

# Ondas Eletromagnéticas

## Resumo

SEL SEL 317 Sistemas de comunicação

Amílcar Careli César  
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

# Atenção!

---



- ✓ Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de **SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas**, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia de computação.
- ✓ Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- ✓ solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

Equações de maxwell  
Onda plana  
Polarização  
Condições de Contorno  
Reflexão e Transmissão  
Propagação em Meio dissipativo

# FUNDAMENTOS

# Vetor real e complexo

---

$$\bar{V}(t) = V_x \cos(\omega t + \phi_x) \hat{x} + V_y \cos(\omega t + \phi_y) \hat{y} + V_z \cos(\omega t + \phi_z) \hat{z}$$

A representação complexa deste vetor é

$$\bar{V}(t) = \text{Re}\{[V_x \exp(j\phi_x) \hat{x} + V_y \exp(j\phi_y) \hat{y} + V_z \exp(j\phi_z) \hat{z}] \exp(j\omega t)\}$$

$$\bar{V}(t) = \text{Re}\{\bar{V} \exp(j\omega t)\}$$

$$\bar{V} = V_x \exp(j\phi_x) \hat{x} + V_y \exp(j\phi_y) \hat{y} + V_z \exp(j\phi_z) \hat{z}$$

vetor complexo

# Equações de Maxwell-1

---

Símbolo	Descrição	Unidade
$\vec{E}$	Vetor campo elétrico	volt/metro (V/m)
$\vec{H}$	Vetor campo magnético	ampere/metro (A/m)
$\vec{D}$	Vetor densidade de fluxo elétrico	coulomb/metro <sup>2</sup> (C/m <sup>2</sup> )
$\vec{B}$	Vetor densidade de fluxo magnético	weber/metro <sup>2</sup> (Wb/m <sup>2</sup> )
$\vec{J}$	Vetor densidade de corrente	ampere/metro <sup>2</sup> (A/m <sup>2</sup> )
$\rho$	Densidade volumétrica de cargas	coulomb/metro <sup>3</sup> (C/m <sup>3</sup> )

# Equações de Maxwell-2

---

$$\nabla \times \bar{E} = -\partial \bar{B} / \partial t$$

Lei de Faraday

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Lei de Ampere

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

Lei de Gauss (magnética)

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

Lei de Gauss (elétrica)

# Campos Variantes no Tempo

---

Campos variantes no tempo; excitação de freqüência única

$$\bar{F}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \bar{F}(x, y, z) \exp(j\omega t) \right\}$$

$$\bar{F}(x, y, z)$$

representa qualquer um dos vetores relacionados nas equações de Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

# Relações Constitutivas

---

para um meio isotrópico

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad \text{vetor densidade de fluxo elétrico}$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad \text{vetor densidade de fluxo magnético}$$

$\epsilon$  permissividade dielétrica

$\mu$  permeabilidade magnética

vácuo

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \quad \text{F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{H/m}$$



# Região sem Fontes

---

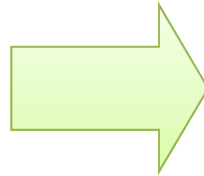
$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \bar{J} = 0$$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

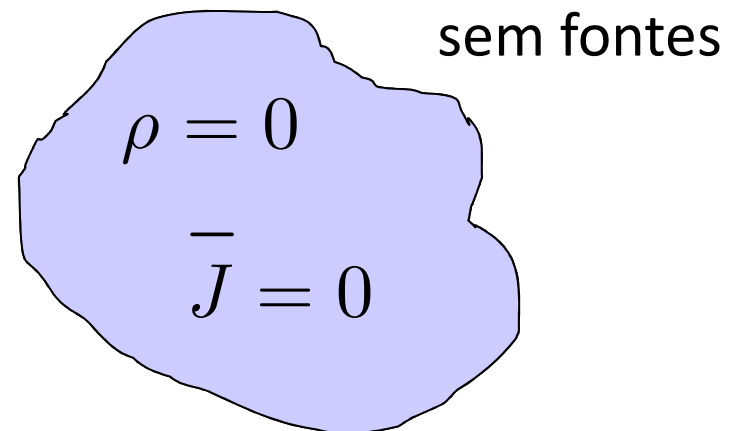
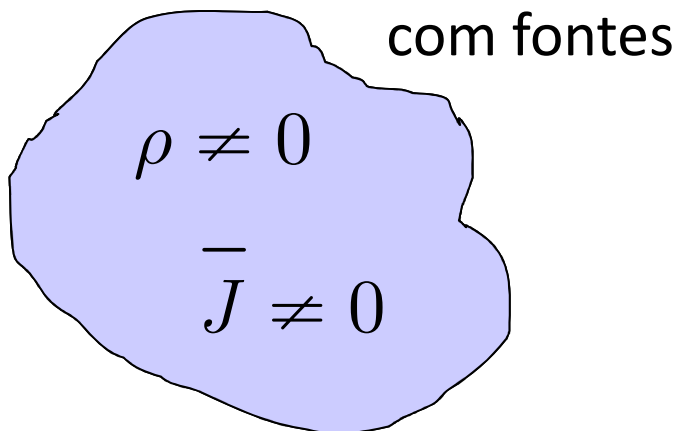


$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B}$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega \bar{D}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0$$



# Vetor de Poynting

---

Vetor de Poynting

$$\bar{S}(x, y, z, t) = \bar{E}(x, y, z, t) \times \bar{H}(x, y, z, t) \quad \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Vetor de Poynting complexo

$$\bar{S}(x, y, z) = \bar{E}(x, y, z) \times \bar{H}^*(x, y, z)$$

Valor médio

$$\langle \bar{S}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{S}(x, y, z, t) dt$$

$$\langle \bar{S}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \bar{E}(x, y, z) \times \bar{H}^*(x, y, z) \right\}$$

## Equação de onda

---

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon\right) \mathbf{E} = j\omega \mu \mathbf{J} - \nabla \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{j\omega \epsilon} \right)$$

equação de onda para  $\mathbf{E}$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon\right) \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

equação de onda para  $\mathbf{H}$

## Equações de onda região sem fontes

---

região sem fontes,  $\mathbf{J} = 0$  e  $\rho = 0$

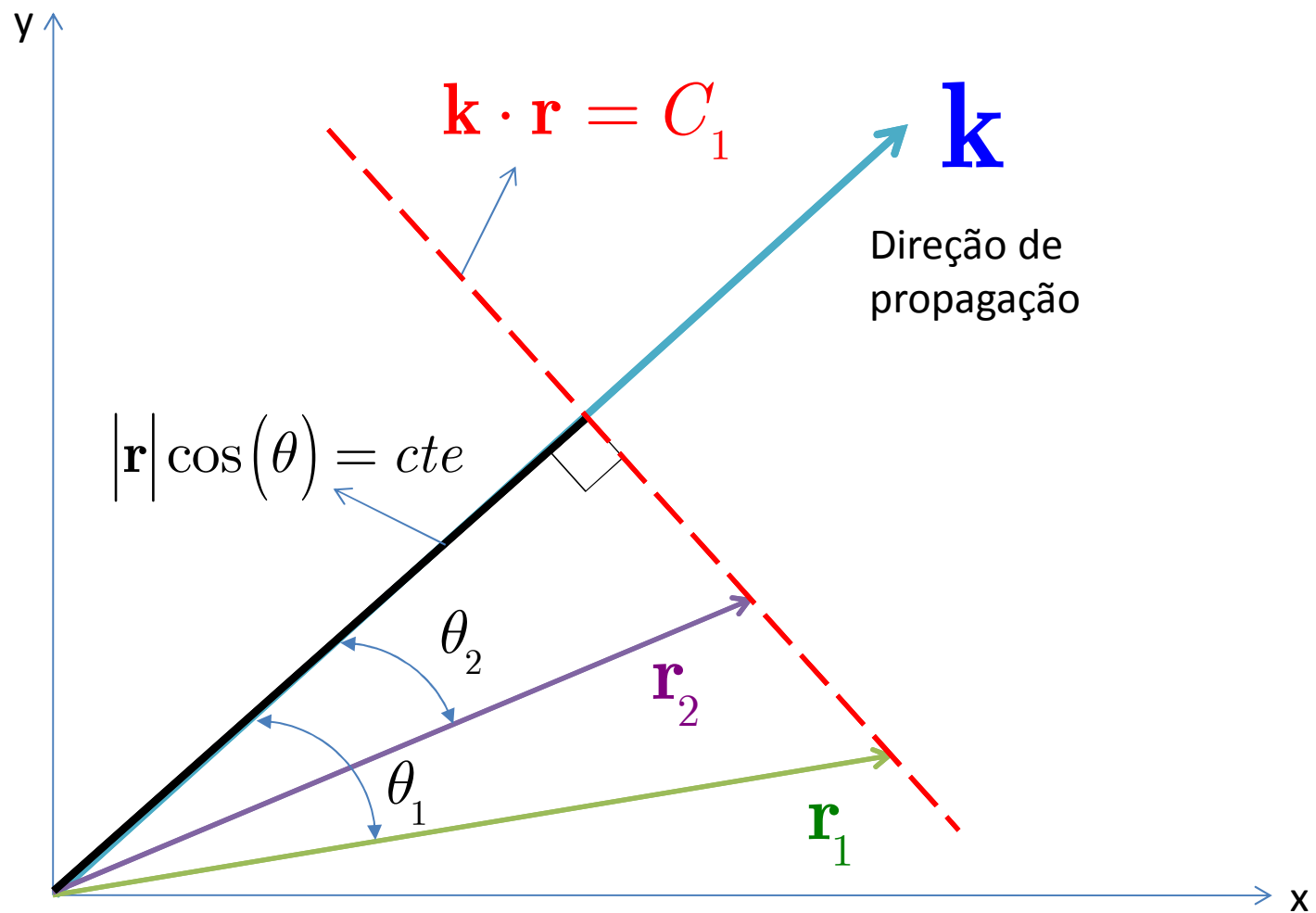
$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon\right) \mathbf{E} = 0$$

equação de onda para  $\mathbf{E}$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon\right) \mathbf{H} = 0$$

equação de onda para  $\mathbf{H}$

# Solução da equação de onda

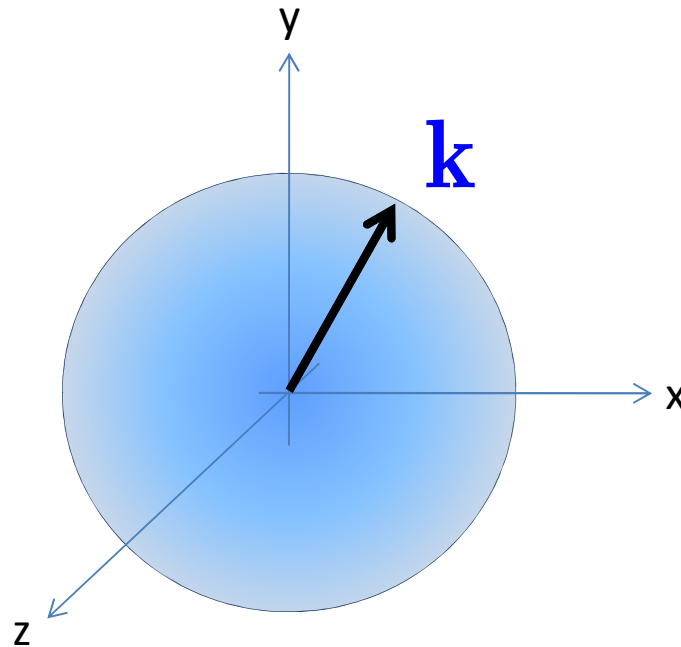


# Vetor propagação

---

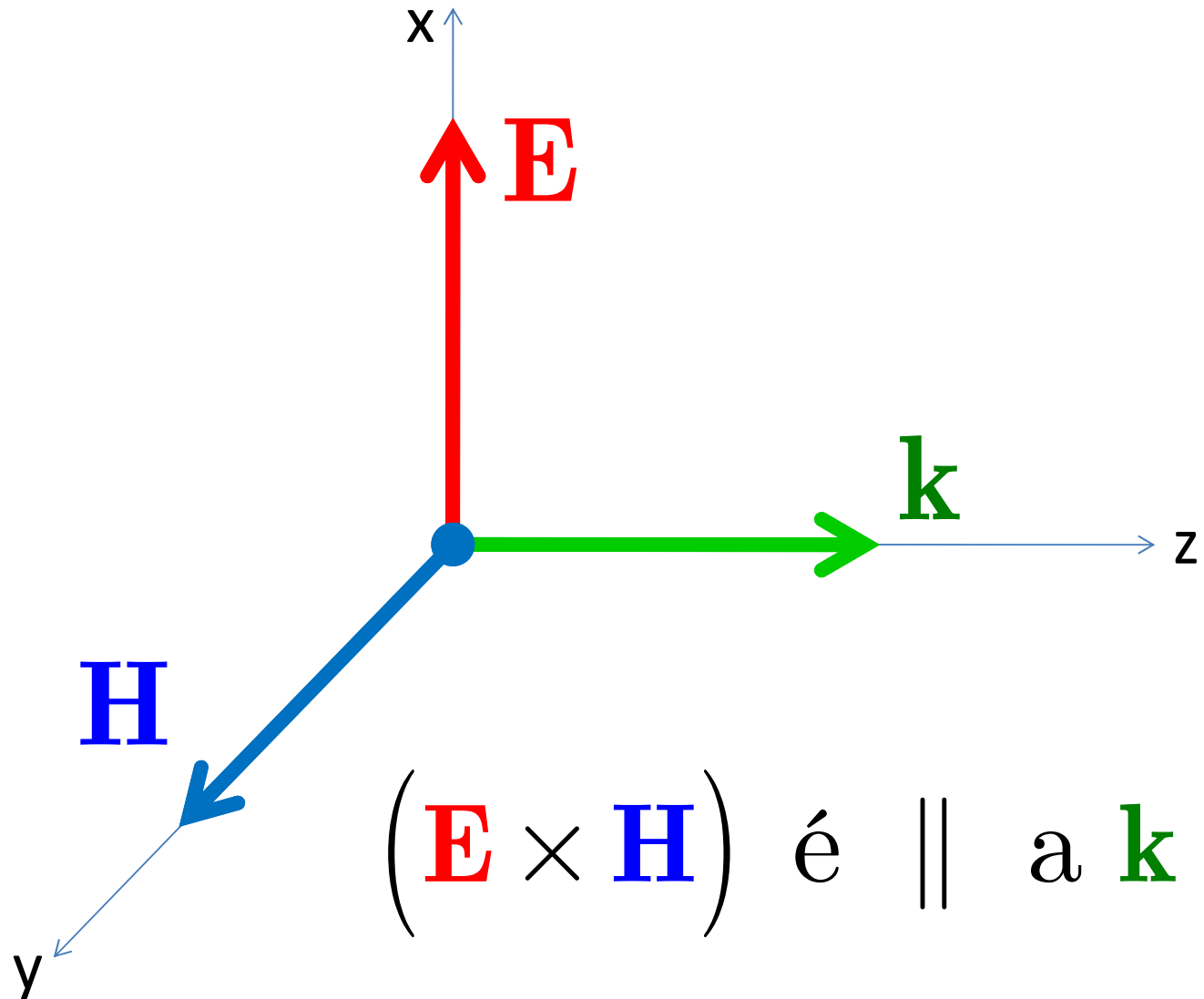
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon \equiv k^2$$

esfera de raio  $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$   
no sistema  $(x, y, z)$



# Onda plana

---



# Onda plana em meio dissipativo-1

---

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + j\omega\epsilon\overline{E}$$

$$\overline{J} = \overline{J}_f + \overline{J}_c$$

$\overline{J}_f$ : fonte

$$\overline{J}_c = \sigma\overline{E}: \text{Lei de Ohm}$$

$\sigma$ : condutividade; S/m

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J}_f + j\omega\epsilon\overline{E}$$

$$\epsilon = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}: \text{permissividade complexa; } \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$



# Equação de onda e solução-1

---

$$\left( \nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon \right) \overline{\overline{E}}; \overline{\overline{H}} = 0$$

$$\overline{\overline{E}} = \hat{x} E_0 \exp(-k_z z) ; \text{V/m}$$

$$\overline{\overline{H}} = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} \exp(-k_z z) ; \text{A/m}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = |\eta| \exp(j\phi) ; \text{ohm}$$

$$k_z = k = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon} = k_R + jk_I ; \text{m}^{-1}$$

## Equação de onda e solução-2

---

$$\bar{E} = \hat{x}E_0 \exp(-k_R z) \exp(-jk_I z) ; \text{ V/m}$$

$$\bar{H} = \hat{y} \frac{E_0}{|\eta|} \exp(-j\phi) \exp(-k_R z) \exp(-jk_I z) ; \text{ A/m}$$

Expressão instantânea

$$\bar{E} = \hat{x}E_0 \exp(-k_R z) \cos(\omega t - k_I z) ; \text{ V/m}$$

$$\bar{H} = \hat{y} \frac{E_0}{|\eta|} \exp(-k_R z) \cos(\omega t - k_I z - \phi) ; \text{ A/m}$$

Velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega}{k_I} ; \text{ m/s}$$

# Profundidade de penetração-1

---

Profundidade em que o campo decai para  $1/e$  do valor em  $z = 0$  (máximo)

$$\left| \overline{E} \right|_{z=d_p} = \frac{\left| \overline{E} \right|_{z=0}}{e}$$

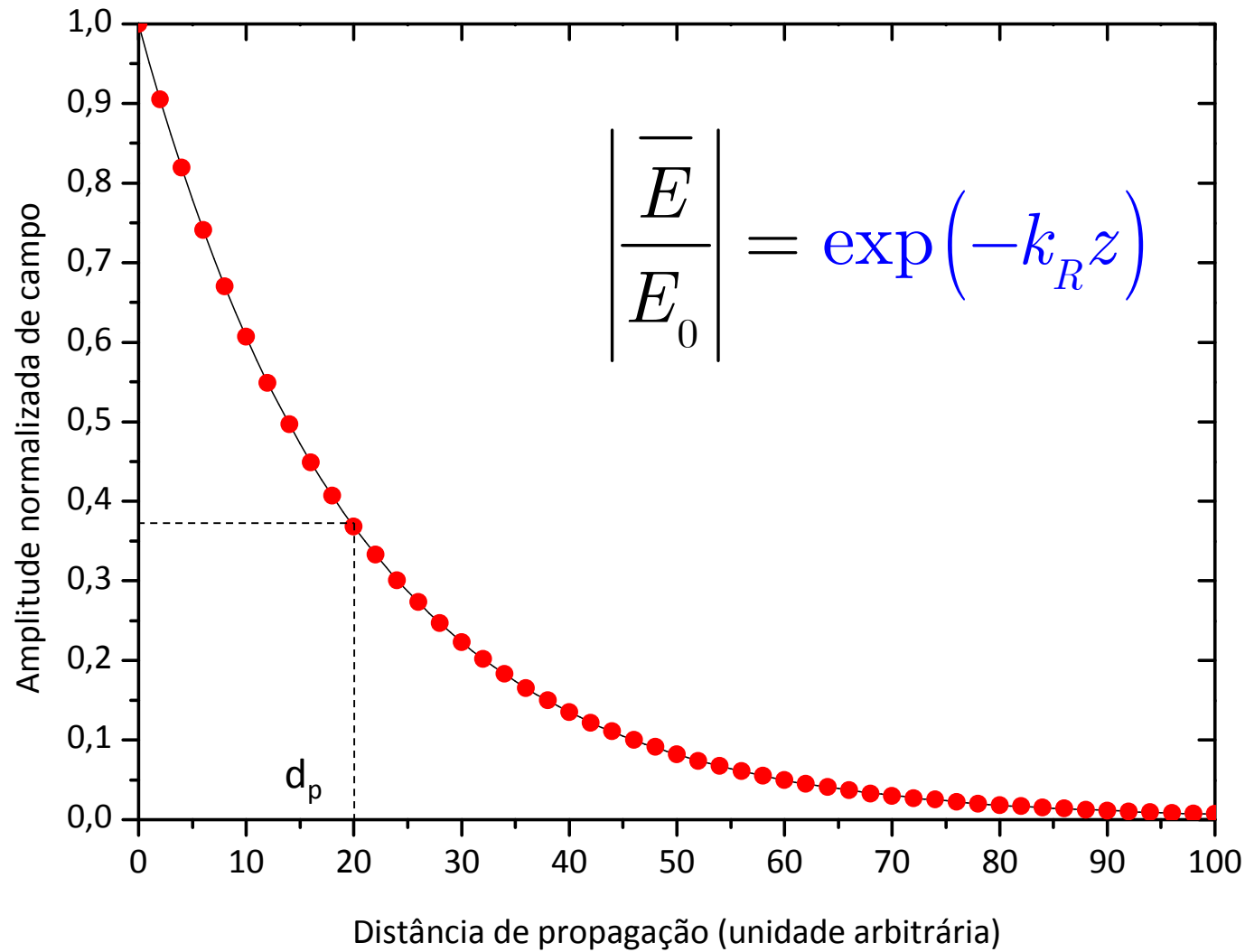
$$E_0 \exp(-k_R d_p) = \frac{E_0}{e}$$

$$-k_R d_p \ln e = \ln 1 - \ln e$$

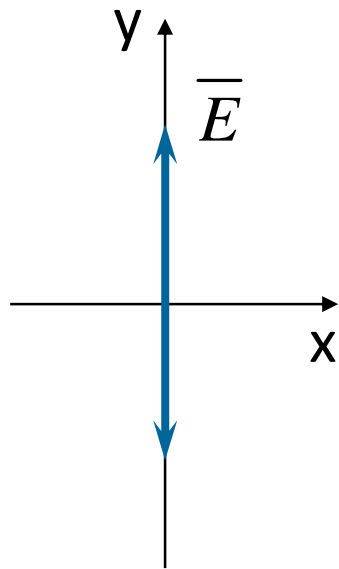
$$-k_R d_p = -1$$

$$d_p = \frac{1}{k_R} ; \text{ m}$$

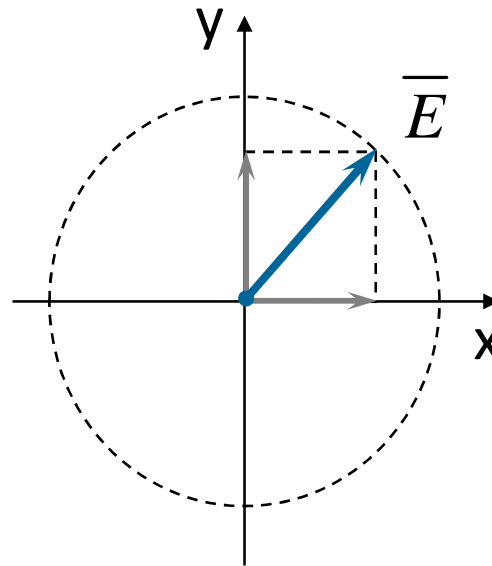
# Profundidade de penetração-2



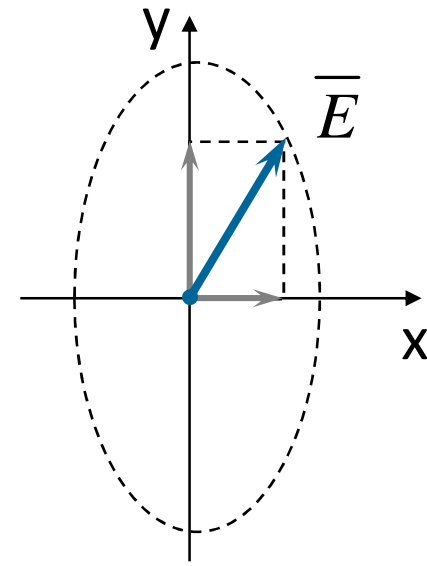
# Polarização de Ondas



Linear



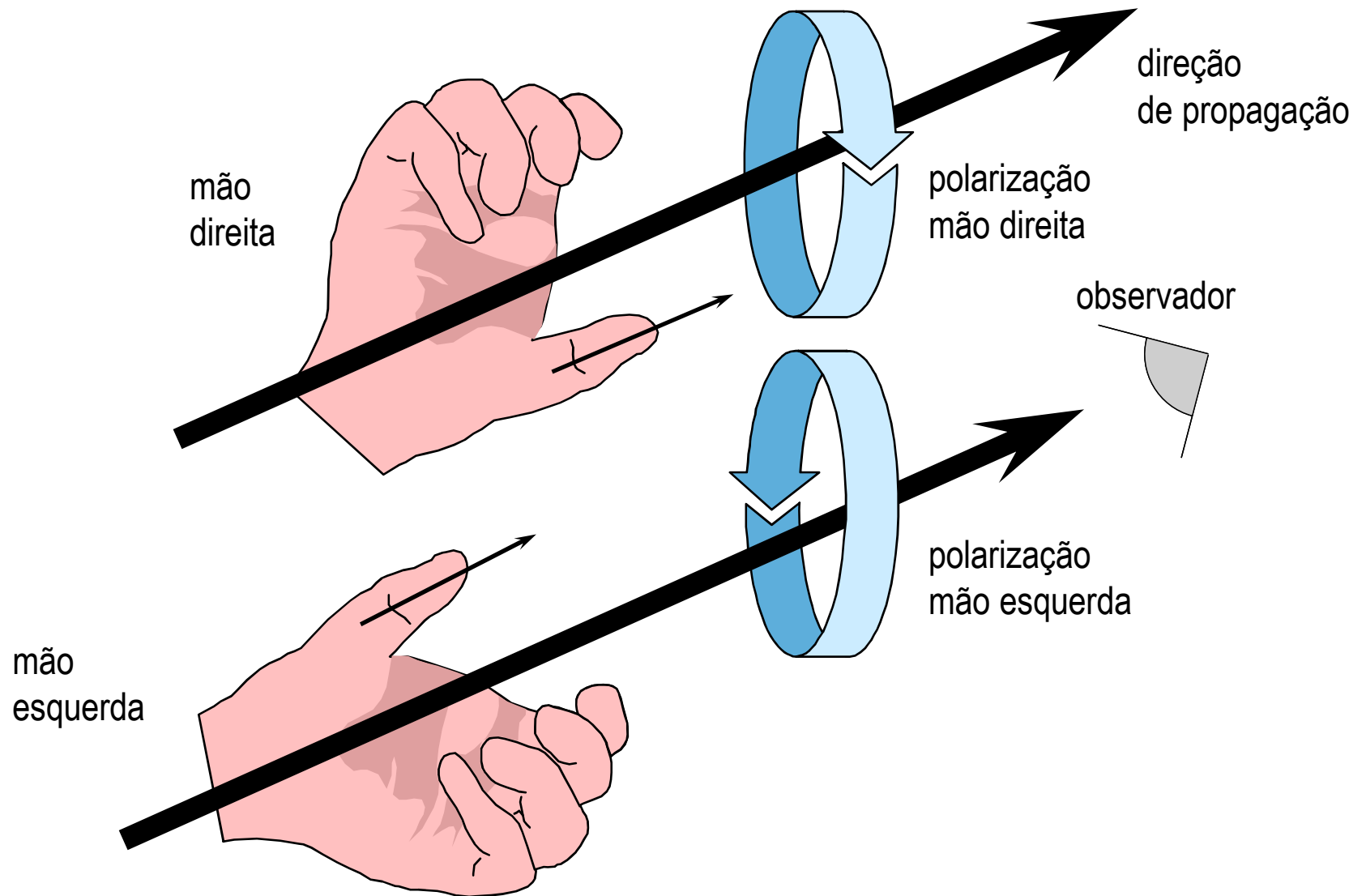
Circular



Elíptica

O lugar geométrico descrito pela “ponta” do vetor campo elétrico indica o tipo de polarização

# Sentido de Polarização: Circular e Elíptica



## Condições de contorno: dielétrico-dielétrico

Componentes tangenciais

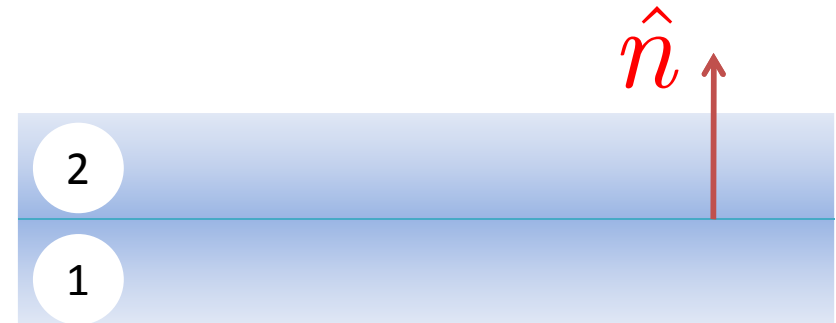
$$\hat{n} \times (\overline{E}_2 - \overline{E}_1) = 0$$

$$\hat{n} \times (\overline{H}_2 - \overline{H}_1) = \overline{K}_s$$

Componentes normais

$$\hat{n} \cdot (\overline{D}_2 - \overline{D}_1) = \rho_s$$

$$\hat{n} \cdot (\overline{B}_2 - \overline{B}_1) = 0$$



$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

$$H_{2t} - H_{1t} = 0 \quad (\sigma \text{ finito})$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

# Condições de contorno: dielétrico-condutor perfeito

Componentes tangenciais

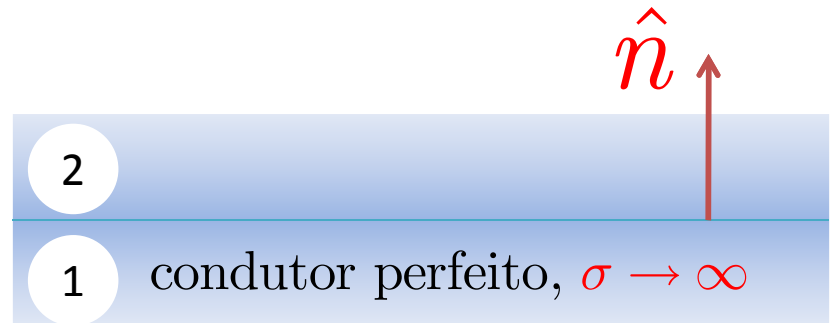
$$\hat{n} \times (\overline{E}_2 - \overline{E}_1) = 0$$

$$\hat{n} \times (\overline{H}_2 - \overline{H}_1) = \overline{K}_s$$

Componentes normais

$$\hat{n} \cdot (\overline{D}_2 - \overline{D}_1) = \rho_s$$

$$\hat{n} \cdot (\overline{B}_2 - \overline{B}_1) = 0$$



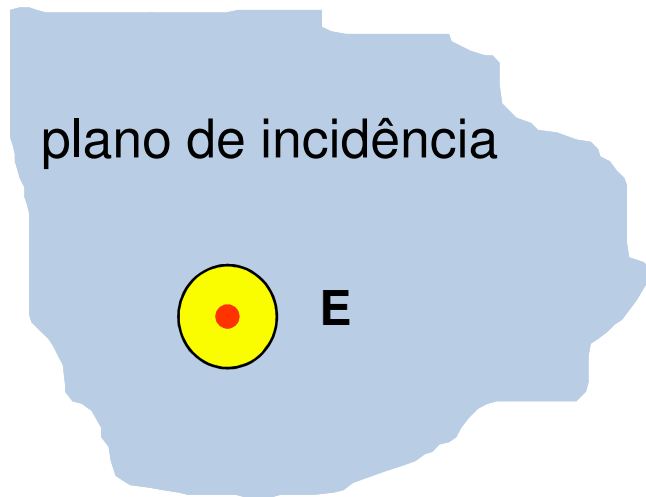
$$\overline{E}_1 = 0$$

$$\overline{H}_1 = 0$$

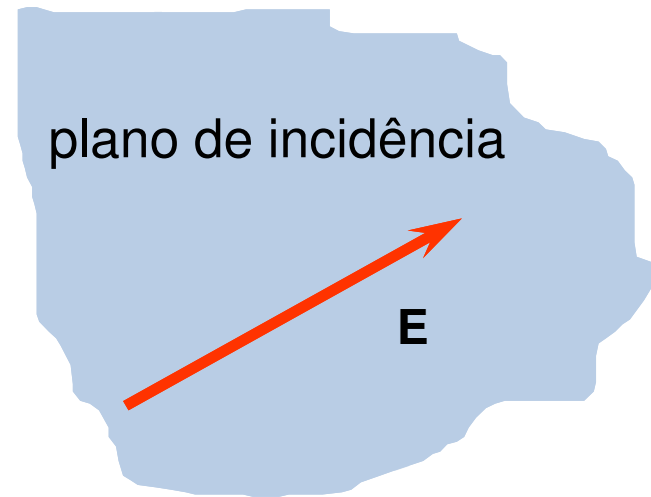


# Polarização da onda

---

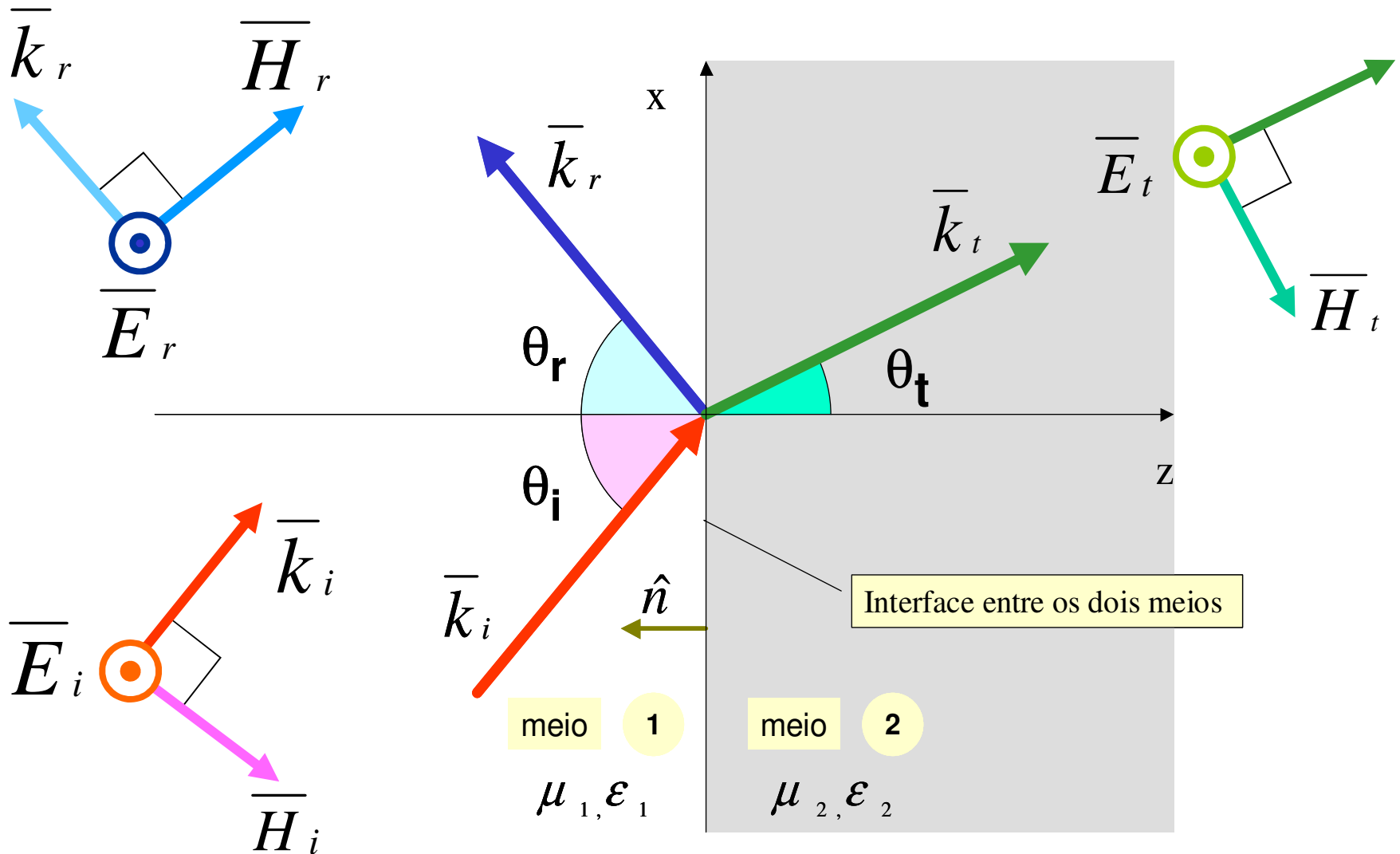


polarização normal  
ou  
perpendicular



polarização paralela

# Polarização perpendicular-1



# Polarização perpendicular-2

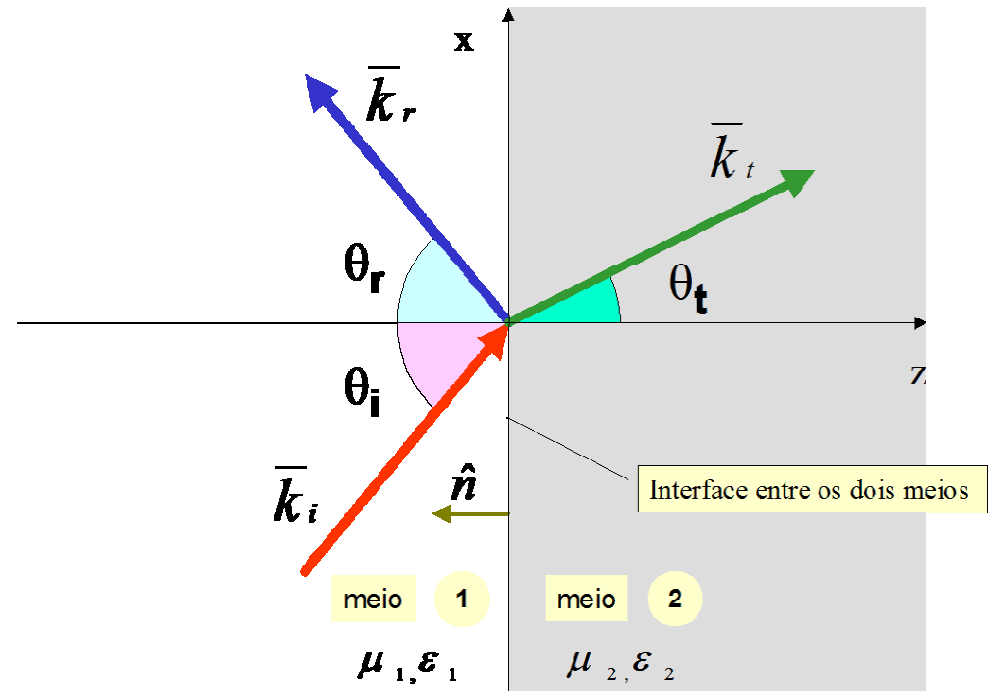
$$R_I = \frac{\eta_2 \cos(\theta_i) - \eta_1 \cos(\theta_t)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)}$$

$$T_I = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)}$$

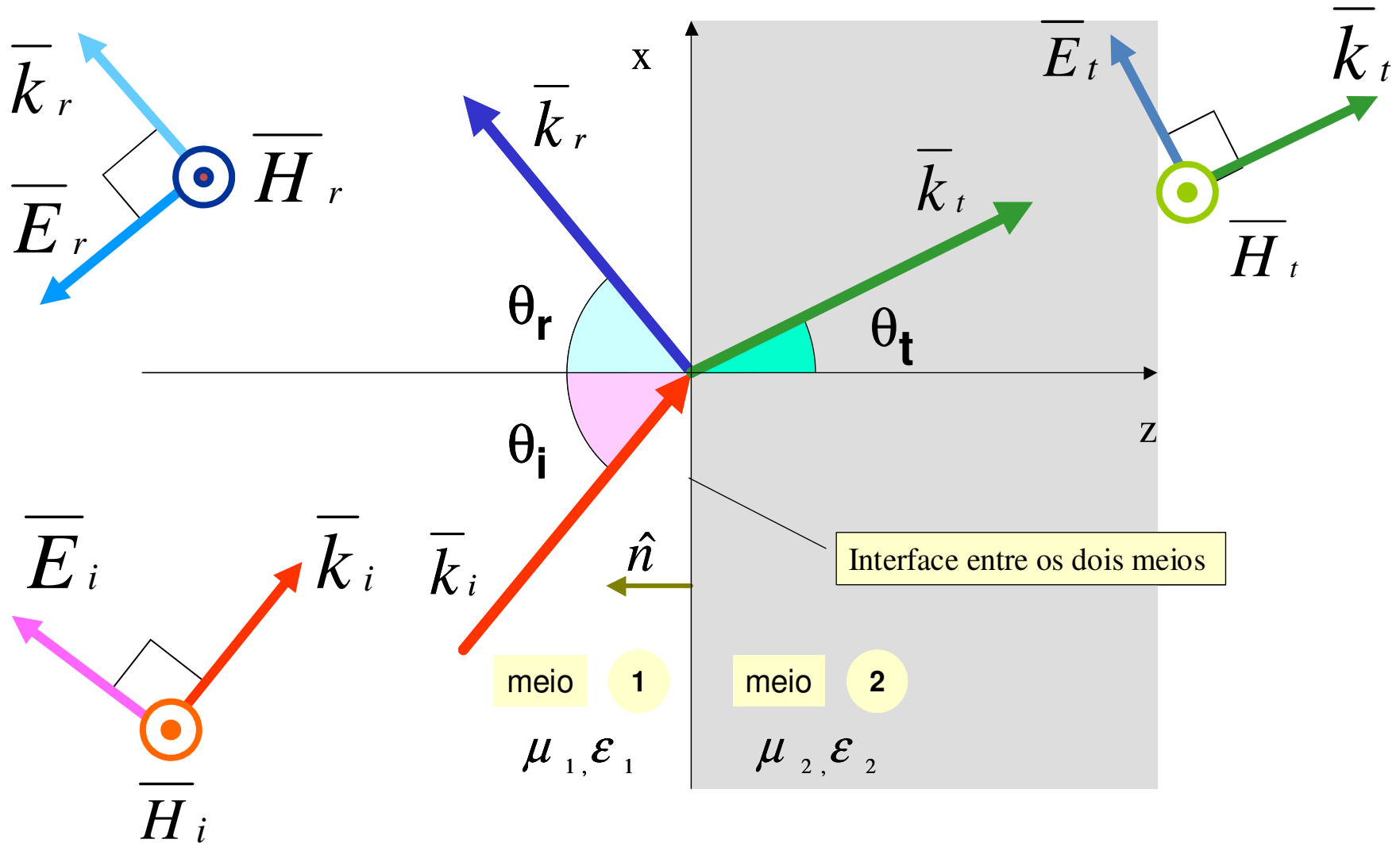
$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\epsilon_{r1}}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\epsilon_{r2}}}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ ohms}$$



# Polarização paralela-1



# Polarização paralela-2

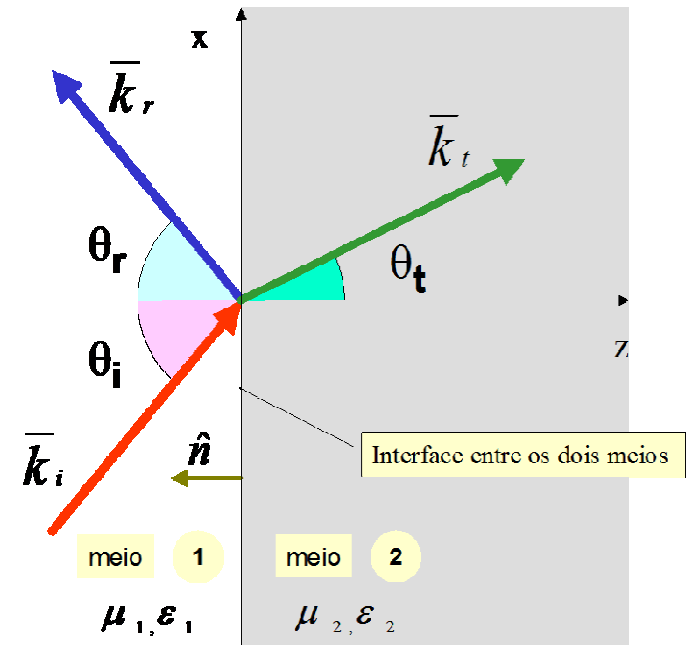
$$R_{II} = -\frac{\eta_2 \cos(\theta_t) - \eta_1 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_t) + \eta_1 \cos(\theta_i)}$$

$$T_{II} = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_t) + \eta_1 \cos(\theta_i)}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\epsilon_{r1}}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\epsilon_{r2}}}$$

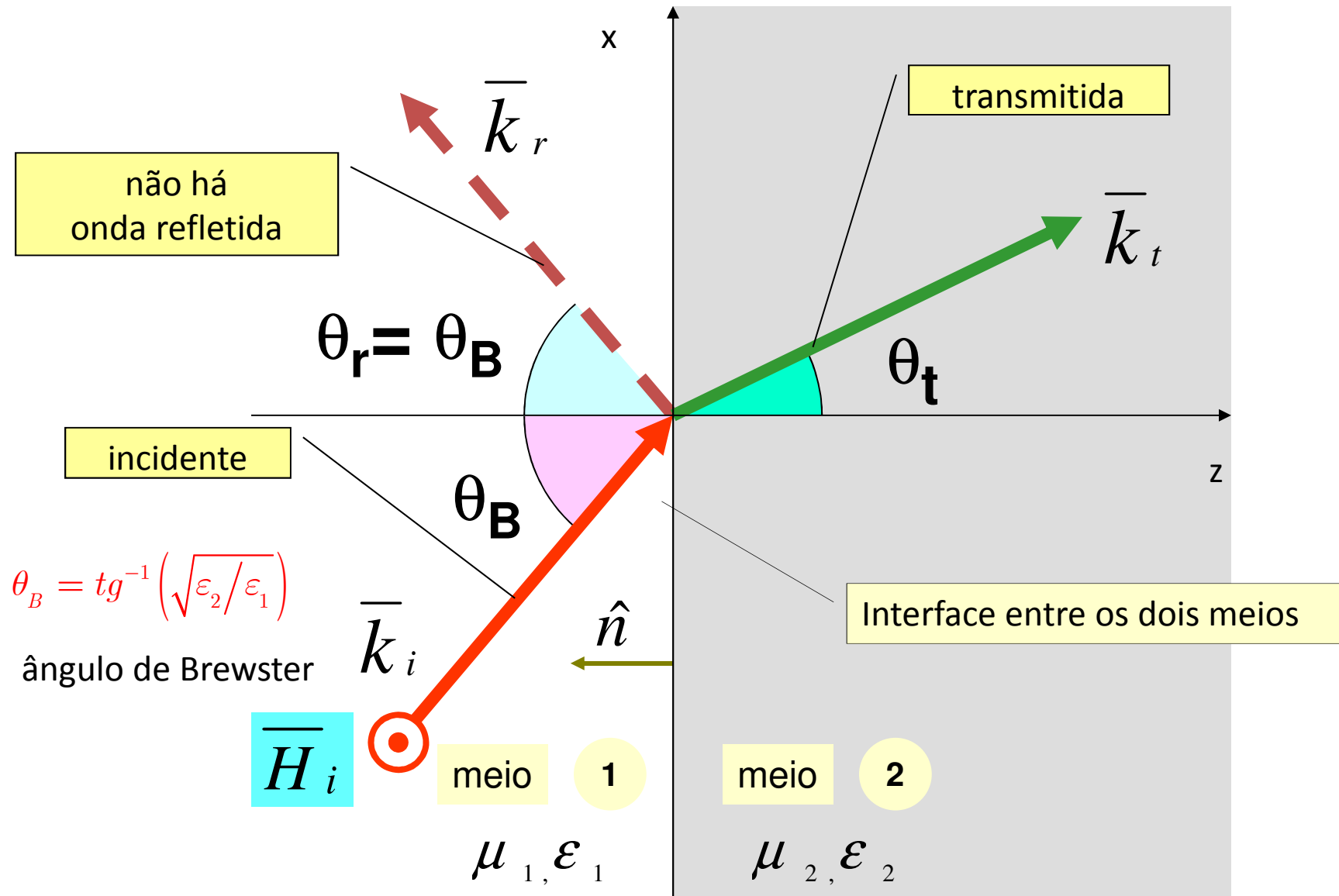
$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ ohms}$$



$$\theta_B = \text{tg}^{-1} \left( \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \right)$$

ângulo de Brewster

# Transmissão total: ângulo de Brewster



# Resumo: Coeficientes de reflexão e transmissão

---

$$\left. \begin{array}{l} \text{Polarização} \\ \text{perpendicular} \end{array} \right\} \begin{cases} R_I = \frac{\eta_2 \cos(\theta_i) - \eta_1 \cos(\theta_t)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)} \\ T_I = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)} \end{cases}$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{Polarização} \\ \text{paralela} \end{array} \right\} \begin{cases} R_{II} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \\ T_{II} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \end{cases}$$

# Resumo: Coeficientes de reflexão e transmissão

---

Incidência normal ( $\theta_i = 0$ )

$$\left. \begin{array}{l} \text{Polarização} \\ \text{perpendicular} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_I = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ T_I = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \end{array}$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{Polarização} \\ \text{paralela} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_{II} = -\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ T_{II} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \end{array}$$



## Resumo: Coeficientes de reflexão e transmissão

---

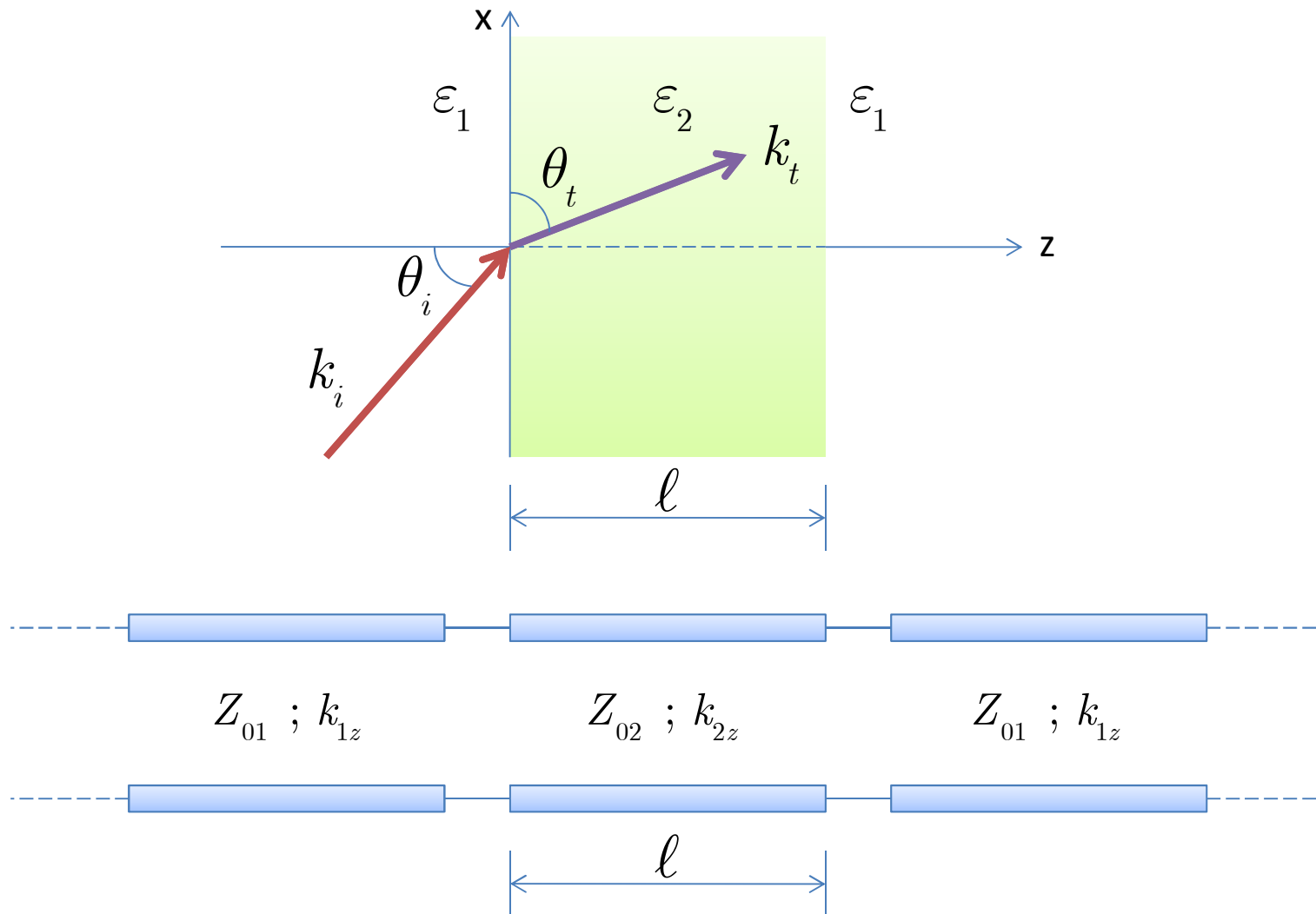
Incidência normal e meio 2 é condutor perfeito

$$\begin{array}{l} \text{polarização} \\ \text{perpendicular} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R_I = -1 \\ T_I = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{polarização} \\ \text{paralela} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R_{II} = 1 \\ T_{II} = 0 \end{array} \right.$$

# MÉTODO DA LINHA DE TRANSMISSÃO EQUIVALENTE

# Método da linha de transmissão equivalente

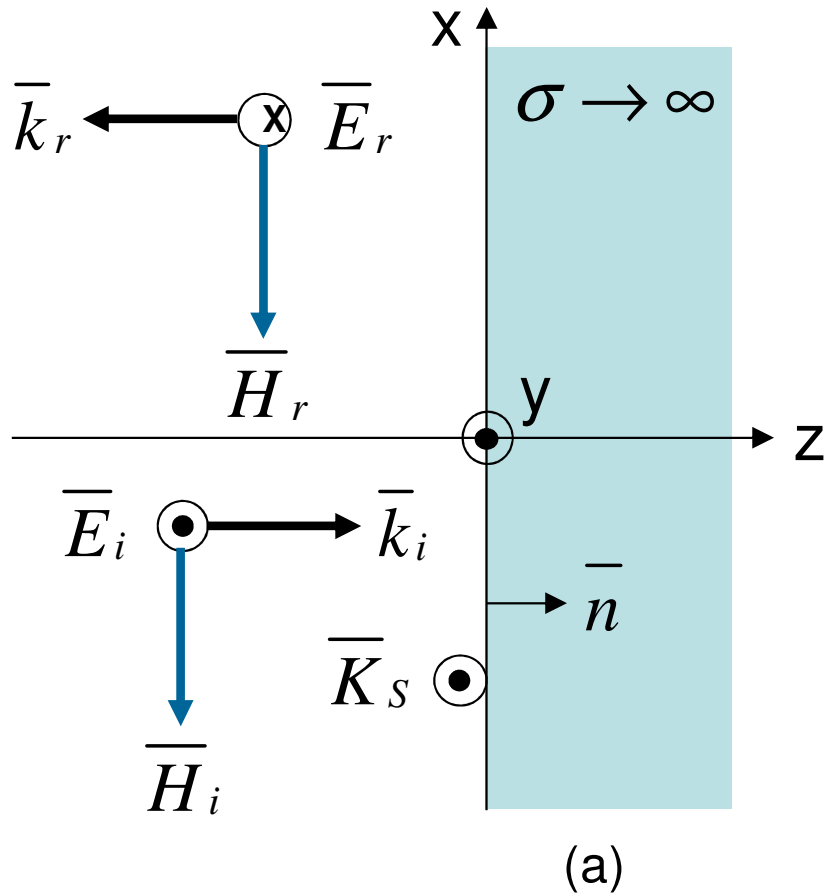


# Equivalência

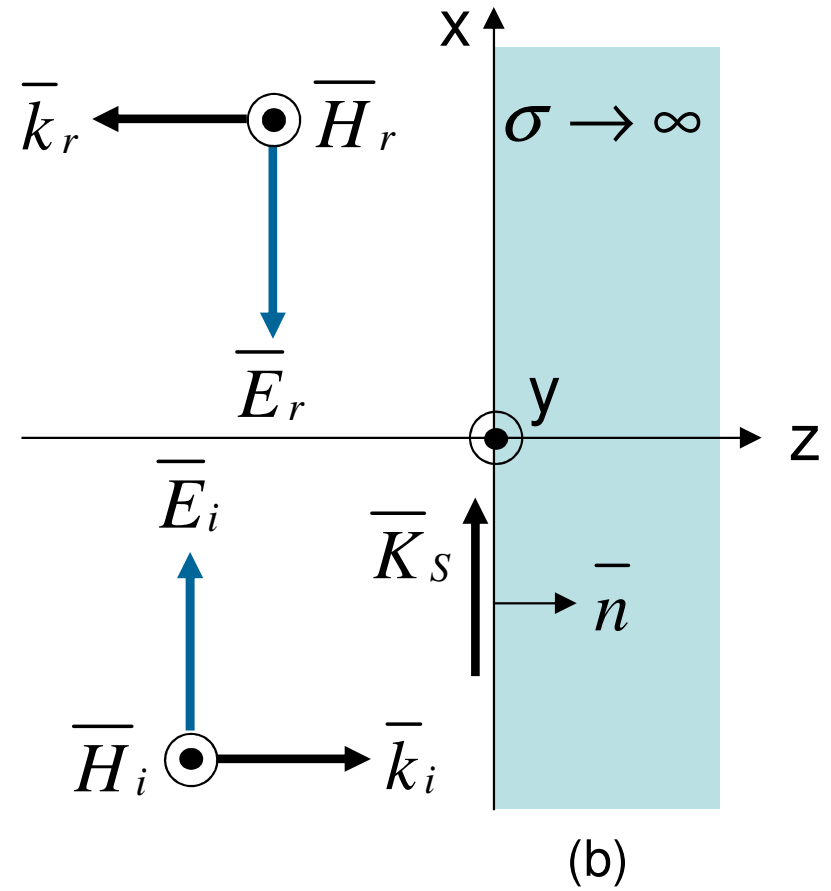
Linha de Transmissão	Onda Plana	
	Polar. Paralela	Polar. Perpendicular
$V$	$E_x$	$E_y$
$I$	$H_y$	$H_x$
$k$	$k_z = k \cos \theta$	$k_z = k \cos \theta$
$Z = \frac{V}{I}$	$Z_{\parallel} = \frac{E_x}{H_y}$	$Z_{\perp} = -\frac{E_y}{H_x}$
$Z_0$	$\eta \cos \theta$	$\frac{\eta}{\cos \theta}$

# GUIA DE ONDA DE PLANOS METÁLICOS PARALELOS

# Incidência Normal

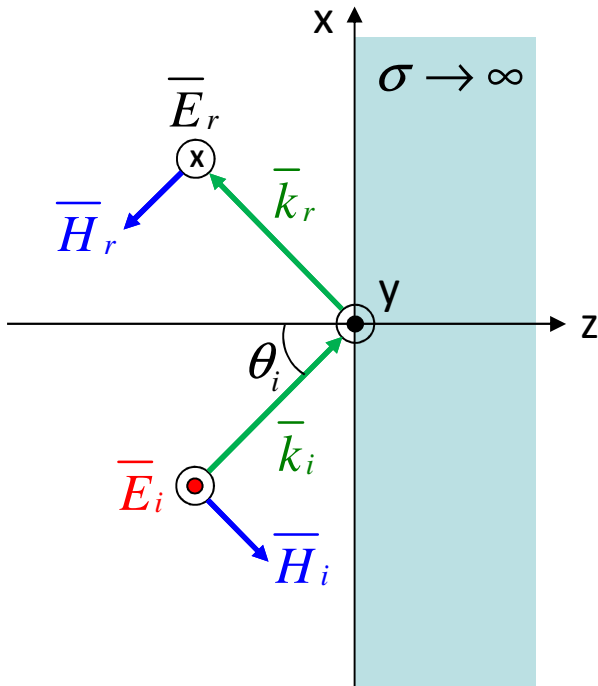


Polarização Perpendicular



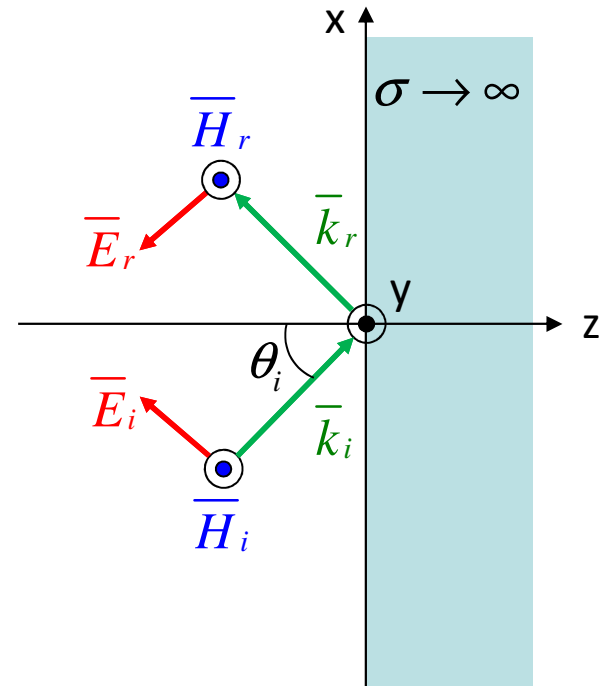
Polarização Paralela

# Incidência Oblíqua



(a)

Polarização Perpendicular



(b)

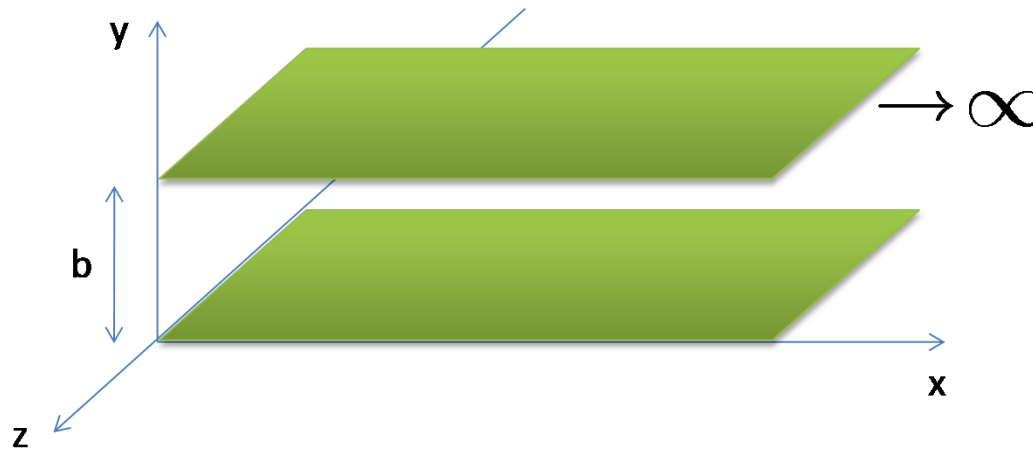
Polarização Paralela

# Soluções TE e TM

---

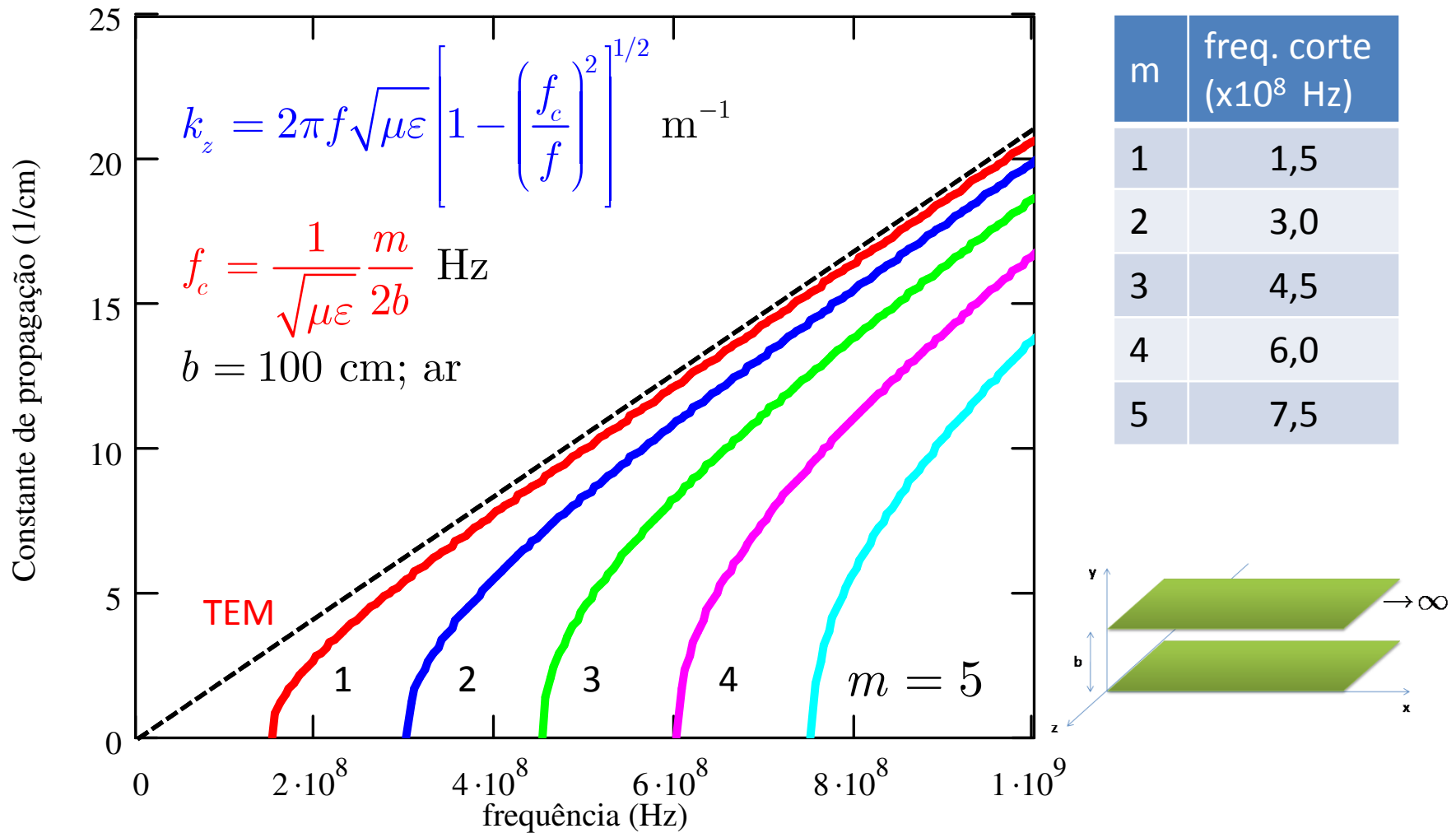
$E_x$  ;  $H_y$  ;  $H_z$  Modos TE

$H_x$  ;  $E_y$  ;  $E_z$  Modos TM

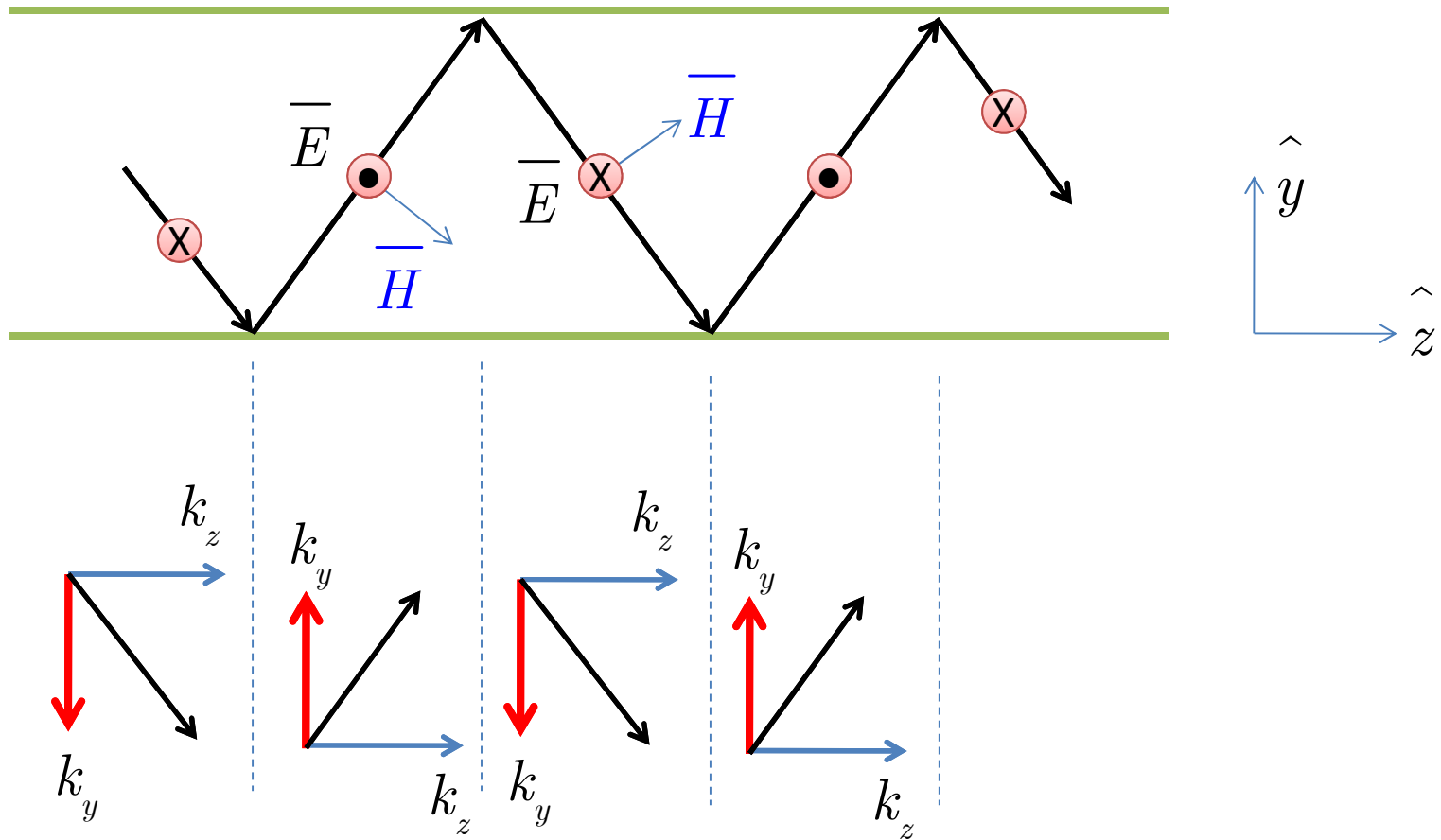




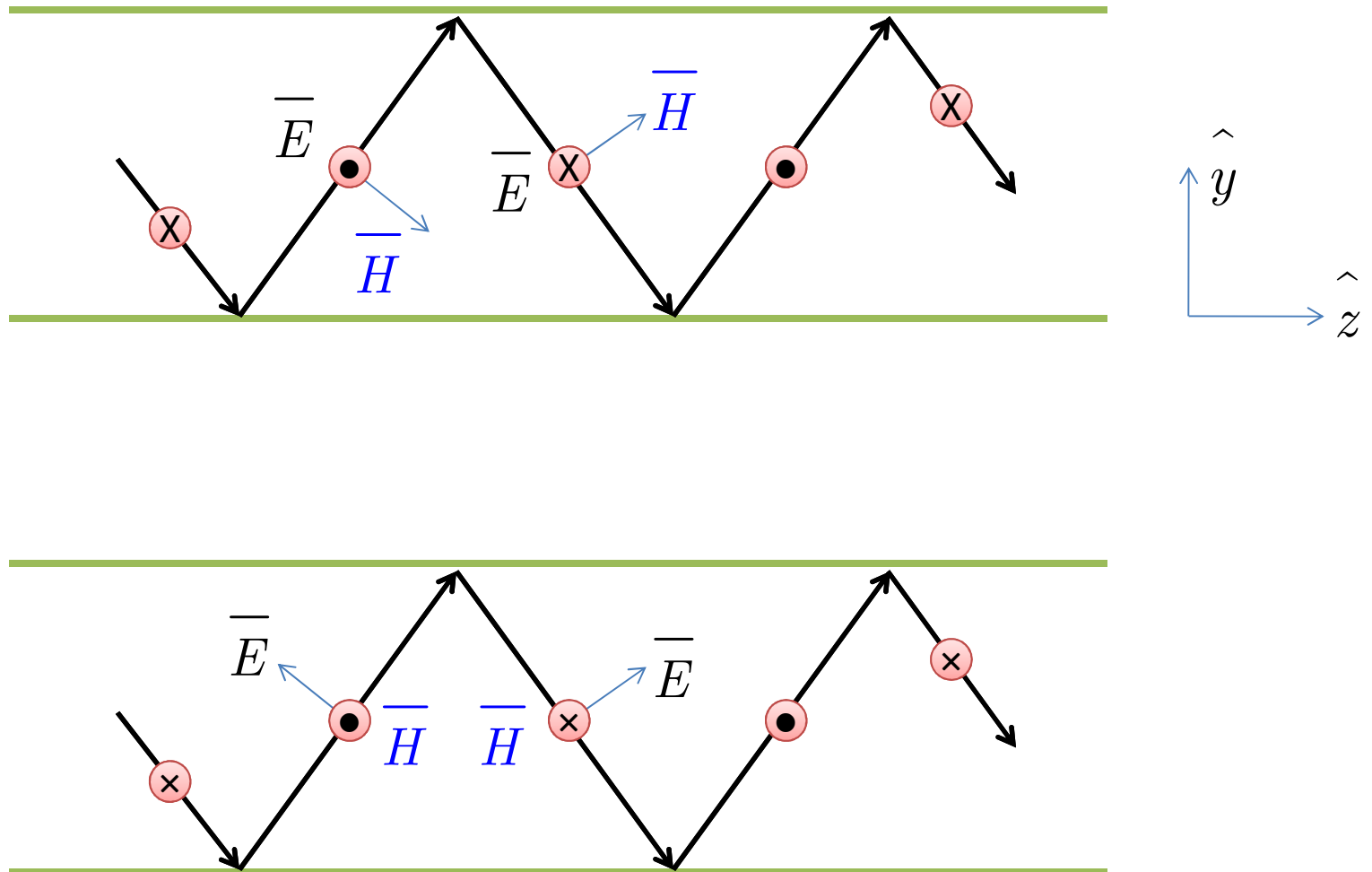
# Constante de propagação vs. frequência



# Modelo de propagação modo TE (2)



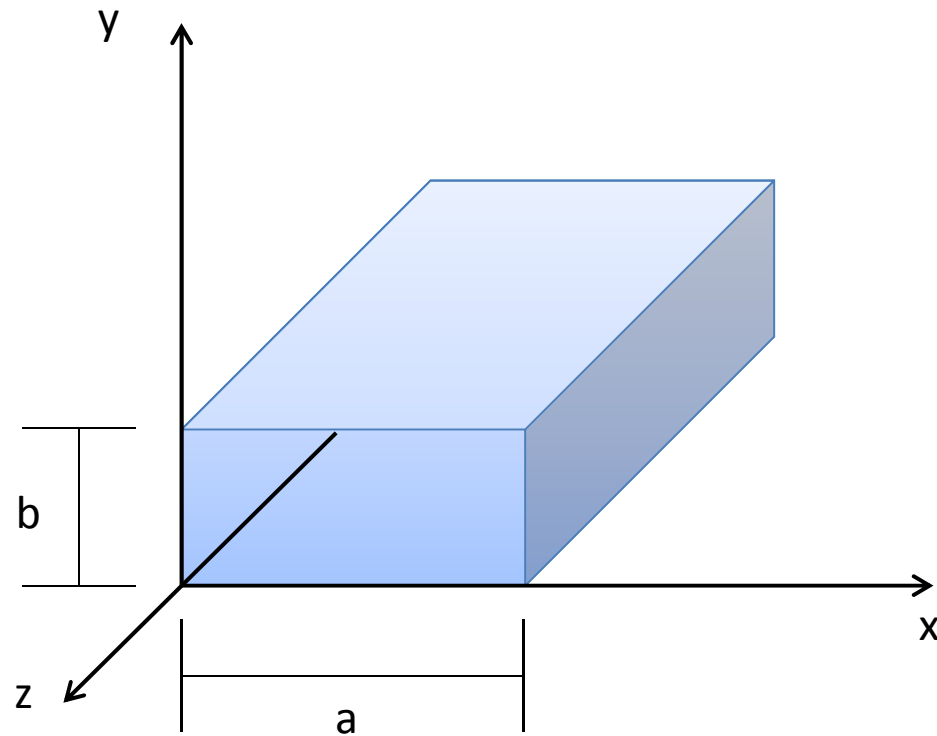
# Modelo de propagação modos TE e TM



# GUIA DE ONDA METÁLICO DE SEÇÃO RETANGULAR

# Guia metálico e sistema de coordenadas

---



# Relação de dispersão-1

---

Temos que  $k_x = \frac{m\pi}{a}$   $m = 0, 1, 2, \dots$  e  $k_y = \frac{n\pi}{b}$   $n = 0, 1, 2, \dots$

equação de separação  $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_z^2 \equiv k_1^2$

$$e \quad k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]$$

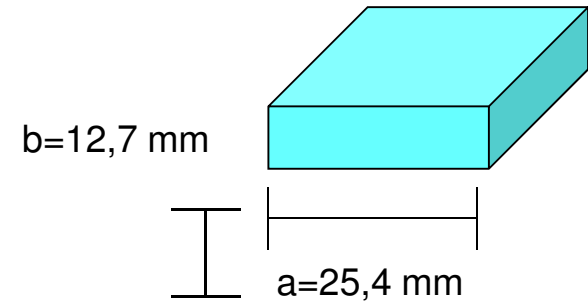
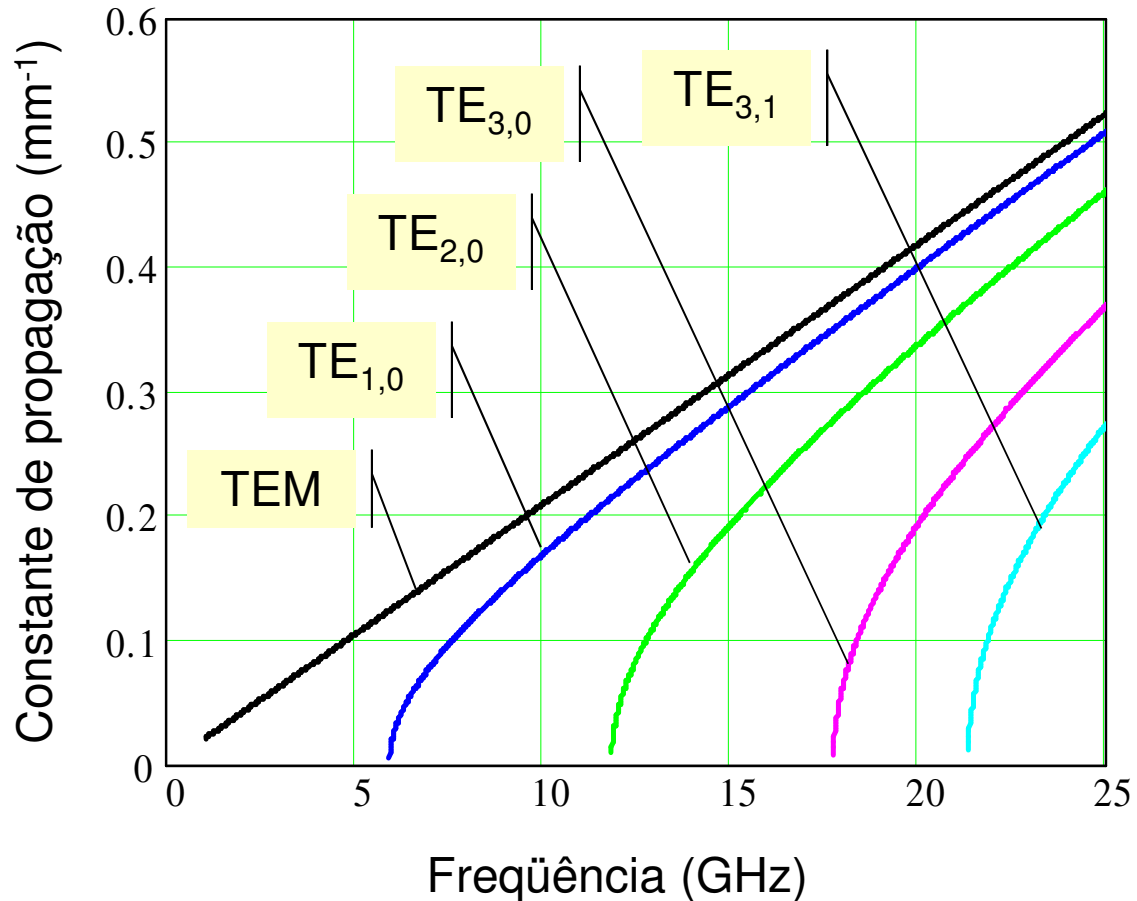
Relação  
(equação)  
de dispersão

Para cada conjunto de inteiros **(m,n)** existe uma solução (modo) da equação de onda.

Os modos são denominados **TE<sub>m,n</sub>**

# Relação de dispersão-2

Modos TEM e TE<sub>m,n</sub>



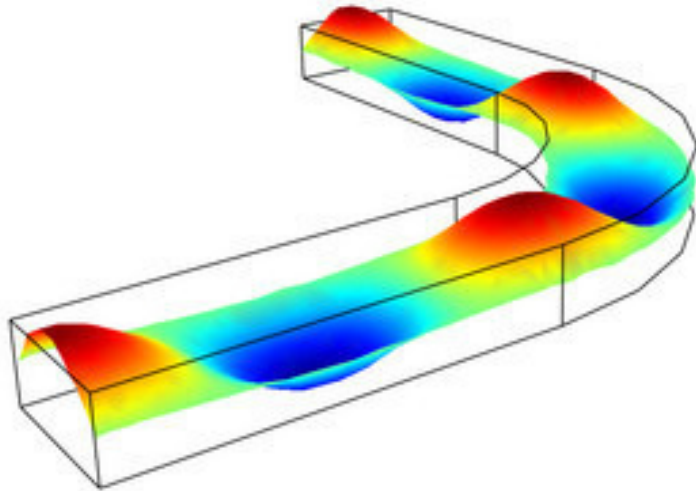
Relação de dispersão

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left[ \left( \frac{m \pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n \pi}{b} \right)^2 \right]$$

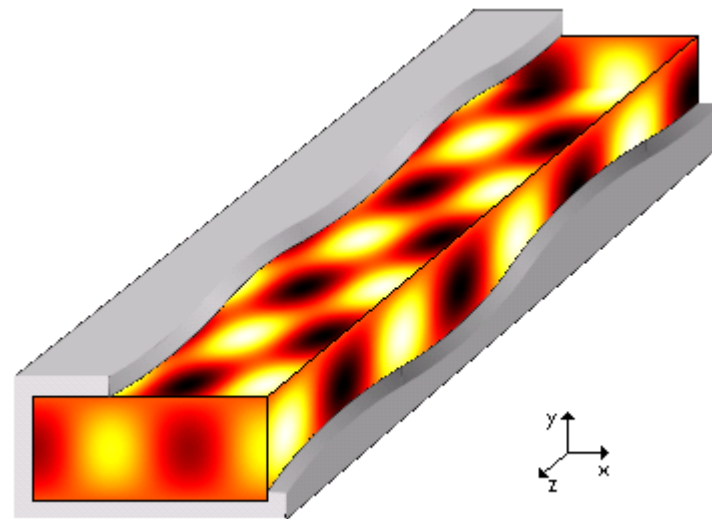
$$\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0$$

# Campo elétrico

---



[www.comsol.com/showroom/gallery/lrgthumb/1421/4ddf41e2.jpg](http://www.comsol.com/showroom/gallery/lrgthumb/1421/4ddf41e2.jpg)

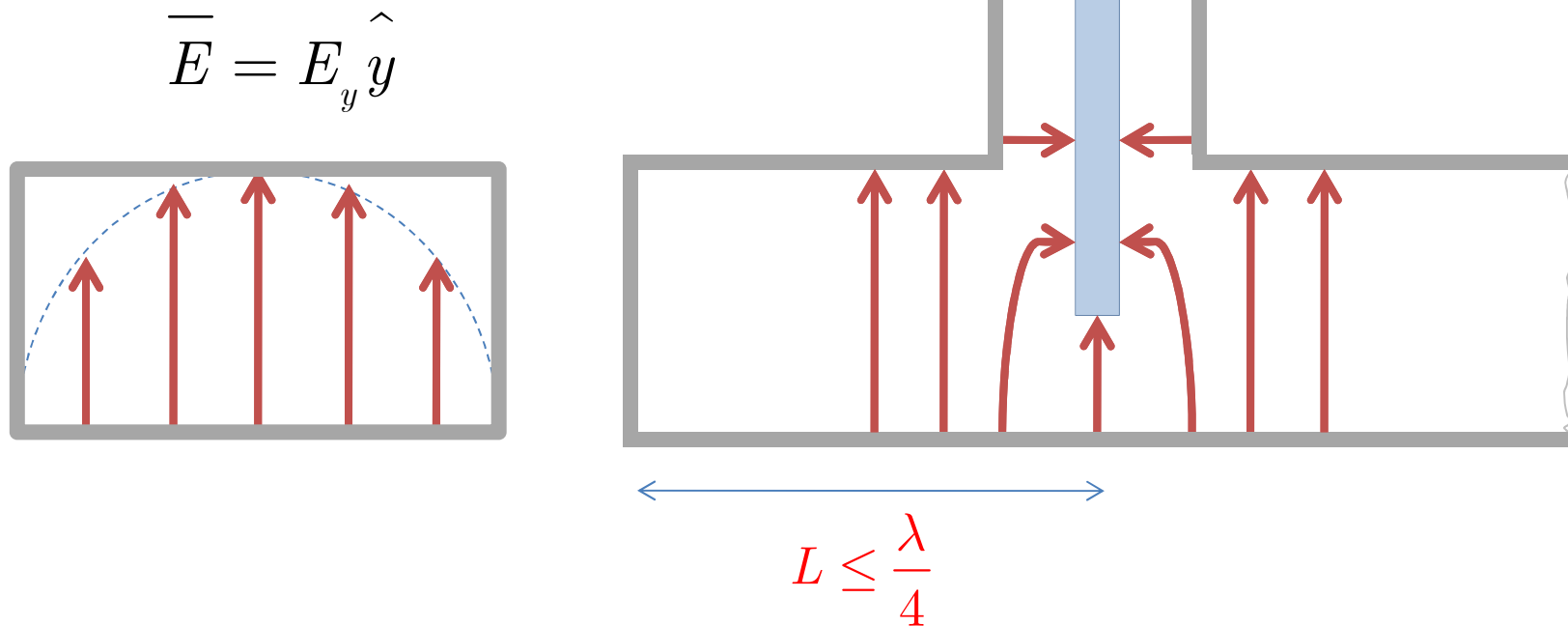


TE<sub>31</sub>, 32 GHz

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Waveguide\\_x\\_EM\\_rect\\_TE31.gif](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Waveguide_x_EM_rect_TE31.gif)

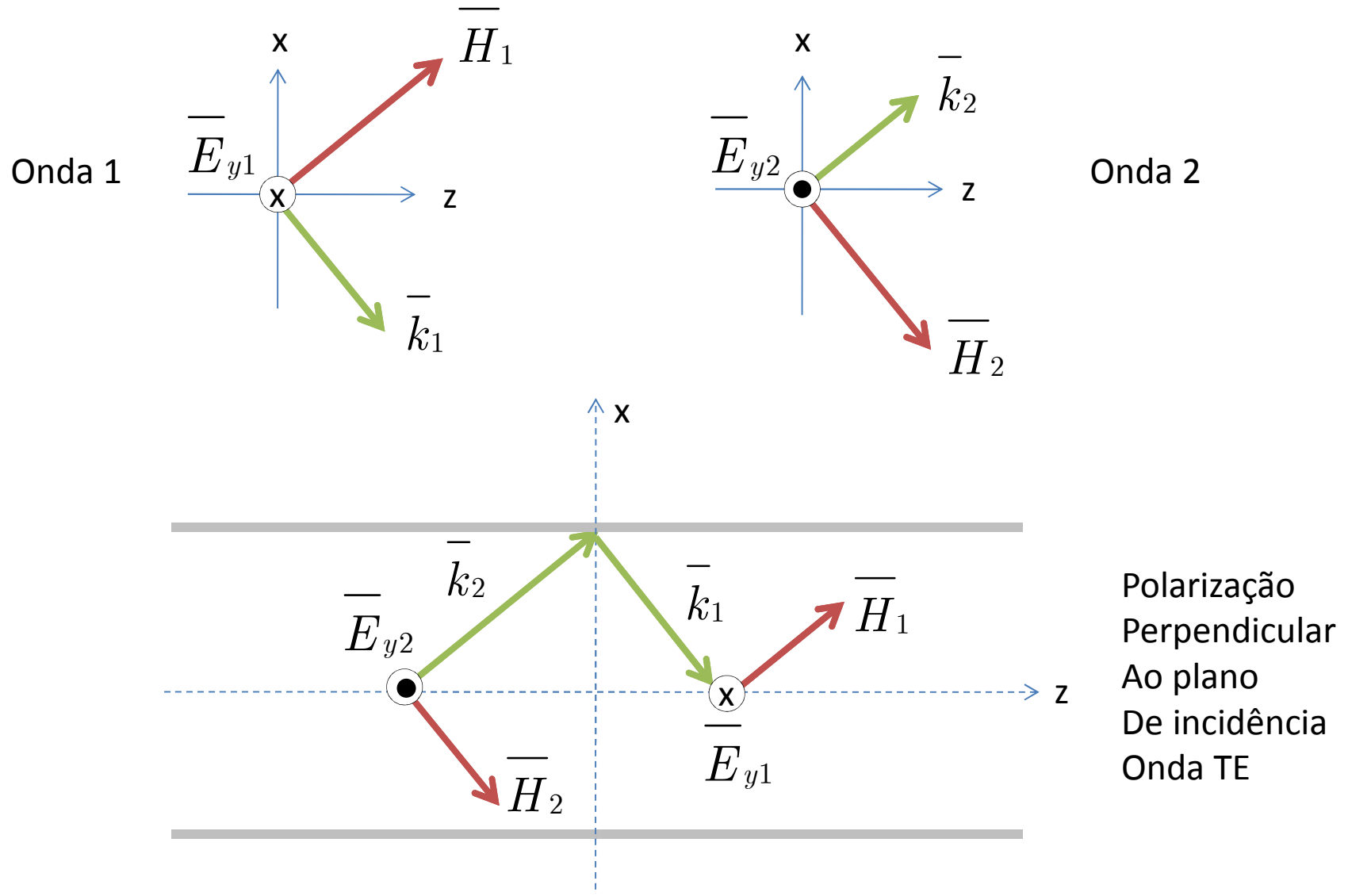


# Excitação do modo $TE_{10}$

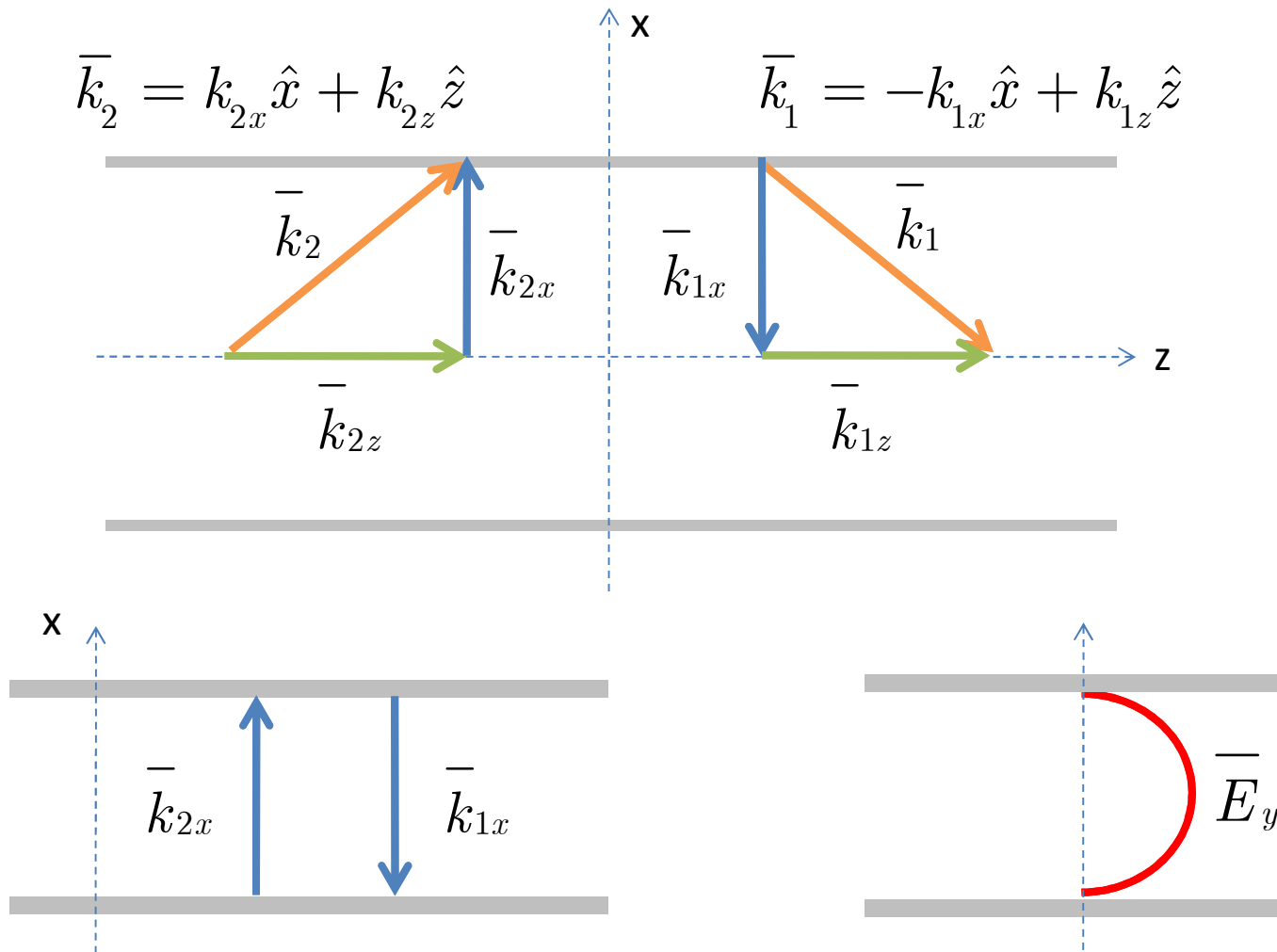


$90^\circ$  (até parede) +  $180^\circ$  (reflexão parede)  
+  $90^\circ$  (retornando para a fonte) =  $360^\circ$  (em fase)

# Ondas incidente e refletida



# Padrão onda estacionária

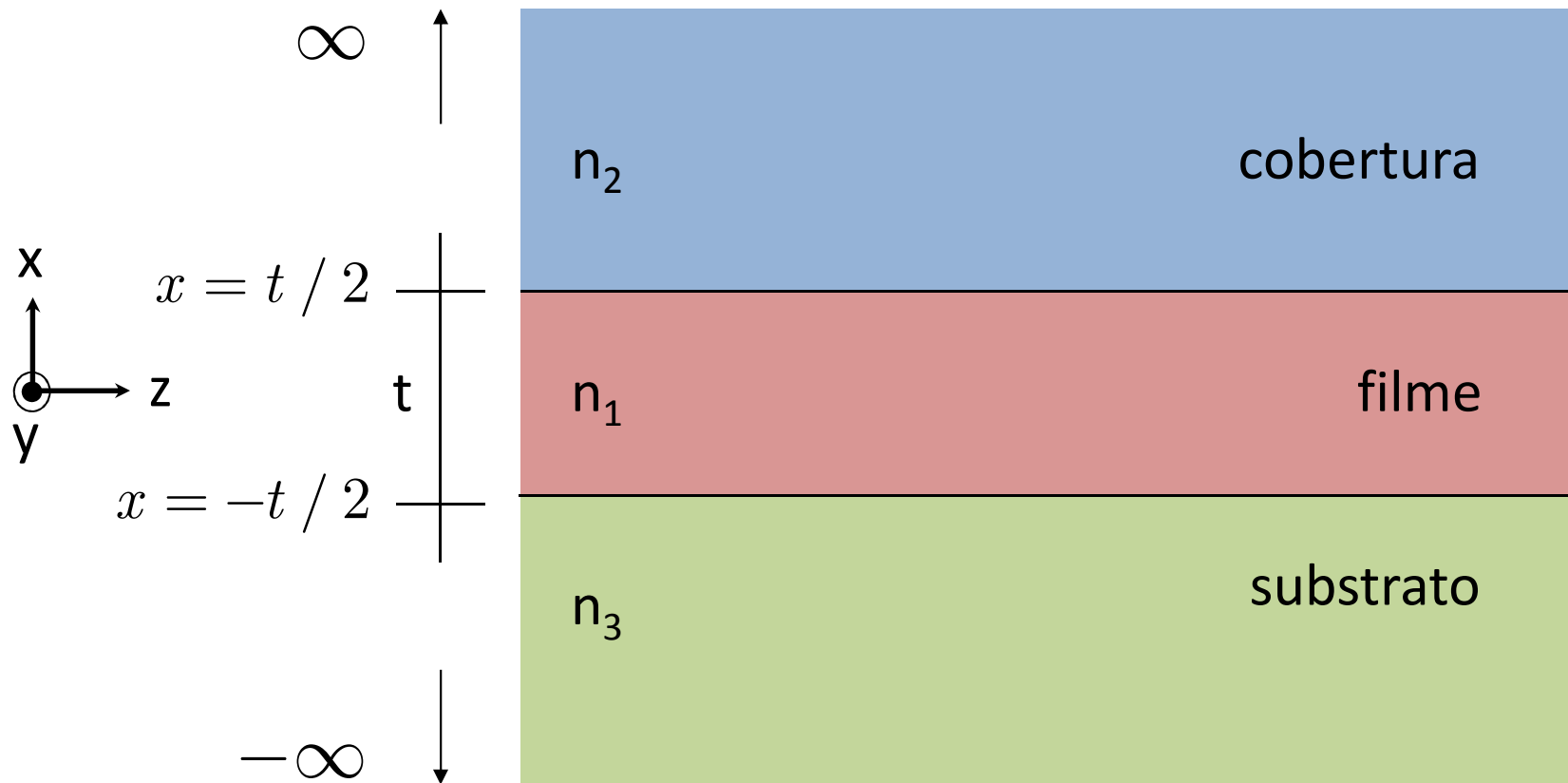


Polarização perpendicular ao plano de incidência: Onda TE

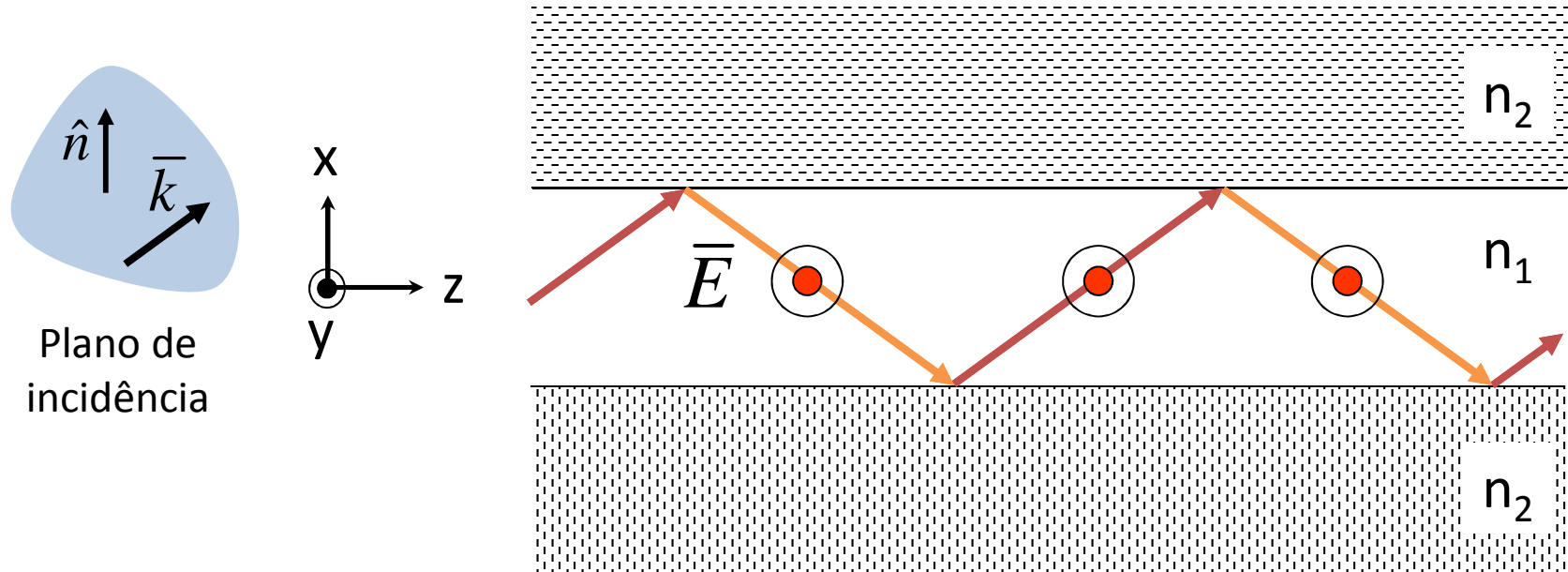
# GUIA DE ONDA DIELÉTRICO PLANAR

# Guia planar

---

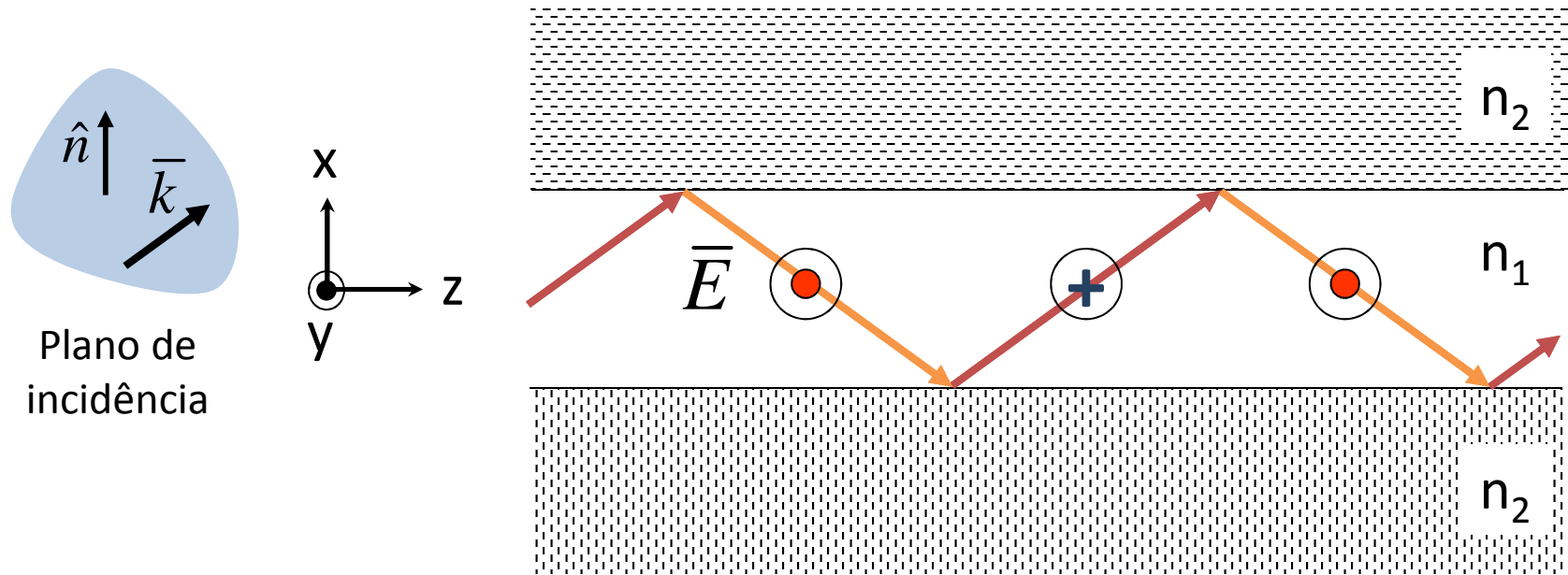


# Perpendicularmente polarizada: mesma fase



$$\Phi(x, z) = A \left[ \exp(jk_x x) + \exp(-jk_x x) \right] \exp(-jk_z z), \text{ para } R = 1$$

# Perpendicularmente polarizada: inversão de fase



$$\Phi(x, z) = A \left[ \exp(jk_x x) - \exp(-jk_x x) \right] \exp(-jk_z z), \text{ para } R = -1$$

# Modos TE e TM

---

2 configurações de campo eletromagnético

$$\text{TE } E_y, H_x, H_z$$

$$\text{TM } H_y, E_x, E_z$$

Modos TE e TM simétricos: campos proporcionais a  $\cos(k_x x)$

Modos TE e TM antissimétricos: campos proporcionais a  $\text{sen}(k_x x)$



# Resumo

---

$Y = X \operatorname{tg}(X)$ , modos TE simétricos

$Y = - (X) \operatorname{cotg}(X)$ , modos TE antissimétricos

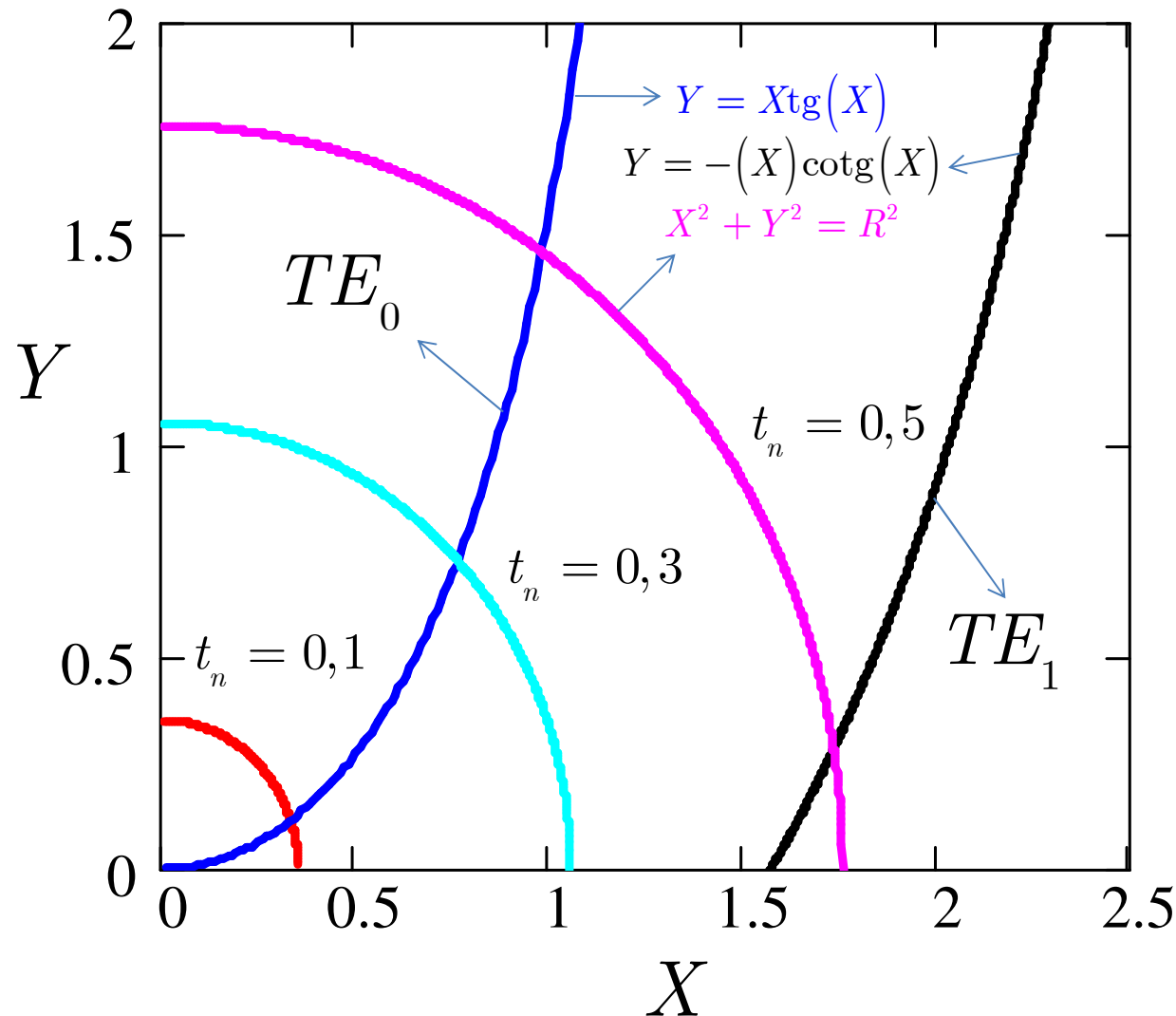
$X^2 + Y^2 = R^2$ , equação auxiliar

$$k_x \frac{t}{2} \equiv X, \quad \alpha_x \frac{t}{2} \equiv Y, \quad R = \pi t_n \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}$$

$$t_n \equiv \frac{t}{\lambda_0}, \quad \frac{k_z}{k_0} \equiv n_{ef}$$

$$k_x = \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) \sqrt{n_1^2 - n_{ef}^2}, \quad \alpha_x = \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) \sqrt{n_{ef}^2 - n_2^2}$$

# Diagrama de dispersão (1)



$$Y = X \operatorname{tg}(X)$$

$$Y = -(X) \operatorname{cotg}(X)$$

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

$$k_x \frac{t}{2} \equiv X, \quad \alpha_x \frac{t}{2} \equiv Y$$

$$R = \pi t_n \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}$$

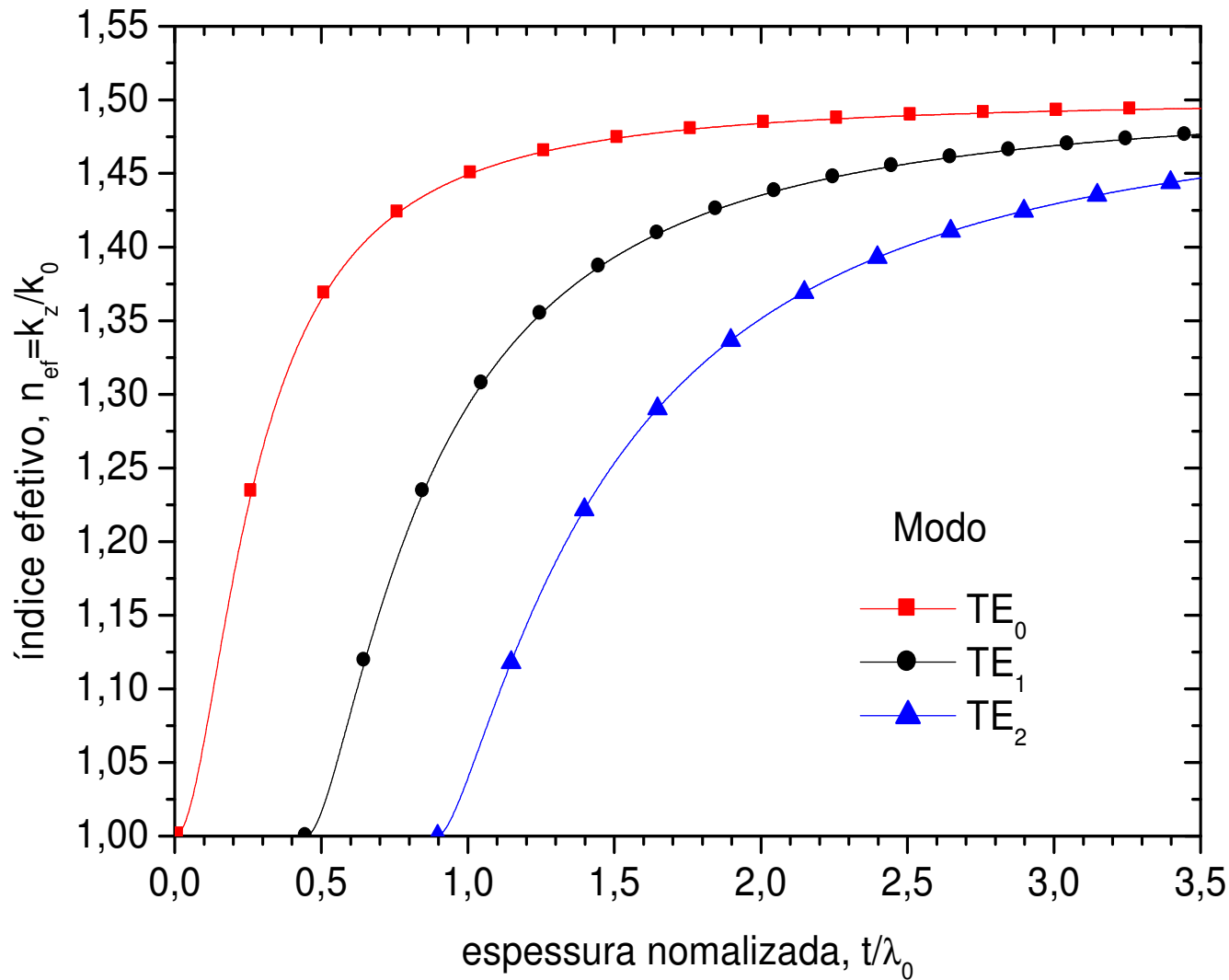
$$t_n \equiv \frac{t}{\lambda_0}, \quad \frac{k_z}{k_0} \equiv n_{ef}$$

$$X = \pi t_n \sqrt{n_1^2 - n_{ef}^2}$$

$$Y = \pi t_n \sqrt{n_{ef}^2 - n_2^2}$$

$$n_1 = 1,5 ; n_2 = 1,0$$

# Diagrama de dispersão (2)



$$Y = X \operatorname{tg}(X)$$

$$Y = -(X) \operatorname{cotg}(X)$$

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

$$k_x \frac{t}{2} \equiv X, \quad \alpha_x \frac{t}{2} \equiv Y$$

$$R = \pi t_n \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}$$

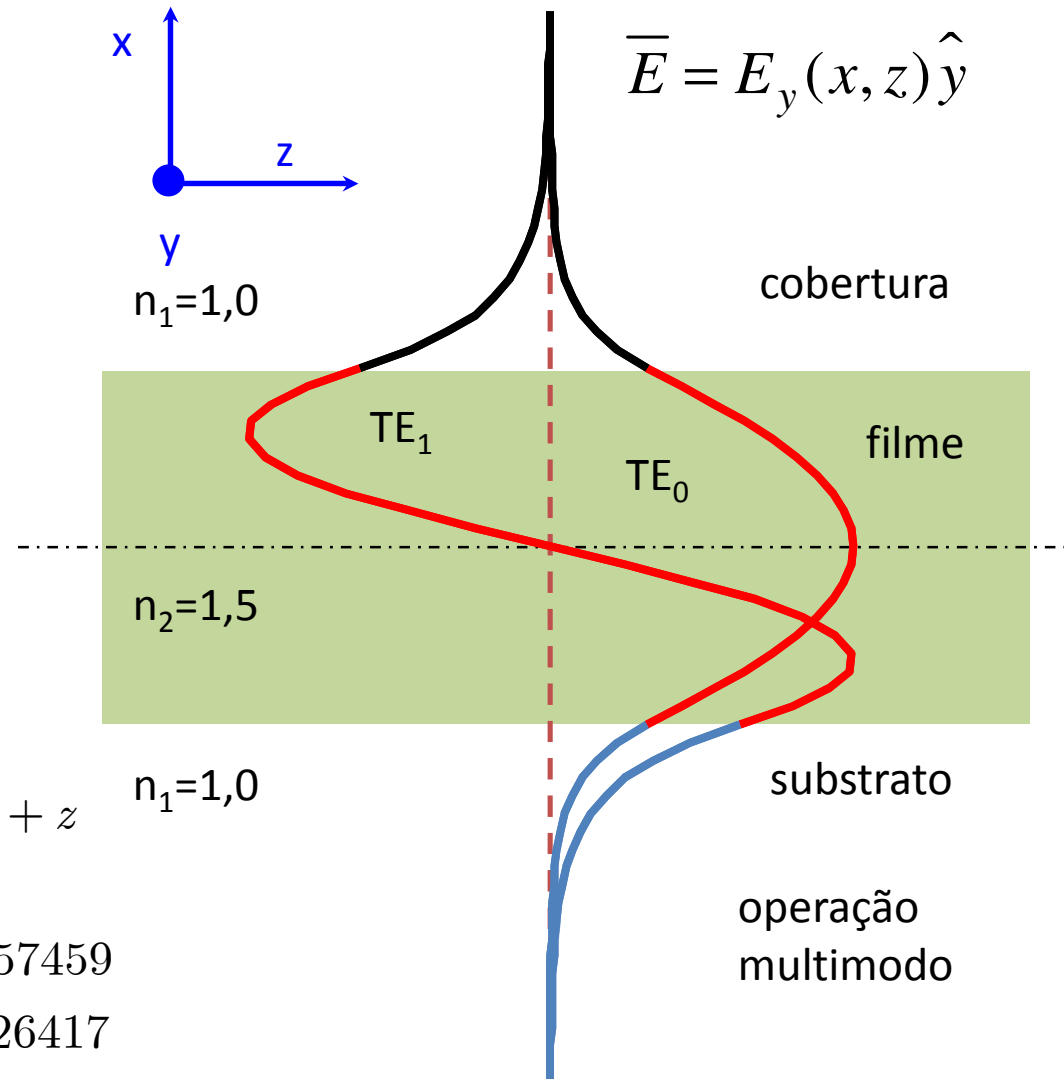
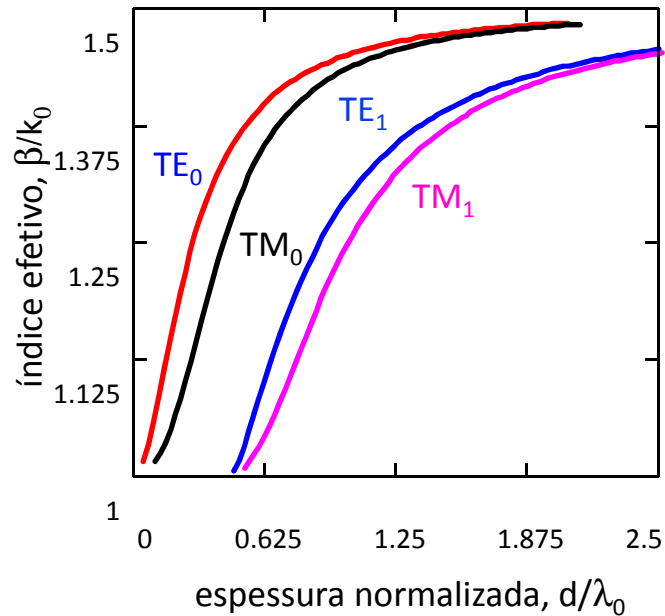
$$t_n \equiv \frac{t}{\lambda_0}, \quad \frac{k_z}{k_0} \equiv n_{ef}$$

$$X = \pi t_n \sqrt{n_1^2 - n_{ef}^2}$$

$$Y = \pi t_n \sqrt{n_{ef}^2 - n_2^2}$$

$$n_1 = 1,5; \quad n_2 = 1,0$$

# Guia simétrico: campo elétrico dos modos TE<sub>0</sub> e TE<sub>1</sub>



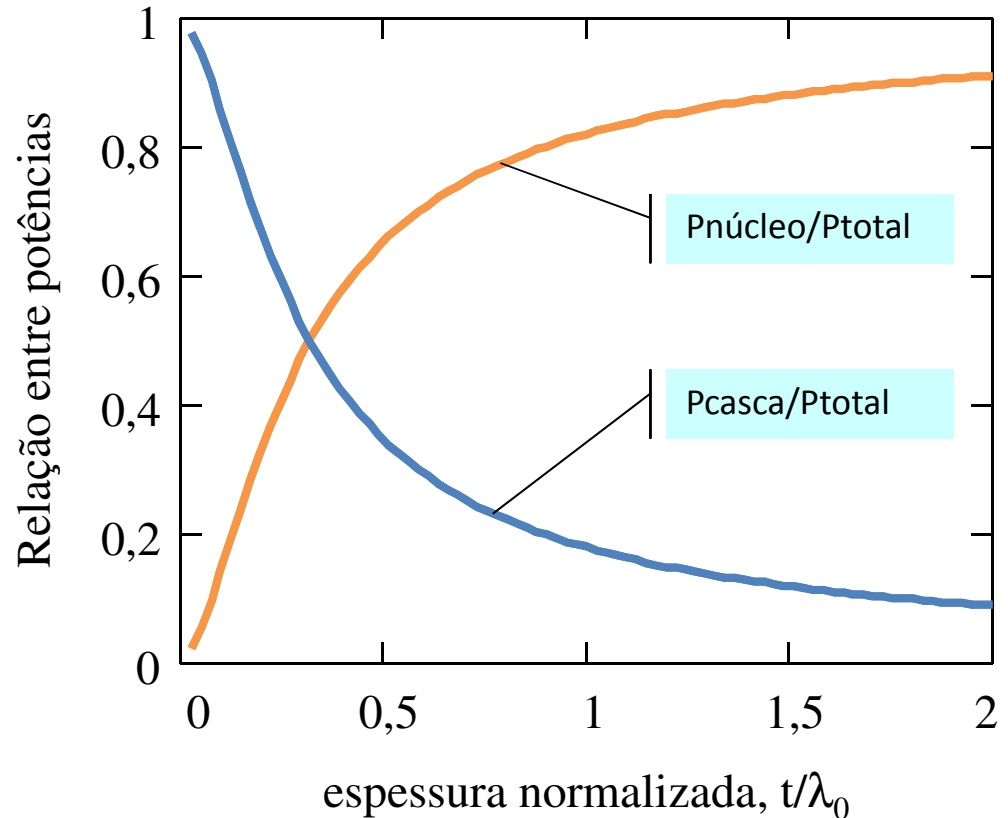
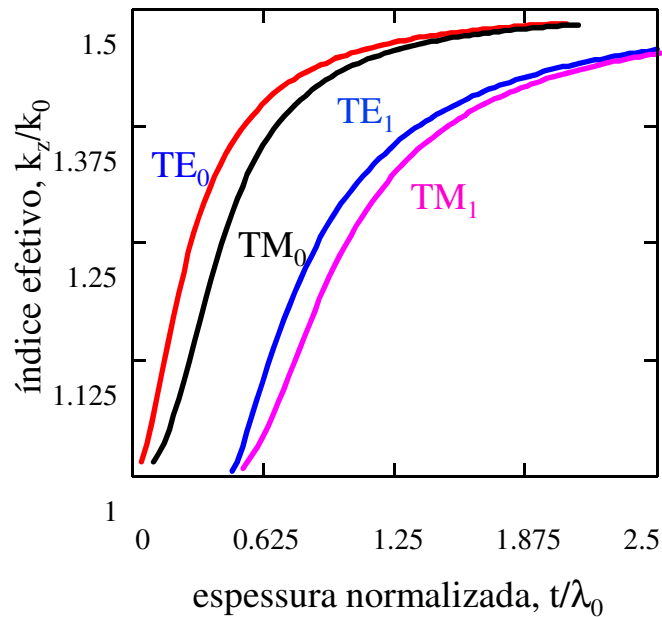
Modo TE<sub>0</sub> e TE<sub>1</sub>, propagação  $+z$

$$k_0 = 2\pi / \lambda_0$$

$$\text{TE}_0 : t / \lambda_0 = 1,12, k_z / k_0 = 1,457459$$

$$\text{TE}_1 : t / \lambda_0 = 1,12, k_z / k_0 = 1,326417$$

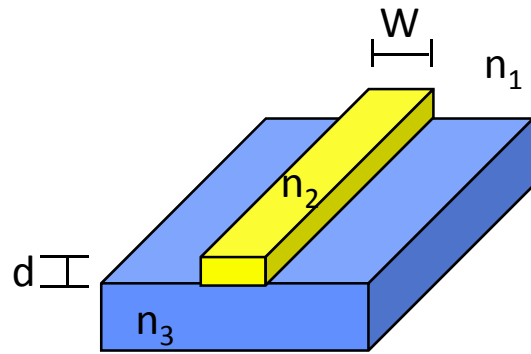
# Guia simétrico: relação entre as potências



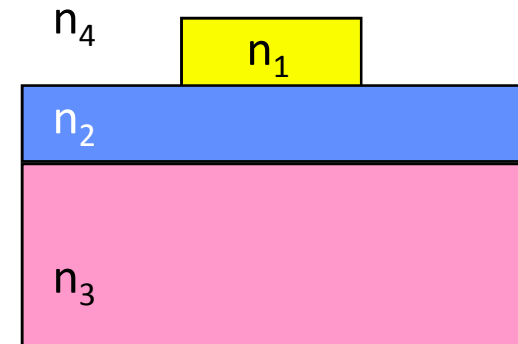
$n_2=1,0$	cobertura
$N_1=1,5$	filme
$N_2=1,0$	substrato

Modo  $TE_0$ , propagação  $+z$   
 $k_0 = 2\pi / \lambda_0$

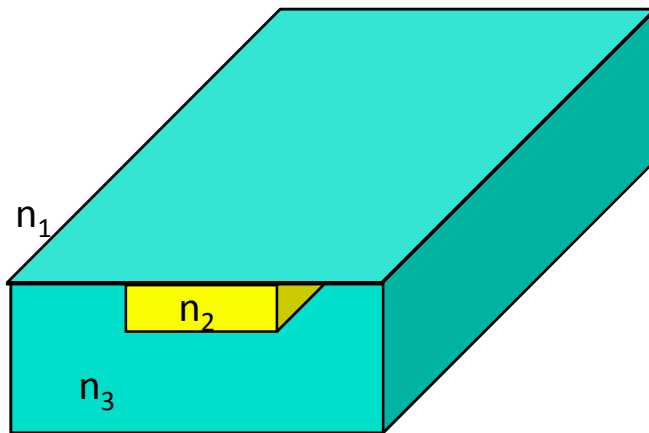
# Geometrias tridimensionais



fita carregada  
 $[n_2 > (n_1, n_3) > n_4]$



fita ( $n_2 > n_3 > n_1$ )



rib  
 $(n_2 > n_3 > n_1)$

enterrado ( $n_2 > n_3 > n_1$ )

