## A programação linear como ferramenta de modelagem matemática

A modelagem matemática pode ser resumida como a arte de representar situações reais através de expressões matemáticas. Ou seja, assim como um escultor usa a argila para representar formas humanas, ou um pintor usa a aquarela para registrar o que sente ao admirar uma paisagem, podemos usar a matemática para criar uma abstração (ou modelo) de um problema ou processo real.

As expressões matemáticas que usamos nesses casos representam em geral uma aproximação da realidade e, por isso mesmo, nos referimos as essas expressões como um modelo. A programação linear pode ser usada nesse sentido, ou seja, pode ser usada como meio para gerar uma abstração (modelo) de um problema real.

Neste curso, o nosso objetivo será mostrar como a programação linear pode ser usada para expressar o mais comum dos problemas que um gestor enfrenta: a otimização do uso de recursos limitados.

Entretanto, antes de usarmos a programação linear como técnica de modelagem para problemas desse tipo, é necessário desenvolver a habilidade de converter problemas reais em modelos de programação linear. Assim como um bom escultor se apoia em técnicas para dar forma à argila, e um bom pintor requer técnicas apuradas para tornar a sua pintura expressiva, precisamos de uma abordagem que nos ajude a usar a PL para modelar a realidade. Essa abordagem será apresentada na próxima seção como um roteiro, que refina a "arte" da modelagem matemática com programação linear.

## Um roteiro para transformar problemas reais em problemas de programação linear

Nesta seção apresentamos uma sequencia de passos que devem ser seguidos quanto temos problemas que se mostram potenciais candidatos à programação linear. É importante lembrar que a programação linear nos apoia na resolução de certos problemas, e que nem todos os problemas reais podem ser modelados através da programação linear. Como saberemos se um problema pode ou não ser modelado através da programação linear? Em geral, os problemas que se beneficiam da modelagem com PL buscam, a partir de diferentes estratégias, atingir certo objetivo da forma mais eficiente possível.

Haverá indícios de que o problema não pode ser modelado como um problema de programação linear, se algum dos seguintes passos não puder ser efetivamente aplicado.

1. Qual objetivo orienta o problema? Que resultado se pretende alcançar?

   Geralmente busca-se *otimizar um resultado* econômico (máxima receita líquida, ou mínimo custo, ou nível máximo de geração de empregos etc.). É essencial que apenas um objetivo possa ser destacado como o mais importante. (*Obs.: Se múltiplos objetivos precisarem ser considerados simultaneamente, teremos que recorrer a outra técnica matemática de modelagem chamada "programação por metas"*)

2. Quais são as alternativas disponíveis que contribuem para o atendimento do objetivo?

   Procura-se com esta questão identificar as *diferentes maneiras de gerar resultados* mais, ou menos, ótimos. Por exemplo, estratégias diferentes de uso do solo representam diferentes alternativas de exploração econômica de uma determinada região. Dependendo de como se usa o solo na região, e de seus respectivos níveis, resultam níveis totais de emprego na região diferentes.

3. Associe cada alternativa a uma variável de decisão ( incógnita $x_i$ ).

   As alternativas devem ser expressas como variáveis matemáticas. No exemplo do planejamento do uso do solo em uma região, cada possibilidade de uso do solo deve ser associada a uma *variável de decisão*. Por exemplo, o uso agrícola poderia ser representado pela variável $x_1$, a destinação para fins de conservação pela variável $x_2$ etc.

4. Defina a unidade de medida que será usada para quantificar os níveis de cada variável de decisão.

   As variáveis matemáticas devem expressar unidades mensuráveis. Assim sendo, para as variáveis $x_1$ e $x_2$ do item anterior, a unidade de mensuração apropriada poderia ser <u>*hectares*</u> com agricultura e com conservação, respectivamente.

5. Quantifique a contribuição unitária ( ci ) de cada alternativa para com o objetivo.

   É essencial definir quanto cada unidade da variável $x_i$ contribui para o objetivo. No exemplo do planejamento regional, $c_1$ poderia expressar quanto cada hectare dedicado à agricultura contribui para o emprego total na região.

6. Defina matematicamente a função $Z = \sum ci\ xi$ que quantifica o objetivo (resultado final).

   Determina-se simplesmente que o resultado final é calculado pela soma das contribuições de cada alternativa. Ou seja, no nosso exemplo, o resultado final é simplesmente o resultado da soma de empregos gerados pela agricultura ($c_1\ x_1$) mais os empregos gerados pela conservação ($c_2\ x_2$).

7. Identifique as quantidades que estabelecem tetos (limitações), pisos ou metas (compromissos).

   A partir deste passo, tratamos das restrições que limitam os níveis das variáveis de decisão. Por exemplo, a região estudada tem uma área máxima que estabelece o *teto* máximo para a agricultura e a conservação ($x_1 + x_2$ <= *área máxima total*); digamos que a comunidade local deseje um *piso* para a atividade de conservação na região ($x_2$ >= *área mínima exigida para conservação*); assim como talvez seja desejável gastar exatamente o tempo anual disponível da equipe de monitoramento ambiental ($m_1x_1 + m_2x_2$ = *tempo total disponível na região para monitoramento, onde $m_1$ e $m_2$* representam horas de monitoramento por hectare exigidas pela agricultura e pela conservação, respectivamente).

8. Escreva as quantidades representando tetos, pisos ou metas numa coluna à direita.

   Esta etapa ajuda a definir o que se convencionou chamar o *RHS* (*right hand side*) do problema. Dispor esses valores numa coluna à direita, um em cada linha, garante que todas as restrições serão identificadas e expressas corretamente. No nosso exemplo:

   | | |
   |---|---|
   | <= | *área total da região* |
   | >= | *área mínima exigida para conservação* |
   | = | *tempo total disponível para monitoramento* |

9. À esquerda dos valores dessa coluna, apresente as respectivas expressões matemáticas que afetam os tetos, pisos ou metas, da seguinte forma:

   $$\sum a_{ip}\, x_i \;\geq\; \text{piso}_p$$
   $$\sum a_{it}\, x_i \;\leq\; \text{teto}_t$$
   $$\sum a_{im}\, x_i \;=\; \text{meta}_m$$

   Onde $a_{ij}$ são coeficientes das atividades que quantificam os efeitos unitários de cada alternativa para com os *tetos* ($j=t$), *pisos* ($j=p$) ou *metas* ($j=m$).

   Define-se assim o que se convenciona chamar o *LHS* (*left hand side*) do problema. No nosso exemplo:

   $x_1 + x_2$ <= *área total da região*

   $x_2$ >= *área mínima exigida para conservação*

   $m_1x_1 + m_2x_2$ = *tempo total disponível para monitoramento*

10. Declare a direção desejada para o objetivo (máximo ou mínimo) e confira se o resultado matemático resulta no seguinte sistema:

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar (ou Minimizar)} & Z = & \sum c_i\, x_i \\ \text{sujeito a:} & \sum a_{ip}\, x_i \geq & piso_p \\ & \sum a_{it}\, x_i \leq & teto_t \\ & \sum a_{im}\, x_i = & meta_m \\ & \textit{sendo todo } x_i \geq & 0 \end{array}$$

## Exercícios

Aplique o roteiro apresentado e *transforme os seguintes enunciados em problemas de programação linear, resolvendo-os na planilha MS-Excel.*

***Problema 1*** (Baseado em Kent,BM 1989 *Forest Service land management planners' introduction* to linear programming USDA-FS General Technical Report RM-173, Fort Collins. 36p. – 10-20)

A receita líquida anual com uma cabeça de gado é de $60, e com uma ovelha é de $10. Cem unidades de alimento (medidas em UA) estão disponíveis no rancho por ano, sendo que uma UA pode ser consumida por uma cabeça de gado ou por cinco ovelhas. A esposa do rancheiro gosta de ovelhas, e exige que sejam criadas pelo menos 100 ovelhas. O rancheiro prefere gado, e impõe um mínimo de 50 cabeças. As ovelhas exigem um manuseio mais intenso, e a propriedade não comporta mais do que 200 animais. Estude a formulação proposta na planilha e discuta essa formulação durante a aula. Utilize o solver do Excel para resolver o problema e determinar quantas cabeças de gado e de ovelhas esse casal de rancheiros deveria criar visando máxima receita líquida?

***Problema 2***

Suponha a existência de uma fábrica que fabrica dois tipos de parafusos, um para marcenaria e outro para serralheria. Essa fábrica dispõe de duas máquinas, uma faz a fenda na cabeça do parafuso e a outra faz a rosca. Cada parafuso precisa ser processado em ambas as máquinas, embora a ordem de processamento não seja importante. Cada máquina opera semanalmente por um tempo limitado (4800 minutos). Para produzir um parafuso para marcenaria, que resulta em R$ 0,05 de lucro, gastam-se 4 minutos na maquina de fenda e 3 minutos na máquina de rosca. Cada parafuso para serralheria, que resulta em R$ 0,03 de lucro, gasta 2 minutos na maquina de fenda e 6 minutos na máquina de rosca. O problema é, dado o tempo de produção em cada máquina e o lucro por parafuso, encontrar a quantia de cada tipo de parafuso visando o máximo lucro.

***Problema 3*** (Modificado a partir de Prado, D. 2003 *Programação linear* (3a. edição). Editora Desenvolvimento Gerencial, Belo Horizonte. 220p. – pág. 17)

Trata-se do dimensionamento da equipe de uma empresa coletora de resíduos urbanos. A cidade para onde os serviços de coleta estão sendo planejados foi subdividida em blocos, com número variável de quarteirões por bloco. O critério para definição dos blocos foi estabelecido em função do número de quarteirões que uma equipe básica formada por 1 (um) motorista e 2 (dois) auxiliares é capaz de cobrir em um dia de trabalho. A empresa propõe que em alguns desses blocos seja implantado o sistema seletivo de coleta de resíduos, ao invés do sistema padrão. O Quadro 1 resume as informações básicas desses dois sistemas.

**Quadro 1: Informações básicas sobre os sistemas de coleta de resíduos**

| Tipo de coleta | Parâmetros | | |
|---|---|---|---|
| | Quadro máximo de funcionários no sistema | Funcionários necessários por bloco | Receita da empresa por bloco |
| Padrão | 72 | 3 | 90 |
| Seletiva | 96 | 6 | 120 |

A empresa decidiu que empregará uma equipe total de no máximo 120 funcionários. A questão gerencial da empresa, numa primeira etapa, é: como alocar esses funcionários nos dois sistemas de coleta de resíduos, de forma a maximizar a receita obtida pela empresa? Complementarmente, a resposta a essa pergunta definirá quantos blocos terão coleta seletiva de resíduos, permitindo assim que sejam selecionados e preparados para esse tipo de coleta.

### *Problema 4*

Um administrador de parques está considerando a possibilidade de diversificar as atividades disponíveis para os visitantes. Ele determina que lazer e educação ambiental sejam os principais atrativos do parque, e concentra a sua atenção na "caça fotográfica" e na "visitação de escolares". A "caça fotográfica" pode ser desenvolvida em qualquer área do parque, desde que a "visitação de escolares" não ocorra simultaneamente nesse mesmo espaço. Dessa forma, o gestor decide seguir uma política de destinação única dos espaços do parque, não misturando lazer com educação. A experiência prévia mostrou ao gestor que cada "caçador" demanda 40 minutos da atenção da equipe de recepção, e explora em média 1,2 hectares de área durante a sua visita. Esse usuário paga $10 pelo ingresso para usufruir do parque. No caso dos visitantes para educação ambiental, cada grupo demanda 120 minutos da equipe de recepção. Em termos de área ocupada, a relação é de 1,6 hectares para cada grupo. A receita gerada pela atividade de educação ambiental é de $20 por hectare visitado. O parque tem 1.800 hectares de área total aberta para visitantes. Supondo-se que a capacidade atual da equipe de recepção seja de 86.400 minutos por ano, o problema se resume a determinar a combinação ótima de lazer e educação que maximiza as receitas anuais do parque.

### *Problema 5*

Um restaurante precisa elaborar uma refeição de mínimo custo que forneça os mínimos diários de carboidratos, proteínas e vitaminas usando diferentes verduras, grãos e carnes. A equação linear a ser minimizada é a função Custo da Refeição, que é um somatório de cada quantidade de alimento (incógnita do problema) vezes o seu respectivo custo (coeficiente conhecido). A minimização dessa função é condicionada, entretanto, por equações que estabelecem pisos, metas e tetos para os níveis de carboidratos, proteínas e vitaminas. Para este problema, você recebeu a captura de tela com o problema já formulado em uma planilha Excel. Estude os dados apresentados, elabore sua própria planilha Excel reproduzindo a formulação apresentada e resolva-a usando o solver do Excel.

**Cardápio de restaurante**

Variáveis de decisão:

Xi: porções do alimento i na refeição

| | | Vegetais | | | | | | Carnes | | | Sobremesa | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ervilhas | Feijão branco | Quiabo | Milho | Tofú de soja | Arroz | Frango | Bife bovino | Peixe | Laranja | Maçã | Pudim | Gelatina | | | |
| F.Obj: | Minimizar: | 0,10 | 0,15 | 0,13 | 0,09 | 0,10 | 0,07 | 0,50 | 1,15 | 1,90 | 0,28 | 0,42 | 0,15 | 0,15 | = | Z | |
| | Solução: | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Vegetais) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | >= | 1,0 | |
| | Carnes) | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | >= | 1,0 | |
| | Sobremesa) | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | >= | 1,0 | |
| | Carboidratos) | 10 | 10 | 10 | 20 | 40 | 50 | 20 | 30 | 30 | 10 | 10 | 10 | 10 | >= | 50,0 | |
| | Vitaminas) | 30 | 50 | 50 | 60 | 20 | 10 | 10 | 80 | 60 | 30 | 20 | | | >= | 100,0 | |
| | Proteínas) | 10 | 20 | 10 | 10 | 10 | 10 | 30 | 50 | 60 | 10 | | | | >= | 100,0 | |
| | Gordura) | | | | 10 | 10 | 10 | 10 | 20 | 10 | | | 10 | | >= | 20,0 | |

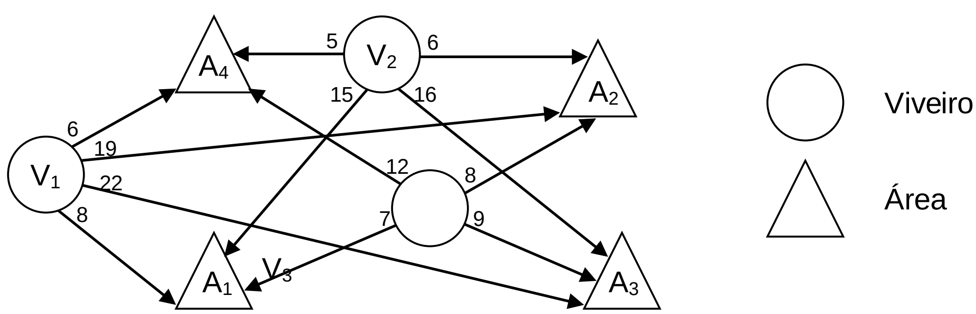
**Problema 6** (Modificado a partir de Dykstra, D. 1984 *Mathematical Programming for Natural Resources*. McGraw HIll, Nova York. 318p. – pág. 192)

A regeneração de áreas ambientalmente degradadas através da recomposição da cobertura florística da paisagem implica na utilização de três viveiros de mudas. As mudas são cultivadas por 10 meses e depois transportadas e plantadas nos meses de Janeiro, Fevereiro e Março durante o período das chuvas. Os próximos plantios ocorrerão em quatro grandes áreas. Essas áreas variam em tamanho, nível de degradação e tipo de solo; e assim precisam de diferentes quantidades de mudas. Os três viveiros estão localizados a diferentes distâncias e com diferentes capacidades de produção. O item de custo mais significativo é o transporte das mudas de cada viveiro para as áreas a serem regeneradas. O Quadro 2 lista as exigências de mudas em cada área, a disponibilidade de mudas em cada viveiro e a distância de transporte entre as áreas e os viveiros. Os custos de transporte são basicamente proporcionais à distância percorrida. Qual estratégia de transporte minimiza os custos?

**Quadro 2: Informações básicas para o problema do transporte de mudas**

| Viveiros | Distância do viveiro i até a área j (km) Áreas degradadas em fase de regeneração | | | | Disponibilidade de mudas em cada viveiro (milhões) |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 8 | 19 | 22 | 6 | 5 |
| 2 | 15 | 6 | 16 | 5 | 1 |
| 3 | 7 | 8 | 9 | 12 | 2 |
| Demanda (milhões) | 2 | 3 | 2 | 1 | |

A Figura abaixo mostra que a questão pode ser vista como um problema de redes. Viveiros e áreas em regeneração são representados como nós, e a rede transportes unido os viveiros às áreas é representado por um conjunto de vetores/arcos. Apesar das estradas na realidade não serem perfeitas retas, vetores são usados para simplificar o diagrama. Cada distância específica do viveiro i até a área j é associada com vetores (i,j).




O número associado com cada vetor (arco) representa geralmente custo, tempo de deslocamento, receita ou qualquer outro valor relevante.

***Problema 7*** (Modificado a partir de Winston, W.L. 2004 *Operations Research – Applications and Algorithms*. Thomson, Belmont. 1418p. – pág. 393)

Uma empresa dispõe de quatro equipamentos para fazer quatro tarefas. Cada equipamento precisa ser designado para a conclusão de uma tarefa. O tempo requerido por equipamento para completar cada tarefa é apresentado no Quadro 3.

**Quadro 3: Tempos requerido por equipamento**

| Equipamento | Tempo (h) para ajustar cada equipamento | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Tarefas | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 14 | 5 | 8 | 7 |
| 2 | 2 | 12 | 6 | 5 |
| 3 | 7 | 8 | 3 | 9 |
| 4 | 2 | 4 | 6 | 10 |

Qual equipamento deve ser designado para qual tarefa?

***Problema 8*** (Baseado em Hillier,FS & Lieberman,GJ 1995 *Introduction to Operations Research*. McGraw Hill, New York. 998p. – 48-50)

Há alguns anos, vive no vale israelense *Psi Kodel* uma comunidade constituída por descendentes hippies da década de 70. A comunidade se organiza em torno de três eco-vilas: *Eco-Sol* com 400 ha agricultáveis, *Eco-Terra* com 600 ha e *Eco-Lua* com 300 ha. Os membros dessas comunidades cultivam a terra para atender as suas necessidades e diminuir a dependência externa. As plantações adequadas às condições climáticas e edáficas da região são a beterraba doce, o algodão herbáceo e o sorgo. O planejamento da produção vegetal é centralizado e coordenado pelo casal de matemáticos Marí / Juan que enfrentam o seguinte problema:

A produção de cada eco-vila é limitada pela área total máxima irrigável e pela quantidade total máxima de água para irrigação. As quantidades de água disponível para a irrigação de cada plantio e de área máxima para cada plantio foram definidas pelo presidente do comitê hídrico, o ex-guitarrista chinês Ping Odaghua, e é apresentada no Quadro 4. A economia gerada pela produção dessas culturas também é mostrada nesse quadro.

**Quadro 4: Parâmetros agrícolas de produção na comunidade do *Vale Psi Kodel***

| Plantação | Área máxima[1] (ha) | Consumo de água[2] (mm/ha) | Recursos poupados[3] ($/ha) |
|---|---|---|---|
| Beterraba Doce | 600 | 999 | 1000 |
| Algodão | 500 | 666 | 750 |
| Sorgo | 325 | 333 | 250 |

[1] Área total máxima definida pelo gestor de terras da comunidade
[2] Irrigação mínima necessária devido à aridez do local
[3] Gerados em função de uma menor dependência externa

Cada eco-vila tem uma cota máxima de água disponível para irrigação: Eco-Sol tem 199.800 mm; Eco-Terra tem 266.400 mm; e Eco-Luz tem 124.875 mm. Devido à limitada disponibilidade de água na região, as três eco-vilas não poderão usar toda a sua terra agricultável. Para assegurar, portanto, igualdade entre as três eco-vilas, ficou combinado que cada uma plantará a mesma proporção de suas terras agricultáveis. Isto é, se Eco-Sol tiver apenas metade da sua área irrigada, então as outras duas eco-vilas também irrigarão somente a metade das suas áreas. Qualquer combinação dos três plantios poderá ser cultivada em cada eco-vila. Tendo como objetivo a maximização dos recursos poupados, quanto de área plantar com cada cultura em cada eco-vila?

***Problema 9***

A cidade de Tupinambá no estado de Mato Fino tem três escolas de segundo grau, duas das quais são frequentadas principalmente por crianças descendentes de índios e migrantes já há muito tempo estabelecidos na região ("nativos"). A outra escola é essencialmente frequentada por famílias do sul do país ("sulistas") recentemente atraídas para a região pela expansão da agricultura para essa região. A Secretaria de Educação do município decidiu alterar o zoneamento que define as autorizações de matrículas visando o aumento da diversidade racial e cultural nessas três escolas. Como primeira providência, quantificou-se o número de nativos e sulistas atualmente matriculados nas três escolas existentes e a região de influência dessas escolas foi subdividida geograficamente em 10 sub-regiões. Esses números serviram como estimativas para o futuro, pois se assumiu que a atual distribuição populacional não se alterará significativamente nos próximos anos. A distância que os estudantes têm que percorrer para chegar às escolas é fundamental. Utilizaram-se como medida dessas distâncias os quilômetros que separam as escolas do centro de cada sub-região. O Quadro 5 resume essas informações.

**Quadro 5: Dados para o estudo da Secretaria de Educação de Tupinambá**

| Sub-região | Nativos | Gaúchos | Distância | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Escola 1 | Escola 2 | Escola 3 |
| 1 | 300 | 150 | 1,2 | 1,5 | 3,3 |
| 2 | 400 | 0 | 2,6 | 4,0 | 5,5 |
| 3 | 200 | 300 | 0,7 | 1,1 | 2,8 |
| 4 | 0 | 500 | 1,8 | 1,3 | 2,0 |
| 5 | 200 | 200 | 1,5 | 0,4 | 2,3 |
| 6 | 100 | 350 | 2,0 | 0,6 | 1,7 |
| 7 | 250 | 200 | 1,2 | 1,4 | 3,1 |
| 8 | 300 | 200 | 3,5 | 2,3 | 1,2 |
| 9 | 150 | 250 | 3,2 | 1,2 | 0,7 |
| 10 | 350 | 100 | 3,8 | 1,8 | 1,0 |
| Capacidade de cada escola: | | | 1500 | 2000 | 1300 |

Inicialmente, surgiu a dúvida se deveriam otimizar o balanço racial-cultural sujeito a restrições de distância, ou se deveriam minimizar a distância percorrida pelos alunos para chegarem a escola sujeita a restrições de balanço racial-cultural. Chegou-se à conclusão que a segunda alternativa é melhor, pois é mais simples expressar como objetivo principal a minimização da distância e é mais razoável modelar a questão racial e cultural através de balanços mínimos. Para equacionar a questão do balanço, dentre os vários cenários estudados, começou-se pela imposição de que a proporção de gaúchos por vagas disponíveis nas três escolas deveria ser fixa, e mantida entre 30% e 70%. O problema formulado como um problema de programação linear. Desenvolva essa formulação.

***Problema 10*** (Baseado em Winston,WL 2004 *Operations Research – applications and Algorithms*. Brooks/Cole, Belmont. 1418p. – 109-111)

Uma ONG engajada em programas de Educação emprega educadores ambientais multiplicadores especialistas no treinamento de professores da rede básica de ensino em todo o Brasil. A demanda enfrentada pelo time de educadores foi estimada para os próximos cinco meses, e resultou nos valores apresentados no Quadro 6.

**Quadro 6: Demanda estimada de educadores multiplicadores**

| Mês | Horas |
|---|---|
| 1 | 6.000 |
| 2 | 7.000 |
| 3 | 8.000 |
| 4 | 9.000 |
| 5 | 11.000 |

No começo do primeiro mês, 50 educadores formam a equipe dessa ONG. Cada educador pode trabalhar até 160 horas por mês. Para atender demandas futuras, novos educadores precisam ser formados. Isso requer um mês para treinar um novo educador. Durante o mês de treinamento, o *trainee* precisa ser supervisionado durante 50 horas por um educador. Cada educador recebe um salário de R$ 2.000 por mês (mesmo que não trabalhe as 160 horas por mês). Durante o mês de treinamento o *trainee* recebe R$ 1.000 por mês. No final de cada mês, 5% dos educadores são dispensados e cedidos para programas permanentes de educação ambiental em diversas escolas e órgãos da administração pública. Isso força a constante renovação do quadro permanente de educadores na ONG. Formule um problema de PL que faça com que a ONG minimize o custo total da sua folha de pagamento durante os próximos cinco meses.

**A T E N Ç Ã O**

Esta tarefa deve ser entregue na forma de uma planilha Excel que registra, para cada problema, a solução encontrada. Essa solução deve listar apenas os valores ótimos encontrados pelo *solver* do Excel para as variáveis incógnitas do respectivo problema.

Faça o *upload* da sua tarefa seguindo as instruções disponíveis na página do curso.

Não serão aceitos arquivos entregues por email ou qualquer outro meio.