

## Circuito RLC série

Vamos considerar um circuito com um indutor puro e um capacitor puro ligados em série, em que o capacitor está carregado no instante  $t=0$ . Como inicialmente o capacitor está com a carga máxima, a corrente será igual a zero; à medida que o capacitor se descarrega a corrente vai aumentando, até o capacitor se descarregar completamente e a corrente atingir seu valor máximo. Quando a carga é máxima e a corrente é igual a zero, toda a energia estará armazenada no campo elétrico do capacitor. Quando a carga é nula e a corrente é máxima toda a energia estará armazenada no campo magnético do indutor. Como o circuito é ideal, ou seja, capacitor e indutor ideais e resistência nula, a carga e a corrente vão oscilar indefinidamente, e, como não há resistência, não há dissipação de energia. Portanto, ele é um sistema conservativo: a energia que ele continha inicialmente, associada à carga do capacitor, mantém-se sempre no sistema. A análise algébrica desse comportamento está na **aula 3** das anotações de aula do curso de **FAP-212**, assim como nas demais referências sugeridas no início desta apostila.

É importante lembrar aqui que, quando qualquer sistema (mecânico, elétrico, acústico, nuclear, etc) capaz de oscilar, for excitado (retirado de sua condição de equilíbrio) esse sistema vai oscilar sozinho em uma (pode também ser mais de uma) frequência particular que se chama frequência natural do sistema.

Ao se introduzir uma resistência elétrica no circuito **LC** ideal, a cada oscilação, parte da energia é perdida na resistência, de tal forma, que o sistema (carga, corrente e tensões) continua oscilando, mas as amplitudes, ou valores de pico, tanto da carga, quanto da corrente, ou tensões, vão diminuindo, até se anularem. Tal sistema é dito amortecido. Quando existe um amortecimento a frequência com que o sistema vai oscilar até parar, é menor que sua frequência natural de oscilação. Quão menor vai depender basicamente da intensidade do amortecimento.

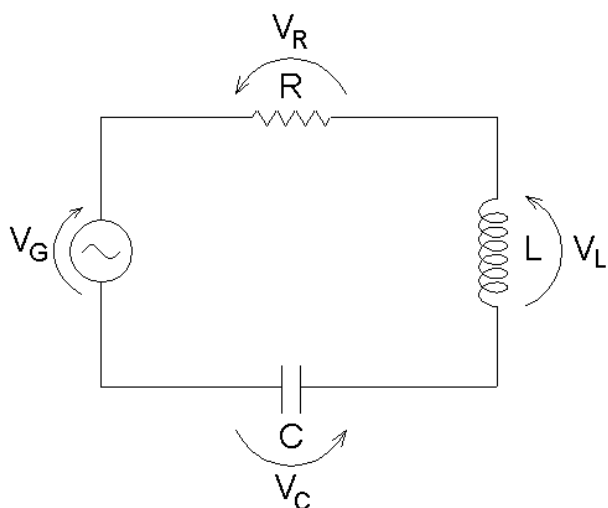
Uma maneira de se manter as oscilações num sistema amortecido é fornecer energia periodicamente através de um gerador, que vai executar um trabalho positivo sobre o sistema. A aplicação de uma tensão externa alternada vai produzir nesse sistema uma oscilação forçada. O importante é que o sistema vai oscilar (carga, corrente e tensões) na mesma frequência com que o gerador fornece energia, mas, em geral, com pequena amplitude. Se a amplitude de oscilação (seja da carga,  $q_p$ , corrente,  $i_p$ , tensão no capacitor,  $V_{CP}$ , ou tensão no indutor,  $V_{LP}$ , onde o índice **P** quer dizer “de pico”) for pequena, isso significa que pouca energia está sendo transferida do gerador para o circuito **RLC**.

Na verdade, as oscilações num sistema **RLC** forçado (o mesmo vale para qualquer sistema que oscile) serão de pequena amplitude sempre que a frequência de oscilação do gerador for diferente da frequência natural do sistema. Se o gerador permitir a variação contínua da frequência, pode-se notar que, à medida que a frequência do gerador se aproxima da frequência natural do sistema, a amplitude de oscilação (seja da carga,  $q_p$ , corrente,  $i_p$ ,  $V_{LP}$  ou  $V_{CP}$ ) aumenta dramaticamente. Quando a frequência do gerador for idêntica à frequência natural do sistema, a amplitude de oscilação atinge o valor máximo e essa condição é conhecida como **ressonância**. E a frequência natural do sistema é também conhecida como **frequência de ressonância**. A condição de ressonância é a condição em que a energia é mais eficientemente transferida do gerador para o sistema ou para o circuito **RLC**, no caso. Isso quer dizer que, na ressonância, a maior parte da energia disponível em cada ciclo vai ser armazenada ora no campo elétrico do capacitor (como carga), ora no campo magnético do indutor (como corrente), pouca ou nenhuma energia será devolvida ao gerador, embora uma parte seja sempre perdida na resistência. Quanto menor a resistência do circuito, maior será a amplitude de oscilação (seja da carga,  $q_p$ , ou da corrente,  $i_p$ , ou de  $V_{LP}$  ou de  $V_{CP}$ ) na ressonância, além disso, mais rapidamente essa amplitude aumenta ou cai quando se varia a frequência do gerador em torno da frequência de ressonância.

O objetivo desta experiência é estudar o fenômeno da ressonância de um circuito **RLC série**. Não somente a ressonância é de fundamental

importância na compreensão de um grande número de fenômenos mecânicos, eletromagnéticos, acústicos, atômicos, nucleares e outros, o que por si só já justificaria esse estudo, mas também, esse circuito, nessas condições, tem muitas aplicações práticas de grande interesse. Para tanto, vamos criar as condições de ressonância para esse circuito e verificar se seu comportamento experimental está de acordo com o comportamento previsto teoricamente.

Para quantificar esse comportamento, vamos aplicar a lei das malhas de Kirchhoff para o circuito **RLC série** que vamos estudar. O circuito que vai ser estudado é o da **figura 2.1** a seguir:



**Figura 2.1: Circuito RLC-série.**

Temos, portanto:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = V_G(t) \quad (2.1)$$

mas, sabemos que:

$$V_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

$$V_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.2)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

A solução **q(t)** dessa equação diferencial é dada por uma solução particular dessa equação, somada à solução geral da equação homogênea correspondente:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC} q(t) = 0 \quad (2.3)$$

A solução da equação acima descreve o comportamento transitório do circuito **RLC** série. É o comportamento que surge quando o circuito é perturbado ou modificado, por exemplo, quando o gerador é ligado ou desligado. Esse comportamento é o do oscilador amortecido e, como já foi discutido, desaparece depois de algum tempo.

A solução particular da **equação 2.1** descreve o comportamento em regime estacionário do circuito, ou seja, depois que o transitório desaparece. Essa dedução não vai ser feita em detalhe aqui, mas pode ser encontrada no **capítulo 2** de **Mecânica** de K. R. Symon e nas notas de aula do curso **FAP-212, aulas 4 e 5**.

Considerando que uma tensão alternada do tipo **V(t) = V<sub>p</sub>cos(ωt)** foi aplicada ao circuito pelo gerador, a corrente será:

$$i(t) = i_p \cos(\omega t - \phi_0) \quad (2.4)$$

A solução **q(t)** é da forma:

$$q(t) = q_p \text{sen}(\omega t - \phi_0) \quad (2.5)$$

onde  $q_p$  é a amplitude de pico da carga,  $i_p$  é a amplitude de pico da corrente,  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular e  $\phi_0$  é a diferença de fase entre a corrente no circuito e a tensão do gerador.

A impedância complexa da associação é a soma das impedâncias complexas de cada elemento, já que o circuito é em série:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi_0} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (2.6)$$

$Z_0$  é a parte real da impedância e é igual à raiz quadrada do produto da impedância complexa  $Z$  pelo seu complexo conjugado  $Z^*$ . Fazendo esse cálculo obtém-se:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2.7)$$

Lembrando que a razão entre a tensão complexa da associação **RLC-série** e a corrente complexa que a percorre é a impedância complexa da associação, a amplitude de pico, ou máxima, da corrente real vai ser:

$$i_p = \frac{V_p}{Z_0} = \frac{V_p}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (2.8)$$

a defasagem  $\phi_0$  está relacionada à razão entre a parte imaginária e a parte real da impedância complexa  $Z$ :

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{X}{R} = \frac{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} \quad (2.9)$$

estudando as equações acima, vê-se que, quando:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{ou} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.10)$$

que quer dizer que, se a frequência  $\omega_0$  da tensão fornecida pelo gerador é tal que a reatância indutiva é igual à reatância capacitiva, em módulo (a defasagem entre elas é  $180^\circ$ ), o denominador da **equação 2.8** é mínimo e igual a **R**. Se o denominador é mínimo a amplitude da corrente  $i_p$  é máxima, que é justamente a condição de ressonância para a corrente. E, como foi discutido, a frequência para a qual esse fenômeno ocorre é a frequência natural de oscilação desse circuito,  $\omega_0$ , ou frequência de ressonância da corrente.

Ainda, na condição de ressonância:

$$Z_0 = R \quad \text{e} \quad V_P = R i_P \quad (2.11)$$

além disso, na ressonância, a tangente de  $\phi_0$  é nula, então,  $\phi_0$  é igual a zero, o que significa que não há defasagem entre a tensão da associação e a corrente que a percorre, o que é típico de um circuito cuja impedância é puramente resistiva. Ou seja, na ressonância, a impedância de um circuito **RLC** é puramente resistiva.

A potência média absorvida pelo circuito **RLC**, como foi visto na apostila da **experiência 1**, pode ser escrita como:

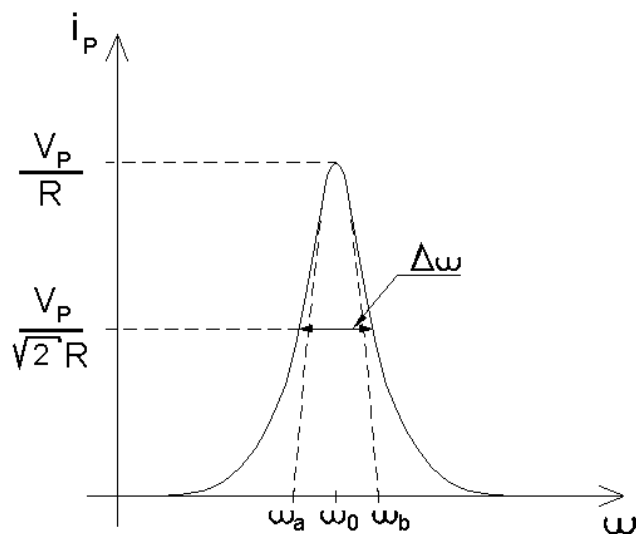
$$P = \frac{1}{2} V_P i_P \cos \phi_0 \quad \text{e} \quad V_P = Z_0 i_P \quad (2.12)$$

então, a potência absorvida pelo circuito, que é a potência dissipada pela resistência presente no circuito, será máxima quando a corrente também for. Na condição de ressonância,  $\phi_0=0$  e  $Z_0=R$ , portanto, a potência média máxima vai ser:

$$P = \frac{V_P^2}{2R} \quad (2.13)$$

e ela ocorre para a mesma frequência em que ocorre a ressonância para a corrente. Por isso a ressonância de corrente é também chamada de ressonância de energia.

Na **figura 2.2**, a seguir, é apresentado um gráfico da variação da corrente de pico,  $i_P$ , na associação, em função da frequência angular  $\omega$ . Ele ilustra exatamente o comportamento que foi estudado.



**Figura 2.2: Comportamento da amplitude de pico da corrente em função da frequência angular.**

Como foi visto, na **equação 2.5**, a carga no capacitor também varia harmonicamente no tempo e como  **$q(t)$**  é a integral da corrente:

$$q(t) = \int i(t) dt = \frac{i_P}{\omega} \text{sen}(\omega t - \phi_0) \quad (2.14)$$

portanto, substituindo a expressão para  **$i_P$** :

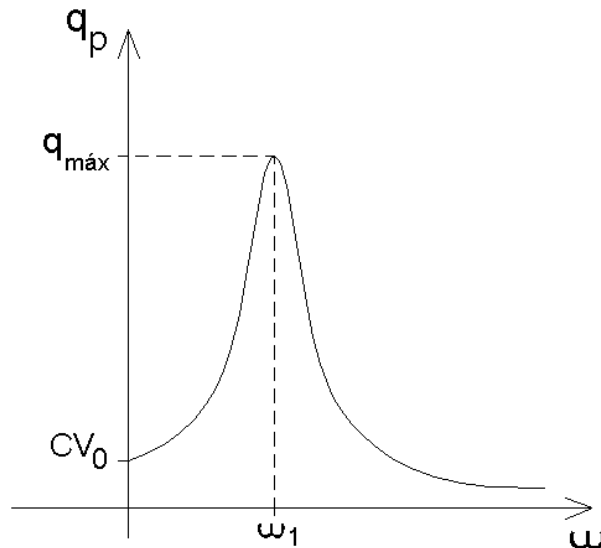
$$q_P = \frac{i_P}{\omega} = \frac{V_P}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (2.15)$$

esse denominador também é uma função de  $\omega$  que tem um mínimo, que pode ser obtido sem dificuldade (essa dedução deve constar do relatório desta experiência). Esse mínimo ocorre para uma frequência  $\omega_1$  igual a:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R^2}{2L^2}\right)} \quad (2.16)$$

Se o denominador tem um mínimo, a amplitude de pico da carga tem um máximo nessa frequência e essa é a chamada ressonância de amplitude. Como se vê, ela ocorre numa frequência,  $\omega_1$ , um pouco menor que a frequência de ressonância de energia. Nas anotações de aula de **FAP-212, aula 5** há um estudo detalhado sobre a ressonância de amplitude. A **figura 2.3** mostra o comportamento da amplitude de pico (ou máxima) da carga em função da frequência angular. Notar que para  $\omega=0$  a carga não é zero, porque a tensão seria constante e igual a  $V_0$  e, portanto, a carga é  $CV_0$ .





**Figura 2.3: Ressonância de amplitude: comportamento da amplitude da carga em função da frequência angular.**

Há um outro parâmetro importante usado também para caracterizar circuitos ressonantes: é o fator de qualidade,  $Q$ , do circuito. Esse fator é definido como a razão entre a energia armazenada no circuito e a energia perdida por ciclo pelo circuito, na ressonância:

$$Q = 2\pi \left[ \frac{U_0(\text{energia..armazenada})}{\Delta U(\text{energia..perdida..por..ciclo})} \right]_{\text{na..ressonância}} \quad (2.17)$$

A energia armazenada no circuito está armazenada no campo elétrico do capacitor e no campo magnético do indutor. Entretanto, no instante em que a carga se anula toda a energia estará armazenada no campo magnético do indutor, depois, quando a corrente vai a zero toda a energia estará armazenada no campo elétrico do capacitor, portanto, o numerador da **equação 2.17** acima, é:

$$U_0 = \frac{1}{2} Li_P^2 = \frac{1}{2} \frac{q_P^2}{C} \quad (2.18)$$

onde, tanto  $i_P$  como  $q_P$  são as amplitudes de pico assumidas pela corrente e pela carga, respectivamente, na condição de ressonância.

A energia perdida por ciclo de oscilação é o produto da potência média dissipada, pelo período de oscilação, na condição de ressonância. (Lembrar que potência é o que se gasta ou se fornece de energia por intervalo de tempo). Portanto, o denominador da **equação 2.17** é:

$$\Delta U = PT = \frac{2\pi P}{\omega_0} = \left( \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \left( \frac{1}{2} \right) Ri_P^2 \quad (2.19)$$

Substituindo as **expressões 2.19** e **2.18** na **expressão 2.17** que define o fator de qualidade, **Q**:

$$Q = 2\pi \frac{U_0}{\Delta U} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (2.20)$$

como  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , vê-se que o fator de qualidade depende exclusivamente dos valores nominais dos elementos do circuito.

A **figura 2.4**, adiante, mostra como varia a potência em função da frequência angular da tensão fornecida pelo gerador para dois valores diferentes do fator de qualidade. A largura à meia altura,  $\Delta\omega$ , dessa curva é igual a:

$$\Delta\omega = \omega_a - \omega_b = \frac{R}{L} \quad (2.21)$$

a dedução dessa relação deve constar do relatório desta experiência.

Comparando a expressão acima com a **expressão 2.20** para o fator de qualidade obtém-se:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (2.22)$$

o que permite obter um valor experimental para o fator de qualidade diretamente do gráfico de potência, por frequência angular.

Também, demonstra-se facilmente que, na ressonância, a tensão de pico sobre o capacitor, é igual à tensão de pico sobre o indutor e ambas são iguais ao produto do fator de qualidade pelo valor de pico da tensão aplicada à associação (ou tensão do gerador):

$$V_{LP} = V_{CP} = QV_P \quad (2.23)$$

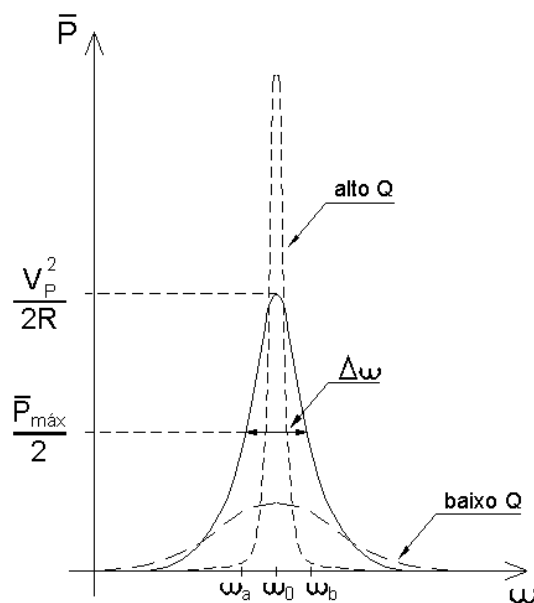
como o fator de qualidade, dependendo do circuito, pode ser bem maior que **1**, a equação acima indica que num circuito **RLC**, em ressonância, podem ocorrer tensões bastante altas, bem maiores que a tensão fornecida pelo gerador, por isso esse tipo de circuito exige atenção extra em seu manuseio.

Vê-se (na **equação 2.22**) que, quanto mais estreita ( $\Delta\omega$  pequeno) for a curva de potência em função da frequência angular da tensão fornecida, maior será o fator de qualidade desse circuito. Para um determinado circuito com **L** e **C** fixos, e, portanto,  $\omega_0$  fixo, o fator de qualidade é tanto maior quanto menor for a resistência do circuito e isso implica em que tanto maior será, também, a amplitude ou valor de pico da corrente que passa pelo circuito.

Resumindo, quanto maior for o fator de qualidade de um circuito, tanto mais estreita e alta será a curva que descreve a ressonância para esse circuito, seja ela a corrente, a carga ou a potência em função da frequência angular. O nome fator de qualidade para a quantidade **Q** foi dado porque, na época, justamente havia o interesse em aplicações práticas de sistemas ressonantes em que era importante que a curva de ressonância fosse bastante aguda. O comportamento da potência média num circuito **RLC**-

**série** para diferentes valores do fator de qualidade pode ser observado na **figura 2.4**, adiante.

Uma das muitas aplicações práticas de um circuito ressonante de alto fator de qualidade são sistemas receptores de sinais eletromagnéticos, como rádios e televisões. Outro exemplo é o ressonador ótico que é discutido na **seção 12.2.1** da apostila de **CFE (parte 2)**.



**Figura 2.4: Curvas de ressonância de energia para um circuito RLC-série com fatores de qualidade diferentes.**

Muitas vezes, porém, a ressonância é uma inconveniência e, em tais casos, procura-se construir um circuito em que o fator de qualidade seja o mais baixo possível. Uma infinidade de sistemas mecânicos, acústicos, eletromagnéticos, etc, deve ter essa característica, como edifícios altos, pontes, edificações sobre linhas de metrô ou próximas de linhas de trem ou de aeroportos, sinos, gongos, cones de alto falante... A lista de aplicações para circuitos com alto ou baixo fator de qualidade é, praticamente, sem fim.