

Complementos de Mecânica Clássica

4º Trabalho

O movimento, sem atrito, de uma argola de massa m está restrito a um aro de raio R . O aro gira com velocidade angular $\vec{\omega}$ em torno de um eixo vertical que coincide com um diâmetro do aro, como mostra a figura abaixo.

(a) Mostre que a lagrangiana do sistema pode ser escrita na forma:

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta. \quad (1)$$

(b) Diga quais são as variáveis da lagrangiana dada e o número de graus de liberdade da partícula. Justifique os procedimentos e respostas.

(c) Determine a hamiltoniana em termos dos pares canônicos (q_i, p_i) . Essa função é constante? Justifique resposta e procedimentos.

(d) Obtenha a relação entre a hamiltoniana e a energia mecânica da argola.

(e) Determine as equações de movimento da partícula. Há forças sobre a argola além da força gravitacional? Se a sua resposta for positiva, diga quais são essas forças e interprete a natureza física delas.

(f) Mostre que a argola em questão pode executar pequenas oscilações em torno do ponto mais baixo do aro. Determine a frequência de pequenas oscilações. Mostre que para haver equilíbrio estável $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$.

Sugestão para o item (f): Considere que o movimento da argola ocorre próximo ao ponto $\theta = \pi$. Faça então a aproximação de ângulos pequenos e escreva a equação do movimento para essa situação.

