PSI 2533
Segunda lista de exercícios

Prof. Vítor H. Nascimento

22 de outubro de 2014

1. Um processo estacionário $u(n)$ tem média nula e função de autocorrelação

$$r_u(\ell) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } \ell = -1 \text{ ou } \ell = 1, \\ 1, & \text{se } \ell = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   O processo $u(n)$ passa por um filtro FIR gerando o processo $v(n) = u(n) + 0{,}5u(n-1)$. Supondo que $v(n)$ já esteja em regime e possa ser considerado estacionário:

   (a) Ache o melhor estimador linear de $u(n+1)$ dado $u(n)$, isto é, ache a constante w_o tal que $\hat{u} = w_o u(n)$ minimize a variância do erro $e = u(n+1) - \hat{u}$. Calcule a variância do erro ótimo.

   (b) Ache o melhor estimador linear de $u(n+1)$ dados $u(n)$ e $u(n-1)$. Calcule a variância do erro ótimo. Compare o resultado com o do item anterior. Explique o que ocorreu.

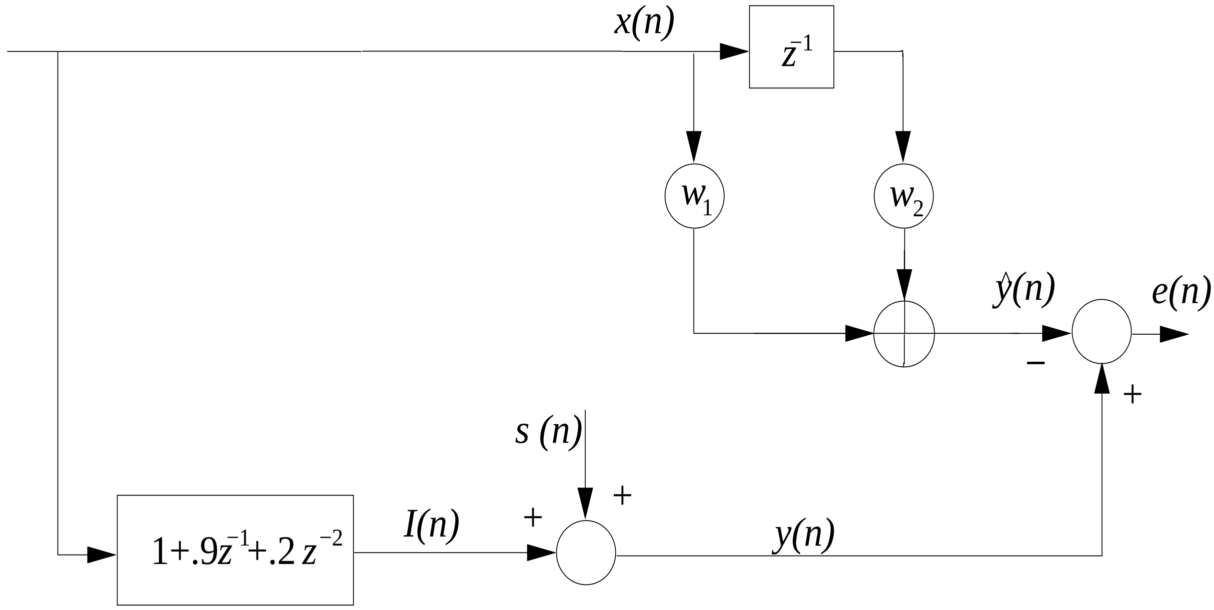
   (c) Ache o melhor estimador linear de $v(n)$ dado $u(n-1)$.

2. Suponha que um sinal $y(n)$ seja a saída de um filtro IIR,

$$y(n) = 0{,}8y(n-1) + x(n),$$

   em que $x(n)$ é um ruído branco de média zero e variância 1. Você conhece o valor de $y(n-1)$, mas precisa do sinal $y(n+2)$. Ache o estimador linear ótimo para aproximar $y(n+2)$ dado $y(n-1)$. Suponha que o filtro esteja rodando há muito tempo, de modo que $y(n)$ possa ser considerado estacionário.

3. Considere o cancelador de interferência da figura abaixo.



Sabendo que

- $x(n)$ é um ruído branco com distribuição uniforme, com média 0 e variância 1,
- $s(n)$ é um ruído branco gaussiano com média 0 e variância 0,01, independente de $x(n)$,

faça as seguintes tarefas:

(a) Determine a matriz de autocorrelação $\boldsymbol{R}_x$, o vetor de correlação cruzada $\boldsymbol{r}_{xy}$ e o vetor de coeficientes $\boldsymbol{w}_o$ do melhor estimador linear de $y(n)$ dados $x(n)$ e $x(n-1)$. Qual é a variância do erro de estimação?

(b) Escreva um programa em Matlab para simular o funcionamento do seu estimador para cancelar a interferência $I(n)$ do “sinal” $s(n)$. Faça um gráfico de $e_o(n) = s(n) + I(n) - \boldsymbol{w}_o^T \boldsymbol{x}_n$, onde $\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) \end{bmatrix}^T$. Estime a variância de $e_o(n)$, usando a função *var* do Matlab.

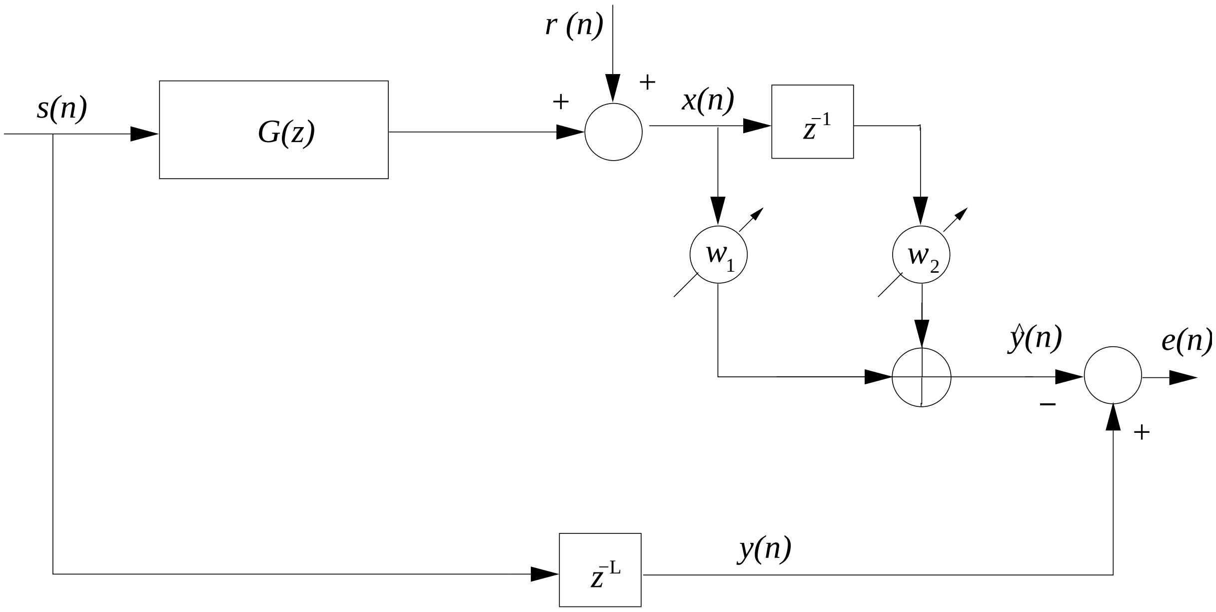
(c) Calcule o máximo valor de μ para o qual o algoritmo LMS convergiria (considerando a variância das estimativas, não apenas a média).

(d) Escreva agora um programa que use o algoritmo LMS para estimar $\boldsymbol{w}_o$. Use um passo de adaptação 10 vezes menor do que o máximo que você calculou (repita para 5 vezes menor e 2 vezes menor).

(e) Calcule a potência (variância) do erro do LMS em cada caso (após a convergência), usando as fórmulas vistas em aula.

(f) Compare com a variância de $e(n)$ calculada através do Matlab após o algoritmo convergir (supondo que o algoritmo tenha convergido depois da iteração 500, você pode usar o comando var(e(500:end))).

4. Considere um problema de equalização de canal como na figura abaixo:



$s(n)$ = sinal sendo transmitido, $G(z)$ = canal de transmissão, $r(n)$ = ruído no canal, e a saída $\hat{y}(n)$ do filtro adaptativo é uma estimativa de $\hat{s}(n-L)$. $s(n)$ e $r(n)$ são brancos e independentes entre si, com

$$s(n) = \begin{cases} +1 & \text{com prob. } 1/2 \\ -1 & \text{com prob. } 1/2 \end{cases} \qquad r(n) \sim N(0,\sigma_r^2), \text{ indep. de } s(n).$$

Supondo que o canal tem o modelo abaixo, e que $W(z)$ tem dois coeficientes,

$$G(z) = 1 + 0{,}8z^{-1} + 0{,}1z^{-2},$$

calcule

(a) A matriz de autocorrelação $\boldsymbol{R}_x$, o vetor de correlação cruzada $\boldsymbol{r}_{xs}$ e vetor ótimo $\boldsymbol{w}_o$,

(b) O valor da variância do erro $e(n)$. Qual é a variância do erro para $\sigma_r^2 = 0$?

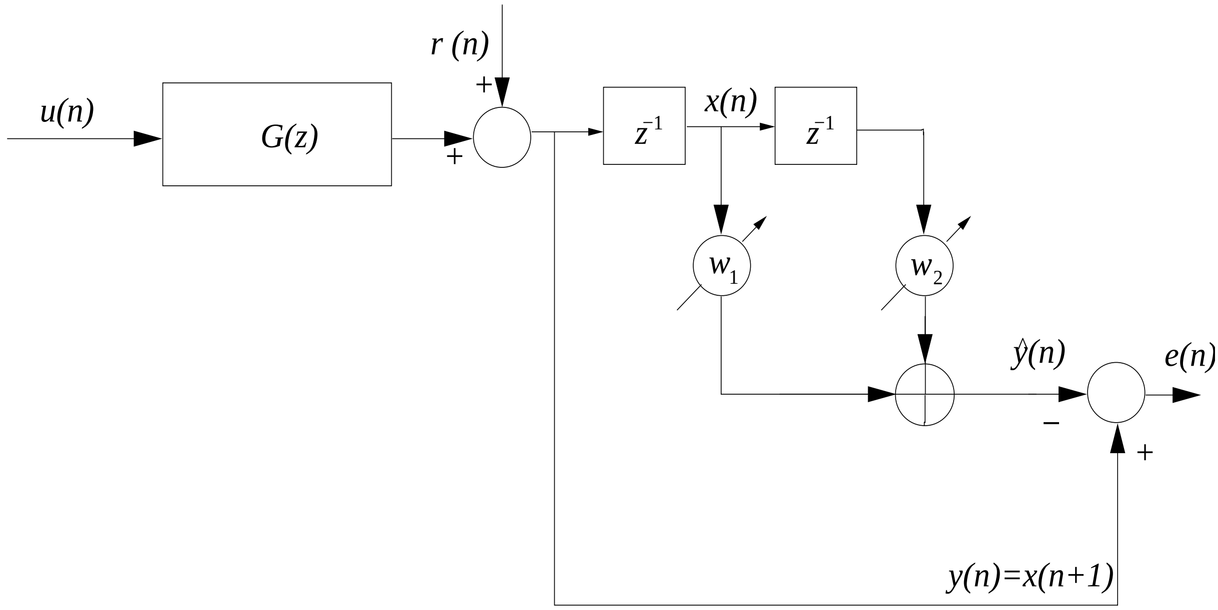
(c) Calcule o máximo valor de μ para o qual o algoritmo LMS convergiria (considerando a variância das estimativas, não apenas a média).

(d) Escreva agora um programa que use o algoritmo LMS para estimar $\boldsymbol{w}_o$. Use um passo de adaptação 10 vezes menor do que o máximo que você calculou (repita para 5 vezes menor e 2 vezes menor).

(e) Calcule a potência (variância) do erro do LMS em cada caso (após a convergência), usando as fórmulas vistas em aula.

(f) Compare com a variância de $e(n)$ calculada através do Matlab após o algoritmo convergir (supondo que o algoritmo tenha convergido depois da iteração 500, você pode usar o comando var(e(500:end))).

5. Considere o problema de predição linear abaixo:



Na figura, $u(n)$ é um ruído branco com média nula e variância 1, $r(n)$ é também um ruído branco com média nula e variância σ_r^2, *independente de* $u(n)$, e

$$G(z) = \frac{1}{1 + 0{,}9z^{-1}}.$$

Responda:

(a) Qual são os valores ótimos de w_1 e de w_2 para minimizar $\mathrm{E}[(e(n))^2]$?

(b) Qual é o valor ótimo da variância do erro $\sigma_o^2 = \mathrm{E}[(e_o(n))^2]$?

(c) Se, ao invés de usar os valores ótimos você usasse $w_1 = -0{,}9$ e $w_2 = -0{,}4$, qual seria o valor do $\mathrm{E}[(e(n))^2]$ correspondente?

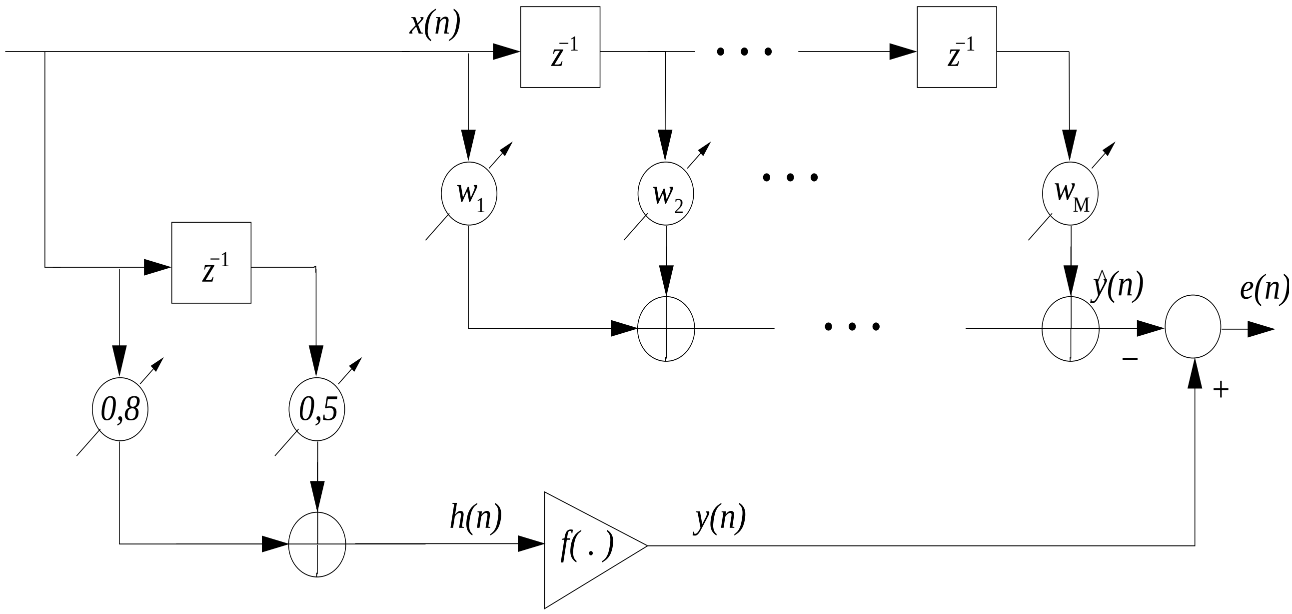
(d) Escreva agora um programa que use o algoritmo LMS para estimar $\boldsymbol{w}_o$. Use um passo de adaptação 10 vezes menor do que o máximo que você calculou (repita para 5 vezes menor e 2 vezes menor).

(e) Calcule a potência (variância) do erro do LMS em cada caso (após a convergência), usando as fórmulas vistas em aula.

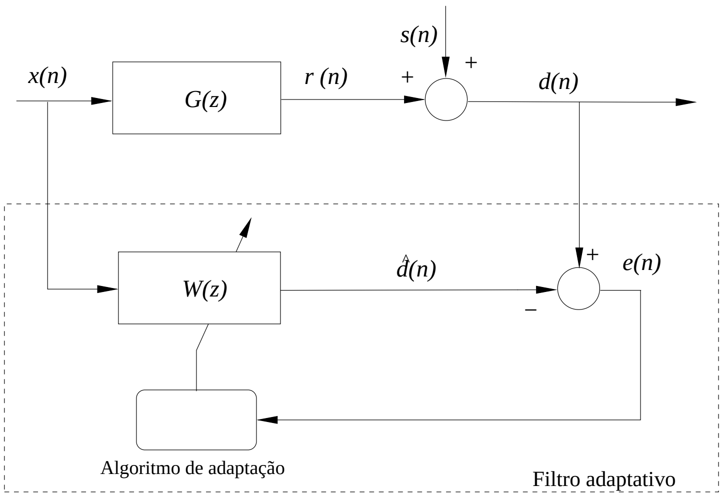
(f) Compare com a variância de $e(n)$ calculada através do Matlab após o algoritmo convergir (supondo que o algoritmo tenha convergido depois da iteração 500, você pode usar o comando var(e(500:end))).

6. Na parte inferior da figura abaixo temos um modelo de um sistema com uma parte linear e uma não-linearidade na saída. O sistema tem entrada $x(n)$ e saída $y(n)$. A função $f(\cdot)$ é definida por $f(a) = a + 0{,}1a^3$, e $x(n)$ é um ruído branco uniforme com distribuição no intervalo $[-1; 1]$.

   Se você usar o algoritmo LMS para calcular uma aproximação $\hat{y}(n)$ para $y(n)$, qual é o comprimento M do filtro adaptativo que deve ser usado? Justifique claramente sua resposta.



7. Considere o problema de cancelamento de interferência mostrado na figura abaixo, em que $s(n)$ é um sinal de interesse, que se quer preservar, e $r(n)$ é uma interferência, que sabe-se ser senoidal. Não é possível medir-se $s(n)$ diretamente, o único acesso é a $d(n) = s(n)+r(n)$. É disponível também um sinal de referência $x(n) = \boldsymbol{A}\cos(\omega_0 n + \boldsymbol{\phi})$, com freqüência igual à da interferência, mas com fase e amplitude desconhecidas. $\boldsymbol{A}$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 1 e 2, e $\boldsymbol{\phi}$ é uma variável independente da amplitude, com distribuição também uniforme entre 0 e 2π. $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{\phi}$ são escolhidas apenas uma vez a cada realização do processo $\big\{x(n)\big\}$. O sinal $s(n)$ é um sinal independente de $x(n)$, com média nula e potência 1. A função entre $x(n)$ e $r(n)$ é $G(z) = 1 - 0{,}5z^{-1}$. Responda:



(a) Determine o sistema de equações que permite calcular o filtro ótimo (com dois coeficientes) que cancela a interferência $r(n)$ do sinal disponível $d(n)$. Não é necessário resolver o sistema, apenas encontrar as equações.

(b) Escreva a recursão de um filtro LMS que cancele $r(n)$ de $d(n)$.

(c) Qual é o valor máximo do passo de adaptação do LMS?

(d) Na prática, usam-se valores de passo consideravelmente menores do que o máximo permitido para estabilidade do filtro adaptativo. Com base no que foi visto em aula, explique por quê.