# PSI-5813 Compressão Digital de Sinais
# Prova

Prof. Miguel Arjona Ramírez

30 de novembro de 2016

**Nome:** Gabarito ..........................................

**Nº USP:** ..........................................

**Duração da prova:** 180 minutos
**Tipo de prova:** com consulta ao material próprio

**Notas:**

1ª **Q:** ..........................................

2ª **Q:** ..........................................

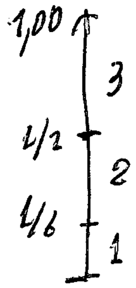
Total: ..........................................

**1.** (3,6) Seja uma fonte de símbolos do alfabeto $\{1, 2, 3\}$, cuja função massa de probabilidade é dada na Tabela abaixo.

| Símbolo | Massa de probabilidade |
|---|---|
| 1 | 1/6 |
| 2 | 1/3 |
| 3 | 1/2 |

Deseja-se gerar uma etiqueta de codificação aritmética para a sequência $\mathbf{x} = 332$. Siga as etapas de codificação abaixo abstendo-se de usar algoritmos de codificação aritmética com registrador de precisão finita. Represente com toda precisão as extremidades dos segmentos solicitados.

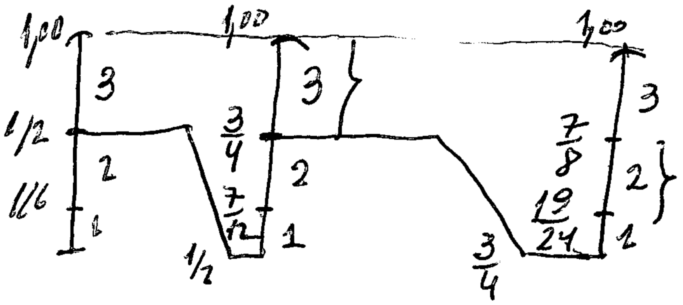
**a)** (0,4) Determine as extremidades do intervalo em que está a etiqueta após a emissão do primeiro símbolo.




$x(1) = 3 \longrightarrow \frac{1}{2} \leqslant t < 1{,}00$

**b)** (0,4) Determine as extremidades do intervalo em que está a etiqueta após a emissão do segundo símbolo.

**c)** (0,4) Determine as extremidades do intervalo em que está a etiqueta após a emissão do terceiro símbolo.




b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$x(1)=3,\ x(2)=3 \longrightarrow \frac{3}{4}\leq t<1{,}00$

c) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{19}{24}$

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{8}$

$x(1)=3,\ x(2)=3,\ x(3)=2 \longrightarrow \frac{19}{24}\leq t<\frac{7}{8}$

**d)** (1,2) Identifique a sequência **x** pela etiqueta binária mais compacta. Determine a taxa de codificação em bit/símbolo, sabendo-se que a sequência é composta de três símbolos.
**Dica:** Decodifique sua etiqueta para verificar se consegue recuperar a sequência original.

d) Tentamos normalizar as extremidades do intervalo a que pertence a etiqueta pela potência de 2 mais próxima do maior denominador, que é 24. Isto é, normalizamos por 32 as extremidades, obtendo

$$\frac{25{,}333}{32} \leq t < \frac{28}{32}$$

Mantendo os denominadores, temos duas possibilidades inteiras para o numerador:

$$26_{10} = 11010_2$$
$$27_{10} = 11011_2$$

Escolhemos $26_{10}$, que permite descartar o zero menos significativo, que é o valor mais natural para a extensão de precisão da etiqueta. Assim, obtemos o código

$$\boxed{c = 1101_2}$$

Decodificação:

$$t = \frac{13}{16} > \frac{1}{2} \rightarrow x(1) = 3$$

$$t = \frac{\frac{13}{16} - \frac{1}{2}}{1/2} \rightarrow t = \frac{5}{8} \geq \frac{1}{2} \rightarrow x(2) = 3$$

$$t = \frac{\frac{5}{8} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow t = \frac{1}{4} \left.\begin{matrix} \geq \frac{1}{6} \\ < \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \rightarrow x(3) = 2$$

e) (1,2) Calcule a entropia da fonte e compare-a com a taxa de codificação binária da sequência transmitida.

A entropia da fonte é

$$H(X) = \frac{1}{6}\log_2 6 + \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 2$$

ou

$$\boxed{H(X) = 1{,}4591 \text{ bit/símbolo}}$$

A taxa média para o código aritmético obtido em d) é

$$R(c) = \frac{l(c)}{l(x)} = \frac{4 \text{ bit}}{3 \text{ símbolo}}$$

ou

$$\boxed{R(c) = \frac{4}{3} \frac{\text{bit}}{\text{símbolo}}}$$

**2.** (6,4) Seja o sinal aleatório com função de autocorrelação

$$R_{ss}(m) = \cos(\omega_0 m)$$

para $m \in \mathbb{Z}$ e $w_0 = 2\pi/P$ com $P \in \mathbb{Z}$.

**a)** (1,0) Calcule o ganho de predição de 1ª ordem do sinal $s(n)$.

**b)** (1,6) Calcule o ganho de predição de 2ª ordem do sinal $s(n)$.

a) Equação normal de 1ª ordem

$$R_{ss}(0)\, a_{11} = -R_{ss}(1) \longrightarrow a_{11} = -\cos\omega_0$$

$$\varepsilon_1 = R_{ss}(0) + a_{11} R_{ss}(1)$$
$$= 1 - \cos^2\omega_0 \longrightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \sin^2\omega_0}\ ; \quad G_p^{(1)} = \frac{R_{ss}(0)}{\varepsilon_1} \rightarrow \boxed{G_p^{(1)} = \frac{1}{\sin^2\omega_0}}$$

b) Equações normais de 2ª ordem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 \\ \cos\omega_0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{(2)}} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \cos\omega_0 \\ \cos(2\omega_0) \end{bmatrix}$$

$$\det(R^{(2)}) = \sin^2\omega_0$$

$$a_{12} = \frac{\begin{vmatrix} -\cos\omega_0 & \cos\omega_0 \\ -\cos(2\omega_0) & 1 \end{vmatrix}}{\sin^2\omega_0} = \frac{-\cos\omega_0 + \cos\omega_0\cos(2\omega_0)}{\sin^2\omega_0} = \frac{-\cos\omega_0\,\overbrace{[1-\cos^2\omega_0+\sin^2\omega_0]}^{2\sin^2\omega_0}}{\sin^2\omega_0}$$

$$\boxed{a_{12} = -2\cos\omega_0}$$

$$a_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\cos\omega_0 \\ \cos\omega_0 & -\cos(2\omega_0) \end{vmatrix}}{\sin^2\omega_0} = \frac{-\cos^2\omega_0 + \sin^2\omega_0 + \cos^2\omega_0}{\sin^2\omega_0} \rightarrow \boxed{a_{22} = 1}$$

$$\varepsilon_2 = R_{ss}(0) + a_1 R_{ss}(1) + a_2 R_{ss}(2)$$
$$= 1 - 2\cos^2\omega_0 + \cos(2\omega_0)$$
$$= 1 - 2\cos^2\omega_0 + \cos^2\omega_0 - \sin^2\omega_0$$
$$= 1 - (\cos^2\omega_0 + \sin^2\omega_0)$$
$$= 1 - 1$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = 0}\ ; \quad G_p^{(2)} = \frac{R_{ss}(0)}{\varepsilon_2} \longrightarrow \boxed{G_p^{(2)} = \infty}$$

**c)** (1,2) Determine o ganho de transformação sobre PCM da transformada de Karhunen-Loève (KLT) com blocos de comprimento 2.

**d)** (1,4) Determine a matriz da KLT de comprimento 2 e a matriz de autocorrelação de seus coeficientes.

**Observação:** A KLT é uma transformada ortogonal.

c) $$G_{KLT}^{(2)} = \frac{R_{ss}(0)}{\det^{1/2}(R_{ss}^{(2)})}$$

$$R_{ss}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 \\ \cos\omega_0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(R_{ss}^{(2)}) = 1-\cos^2\omega_0 = \sin^2\omega_0$$

Portanto,

$$\boxed{G_{KLT}^{(2)} = \frac{1}{\sin\omega_0}}$$

d) Os autovalores $\lambda=\lambda_1$ ou $\lambda=\lambda_2$ de $R_{ss}^{(2)}$ são as variâncias na diagonal principal de $R_{\theta\theta}^{(2)}$ e satisfazem

$$R_{ss}^{(2)} v = \lambda v \longrightarrow (\lambda I - R_{ss}^{(2)}) v = 0$$

Para $\lambda$ não-trivial ~~nulo~~ ($v$ não-nulo), deve ser

$$\det(\lambda I - R_{ss}^{(2)}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -\cos\omega_0 \\ -\cos\omega_0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \cos^2\omega_0 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + \sin^2\omega_0 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\sin^2\omega_0 \rightarrow \Delta = 4\cos^2\omega_0 \rightarrow \boxed{\begin{cases}\lambda_1 = 1+\cos\omega_0 \\ \lambda_2 = 1-\cos\omega_0\end{cases}}$$

Autovetor $v_1$ para $\lambda_1$:

$$(\lambda_1 - 1) v_{11} + v_{21}\cos\omega_0 = 0 \rightarrow v_{21} = v_{11}$$
$$-\cos\omega_0 v_{11} + (\lambda_1 - 1) v_{21} = 0 \rightarrow v_{21} = v_{11} \xrightarrow[\text{gonal}]{\text{orto}} v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Autovetor $v_2$ para $\lambda_2$:

$$(1-\lambda_2) v_{12} + v_{22}\cos\omega_0 = 0 \rightarrow v_{22} = -v_{12}$$
$$v_{12}\cos\omega_0 + (1-\lambda_2) v_{22} = 0 \rightarrow v_{22} = -v_{12} \xrightarrow[\text{gonal}]{\text{orto}} v_2 = \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \\ \mp 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ou

$$A^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & \mp 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} & \mp 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

e) (1,2) Supondo $\sin \omega_0 = \sqrt{15}/4$, distribua bits entre os quantizadores das amostras do vetor transformado pela KLT acima para a taxa de codificação média $R = 3,5$ bit/amostra.

e) $\sin \omega_0 = \frac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow \cos \omega_0 = \frac{1}{4}$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{4} = \sigma^2_{\theta_1} \\ \lambda_2 = \frac{3}{4} = \sigma^2_{\theta_2} \end{cases}$$

$R = 3,5$ bit/am. , $M = 2 \rightarrow MR = 7$ bit/am $= R_t$

| $\sigma^2_{\theta_1}$ | $\sigma^2_{\theta_2}$ | $R_{\theta_1}$ | $R_{\theta_2}$ | $R_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 5/4 | 3/4 | 0 | 0 | 7 |
| 5/16 | 3/4 | 1 | 0 | 6 |
| 5/16 | 3/16 | 1 | 1 | 5 |
| 5/64 | 3/16 | 2 | 1 | 4 |
| 5/64 | 3/64 | 2 | 2 | 3 |
| 5/256 | 3/64 | 3 | 2 | 2 |
| 5/256 | 3/256 | 3 | 3 | 1 |
| 5/1024 | 3/256 | 4 | 3 | 0 |

Portanto

$R_{\theta_1} = 4$ bit/am.

e

$R_{\theta_2} = 3$ bit/am.