitos, que são mais importantes para ondas de frequências grandes, produzem como consequência a redução da espessura de penetração em relação ao valor previsto pelo modelo de Drude.

A discussão anterior deixa claro que uma descrição completa da propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais deve ser muito mais complexa do que a apresentação aqui, que teve como base um modelo onde elétrons livres obedeciam à dinâmica de Newton. Isso, entretanto, não destitui de valor este modelo, uma vez que ele é muito útil como ponto de partida

para análises mais sofisticadas.

• questões

q.1: A quantos diâmetros atômicos corresponde a espessura de penetração de luz de frequência 10^{14}Hz na prata?

q.2: Uma onda luminosa de 10^{14}Hz incide sobre a face maior de uma placa de prata de dimensões $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 1\text{cm}$. Qual é a porcentagem dos íons da placa que sentem a presença da onda?

q.3: Qual a distância ao longo de uma placa de prata para a qual a energia de uma onda eletromagnética de 10^{12}Hz caiu para um centésimo de seu valor inicial?

q.4: Existem certas receitas que recomendam que os alimentos a serem cozidos no forno sejam embrulhados em “papel” de alumínio. Qual a razão por trás desse procedimento?

q.5: É possível usarmos o fato de a espessura de penetração de ondas eletromagnéticas em metais depender da frequência para construirmos um filtro de frequências?

q.6: Num universo fictício, onde os elétrons tivessem massa cem vezes maior que os do nosso universo, seriam os metais transparentes à luz visível?

q.7: Determine a região de frequências em que a lei de Ohm é válida, no caso da prata. Essa região depende do material considerado?

q.8: Um espelho é feito depositando-se uma fina camada de prata sobre uma placa de vidro. Que espessura deve ter essa camada para que o espelho seja bom e, ao mesmo tempo, não muito caro?

q.9: Como funciona um semi-espelho?

q.10: Por que os óculos espelhados funcionam como óculos “escuros” para quem os usa e como espelhos para as demais pessoas?

q.11: Um aparelho de TV é colocado no interior de uma caixa de vidro espelhada, sendo 10^{-3}m a espessura da camada de prata do espelho. Será possível que a televisão mostre alguma imagem ao ser ligada? Será possível que alguém no exterior da caixa veja essa imagem?

q.12: Explique porque garrafas térmicas são feitas com vidros espelhados.

q.13: É comum que as bagagens de passageiros de avião sejam examinadas com o auxílio de raios X. Para proteger filmes fotográficos, seria suficiente embrulhá-los com “papel” de alumínio?

q.14: Como é possível blindar uma região do espaço contra ondas eletromagnéticas?

Capítulo 37

ondas em meios materiais: dielétricos

• modelo de Drude

Substâncias dielétricas são formadas por moléculas eletricamente neutras. Essa neutralidade das moléculas não impede, entretanto, que elas sintam campos elétricos e magnéticos externos, uma vez que elas são constituídas por partículas carregadas, tais como prótons e elétrons. Quando existir uma onda eletromagnética no interior de uma substância dielétrica, as suas moléculas vão reagir à presença dos campos da onda. O campo elétrico da onda vai tender a deslocar as partículas carregadas de suas posições de equilíbrio, sendo os efeitos maiores devido ao movimento dos elétrons, que são muito mais leves que os núcleos atômicos.

Nos dielétricos, ao contrário dos condutores, os elétrons não estão livres, mas sim, presos a núcleos determinados. Quando o campo elétrico da onda puxa o elétron numa direção, essa força que prende o elétron ao núcleo também passa a agir, tentando manter a estabilidade da molécula. Essa propriedade faz com que o comportamento de ondas eletromagnéticas em dielétricos seja bastante diferente do comportamento de ondas em metais. Essas características microscópicas de uma substância dielétrica determinam suas propriedades macroscópicas. Nesta seção explicitaremos alguns aspectos dessa relação para podermos compreender os fenômenos de absorção e dispersão de ondas eletromagnéticas.

A propagação de ondas eletromagnéticas através de uma substância, é determinada pelas equações de Maxwell.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (37.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (37.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (37.3)$$

Como no caso de ondas em condutores, suporemos aqui também que os deslocamentos dos elétrons causados pelo campo elétrico da onda não causem concentrações de carga no interior do dielétrico. Assim,

$$\rho = 0 \quad (37.4)$$

A densidade de corrente \vec{j} está relacionada à velocidade com que os elétrons se deslocam no interior do dielétrico. Para determinarmos essa velocidade, é necessário conhecermos a dinâmica do elétron, ou seja a relação entre as forças que agem sobre ele e o seu movimento. A dinâmica de um elétron no interior de uma molécula é determinada pela mecânica quântica, o que torna bastante complicada a análise da propagação de ondas eletromagnéticas no interior da matéria. É possível, entretanto, simular alguns aspectos do comportamento quântico de um elétron por meio de um modelo bastante simples e útil, baseado na mecânica de Newton. Esse modelo, também devido a Paul Drude, consiste em supormos que os elétrons de um átomo se comportam como se estivessem presos ao núcleo por molas de constante elástica k . Quando uma onda eletromagnética de frequência ω atravessa o material formado por esses átomos, o elétron está sujeito a três forças:

1) força devida ao campo elétrico da onda eletromagnética:

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}(x, y, z, t) \quad (37.5)$$

onde $-e$ é a carga do elétron e $\vec{E}(x, y, z, t)$ é o campo da onda no instante t , no ponto (x, y, z) onde está localizado o elétron. Quando consideramos uma onda plana e monocromática que se propaga na direção y , esse campo pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(y, t) \\ &= \vec{E}^* \cos(\omega t - ky - \phi) \\ &= \vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*) \end{aligned}$$

onde $\phi^* = (ky + \phi)$ e \vec{E}^* é a amplitude da onda no ponto y , onde está o elétron. Assim,

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (37.6)$$

2) força que prende o elétron ao núcleo

$$\vec{F}_2 = -k\vec{S} \quad (37.7)$$

onde k é a constante elástica da mola e \vec{S} é a posição do elétron relativamente ao núcleo; o sinal negativo deve-se ao fato de essa força ser sempre oposta ao deslocamento.

3) força de “amortecimento”

$$\vec{F}_3 = -b \vec{v} \quad (37.8)$$

onde \vec{v} é a velocidade do elétron e b um coeficiente de proporcionalidade; o sinal negativo indica que essa força sempre se opõe ao movimento. No caso de condutores, discutido nas seções anteriores, essa força de amortecimento era devida à resistência ao movimento dos elétrons, correspondendo a uma dissipação de energia por efeito Joule. Quando se trata de dielétricos, essa força de “amortecimento” é devida ao fato de os átomos poderem absorver e irradiar uma parte da energia da onda eletromagnética. Esse processo corresponde, assim, a uma diminuição da energia da onda, justificando o nome “amortecimento”.

No modelo de Drude, a equação de movimento de um elétron atômico é dada pela lei de Newton:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kS - b \frac{dS}{dt} - e E^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (37.9)$$

Esta equação diferencial é idêntica à do circuito RLC forçado. Sua solução, como vimos anteriormente, é dada por um termo transitório e um permanente. Este último tem a forma geral:

$$S = A \cos(\omega t - \phi^* + \delta) \quad (37.10)$$

As constantes A e δ são determinadas impondo-se que esta equação satisfaça a equação diferencial

$$-m\omega^2 A \cos(\omega t - \phi^* + \delta) = -kA \cos(\omega t - \phi^* + \delta) \quad (37.11)$$

$$+b\omega A \sin(\omega t - \phi^* + \delta) - eE^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (37.12)$$

Usando as expressões do seno e do cosseno da soma de dois ângulos, podemos reescrever esta equação como

$$[A(-m\omega^2 + k) \cos \delta - b\omega A \sin \delta + eE^*] \cos(\omega t - \phi^*) \quad (37.13)$$

$$+ [-A(-m\omega^2 + k) \sin \delta - b\omega A \cos \delta] \sin(\omega t - \phi^*) = 0 \quad (37.14)$$

Para que esta equação seja válida para quaisquer valores de t , os coeficientes do seno e do cosseno devem ser nulos. Temos, então, duas equações envolvendo as incógnitas A e δ

$$A(m\omega^2 - k) \cos \delta + b\omega A \sin \delta = eE^* \quad (37.15)$$

$$(m\omega^2 - k) \sin \delta - b\omega \cos \delta = 0 \quad (37.16)$$

A defasagem δ é determinada pela segunda equação

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{m\omega^2 - k} \quad (37.17)$$

Esse resultado permite-nos concluir que

$$\sin \delta = \frac{b\omega}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + b^2\omega^2}} \quad (37.18)$$

$$\cos \delta = \frac{m\omega^2 - k}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + b^2\omega^2}} \quad (37.19)$$

Substituindo esses valores na eq. (36.15), obtemos a amplitude da oscilação

$$A = \frac{eE^*}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + b^2\omega^2}} \quad (37.20)$$

A interpretação física dos resultados acima fica mais simples se os expressarmos em termos de ω_0 , a frequência na qual o elétron oscilaria se as forças devidas ao campo da onda (\vec{F}_1) e de amortecimento (\vec{F}_3) não existissem. Essa frequência ω_0 é a chamada frequência natural de oscilação e é dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (37.21)$$

Estes resultados permitem-nos concluir, então que sob a ação da onda eletromagnética, o elétron oscila segundo a equação

$$S = \frac{eE^*}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi^* + \delta) \quad (37.22)$$

onde

$$\text{tg } \delta = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (37.23)$$

Desejamos obter a relação entre o campo elétrico e a densidade de corrente, que está relacionada à velocidade dos elétrons por

$$\vec{j} = -e N \vec{v} \quad (37.24)$$

onde N é o número de elétrons que se movem por unidade de volume. A velocidade \vec{v} é determinada a partir da eq. (36.22). Temos, então,

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -e N \frac{d\vec{s}}{dt} \\ &= e N \omega \frac{eE^*}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \text{sen}(\omega t - \phi^* + \delta) \\ &= \frac{Ne^2\omega}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} [b\omega E^* \cos(\omega t - \phi^*) + m(\omega^2 - \omega_0^2)E^* \text{sen}(\omega t - \phi^*)] \end{aligned} \quad (37.25)$$

Na última passagem desenvolvemos o seno da soma de dois ângulos e usamos as eqs. (36.18) e (36.19). A relação entre \vec{j} e o campo é estabelecida usando

$$\vec{E} = \vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (37.26)$$

e

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = -\omega \vec{E}^* \sin(\omega t - \phi^*) \quad (37.27)$$

Substituindo esses valores na eq. (36.25), obtemos

$$\vec{j} = \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \vec{E} - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (37.28)$$

Esta expressão determina o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de dielétricos. Consideremos, portanto, a lei de Ampère-Maxwell, que é dada por

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \vec{E} + \mu_0 \left[\varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \right] \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (37.29)$$

$g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$ são funções dadas por

$$g(\omega) = \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \quad (37.30)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \quad (37.31)$$

A eq. (36.29) é formalmente semelhante à expressão do rotacional de \vec{B} no caso de ondas em condutores, dada pela eq. (34.30). É preciso notarmos, entretanto, que essas expressões são de

fato diferentes, uma vez que as funções $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$ não são as mesmas em ambos os casos, como podemos verificar comparando as eqs. (34.31) e (34.32) com as eqs. (36.30) e (36.31).

Desejamos, agora, obter as expressões dos campos elétrico e magnético no interior de dielétricos. Como no caso dos metais, esses campos são determinados pelas equações de Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (37.32)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (37.33)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (37.34)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (37.35)$$

Essas equações são formalmente as mesmas que as usadas no caso dos condutores, eqs. (34.33 a 34.36). Esse fato faz com que as expressões de \vec{E} e \vec{B} sejam idênticas em ambos os casos, diferindo apenas quanto à forma das funções $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$. Temos, então

$$\vec{E}(y, t) = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi) \quad (37.36)$$

$$k = \sqrt{\mu_0 \omega} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \quad (37.37)$$

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega)}{2k} \omega \quad (37.38)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m (\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \quad (37.39)$$

$$g(\omega) = \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \quad (37.40)$$

$$\vec{B}(y, t) = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi + \eta) \quad (37.41)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} (\vec{j} \times \vec{E}_0) \quad (37.42)$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\beta}{k} \quad (37.43)$$

Como no caso dos metais, as ondas eletromagnéticas em dielétricos também são compostas por termos correspondentes a amortecimento e a oscilação. Existem, entretanto, duas importantes diferenças entre os dois casos. A primeira é que as funções $k(\omega)$ e $\beta(\omega)$, responsáveis pela propagação e pelo amortecimento respectivamente, têm características diferentes para condutores e dielétricos. A segunda diferença importante refere-se à causa do amortecimento em cada um dos casos. O amortecimento da onda no caso de metais é devido à dissipação de energia por efeito Joule, causada pelo “atrito” entre as partículas que constituem o meio, enquanto que no caso de dielétricos o amortecimento deve-se ao fato de os átomos da substância poderem absorver e reirradiar a energia da onda.

Esse mecanismo de absorção-reemissão de energia é responsável pelas características ópticas de substâncias dielétricas, tais como cor, opacidade ou transparência. Essas características são determinadas pela relação entre a frequência da onda e a frequência natural dos átomos da substância. Um material será transparente se as ondas forem pouco amortecidas em seu interior; caso contrário, ele será opaco.

O amortecimento de uma onda eletromagnética é caracterizada pela função $\beta(\omega)$ que, por sua vez está relacionada a $g(\omega)$. Esta última função tem seu valor máximo quando ω é igual a ω_0 , expressando o fato que a absorção da energia é máxima quando os átomos e a onda ressoam. Assim um material é opaco para ondas de frequências próximas às suas frequências características.

Uma outra característica importante de dielétricos é que a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas em seu interior depende da frequência. Essa velocidade é dada por

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{\omega}{k(\omega)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2(\omega) + \frac{g(\omega)^2}{\omega^2}}} \quad (37.44) \end{aligned}$$

Um meio em que a velocidade de propagação de ondas depende da frequência é chamado de dispersivo. É essa propriedade que faz com que prismas de vidro decom-

ponham luz branca, uma vez que o desvio de um raio de luz ao cruzar a superfície ar-vidro é dado pela lei de Snell, que neste caso pode ser escrita como

$$\frac{1}{c} \text{sen} \theta_{ar} = \frac{1}{V(\omega)} \text{sen} \theta_{vidro}(\omega)$$

Nesta expressão θ representa o desvio do raio de luz em relação à normal de cada lado da superfície. Vemos, então, que o fato de a velocidade da onda no dielétrico depender da frequência faz com que raios de luz de diferentes frequências sofram desvios diferentes, o que acarreta a decomposição da luz branca em suas diversas cores.

Capítulo 38

ondas planas - notação

• ondas planas e monocromáticas

Fenômenos ondulatórios são muito importantes em física e ocorrem em um número muito grande de situações. Existem ondas em cordas, ondas sonoras, ondas eletromagnéticas, e de muitos outros tipos. A mecânica quântica implementa matematicamente a idéia que a matéria tem propriedades ondulatórias e o mesmo acontece com a teoria quântica de campos. Por isso, é preciso conhecer bem as técnicas utilizadas na descrição de ondas.

Uma onda é uma informação que “anda” ou, em termos mais precisos, energia que se propaga. Formalmente, uma função $F(x, y, z, t)$ representa uma onda se ela for solução de uma equação do tipo

$$\frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (38.1)$$

que pode, também, ser reescrita nas formas mais compactas

$$\partial_x^2 F(x, y, z, t) + \partial_y^2 F(x, y, z, t) + \partial_z^2 F(x, y, z, t) - (1/v^2) \partial_t^2 F(x, y, z, t) = 0, \quad (38.2)$$

$$\nabla^2 F(x, y, z, t) - (1/v^2) \partial_t^2 F(x, y, z, t) = 0, \quad (38.3)$$

onde v é a velocidade de propagação. A característica principal da equação de onda é que ela relaciona as derivadas segundas da função F em relação às coordenadas espaciais com a derivada segunda em relação ao tempo.

Nas aulas anteriores utilizamos, muitas vezes, **ondas planas**, que correspondem a versões simplificadas do problema. Por exemplo, se a função que descreve a onda não depender de x e y , temos $F(x, y, z, t) = F(z, t)$, $\partial_x^2 F(x, y, z, t) = \partial_y^2 F(x, y, z, t) = 0$ e, portanto, a equação de onda pode ser colocada na forma

$$\partial_z^2 F(z, t) - (1/v^2) \partial_t^2 F(z, t) = 0 . \quad (38.4)$$

Este caso foi discutido na aula 8, onde mostramos que a função F pode ser escrita como

$$F(z, t) = A_+ f_+(z - vt) + A_- f_-(z + vt) , \quad (38.5)$$

sendo que os índices (+) e (-) indicam ondas que se propagam com velocidades $+v \vec{k}$ e $-v \vec{k}$, sendo A_{\pm} as respectivas amplitudes. É importante notar que a natureza da onda é incorporada nas amplitudes. Por exemplo, numa onda sonora A corresponde a uma pressão, numa onda eletromagnética A pode corresponder a um campo elétrico ou a um campo magnético, e assim por diante.

Um outro caso particular que exploramos anteriormente foi o de **ondas monocromáticas**, ou seja, ondas que possuem frequência bem definida. Se a onda plana dada pela eq.(37.5) tiver frequência ω a sua forma mais geral é

$$F(z, t) = A_+ \cos(kz - \omega t - \phi_+) + A_- \cos(kz + \omega t - \phi_-) , \quad (38.6)$$

onde $k = \omega/v$ e ϕ_{\pm} representam fases. Como sabemos, estas fases cumprem o papel de produzir combinações quaisquer de senos e cossenos, por meio do resultado

$$\cos(kz \pm \omega t - \phi_{\pm}) = \cos(kz \pm \omega t) \cos(\phi_{\pm}) + \text{sen}(kz \pm \omega t) \text{sen}(\phi_{\pm}) . \quad (38.7)$$

Apesar de bastante geral, a eq.(37.6) ainda tem uma forte limitação, pois ela apenas descreve propagações ao longo do eixo z . Poderíamos, por exemplo, ter interesse em descrever ondas planas que se propagam nas direções indicadas na figura 37-1. A seguir, discutimos o modo de generalizar a descrição de ondas planas e monocromáticas para propagações segundo direções quaisquer.

• propagação numa direção qualquer

Para generalizar a descrição de ondas planas, é necessário o emprego de **vetores**, como discutimos a seguir. Apesar de poder parecer surpreendente, mesmo numa onda como a dada

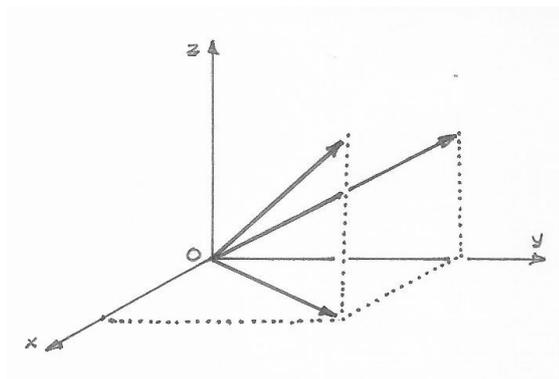


Figura 38.1: Exemplos de possíveis direções da propagação de ondas planas

pela eq.(37.7), existem vários vetores implícitos. Por exemplo, o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana e monocromática que se propaga ao longo do eixo y pode ser descrito por

$$\vec{E}(y, t) = [E_0 \vec{i}] \cos(ky - \omega t) , \quad (38.8)$$

sendo $[E_0 \vec{i}]$ a amplitude. Se fixarmos o tempo num valor $t = t_0$, o produto ωt_0 torna-se uma fase constante e $\vec{E}(y, t_0)$ passa a representar o campo num tempo congelado, imóvel, tal como ocorre numa fotografia. Entretanto, essa analogia não é a melhor possível, pois a foto é bidimensional, enquanto a eq.(37.8) representa a onda em todos os pontos do espaço. Nesse aspecto, ela é mais análoga a uma escultura do que a uma foto. Para compreender isto, consideremos a função $\vec{E}(y, t_0)$ para um valor particular $y = b$ da coordenada. Neste caso, podemos afirmar que o valor do campo elétrico no ponto $P(0, b, 0, t_0)$ está fixado e é dado por

$$\vec{E}(b, t_0) = [E_0 \vec{i}] \cos(kb - \omega t_0) , . \quad (38.9)$$

Entretanto, a mesma expressão também representa o valor do campo elétrico nos pontos da forma $P_1(a_1, b, c_1), P_2(a_2, b, c_2), \dots, P_i(a_i, b, c_i)$. Como a_i e c_i podem ser quaisquer, a eq.(37.9) descreve, na verdade, o campo elétrico nos infinitos pontos do plano $y = b$. A posição de cada um dos pontos $P_i(a_i, b, c_i)$ é descrita pelo **vetor**

$$\vec{r}_i = a_i \vec{i} + b \vec{j} + c_i \vec{k} . \quad (38.10)$$

Por isso, todos os infinitos vetores dados por essa expressão estão escondidos na eq.(37.8). Alguns dos pontos P_i e os correspondentes vetores \vec{r}_i são mostrados na figura 37-2.

O outro **vetor** importante é o que descreve a direção de propagação da onda e é construído juntando o versor \vec{u} dessa direção ao número de onda k e escrevendo

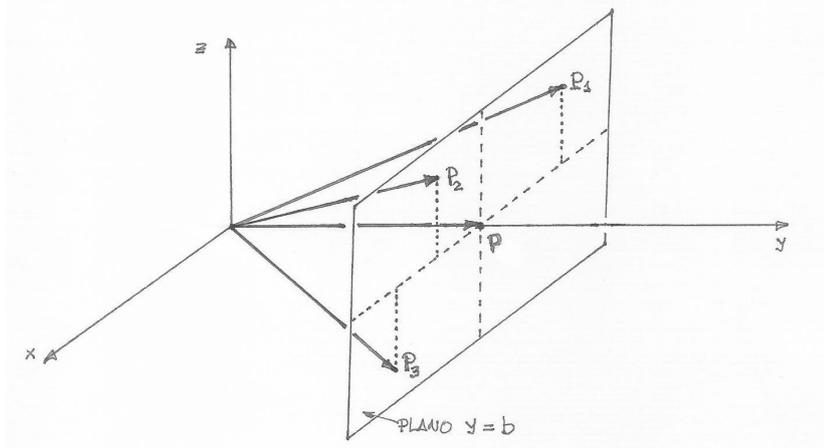


Figura 38.2: Pontos P_i de coordenadas $\vec{r}_i = a_i \vec{i} + b \vec{j} + c_i \vec{k}$

$$\vec{k} = k \vec{u} . \quad (38.11)$$

Esse novo vetor costuma ser chamado de vetor de onda ¹.

No caso do exemplo do campo elétrico dado pela eq.(37.8), a propagação acontece segundo o eixo y e, por isso, $\vec{u} = \vec{j}$. O vetor de onda é dado por $\vec{k} = k \vec{j}$ e o argumento da eq.(37.9) pode ser entendido como o resultado do produto escalar de \vec{k} pelos vários \vec{r}_i :

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_1 = \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \dots = \vec{k} \cdot \vec{r}_i = kb . \quad (38.12)$$

De modo geral, uma onda plana e monocromática que se propaga numa direção dada pelo versor \vec{u} é descrita pela equação

$$F(x, y, z, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) , \quad (38.13)$$

com \vec{k} dado por(37.11) e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

• exemplo 1

Uma onda eletromagnética plana e monocromática se propaga segundo um eixo horizontal, que faz um ângulo α com o eixo x .

¹Esse vetor não deve ser confundido com o versor da direção z , embora ambos sejam representados pelo mesmo símbolo.

Determine a equação que descreve o campo elétrico dessa onda, supondo que ele esteja polarizado na direção do eixo z .

Interprete o resultado nos casos $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$ e $\alpha = \pi$.

• exemplo 2

Considere a mesma onda do exemplo anterior e mostre que existem apenas dois valores de α para os quais ela obedece a equação

$$\partial_y^2 F(x, y, z, t) - (1/v^2) \partial_t^2 F(x, y, z, t) = 0 .$$

Mostre, em seguida, que ela obedece a equação

$$\partial_x^2 F(x, y, z, t) + \partial_y^2 F(x, y, z, t) - (1/v^2) \partial_t^2 F(x, y, z, t) = 0 ,$$

para qualquer valor de α .

• exemplo 3

Uma onda eletromagnética plana e monocromática se propaga segundo a direção dada pelo versor $\vec{u} = \cos\beta \vec{i} + \sin\beta \vec{k}$. Determine a equação que descreve o campo elétrico dessa onda, supondo que ele esteja polarizado na direção y .

• exemplo 4

Determine uma expressão que possa descrever o campo elétrico de uma onda eletromagnética que se propaga na direção determinada pelos ângulos (θ, ϕ) , das coordenadas esféricas.

• a notação complexa

O emprego de números complexos é bastante comum em física, pois ele permite simplificar muitos cálculos e expressar resultados complicados de forma compacta. Neste curso, já utilizamos o conceito de impedância, na aula 6 e, agora discutimos a descrição de ondas por meio da notação complexa. Essa notação é, em geral, adotada em cursos mais avançados e é interessante notar que a equação de Schrödinger, básica na mecânica quântica não-relativística, é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

e inclui, explicitamente, um i .

A extensão dos resultados anteriores para a notação complexa é simples. No caso da descrição geral da onda plana e monocromática dada pela eq.(37.13), fazemos

$$F(x, y, z, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) \rightarrow \mathcal{F}(x, y, z, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi)}.$$

e, quando desejarmos recuperar as grandezas que descrevem o mundo físico, tomamos a parte real de \mathcal{F} . A seguir, apresentamos alguns exemplos do poder da notação complexa, refazendo cálculos já apresentados nas aulas 34-36, onde foi discutido o modelo de Drude.

• exemplo 5

Na aula 36, foi preciso resolver a equação diferencial (36.9), que descreve a oscilação de um elétron em torno de sua posição média, dada por

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kS - b \frac{dS}{dt} - e E^* \cos(\omega t - \phi^*) \quad (38.14)$$

Fazendo a extensão complexa

$$E^* \cos(\omega t - \phi^*) \rightarrow E^* e^{i(\omega t - \phi^*)}, \quad (38.15)$$

usando

$$S \rightarrow \mathcal{S} = A e^{i(\omega t - \phi^* + \delta)}, \quad (38.16)$$

e cancelando o fator comum $e^{i(\omega t - \phi^*)}$, a eq.(37.15) pode ser escrita como

$$A e^{i\delta} [(m\omega^2 - k) - i\omega b] = e E^*. \quad (38.17)$$

Expressando o termo entre colchetes em coordenadas polares, temos

$$[(m\omega^2 - k) - i\omega b] = \sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + (\omega b)^2} e^{-i\theta}, \quad (38.18)$$

$$\tan\theta = (\omega b)/(m\omega^2 - k), \quad (38.19)$$

e a solução da eq.(37.18) é

$$A = e E^* / \sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + (\omega b)^2}, \quad (38.20)$$

$$\delta = \theta \rightarrow \tan\delta = (\omega b)/(m\omega^2 - k). \quad (38.21)$$

Finalmente, a parte real de \mathcal{S} , que representa a oscilação física, é dada por

$$\mathcal{S} = A e^{i(\omega t - \phi^* + \delta)} \rightarrow S = A \cos(\omega t - \phi^* + \delta). \quad (38.22)$$

Estes são os resultados (37.10), (36.17) e (36.20) obtidos, agora, com menor esforço.

• exemplo 6

Num certo ponto da aula 34 deparamo-nos com o problema de resolver a equação diferencial (34.41), escrita como

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (38.23)$$

onde $\vec{E} = E\vec{k}$ e E é a intensidade do campo. Para tanto, naquela aula, adotamos a forma

$$E(y, t) = E_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \theta). \quad (38.24)$$

e impusemos que ela deveria satisfazer a eq.(37.24). Depois de vários cálculos, obtivemos as soluções (34.48) e (34.49), dadas por

$$k = \sqrt{\mu_0} \omega \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad (38.25)$$

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega) \omega}{2k} . \quad (38.26)$$

Para resolver novamente a eq.(37.24) usando funções complexas, consideramos a extensão da eq.(37.25)

$$E(y, t) \rightarrow \mathcal{E}(y, t) = E_0 e^{-\beta y} e^{i(ky - \omega t + \theta)} . \quad (38.27)$$

Olhando com atenção essa expressão, notamos que podemos torná-la ainda mais compacta, reescrevendo-a como

$$E(y, t) \rightarrow \mathcal{E}(y, t) = E_0 e^{i[(k+i\beta)y - \omega t + \theta]} . \quad (38.28)$$

Isso sugere que é também conveniente considerar a extensão complexa do número de onda

$$k \rightarrow \mathcal{K} = k + i\beta , \quad (38.29)$$

o que nos permite usar a forma

$$E(y, t) \rightarrow \mathcal{E}(y, t) = E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t + \theta]} . \quad (38.30)$$

Substituindo $\mathcal{E}(y, t)$ em (37.24), encontramos a condição

$$\mathcal{K}^2 - \mu_0 \varepsilon(\omega) (\omega)^2 = i \mu_0 g(\omega) \omega . \quad (38.31)$$

Usando (37.30), obtemos as equações

$$k^2 - \beta^2 = \mu_0 \varepsilon(\omega) (\omega)^2 \quad \text{e} \quad 2\beta k = \mu_0 g(\omega) \omega , \quad (38.32)$$

que levam diretamente à solução do problema, dada pelas eqs.(37.26) e (37.27).

• exemplo 7

Neste exemplo, tratamos da relação entre os campos elétrico e magnético, obtida a partir da lei de Faraday e de sua extensão complexa

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} . \quad (38.33)$$

Usando $E = \mathcal{E}(y, t) \vec{k}$, obtemos $B = \mathcal{B}(y, t) \vec{i}$ e

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{E}(y, t)}{\partial y} . \quad (38.34)$$

Temos, assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(y, t) &= -\int dt \frac{\partial \mathcal{E}(y, t)}{\partial y} = -\int dt i \mathcal{K} E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t + \theta]} \\ &= \frac{\mathcal{K}}{\omega} E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t + \theta]} = \frac{\mathcal{K}}{\omega} \mathcal{E}(y, t) . \end{aligned} \quad (38.35)$$

Para recuperar a relação entre as grandezas físicas, basta tomarmos a parte real dos dois lados dessa equação. Antes de fazer isso, é conveniente lembrar que \mathcal{K} é um número complexo e, portanto, carrega uma fase. Para explicitá-la, passamos para coordenadas polares

$$\mathcal{K} = k + i\beta = \sqrt{k^2 + \beta^2} e^{i\eta} \quad (38.36)$$

$$\tan \eta = \beta/k . \quad (38.37)$$

Assim, a eq.(37.36) fica dada por

$$\mathcal{B}(y, t) = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t + \theta + \eta]} = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} E_0 e^{-\beta y} e^{i[ky - \omega t + \theta + \eta]} . \quad (38.38)$$

Tomando a sua parte real, obtemos

$$B(y, t) = B_0 e^{-\beta y} \cos[ky - \omega t + \theta + \eta], \quad (38.39)$$

$$B_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} E_0, \quad (38.40)$$

que são os resultados dados na aula 34, eqs.(34.61) e (34.62).

• notação complexa e propagação numa direção qualquer

Nos exemplos anteriores, discutimos extensões complexas de movimentos na direção y . Para generalizar esses resultados para o caso de propagação numa direção qualquer definida pelo versor \vec{u} , definimos, como na eq.(37.11), um vetor de onda complexo K por

$$K = \mathcal{K} \vec{u} \quad (38.41)$$

e substituímos o fator $\mathcal{K}y$ nos argumentos por $K \cdot \vec{r}$.

• RESUMO
dos resultados das aulas 34 a 36, expressos em termos de notação complexa e propagação numa direção qualquer

• vetores

A direção de propagação é dada pelo versor \vec{u} .

$$K = (k + i\beta) \vec{u}, \quad (38.42)$$

$$E(x, y, z, t) = \vec{E}_0 e^{i[K \cdot \vec{r} - \omega t + \theta]} \quad \leftrightarrow \quad \vec{E}_0 \cdot \vec{u} = 0, \quad (38.43)$$

$$B(x, y, z, t) = \frac{K}{\omega} \times E(x, y, z, t). \quad (38.44)$$

com

$$k = \sqrt{\mu_0 \omega} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad \beta = \frac{\mu_0 g(\omega)}{2k} \omega, \quad (38.45)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_o^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + b^2 \omega^2}, \quad g(\omega) = \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + b^2 \omega^2}, \quad (38.46)$$

e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; num metal, $k = 0$.

Capítulo 39

interfaces

• introdução

Muitos fenômenos observados no nosso dia-a-dia relacionam-se com a propagação de ondas eletromagnéticas e sua interação com a matéria. O processo de visão, as cores dos objetos, o azul do céu, a transparência de certos materiais são alguns dos muitos fenômenos relacionados à propagação e interação da luz com a matéria. Nesta aula estudaremos o que ocorre quando uma onda eletromagnética incide em uma superfície que separa dois meios diferentes. Quando a luz solar ou de fontes artificiais atinge algum objeto e nós o enxergamos, afirmamos que houve reflexão da luz na superfície do corpo. Muitos objetos são transparentes, indicando haver transmissão da luz através do material. Se por exemplo, enxergarmos um peixe em um lago é porque a luz incidente penetrou na água, atingiu o peixe e foi refletida por ele. Se além disto conseguimos ver a superfície da água é porque ali também houve reflexão da luz incidente.

Assim, nossa experiência cotidiana nos permite afirmar que quando uma onda luminosa atinge certo material, parte da radiação incidente é refletida na superfície de separação entre os meios (onda refletida) e parte penetra no meio material (onda refratada). Do ponto de vista microscópico, quando uma onda eletromagnética incide em um material, há interação dela com os átomos, moléculas ou cargas livres deste material. O campo elétrico oscilante associado à onda incidente provoca a oscilação de cargas da substância. Estas cargas aceleradas são fontes de nova radiação eletromagnética. A superposição das radiações emitidas pelas cargas oscilantes constitui as ondas refletida e refratada. As características das radiações espalhadas pelo material dependem das propriedades dos meios como por exemplo, dos átomos que os constituem, do arranjo atômico, da existência ou não de cargas livres. Estas propriedades determinam características dos objetos tais como cor e transparência.

Embora as idéias básicas envolvidas na descrição microscópica da interação da luz com a matéria sejam relativamente simples, seu tratamento matemático é complicado. Estudaremos a reflexão e refração da luz sob o ponto de vista do eletromagnetismo clássico. As propriedades das ondas eletromagnéticas refletidas e refratadas numa superfície serão obtidas através das equações de Maxwell.

• as ondas refletida e refratada

O problema a ser resolvido consiste em, conhecendo a onda incidente numa superfície, determinar as características das ondas refletida e transmitida, ou seja determinar os campos elétrico e magnético destas ondas. Vamos considerar uma onda plana monocromática se propagando no meio 1 e incidindo em um meio 2, como ilustra a figura 38.1.

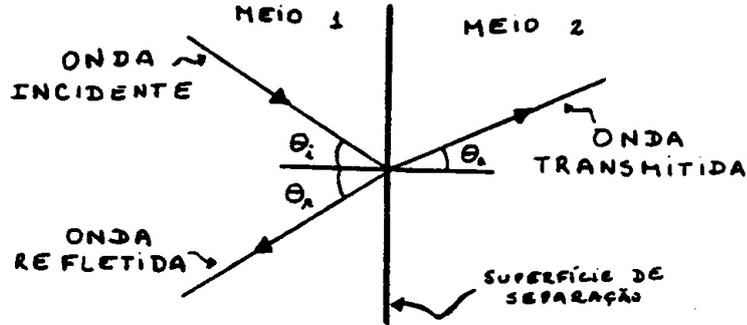


Figura 39.1: Uma onda incide na superfície de separação de dois meios originando as ondas refletida e refratada.

As expressões dos campos elétrico e magnético de uma onda se propagando em um meio material são:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\beta}{k} \vec{k} \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (39.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-\frac{\beta}{k} \vec{k} \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi + \eta) \quad (39.2)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_0 \quad (39.3)$$

$$k = \sqrt{\mu_0} \omega \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}} \right]^{1/2} \quad (39.4)$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\beta}{k}$$

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega) \omega}{2k} \quad (39.5)$$

A defasagem η entre os campos \vec{E} e \vec{B} da onda e os valores de k e β dependem do meio de propagação da onda.

De uma forma genérica, pode-se escrever as expressões para os campos das ondas incidentes, refletida e transmitida numa superfície como segue:

onda incidente:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_i^* e^{-\frac{\beta_i}{k_i} \vec{k}_i \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \quad (39.6)$$

$$\vec{B}_i = \vec{B}_i^* e^{-\frac{\beta_i}{k_i} \vec{k}_i \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t + \eta_i) \quad (39.7)$$

$$\vec{B}_i^* = \frac{\sqrt{k_i^2 + \beta_i^2}}{\omega_i} \frac{\vec{k}_i}{k_i} \times \vec{E}_i^* \quad (39.8)$$

onda refletida:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_r^* e^{-\frac{\beta_r}{k_r} \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \phi) \quad (39.9)$$

$$\vec{B}_r = \vec{B}_r^* e^{-\frac{\beta_r}{k_r} \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \phi + \eta_r) \quad (39.10)$$

$$\vec{B}_r^* = \frac{\sqrt{k_r^2 + \beta_r^2}}{\omega_r} \frac{\vec{k}_r}{k_r} \times \vec{E}_r^* \quad (39.11)$$

onda refratada:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_t^* e^{-\frac{\beta_t}{k_t} \vec{k}_t \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \Gamma) \quad (39.12)$$

$$\vec{B}_t = \vec{B}_t^* e^{-\frac{\beta_t}{k_t} \vec{k}_t \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \Gamma + \eta_t) \quad (39.13)$$

$$\vec{B}_t^* = \frac{\sqrt{k_t^2 + \beta_t^2}}{\omega_t} \frac{\vec{k}_t}{k_t} \times \vec{E}_t^* \quad (39.14)$$

As ondas incidente e refletida se propagam no mesmo meio, portanto:

$$\beta_i = \beta_r \quad (39.15)$$

$$k_i = k_r \quad (39.16)$$

De acordo com o princípio da superposição, os campos elétrico e magnético numa posição \vec{r} da região onde se propagam as ondas incidente e refletida são dados por:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_i(\vec{r}, t) + \vec{E}_r(\vec{r}, t) \quad (39.17)$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \vec{B}_i(\vec{r}, t) + \vec{B}_r(\vec{r}, t) \quad (39.18)$$

No meio 2 há apenas os campos da onda refratada, portanto:

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_t(\vec{r}, t) \quad (39.19)$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}, t) = \vec{B}_t(\vec{r}, t) \quad (39.20)$$

Queremos descobrir como “unir” estes campos na superfície de separação das duas regiões. As condições que os campos devem obedecer na interface dos dois meios são chamadas condições de contorno. Elas decorrem da necessidade dos campos satisfazerem as equações de Maxwell não apenas nas regiões 1 e 2 como também na superfície que as separa. Através destas condições de contorno determinaremos os campos das ondas refletida e refratada.

• condições de contorno

As condições que os campos elétrico e magnético devem satisfazer na superfície de separação entre os meios são determinadas pelas equações de Maxwell:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (39.21)$$

$$\oint_c \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \left(g\vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{lei de Ampère-Maxwell}) \quad (39.22)$$

$$\iint_s \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS = Q \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (39.23)$$

$$\iint_s \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{lei de Gauss do magnetismo}) \quad (39.24)$$

A condição de contorno imposta pela lei de Faraday pode ser obtida através do cálculo da circulação do campo elétrico na linha c indicada na figura 38-2, no limite em que $h \rightarrow 0$:

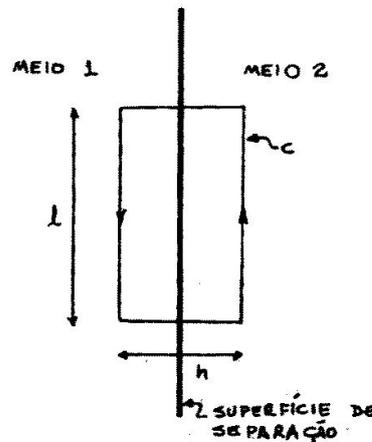


Figura 39.2: As leis de Faraday e Ampère-Maxwell aplicadas ao caminho c quando $h \rightarrow 0$ impõem condições de contorno para \vec{E} e \vec{B} .

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_{1//} - E_{2//})\ell \quad (39.25)$$

$$(E_{1//} - E_{2//})\ell = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (39.26)$$

No limite $h \rightarrow 0$, a superfície retangular cujo contorno é c tende a zero. Sendo o campo magnético finito, o fluxo de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ através desta superfície é nulo. Portanto, a partir da equação (38.6), concluímos que a componente do campo elétrico paralela a superfície de separação dos meios é contínua:

$$E_{1//} = E_{2//}$$

O cálculo da integral de linha de \vec{B} no caminho c indicado na figura 38-2 leva à condição de contorno imposta pela lei de Ampère-Maxwell.

$$\oint_c \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{B_{1//}}{\mu_1} - \frac{B_{2//}}{\mu_2} \right) \ell \quad (39.27)$$

De acordo com a lei de Ampère-Maxwell:

$$\left(\frac{B_{1//}}{\mu_1} - \frac{B_{2//}}{\mu_2} \right) \ell = \int_s \left[g \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} dS \quad (39.28)$$

No limite $h \rightarrow 0$, a área s tende a zero. Portanto:

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1} = \frac{B_{2//}}{\mu_2} \quad (39.29)$$

A lei de Gauss fornecerá uma segunda condição de contorno para o campo elétrico. O fluxo de \vec{E} através da superfície cilíndrica indicada na figura 38-3 é dado por

$$\oiint_s \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS = Q \quad (39.30)$$

onde Q a carga livre existente no interior da superfície s .

No limite em que $h \rightarrow 0$:

$$(\varepsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 - \varepsilon_2 \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2) A = Q \quad (39.31)$$

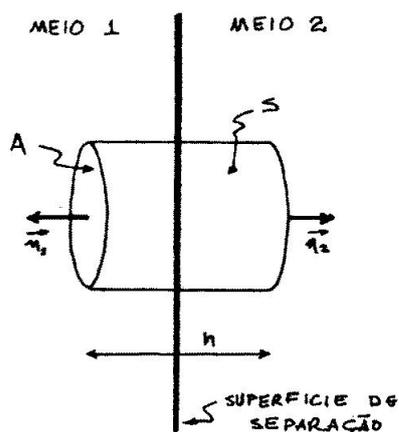


Figura 39.3: As leis de Gauss da eletricidade e do magnetismo aplicadas à superfície S determinam condições de contorno para \vec{E} e \vec{B} .

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma \quad (39.32)$$

Se os dois meios forem dielétricos neutros, não haverá cargas livres ($\sigma = 0$). Neste caso:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \quad (39.33)$$

Se um meio for dielétrico e o outro condutor, a componente normal do campo elétrico acelera as cargas livres do condutor na direção perpendicular a interface. Neste caso poderá existir nesta superfície uma densidade de cargas livres e valerá a relação:

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_{\text{livre}} \quad (39.34)$$

Finalmente a condição de contorno para a componente normal do campo magnético será obtida através da lei de Gauss do magnetismo. O fluxo de \vec{B} através da superfície cilíndrica indicada na figura 38-3, no limite em que $h \rightarrow 0$ vale:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 - \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (39.35)$$

Portanto,

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad (39.36)$$

Assim, as condições de contorno que as quatro equações de Maxwell impõem aos campos elétrico e magnético, numa superfície que separa dois meios, são expressas por:

$$E_{1//} = E_{2//} \quad (39.37)$$

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1} = \frac{B_{2//}}{\mu_2} \quad (39.38)$$

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_{livre} \quad (39.39)$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad (39.40)$$

Capítulo 40

interfaces

• reflexão e refração

As propriedades das ondas refletida e refratada, em uma superfície que separa dois meios, serão estudadas impondo-se as condições de contorno 38.37 a 38.40 aos campos elétricos e magnéticos das ondas incidente, refletida e refratada. A álgebra envolvida neste trabalho será simplificada se usarmos notação complexa. Como os campos elétricos e magnéticos das ondas são descritos por combinações de funções seno e cosseno, é possível representá-los por exponenciais complexas. Devemos ter em mente que os campos que realmente existem no espaço são dados pela parte real destas funções complexas. Os campos elétricos e magnéticos das ondas incidente, refletida e transmitida podem ser, genericamente, escritos como:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{K}_i \times \vec{E}_i}{\omega_i} \quad (40.1)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{K}_r \times \vec{E}_r}{\omega_r} \quad (40.2)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)}$$

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{K}_t \times \vec{E}_t}{\omega_t} \quad (40.3)$$

Impondo que as partes reais das expressões (39.1), (39.2) e (39.3) coincidam com (38.6 a 38.14), obtemos as relações:

$$\vec{K}_i = (k_i + i\beta_i) \frac{\vec{k}_i}{k_i} \quad (40.4)$$

$$\vec{K}_r = (k_r + i\beta_r) \frac{\vec{k}_r}{k_r} \quad (40.5)$$

$$\vec{K}_t = (k_t + i\beta_t) \frac{\vec{k}_t}{k_t}$$

$$\vec{E}_{0r} = \vec{E}_r^* e^{i\phi}$$

$$\vec{E}_{0t} = \vec{E}_t^* e^{i\Gamma} \quad (40.6)$$

As expressões (39.4) mostram que quando β é diferente de zero, K é um número complexo. Isto significa que a onda é amortecida no interior do material. Para materiais com $\beta = 0$, K é o número de onda real. Através das expressões (39.5) podemos observar que a diferença de fase ϕ entre as ondas refletida e incidente está incluída na amplitude E_{0r} que pode ser um número complexo. Analogamente, a defasagem Γ entre as ondas incidente e refratada e está incluída em E_{0t} .

Encontraremos os valores de ω_r e ω_t , as relações entre θ_i , θ_r e θ_t e determinaremos as amplitudes E_{0r} e E_{0t} , exigindo que as três ondas satisfaçam as condições de contorno (38.37 a 38.40) na interface dos meios 1 e 2.

No meio em que as ondas incidente se propaga, o campo elétrico total é dado pela superposição dos campos das ondas incidente e refletida:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} + \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$$

No meio 2 o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)}$$

De acordo com a condição de contorno (38.37), a componente tangencial de \vec{E} deve ser contínua na interface dos meios, ou seja:

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{//} = \vec{E}_{t//}$$

Se \vec{n} é um vetor de módulo unitário, normal à interface, podemos escrever a última expressão como:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_i + \vec{E}_r) = \vec{n} \times \vec{E}_t$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} + \vec{n} \times \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} = \vec{n} \times \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} \quad (40.7)$$

A relação (39.6) deve ser válida em qualquer ponto \vec{r} da interface, em qualquer instante de tempo, o que será possível apenas se os termos dependentes de \vec{r} e t se cancelarem, ou seja:

$$\begin{aligned} e^{i(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} &= \\ e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} &= \\ e^{i(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} & \end{aligned}$$

portanto:

$$\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t = \vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t = \vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t \quad (40.8)$$

A igualdade (39.7) só será independente do tempo se:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (40.9)$$

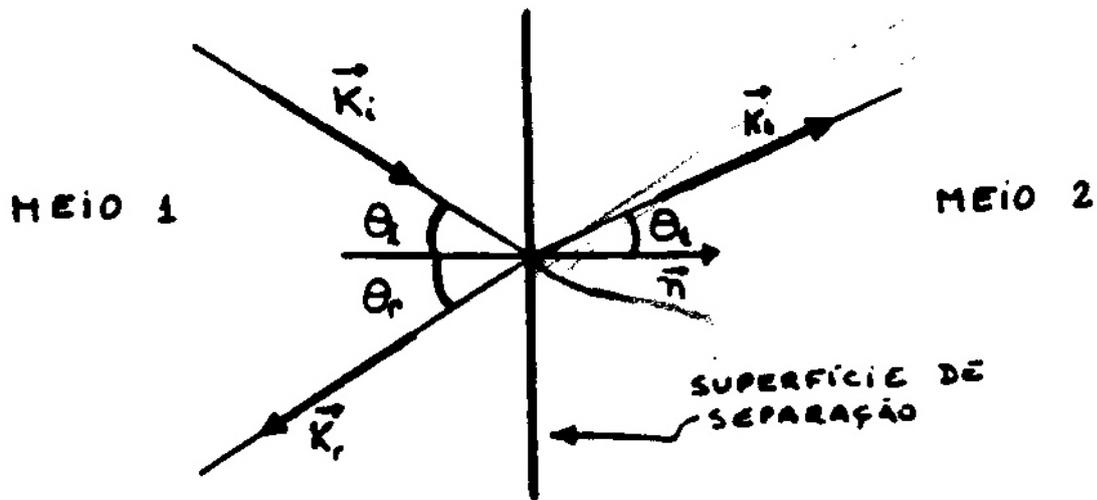


Figura 40.1: Os vetores \vec{K}_i , \vec{K}_r e \vec{K}_t das ondas incidente, refletida e refratada são paralelos ao plano de incidência.

Assim, as ondas refletida e refratada têm frequências iguais à da onda incidente.

Além disso, a igualdade (39.7) deve valer em qualquer ponto \vec{r} da interface, resultando em:

$$\vec{K}_i \cdot \vec{r} = \vec{K}_r \cdot \vec{r} = \vec{K}_t \cdot \vec{r}$$

o que também pode ser expresso por:

$$(\vec{K}_i - \vec{K}_r) \cdot \vec{r} = 0 \quad (40.10)$$

$$(\vec{K}_i - \vec{K}_t) \cdot \vec{r} = 0 \quad (40.11)$$

Portanto $(\vec{K}_i - \vec{K}_r)$ e $(\vec{K}_i - \vec{K}_t)$ são vetores perpendiculares a \vec{r} . Com a origem do sistema de coordenadas escolhida na superfície de separação entre os meios, \vec{r} está contido nesta superfície. Desta forma $(\vec{K}_i - \vec{K}_r)$ e $(\vec{K}_i - \vec{K}_t)$ são vetores perpendiculares à interface, portanto paralelos ao vetor \vec{n} . Logo os vetores \vec{K}_i , \vec{K}_r , \vec{K}_t e \vec{n} estão contidos no mesmo plano, o plano de incidência como ilustra a figura 39.1.

Como $(\vec{K}_i - \vec{K}_r)$ e $(\vec{K}_i - \vec{K}_t)$ são vetores paralelo ao vetor \vec{n} , podemos escrever:

$$\vec{n} \times (\vec{K}_i - \vec{K}_r) = 0 \quad (40.12)$$

$$\vec{n} \times (\vec{K}_i - \vec{K}_t) = 0 \quad (40.13)$$

A primeira igualdade leva a

$$K_i \text{ sen } \theta_i = K_r \text{ sen } \theta_r \quad (40.14)$$

Como as ondas incidente e refletida se propagam no mesmo meio e com a mesma frequência, $K_i = K_r$. Portanto, a relação (39.11) nos mostra que o ângulo de incidência θ_i é igual ao ângulo de reflexão θ_r , resultado este verificado experimentalmente.

A partir da expressão (39.12), obtemos a relação entre os ângulos de incidência e de transmissão, conhecida como lei de Snell:

$$K_i \text{ sen } \theta_i = K_t \text{ sen } \theta_t \quad (40.15)$$

Quando K é um número complexo, a igualdade (39.14) não pode ser interpretada como a relação entre os ângulos de incidência e de transmissão. Neste caso θ_t seria um número complexo perdendo seu significado geométrico de ângulo de refração.

Os resultados que obtivemos até agora, a partir da condição de contorno (38.37), são os seguintes:

- 1) $\omega_i = \omega_r = \omega_t$
- 2) $\theta_i = \theta_r$
- 3) $K_i \text{ sen } \theta_i = K_t \text{ sen } \theta_t$
- 4) os vetores \vec{K}_i , \vec{K}_r e \vec{K}_t são paralelos ao plano de incidência.

Estas relações poderiam ser obtidas a partir de qualquer uma das condições de contorno, pois as 4 expressões (38.37 a 38.40) valem em qualquer instante em qualquer ponto da interface.

Para obtermos estes resultados não fizemos restrições à superfície de separação; eles independem de propriedades dos meios.

Vamos a seguir determinar as amplitudes das ondas refletida e refratada. Estas amplitudes não são determinadas apenas por características da onda incidente, elas dependem fortemente das propriedades da superfície entre os meios. Vamos resolver o problema de uma onda se propagando no vácuo e incidindo num meio material. Devido as diferenças existentes na propagação de ondas eletromagnéticas em condutores e dielétricos, estudaremos estes casos separadamente.

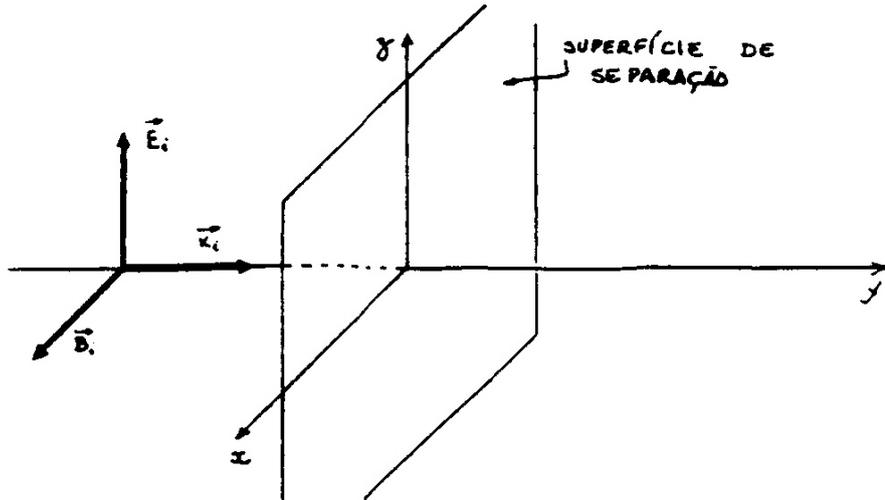


Figura 40.2: Uma onda eletromagnética plana incide perpendicularmente em uma superfície condutora situada no plano xz .

• ondas eletromagnéticas incidindo em condutores

Vamos considerar uma onda eletromagnética monocromática plana se propagando no vácuo e incidindo perpendicularmente a uma superfície condutora. A onda incidente é descrita por:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{K}_i \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{K}_i \times \vec{E}_i}{\omega} \quad (40.16)$$

Consideremos a situação em que a onda incidente se propaga na direção y e a interface entre os meios coincide com o plano xz como ilustra a figura 39.2.

Vamos considerar \vec{E}_{0i} constante no tempo e escolher a direção z coincidente com a do campo elétrico. O fato de \vec{E}_{0i} ser constante não representa nenhuma limitação uma vez que qualquer onda plana pode ser decomposta em ondas linearmente polarizadas.

Para esta situação temos que:

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(Ky - \omega t)} \vec{k} \quad (40.17)$$

$$\vec{B}_i = \frac{K}{\omega} E_{0i} e^{i(Ky - \omega t)} \vec{i}$$

Sendo o ângulo de reflexão igual ao de incidência, a onda refletida irá se propagar na direção $-j$, com os campos elétrico e magnéticos dados por

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(-Ky-\omega t)} \vec{k}$$

$$\vec{B}_r = -E_{0r} \frac{K}{\omega} e^{i(-Ky-\omega t)} \vec{i} \quad (40.18)$$

Portanto, no meio 1, os campos elétrico e magnético são tangentes à interface ($E_{1\perp} = B_{1\perp} = 0$). Como a componente normal de \vec{B} deve ser contínua (38.40), devemos ter $B_{2\perp} = 0$, ou seja o campo magnético da onda transmitida também é tangente à interface. Como \vec{B} é perpendicular a direção de propagação podemos concluir que a onda transmitida se propaga na direção y :

$$\vec{E}_t = E_{0t} e^{i(K_t y - \omega t)} \vec{k}$$

$$\vec{B}_t = E_{0t} \frac{K_t}{\omega} e^{i(K_t y - \omega t)} \vec{i} \quad (40.19)$$

Considerando que o meio 1 é o vácuo, K é um número real dado por:

$$K = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Como o meio 2 é condutor, K_t é um número complexo:

$$K_t = k_t + i\beta$$

com k e β dados pelas equações (38.4).

A parte imaginária β é consequência do amortecimento da onda no interior do condutor.

A situação que estamos tratando está ilustrada na figura 39-3.

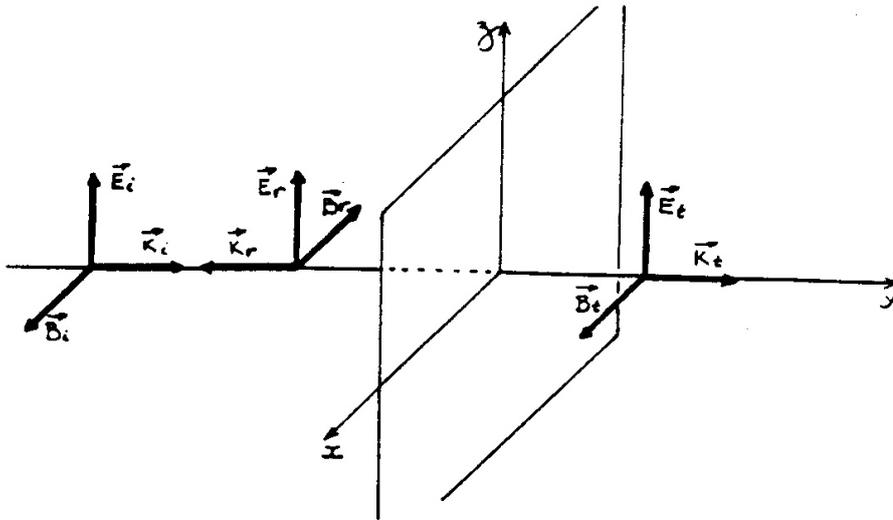


Figura 40.3: Uma onda eletromagnética plana incide perpendicularmente em uma superfície condutora situada no plano xz . As ondas incidente, refletida e refratada se propagam na direção y .

Para encontrarmos a relação entre as amplitudes E_{0i} , E_{0r} e E_{0t} , vamos utilizar as condições de contorno (38.7 a 38.40). A continuidade das componentes tangenciais de \vec{E} e de $\frac{\vec{B}}{\mu}$, na interface, são expressas respectivamente por:

$$E_i + E_r = E_t \quad (40.20)$$

$$\frac{B_i}{\mu_0} - \frac{B_r}{\mu_0} = \frac{B_t}{\mu} \quad (40.21)$$

Qualquer ponto da interface tem coordenada $y = 0$, uma vez que ela coincide com o plano xz . Portanto a expressão (39.19) fica:

$$E_{0i} e^{-i\omega t} + E_{0r} e^{-i\omega t} = E_{0t} e^{-i\omega t}$$

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (40.22)$$

Escrevendo os campos magnéticos que aparecem na expressão (39.20) em função dos campos elétricos, obtemos:

$$\frac{K}{\mu_0 \omega} [E_{0i} - E_{0r}] = \frac{K_t}{\mu \omega} E_{0t} \quad (40.23)$$

sendo μ_0 e μ as permeabilidades magnéticas do vácuo e do condutor. Como K_t é um número complexo, a expressão (39.22) nos mostra que E_{0r} e E_{0t} não podem ser ambos reais, ou seja há uma diferença de fase que não é o π entre as ondas refletida e transmitida.

A partir das equações (39.21) e (39.22) podemos encontrar a razão entre as amplitudes da ondas:

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\mu K - \mu_0 K_t}{\mu K + \mu_0 K_t} \quad (40.24)$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2 \mu K}{\mu K + \mu_0 K_t} \quad (40.25)$$

Assim, conhecida a onda eletromagnética que incide perpendicularmente em uma superfície condutora, as ondas refletida e refratada estão completamente determinadas. Estudando as expressões (39.23) e (39.24) poderemos entender os fenômenos que ocorrem quando a luz incide em um condutor. Estas expressões nos levarão a compreender, por exemplo, porque metais, como a prata, são brilhantes.

As relações (39.23) e (39.24) determinam a fração da energia incidente que é refletida e a fração que penetra através da superfície do condutor. A quantidade de energia por unidade de tempo, por unidade de área transportada por uma onda eletromagnética é dada pelo módulo do vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{E} \times (\vec{K} \times \vec{E})}{\mu\omega}$$

$$|\vec{S}| = \frac{K E^2}{\mu\omega}$$

A potência média por unidade de área, $\langle S \rangle$, é chamada intensidade da onda é dada por:

$$I = \langle S \rangle = \frac{K}{\mu\omega} \langle E^2 \rangle$$

Para o caso em que $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$,

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos^2(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle$$

$$\langle \cos^2(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$$

Assim, obtemos:

$$I = \frac{K}{\mu \omega} \frac{E_0^2}{2} \quad (40.26)$$

Quando K é complexo, I será dado pela parte real de (39.25).

A medida de quanto da energia incidente é refletida é dada por:

$$R = \frac{I \text{ refletida}}{I \text{ incidente}} = \frac{|E_{0r}|^2}{|E_{0i}|^2} \quad (40.27)$$

A fração de energia que penetra no material é :

$$T = \frac{I \text{ transmitida}}{I \text{ incidente}} = \frac{\frac{K_0}{2\mu\omega} |E_{0t}|^2}{\frac{K}{2\mu_0\omega} |E_{0i}|^2} = \frac{\mu_0 K_0}{\mu K} \left| \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right|^2$$

O princípio de conservação de energia exige que:

$$R + T = 1$$

Determinando a fração da energia incidente que é refletida, sabemos quanta energia penetrou no condutor. Sabemos, de nossa experiência diária, que condutores são bons refletores de luz visível. Isto nos permite prever que para luz visível incidindo em condutores $R \approx 1$ e $T \approx 0$. Portanto, podemos esperar que a maior parte da energia incidente seja refletida. Vamos a seguir

estudar o caso especial de condutores muito bons. O campo elétrico no interior de um condutor ideal (condutividade infinita) é nulo. Este resultado pode ser encontrado a partir da equação de Ampère- Maxwell:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = g(\omega) \vec{E} + \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Se o campo elétrico oscila no tempo de acordo com $e^{i\omega t}$,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = (g - i\omega\varepsilon) \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{g - i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) \quad (40.28)$$

Se a condutividade g é infinita, a relação (39.27) resulta em $\vec{E} = 0$.

Assim, não pode haver propagação de onda eletromagnética no interior de um condutor com condutividade infinita. Sendo $E_{0t} = 0$, a relação (39.21) leva a:

$$E_{0r} = -E_{0i}, \text{ portanto}$$

$$R = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 = 1 \text{ e } T = 0$$

Isto significa que toda energia incidente é refletida por um condutor ideal, ou seja, nenhuma energia penetra através da superfície condutora. Em casos de bons condutores, mas com condutividade finita, R assume valores menores, mas próximos de 1, significando que quase toda energia é refletida. A dissipação por efeito Joule, no interior do condutor é, nestes casos, pequena.

Vimos que a condutividade de um material depende da frequência da onda que nele se propaga de acordo com:

$$g(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2}$$

Assim, um mesmo material pode ser um bom condutor para ondas com determinadas frequências e não ser para ondas com outras frequências. A expressão $g(\omega)$ mostra que para valores muito altos de frequência, a condutividade de qualquer metal é pequena. Neste caso, a espessura de penetração (δ) é grande e a onda eletromagnética pode entrar no condutor, logo R não assumirá valores próximos da unidade. Assim, quando falamos em bons condutores, necessariamente estamos nos referindo a casos em que a frequência da onda incidente não é muito alta. Para frequências em que a espessura de penetração é pequena, a onda praticamente não penetra no condutor. Neste caso, quase toda a energia incidente é refletida e $R \approx 1$.

Uma indicação de frequência limite abaixo da qual uma onda eletromagnética não penetra num condutor é dada pela frequência de plasma:

$$\omega_p = \left[\frac{N e^2}{m \varepsilon_0} \right]^{1/2}$$

Para ilustrar a dependência do índice de reflexão R com a frequência da onda eletromagnética que incide em um condutor, determinamos os valores de R para o caso de ondas se propagando no ar e incidindo perpendicularmente em uma superfície de prata (tabela 1). Substituindo na equação (39.23) a relação $K_t = K_0 + i\beta$ e considerando $\mu \sim \mu_0$, temos que:

$$R = \frac{|E_{0r}|^2}{|E_{0i}|^2} = \frac{(K - K_0)^2 + \beta^2}{(K + K_0)^2 + \beta^2}$$

No cálculo dos valores de R consideramos $\varepsilon_{ar} \sim \varepsilon_0$ e portanto

$$K = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Os valores de K e β foram determinados utilizando-se das equações

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2}$$

$$g(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2}$$

onde $b = e^2 N \rho$

Utilizamos ainda os seguintes dados sobre a prata:

número de massa: $A = 108$

densidade: $d = 10.5 \text{g/cm}^3$

resistividade para $\omega = 0$: $\rho = 1.6 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$

número de elétrons livres por átomo: $n = 1$

A tabela 1 nos mostra que ondas eletromagnéticas de frequência abaixo da região da luz visível não penetram na prata, sendo quase totalmente refletidas. No caso de luz visível 99.6 % da energia incidente é refletida e apenas 0.4 % é perdida devido ao atrito dos elétrons livres na superfície de separação.

ω (Hz)	$K(\text{m})^{-1}$	$K_o(\text{m})^{-1}$	$\beta(\text{m})^{-1}$	R
6.28×10^8 (FM, TV)	2.096×10^0	1.57×10^5	1.57×10^5	1.000
6.28×10^{11} (infra-vermelho)	2.096×10^3	4.91×10^6	5.02×10^6	0.999
6.28×10^{13} (infra-vermelho)	2.096×10^5	8.62×10^6	4.28×10^7	0.996
2.48×10^{15} (vermelho)	8.28×10^6	2.46×10^5	4.47×10^7	0.996
3.42×10^{15} (verde)	1.14×10^7	1.80×10^5	4.43×10^7	0.996
4.83×10^{15} (azul)	1.61×10^7	1.30×10^5	4.35×10^7	0.996
3.14×10^{16} (ultra-violeta)	1.05×10^8	9.43×10^7	9.20×10^3	0.003
6.28×10^{18} (raio-X)	2.096×10^{10}	2.096×10^{10}	2.08×10^{-1}	0.000

TABELA 1 - Fração R da energia incidente que é refletida pela prata, quando em sua superfície incide uma onda eletromagnética de frequência ω .

A maioria dos metais tem frequência de plasma na região do ultra-violeta. Para a prata, por exemplo, $\omega_p = 1.35 \times 10^{16} \text{Hz}$. Desta forma, podemos esperar que os metais sejam bons refletores

da luz visível. É por este motivo que metais como a prata e o alumínio são brilhantes e “brancos”. Materiais pretos como o grafite devem absorver praticamente toda a luz visível que neles incide. Vamos verificar esta afirmação calculando a intensidade da luz visível refletida por grafite (tabela 2).

$\omega(\text{Hz})$	$K(\text{m})^{-1}$	$K_o(\text{m})^{-1}$	$\beta(\text{m})^{-1}$	R
2.48×10^{15} (vermelho)	8.28×10^6	1.09×10^7	1.05×10^7	0.24
3.42×10^{15} (verde)	1.14×10^7	1.52×10^7	1.05×10^7	0.15
4.83×10^{15} (azul)	1.61×10^7	1.94×10^7	1.14×10^7	0.10

TABELA 2 - Fração da energia incidente que é refletida pelo grafite quando em sua superfície incide uma onda eletromagnética de frequência ω .

Na obtenção dos resultados apresentados na tabela 2 utilizamos os seguintes dados sobre o grafite:

$$A = 12$$

$$d = 2\text{g/cm}^3$$

$$\rho = 1.4 \times 10^{-5} \Omega \text{ m}$$

$$n = 4 \text{ elétrons livres/ átomos.}$$

O grafite reflete ~ 10 a 24% da luz visível que nele incide. Portanto 76 a 90% da energia incidente é absorvida, o que explica o fato do grafite ser preto.

Resta ainda uma questão. Por que metais como ouro e cobre são amarelos e avermelhados? A frequência de plasma do ouro é $\omega_p = 2 \times 10^{16} \text{ Hz}$, acima da frequência da luz visível. Se calcularmos os valores de R para o espectro visível obteremos $R \approx 1$. Portanto de acordo com este modelo o ouro deveria ser branco como a prata. Neste caso nossa previsão teórica não é confirmada porque neste modelo foram considerados apenas a contribuição dos elétrons livres, desprezando-se os efeitos ligados aos átomos. No caso dos metais como ouro e cobre além de perdas de energia por efeito Joule, ocorrem perdas devido a absorção de energia por elétrons ligados. De acordo com a teoria quântica, a luz pode ser explicada como sendo constituída de “pacotes” chamados fótons, sendo a energia do fóton proporcional a frequência da onda. A teoria quântica nos diz ainda que o elétron ligado de um átomo só absorve energia da onda eletromagnética se esta tiver frequência tal que a energia do fóton seja igual a diferença de energia entre os níveis do átomo. Nesta situação dizemos que a luz está em ressonância com o átomo.

No caso da prata e do alumínio, as frequências de ressonâncias dos elétrons ligados estão na

região do ultra-violeta e portanto não absorvem energia da luz visível. No ouro e no cobre os elétrons ligados tem frequência de ressonância na região do azul-violeta, absorvendo portanto parte da energia da luz visível, na região do azul-violeta e refletindo as ondas de frequência na região do amarelo-vermelho. Por este motivo o cobre e o ouro são amarelo avermelhados.

Capítulo 41

ondas em interfaces

• ondas eletromagnéticas incidindo em dielétricos

Quando uma onda eletromagnética incide na superfície de um dielétrico, seus átomos oscilam sob a influência do campo elétrico e emitem radiação. Além disto, os átomos do dielétrico podem absorver e irradiar a energia da onda incidente. A soma das radiações emitidas por cada átomo constitui as ondas refletida e refratada.

As diferenças existentes entre o comportamento de ondas eletromagnéticas incidindo em condutores e em dielétricos se deve a não existência de elétrons livres nos dielétricos. Esta diferença faz com que os dielétricos tenham propriedades diferentes dos condutores quando atingidos por luz.

Nesta seção vamos resolver o problema da reflexão e refração de ondas na superfície de um dielétrico neutro. Para tanto, consideremos uma onda eletromagnética plana e monocromática se propagando em um meio neutro (1) e incidindo na superfície plana de um material dielétrico (meio 2).

As expressões dos campos elétrico e magnético das ondas incidente, refletida e refratada em condutores e dielétricos são formalmente iguais. Em ambos os casos as ondas eletromagnéticas são oscilações amortecidas descritas pelas expressões:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{K} \times \vec{E}}{\omega} \quad (41.1)$$

$$K = (k + i\beta) \quad (41.2)$$

$$k = \sqrt{\mu_0} \omega \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}} \right]^{1/2} \quad (41.3)$$

$$\beta = \frac{\mu_0 \omega g(\omega)}{2k} \quad (41.4)$$

As diferenças entre a propagação de ondas em dielétricos e condutores está implícita nestas expressões porque $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$ têm forma e significados diferentes nos dois casos. Para descrevermos a onda no interior do condutor consideramos apenas os elétrons livres e, no caso de substâncias dielétricas, os elétrons estão ligados aos átomos. O amortecimento da onda no interior do material é expresso pela função $\beta(\omega)$. Quando a frequência ω da onda incidente é próxima da frequência natural do átomo que constitui o dielétrico, $\beta(\omega)$ é grande e a onda é absorvida. Os átomos ou moléculas da maioria das substâncias têm sua frequência natural na região do infra-vermelho ou ultra-violeta, diferente portanto da frequência da luz visível. Para descrever os fenômenos de reflexão e refração da luz visível em um dielétrico, vamos ignorar o amortecimento da onda no interior do material. Neste caso K é um número real.

Vamos considerar então uma onda que se propaga no meio (1) e atinge a superfície de um material dielétrico. Os campos elétrico e magnético das ondas incidente, refletida e refratada devem satisfazer as condições de contorno obtidas na aula 38 (equações 38.37 a 38.40), o que tem como consequência os seguintes resultados:

- 1) as três ondas tem a mesma frequência ω
- 2) $\theta_i = \theta_r$
- 3) $K_i \text{ sen } \theta_i = K_t \text{ sen } \theta_t$

A lei de Snell equação (40.5) nos mostra que quando a onda refratada tem número de onda maior que o da onda incidente ($K_t > K_i$), o ângulo de refração θ_t é menor que o ângulo de incidência θ_i . Neste caso sempre há uma onda refratada. Na situação limite em que $\theta_i = \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$\frac{\text{sen } \frac{\pi}{2}}{\text{sen } \theta_L} = \frac{1}{\text{sen } \theta_L} = \frac{K_t}{K_i} = \frac{v_1}{v_2} > 1$$

O ângulo limite θ_L é o máximo ângulo de refração para o caso em que a velocidade de propagação da onda no meio 1 (v_1) é maior que no meio 2.

Quando $v_2 > v_1$, a equação 40.5 mostra que $\theta_t > \theta_i$. Neste caso, nem sempre há onda refratada. O máximo ângulo de incidência θ_c , chamado ângulo crítico, para que haja onda refratada corresponde a situação em que $\theta_t = \pi/2$. Neste caso:

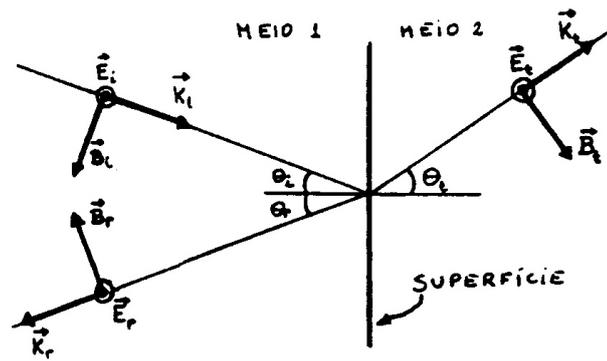


Figura 41.1: Ondas incidente, refletida e refratada com o campo elétrico da onda incidente polarizado perpendicularmente ao plano de incidência.

$$\text{sen } \theta_c = \frac{v_1}{v_2} < 1$$

Para ondas incidindo em ângulos maiores que θ_c , não se observa onda refratada, pois corresponderia a $\theta_t > \pi/2$. Neste caso toda radiação incidente é refletida. Este fenômeno é conhecido como reflexão total em dielétricos.

Vamos tratar das situações em que é possível observar onda refratada ou seja:

$$v_2 < v_1 \quad \text{ou}$$

$$v_2 > v_1 \quad \text{e} \quad \theta_i < \theta_c$$

Queremos determinar a fração R da energia incidente que é refletida na superfície do dielétrico e a fração T que penetra no material. Para tanto, precisamos encontrar as amplitudes das ondas refletida e refratada. Qualquer que seja a polarização da onda eletromagnética incidente, podemos decompor os campos elétrico e magnético em suas componentes paralela e perpendicular ao plano de incidência e tratar os dois casos separadamente. O caso geral é uma combinação de ondas polarizadas paralelamente e perpendicularmente ao plano de incidência.

Vamos em primeiro lugar considerar uma onda polarizada perpendicularmente ao plano de incidência (figura 40.1).

As três ondas, incidente, refletida e refratada, são descritas pelas expressões (39.1), (39.2) e (39.3).

A partir da condição de contorno que impõe a continuidade da componente tangencial de \vec{E} , obtemos:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (41.5)$$

A condição de contornos expressa pela equação (38.38):

$$\frac{B_{1//}}{\mu_1} = \frac{B_{2//}}{\mu_2} \quad (41.6)$$

determine que:

$$(B_{0i} - B_{0r}) \frac{\cos \theta_i}{\mu_1} = \frac{B_{0t} \cos \theta_t}{\mu_2} \quad (41.7)$$

$$\frac{K_i}{\mu_1} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{K_t}{\mu_2} E_{0t} \cos \theta_t \quad (41.8)$$

A partir das equações 40.6 e 40.9 obtem-se:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_i - \frac{K_t}{\mu_2} \cos \theta_t}{\frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{K_t}{\mu_2} \cos \theta_t} \quad (41.9)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{K_t}{\mu_2} \cos \theta_t} \quad (41.10)$$

A notação \perp significa que estas relações são válidas para o caso de campo elétrico perpendicular ao plano de incidência.

Para o caso de incidência normal ($\theta_i = \theta_t = 0$), temos que:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{K_i}{\mu_1} - \frac{K_t}{\mu_2}}{\frac{K_i}{\mu_1} + \frac{K_t}{\mu_2}} \quad (41.11)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2 \frac{K_i}{\mu_1}}{\frac{K_i}{\mu_1} + \frac{K_t}{\mu_2}} \quad (41.12)$$

As equações 40.12 e 40.13 são formalmente idênticas às obtidas para o caso de incidência normal em condutores (equações 39.23 e 39.24). A diferença entre estes dois casos está na expressão de K_t .

Considerando $\mu_1 \sim \mu_2$ e utilizando a equação 40.5, podemos escrever as expressões 40.10 e 40.11 como:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = -\frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \quad (41.13)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2 \text{sen} \theta_t \cos \theta_i}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \quad (41.14)$$

Quando o campo elétrico é paralelo ao plano de incidência (Figura 40.2), as condições de contorno dadas pelas equações 38.7 e 38.8 levam a:

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t \quad (41.15)$$

$$\frac{K_i}{\mu_1} E_{0i} + \frac{K_i}{\mu_1} E_{0r} = \frac{K_t}{\mu_2} E_{0t} \quad (41.16)$$

Resolvendo as equações 40.16 e 40.17 e lembrando que $\theta_i = \theta_r$, obtemos:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{\frac{K_t}{\mu_2} \cos \theta_i - \frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_t}{\frac{K_t}{\mu_2} \cos \theta_i + \frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_t} \quad (41.17)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{2 \frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{K_t}{\mu_2} \cos \theta_i + \frac{K_i}{\mu_1} \cos \theta_t} \quad (41.18)$$

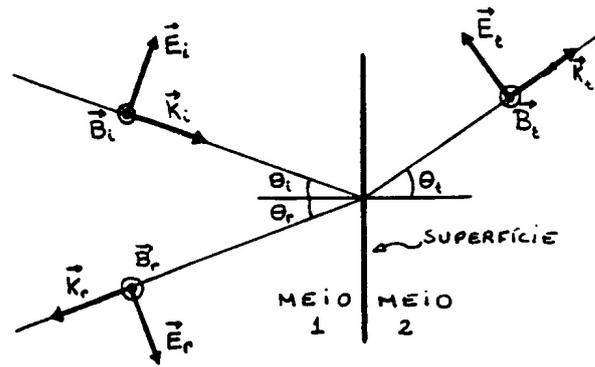


Figura 41.2: Ondas incidente, refletida e refratada com o campo elétrico da onda incidente polarizado paralelamente ao plano de incidência.

No caso de incidência normal as expressões 40.18 e 40.19 ficam iguais às relações 40.12 e 40.13, o que era de se esperar porque nesta situação os vetores \vec{E} e \vec{B} são paralelos à interface, não havendo diferença entre polarização paralela e perpendicular ao plano de incidência.

Considerando $\mu_1 \sim \mu_2$ e utilizando a lei de Snell, as relações 40.18 e 40.19 ficam:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{\text{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\text{tg}(\theta_i + \theta_t)} \quad (41.19)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{2 \text{sen } \theta_t \cos \theta_i}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \quad (41.20)$$

A partir das expressões 40.14, 40.15, 40.20 e 40.21, podemos determinar a fração da energia incidente que penetra no material (T) e a fração que é refletida (R).

No caso de incidência normal,

$$R = \frac{\langle S_r \rangle}{\langle S_i \rangle}$$

$$T = \frac{\langle S_t \rangle}{\langle S_i \rangle}$$

onde $\langle S \rangle$ é o valor médio do módulo do vetor de Poynting. Em se tratando de incidência oblíqua R e T serão dados pelas componentes de ξ perpendiculares à interface:

$$R = \frac{\langle S_r \rangle \cos \theta_r}{\langle S_i \rangle \cos \theta_i} = \frac{\langle S_r \rangle}{\langle S_i \rangle} \quad (41.21)$$

$$T = \frac{\langle S_t \rangle \cos \theta_t}{\langle S_i \rangle \cos \theta_i} \quad (41.22)$$

Substituindo o valor médio do vetor de Poynting dado por:

$$\langle S \rangle = \frac{K}{\mu\omega} \frac{E_0^2}{2} \quad (41.23)$$

nas equações 40.22 e 40.23 obtemos:

$$R = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 \quad (41.24)$$

$$T = \frac{K_t}{K_i} \left| \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right|^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \left| \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right|^2 \frac{\operatorname{tg} \theta_i}{\operatorname{tg} \theta_t} \quad (41.25)$$

E, portanto,

$$R_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (41.26)$$

$$T_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}(2\theta_i) \operatorname{sen}(2\theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (41.27)$$

$$R_{//} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (41.28)$$

$$T_{//} = \frac{\operatorname{sen}(2\theta_i) \operatorname{sen}(2\theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)} \quad (41.29)$$

A partir destas expressões conclui-se que quando $\theta_i \rightarrow \pi/2$; $R_{\perp} = R_{//} \rightarrow 1$ e $T_{\perp} = T_{//} \rightarrow 0$, ou seja toda energia incidente é refletida. Isto significa que uma superfície dielétrica se comporta como um espelho para incidência razante. Quando a velocidade de propagação de onda no meio 1 é menor que no meio 2, ou seja $\theta_i < \theta_t$, temos reflexão total para ângulos de incidência $\theta_i > \theta_c$, sendo: $\text{sen } \theta_c = \frac{v_1}{v_2}$. O valor de θ_c para uma onda que se propaga no ar e incide, numa superfície de vidro é 42° . Assim, quando luz incide em vidro com ângulo maior que 42° , toda a energia incidente é refletida.

Outra situação que merece ser discutida é aquela no qual $\theta_i + \theta_t = \pi/2$. Neste caso $R_{//} \rightarrow 0$ e $T_{//} \rightarrow 1$, ou seja, a onda refletida só tem componente perpendicular ao plano de incidência. Nesta condição, conhecida como incidência de Brewster, a onda refletida é linearmente polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência. Esta é uma maneira de se obter luz polarizada a partir de luz não polarizada.

Capítulo 42

interação da luz com a matéria: fenômenos

Nesta aula discutiremos fenômenos relacionados à interação da luz com a matéria com base no artigo “**How light interacts with matter**”, Victor Weisskopf, Scientific American, vol 219, p. 60, 1968.