Lista de exercícios

Oscilações amortecidas

Exercício 1 Qualitativamente, o que é que distingue uma oscilação amortecida de uma oscilação harmônica?

Exercício 2 Quais são os três possíveis regimes de oscilação amortecida? O que caracteriza cada um deles?

Exercício 3 Um objeto de 2,2 kg oscila sob a ação de uma mola (constante elástica 250 N/m) com período de 0,615 s. Esse sistema é amortecido? Como você sabe disso? Se for amortecido, encontre a constante de amortecimento b e indique o tipo de amortecimento: subcrítico, crítico ou supercrítico.

Exercício 4 Uma força de amortecimento $F = -bv$ atua sobre um rato infeliz de 0,3 kg que se move preso na extremidade de uma mola cuja constante é $k = 2{,}5$ N/m.
(a) Se a constante $b = 0{,}9$ kg/s, qual é a frequência da oscilação do rato?
(b) Para qual valor da constante b o movimento é criticamente amortecido?

Exercício 5 Um ovo de 50 g fervido durante muito tempo está preso na extremidade de uma mola cuja constante elástica tem valor 25 N/m. Em $t = 0$, a **amplitude**[1] do movimento oscilatório é igual a 0,3 m. Uma força de amortecimento $F = -bv$ atua sobre o ovo e a amplitude do movimento diminui para 0,1 m em 5 s. Calcule o módulo da constante de amortecimento b.

Exercício 6 Escreva a equação do movimento de um pêndulo de torção amortecido, supondo para isso que o torque de amortecimento seja linearmente proporcional à velocidade angular.

Exercício 7 O movimento de um oscilador sub-amortecimento é descrito pela equação $x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t)$, na qual $A > 0$ e fizemos a fase $\phi = 0$ para simplificar.
(a) De acordo com esta equação, qual é o valor de x em $t = 0$?
(b) Qual é o módulo e o sentido da velocidade em $t = 0$?
(c) O que esse resultado informa sobre a inclinação do gráfico de $x(t)$ em $t = 0$?
(d) Obtenha uma expressão para a aceleração em $t = 0$.
(e) Para que valores ou intervalo de valores da constante de amortecimento b (em termos de k e de m) a aceleração em $t = 0$ é negativa, nula e positiva? Discuta cada caso em termos do gráfico de $x(t)$ nas vizinhanças de $t = 0$.

Exercício 8 Mostre que $x(t) = te^{-\gamma t/2}$ é solução da equação do movimento do oscilador criticamente amortecido. Ou seja, mostre que essa equação horária resolve a equação $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ desde que $\omega_0 = \gamma/2$.

[1] Isto é, o valor da envoltória do termo que oscila em $x(t)$.

Exercício 9 Mostre que as duas equações horárias abaixo, características de uma oscilação amortecida subcrítica, são equivalentes:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + B), \tag{1}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} [C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)]. \tag{2}$$

A, B, C e D são constantes de integração, que devem ser ajustadas às condições iniciais. Como elas se relacionam?

Exercício 10 Considere um objeto de massa 2 kg sujeito à ação de uma mola de constante elástica 5 N/m e da resistência do ar, linearmente proporcional à velocidade de deslocamento desse objeto, sendo $b = 3$ kg/s a constante de proporcionalidade.

(a) Utilizando a expressão (1), no exercício anterior, ajuste as condições iniciais $x(0) = 1{,}2$ m e $\dot{x}(0) = 0{,}5$ m/s de modo a determinar as constantes de integração (você precisará de uma calculadora!). **Atenção** para a unidade de cada constante.

(b) Repita o processo para a equação (2) acima.

(c) Utilize um software para desenhar o gráfico das duas funções obtidas nos itens anteriores. Por exemplo, você pode utilizar o Geogebra, o Winplot ou o Wolfram Alpha (procure no Google), dentre muitos outros. Verifique visualmente se o gráfico atende às condições iniciais.

Exercício 11 Se $x(t) = (3 + 2t)e^{-t}$ representa uma oscilação amortecida, quais são as condições iniciais? Qual é o regime (ou tipo) dessa oscialação amortecida? Qual é o valor da constante de amortecimento b, sabendo que $m = 2{,}5$ kg?

Exercício 12 Um oscilador harmônico amortecido tem **fator de qualidade** $Q := \omega_0/\gamma = 10$. Partindo da posição de equilíbrio, ele imediatamente adquire velocidade inicial de 5 m/s. Verifica-se que a energia total do oscilador diminui numa taxa, por segundo, igual a 4 vezes sua energia cinética instantânea. Calcule o deslocamento x do oscilador (em metros) em função do tempo (em segundos).

Oscilações forçadas

Exercício 13 O que é uma oscilação forçada?

Exercício 14 Explique a diferença entre ω_0 (= $\sqrt{k/m}$), ω (= $\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$) e ϖ, conforme esses símbolos foram utilizados nas aulas expositivas.

Exercício 15 Numa oscilação forçada, o que acontece com a amplitude da oscilação $x(t)$ quando ϖ (frequência angular da força externa) aproxima-se de ω_0? Qual é o nome desse fenômeno?

Exercício 16 Procedendo de maneira análoga à que fizemos em sala de aula para o oscilador forçado, mas **não amortecido**, é possível deduzir que a amplitude da oscilação de um oscilador forçado **e amortecido** depende da frequência angular ϖ da força externa pela expressão:[2]

$$\mathscr{A}(\varpi) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (\gamma\varpi)^2}}. \tag{3}$$

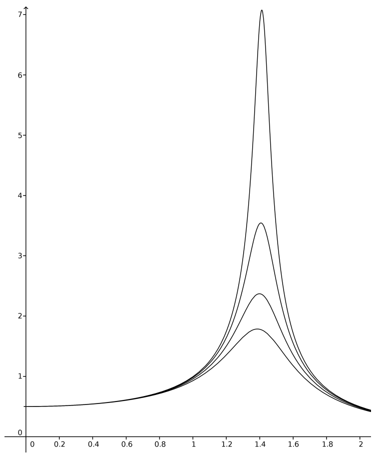
[2] Compare-a com a constante que multiplica a segunda parcela de $x(t)$, no exercício 18, para o caso em que não há amortecimento.

F_0 é a intensidade máxima da força externa e ϖ, sua frequência angular[3]; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a **frequência natural** da oscilação (isto é, se não houvesse nem amortecimento nem a força externa), onde m é a massa do objeto que oscila e k é a "constante elástica", que relaciona a força restauradora com o deslocamento ($F_r = -kx$); $\gamma = b/m$, onde b é a "constante de amortecimento", que relaciona a força dissipativa com a velocidade ($F_d = -b\dot{x}$).

(a) Imagine que, para a situação $\varpi = \sqrt{k/m}$ e para um certo valor b_1 da constante de amortecimento, observou-se que a amplitude do movimento é $\mathscr{A}_1$. Se, em seguida, a constante de amortecimento for alterada para (i) $b_2 = 3b_1$, quantas vezes maior ou menor que $\mathscr{A}_1$ será a nova amplitude $\mathscr{A}_2$, supondo que os demais parâmetros sejam os mesmos? (ii) E para o caso $b_3 = b_1/2$?

(b) Agora, suponha que façamos $b_4 = 0{,}2\sqrt{km}$. Neste caso, e ainda para a situação $\varpi = \sqrt{k/m}$, (i) qual seria a amplitude $\mathscr{A}_4$ do movimento oscilatório? Escreva a resposta em função de k e F_0 apenas. (ii) E qual seria $\mathscr{A}_5$, para $b_5 = 0{,}4\sqrt{km}$?

Compare seus resultados com a figura ao lado, que ilustra o gráfico de $\mathscr{A}(\varpi)$ para quatro valores diferentes de b: o que acontece com a amplitude quando aumentamos ou diminuimos o amortecimento?



Exercício 17 Um dispositivo experimental e sua estrutura de suporte para instalação a bordo da *International Space Station* (Estação Espacial Internacional) deve funcionar como um sistema massa-mola sub-amortecimento com massa de 108 kg e constante da mola igual a $2{,}1 \times 10^6$ N/m. Uma exigência da NASA é que não ocorra ressonância das oscilações forçadas em nenhuma frequência menor do que 35 Hz. O dispositivo experimental satisfaz essa exigência?

Exercício 18 Mostre que

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)}\cos(\varpi t)$$

é solução da equação diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$. Esta é a solução geral da equação do oscilador forçado, mas **não amortecido**.

obs.: a primeira parcela de $x(t)$ é a **solução geral** da equação **homogênea** associada à equação diferencial acima, isto é, associada a $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. A segunda parcela e a **solução particular** da equação (não-homogênea) acima.

Exercício 19 A equação diferencial da corrente elétrica I que percorre um circuito eletrônico composto por um resistor R, um capacitor C e um indutor L, ligados em série, é:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt},$$

onde $V(t)$ é uma diferença de potencial aplicada ao circuito, que varia com o tempo t.

(a) Esta é a equação de um oscilador harmônico, amortecido, forçado...?

(b) Identifique a constante ω_0 (frequência angular natural).

[3] Deste modo, essa força externa pode ser escrita assim: $F(t) = F_0\cos(\varpi t)$.

(c) Identifique a constante b.
(d) Identifique a constante γ.
(e) O que se pode dizer sobre a corrente elétrica?
(f) Que componente eletrônico tem papel de "inércia"?
(g) Que componente eletrônico tem papel de "força restauradora"?
(h) Que componente eletrônico tem papel de "força dissipativa"?
(i) Que elemento da equação acima tem papel de "força externa"?
(j) Considere que $L = 0{,}3 \times 10^{-6}$ [a unidade é o "Henry" (H), mas não se preocupe com isso aqui]. Qual deve ser o valor de C para que esse circuito oscile na mesma frequência da Radio Rock, em 89,1 MHz?
(k) Suponha agora que $V = 0$ (não há "força externa") e que em $t = 0$ a corrente tem um valor I_0 qualquer. O que você deve fazer no circuito para obter uma corrente que oscile harmonicamente, sem nunca cessar?

Respostas

Exercício 1 Ops! Que tal discutir com seus colegas?

Exercício 2 Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 3 O sistema apresenta amortecimento subcrítico. $b \approx 16{,}64$ kg/s.

Exercício 4 (a) 0,39 Hz, (b) $b \approx 1{,}73$ kg/s.

Exercício 5 $b \approx 0{,}02$ kg/s.

Exercício 6 $\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, com $\gamma = b/I$ e $\omega_0^2 = K/I$, onde K é o "módulo de torção" (análogo à "constante elástica") e I é o momento de inércial do objeto que oscila.

Exercício 7 (a) $x(0) = A$; (b) Velocidade de módulo $\gamma A/2$ e sentido oposto à orientação do deslocamento; (c) A inclinação do gráfico de $x(t)$ em $t = 0$ é negativa; (d) $\ddot{x}(0) = A\left(\frac{1}{2}\gamma^2 - \omega_0^2\right)$; (e) $\ddot{x}(0) < 0$ se $b < \sqrt{2km}$, $\ddot{x}(0) = 0$ se $b = \sqrt{2km}$ e $\ddot{x}(0) > 0$ se $b > \sqrt{2km}$.

Exercício 8 Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 9 Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 10 (a) $A \approx 1{,}57$ m e $B \approx -0{,}70$ rad; (b) $C = 1{,}2$ m e $D \approx 1{,}01$ m; (c) Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 11 $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = -1$ e $b = 5$ kg/s.

Exercício 12 $x(t) \approx 0{,}25e^{-t}\,\mathrm{sen}(19{,}97t)$

Exercício 13 Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 14 Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 15 Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 16 (a) $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1/3$ e $\mathscr{A}_3 = 2\mathscr{A}_1$; (b) $\mathscr{A}_4 = 5F_0/k$ e $\mathscr{A}_5 = 2{,}5F_0/k$.

Exercício 17 O dispositivo **não** satisfaz a exigência.

Exercício 18 Veja a resposta do exercício 1.

Exercício 19 (a) Oscilador amortecido e forçado; (b) $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$; (c) $b = R$; (d) $\gamma = R/L$; (e) A corrente oscila; (f) O indutor; (g) O capacitor; (h) O resistor; (i) dV/dt; (j) $C \approx 11 \times 10^{-12}$ F (não se preocupe com a unidade); (k) Veja a resposta do exercício 1.