Linhas de transmissão
Resumo

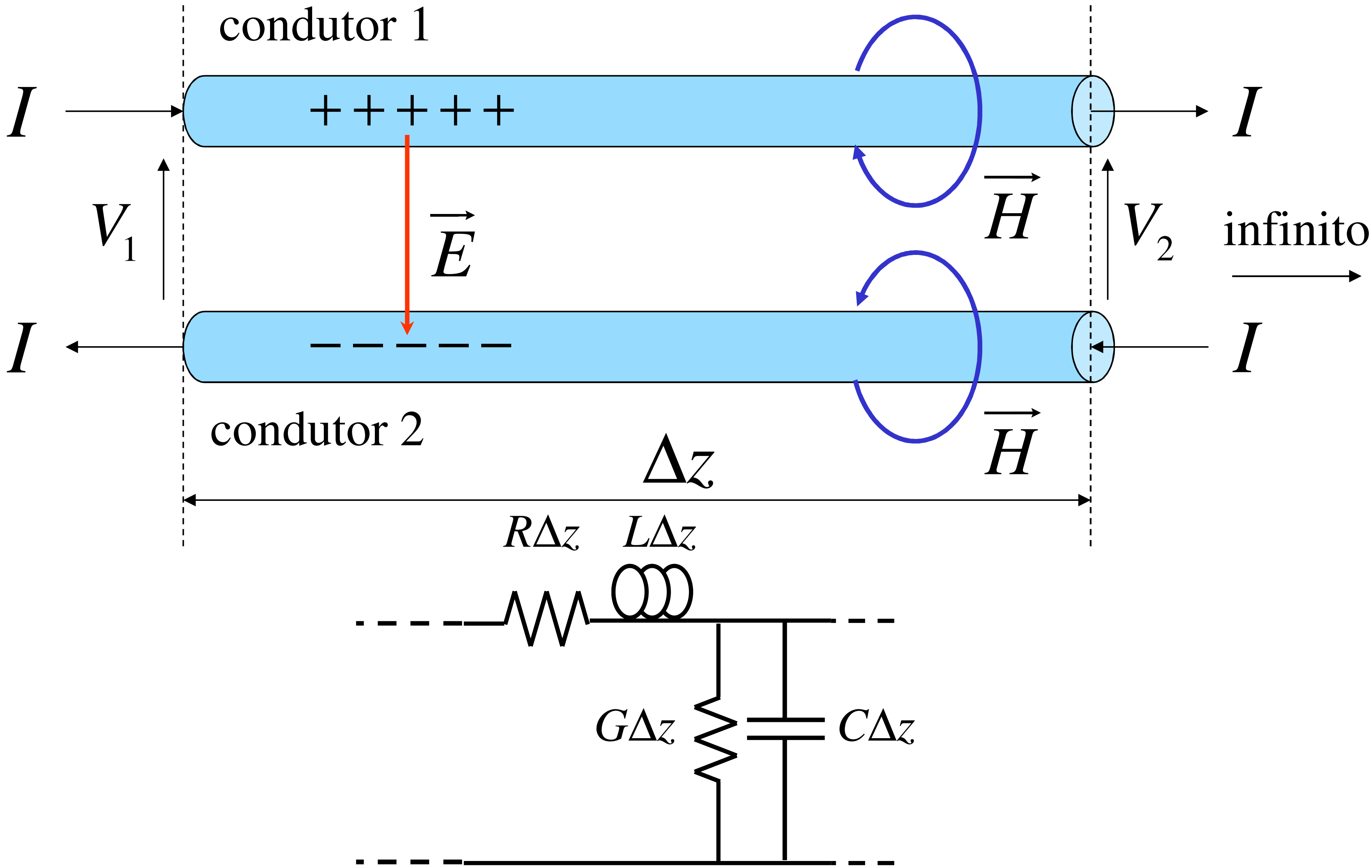
SEL 317 Sistemas de comunicação

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Atenção!

- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia de computação.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

Modelo de linha de transmissão



Equação de onda-1

Equação de onda para tensão

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + \left(RC + LG\right)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda para corrente

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + \left(RC + LG\right)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Sistemas que obedecem a estas equações podem ser utilizados para transmitir informações sob a forma de onda eletromagnética

Equação de onda-2

Linha sem perdas, *R=G=0*
Equação de onda para tensão

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda para corrente

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Sistemas que obedecem a estas equações podem ser utilizados para transmitir informações sob a forma de onda eletromagnética

Representação complexa-1

tensão instantânea real

$$\mathcal{V}\left(z,t\right)=V_0\cos\left(\omega t-kz+\phi\right)$$

tensão complexa instantânea

$$V\left(z,t\right)=V_0\exp\left(j\phi\right)\exp\left(-jkz\right)\exp\left(j\omega t\right)$$

tensão fasorial

$$V\left(z\right)=V_0\exp\left(j\phi\right)\exp\left(-jkz\right)$$

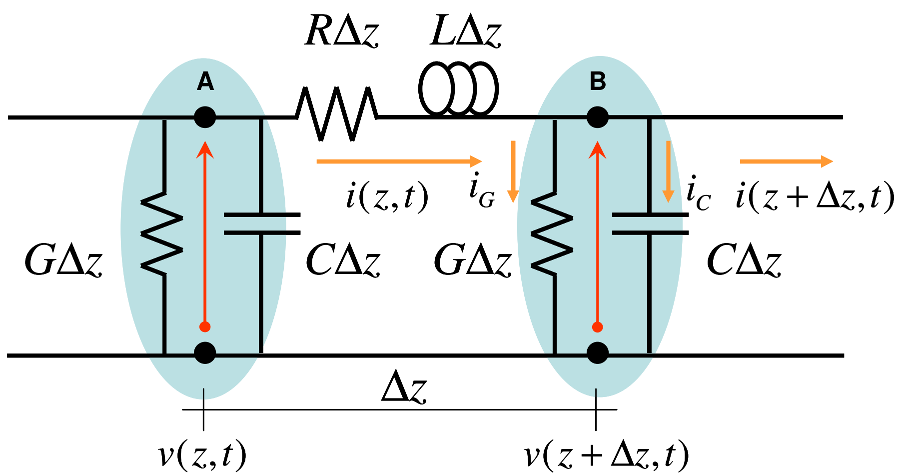
Representação complexa-2

$$\frac{dV(z)}{dz} = -ZI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -YV(z)$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = k^2V(z)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = k^2I(z)$$



$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = G + j\omega C$$

$$ZY = \left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)$$

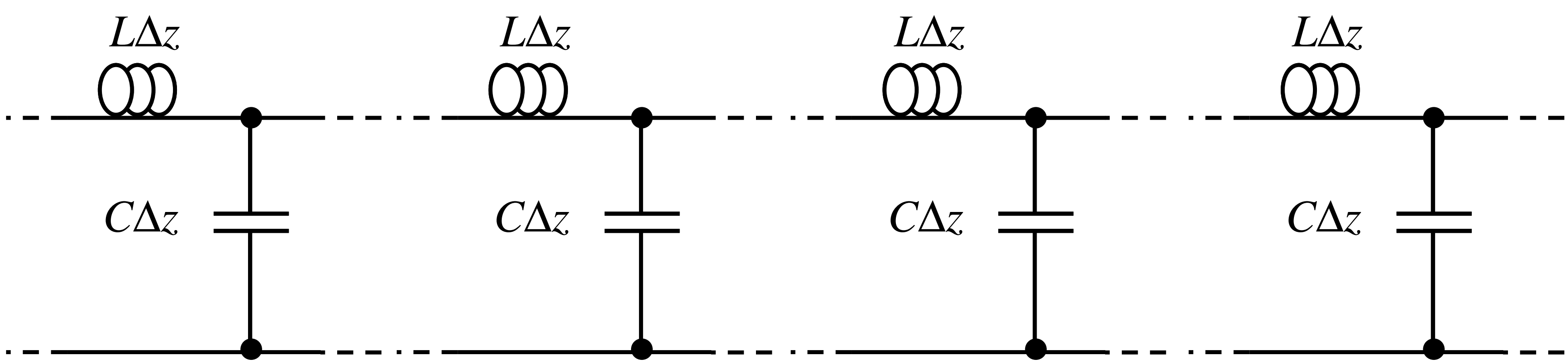
$$k^2 = ZY$$

Tensão e corrente em linha sem perdas

$$V\left(z\right) = V^{+}e^{-jk_I z} + V^{-}e^{+jk_I z}$$

$$I(z) = \frac{V^{+}}{Z_0}e^{-jk_I z} - \frac{V^{-}}{Z_0}e^{-jk_I z}$$

k_I : constante de fase, constante de propagação



Linha de transmissão sem perdas

Impedância característica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \ ohm$$

Constante de fase

$$k = \omega\sqrt{LC} \ m^{-1}$$

Modelo completo

Impedância "característica"

$$Z_0, p = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \text{ ohm}$$

Constante de propagação

$$k = \sqrt{ZY} = k_R + jk_I \ \text{m}^{-1}$$

$$ZY = \left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)$$

Aproximação para a Impedância Característica

$$\omega \,/\, 2\pi > 100 \ \ \text{kHz}$$

$$Z_{0,p} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\omega L \gg R$$

$$\omega C \gg G$$

$$Z_{0,af} \equiv Z_0 \simeq \sqrt{L \,/\, C}$$

$$\omega \,/\, 2\pi \simeq 1 \ \ \text{kHz}$$

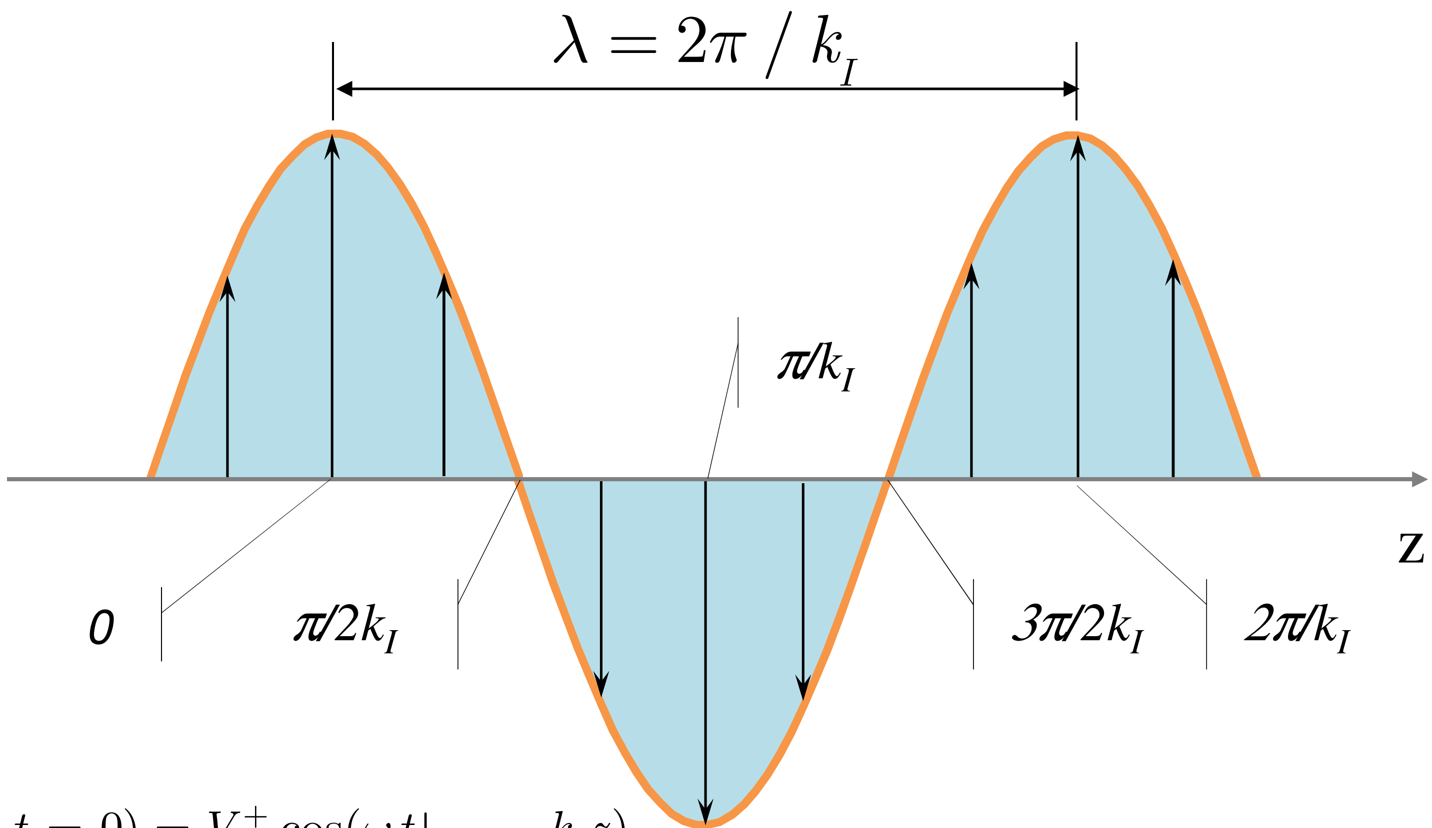
$$Z_{0,p} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\omega L \ll R$$

$$\omega C \ll G$$

$$Z_{0,bf} \simeq \sqrt{R \,/\, G}$$

Comprimento de onda



$$v^+(z,t=0) = V^+\cos(\omega t|_{t=0} - k_I z)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} - 0 \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k : constante de propagação
[rad/unid. compr.] ou [(unid. compr.)$^{-1}$]

Constante de propagação e atenuação

$$V^+(z) = V^+ e^{-kz} = V^+ e^{-\left(k_R + jk_I\right)z}$$

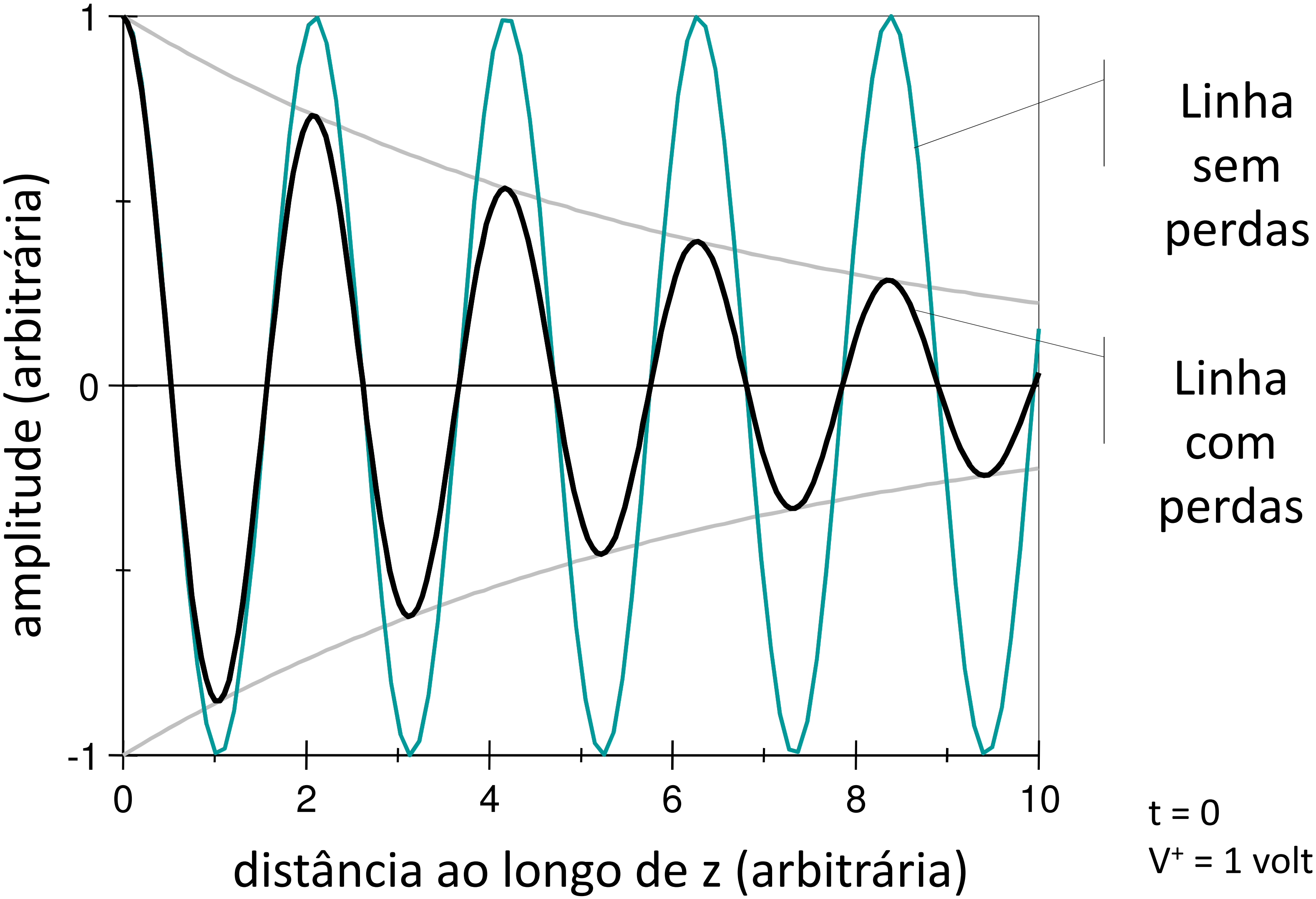
$$V^+(z) = V^+ e^{-k_R z} e^{-jk_I z}$$

$$v^+(z,t) = \underbrace{V^+ e^{-k_R z}}_{\text{Amplitude decrescendo exponencialmente}} \cos\left(\omega t - k_I z\right)$$

Amplitude decrescendo
exponencialmente

k_R : constante de atenuação: [neper/metro] ou [dB/metro]
k_I : constante de fase: [rad/metro] ou [m^{-1}]

Onda em linha com e sem perdas



t = 0

V^+ = 1 volt

Coeficiente de Reflexão

$$\Gamma\left(z\right) = \frac{V^{-}\left(z\right)}{V^{+}\left(z\right)} = \Gamma_0 e^{2kz}$$

$$R = G = 0$$

$$\Gamma\left(z\right) = \left|\Gamma_0\right| \exp\left[j\left(2k_I z + \phi_r\right)\right]$$

$$\Gamma_0 = \left|\Gamma_0\right| \exp\left(j\phi_r\right) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Impedância ao longo de linha de transmissão

Sem perdas

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0 \operatorname{tg}(k_I z)}{Z_0 - jZ_L \operatorname{tg}(k_I z)} \;, \; z \leq 0$$

Modelo completo

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - Z_0 \operatorname{tgh}(kz)}{Z_0 - Z_L \operatorname{tgh}(kz)}, \; z \leq 0$$

com $k = k_R + jk_I$

Relação de Onda Estacionária (ROE)

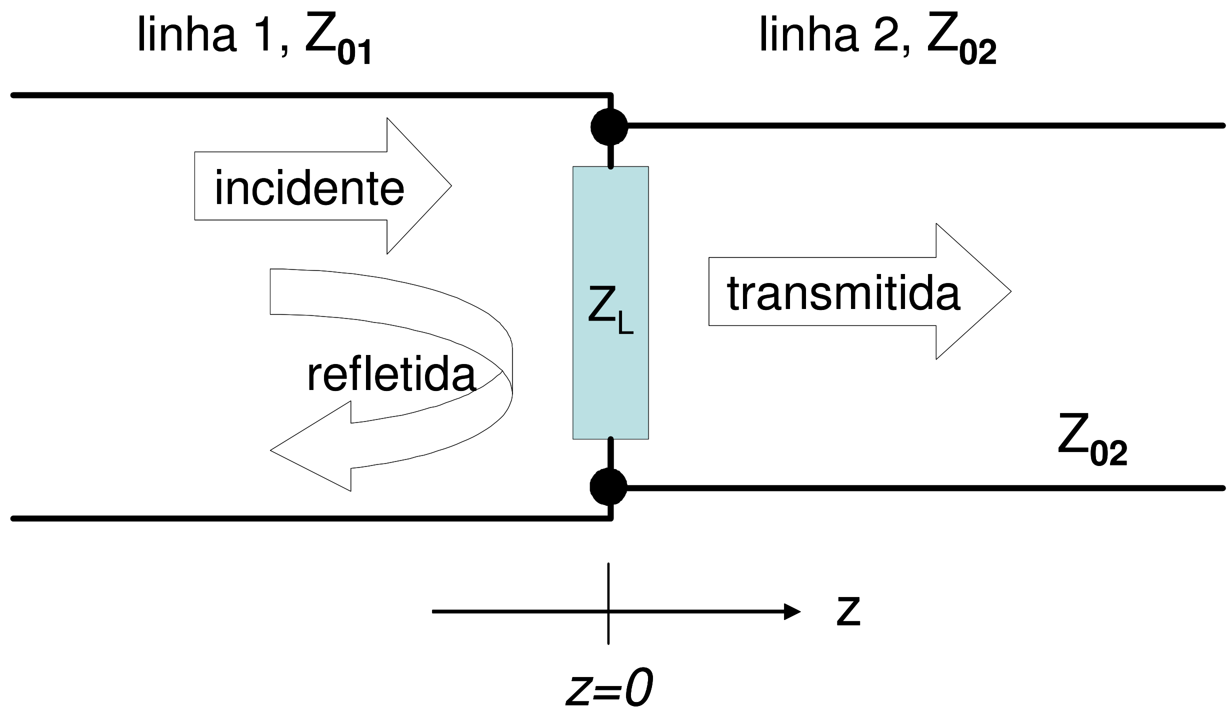
$$R0E = \frac{\left|V(z)\right|_{\max}}{\left|V(z)\right|_{\min}} = \frac{\left|V^+\right|\left(1+\left|\Gamma_0\right|\right)}{\left|V^+\right|\left(1-\left|\Gamma_0\right|\right)} = \frac{\left(1+\left|\Gamma_0\right|\right)}{\left(1-\left|\Gamma_0\right|\right)}$$

$|\Gamma_0| = 0$ $\quad R0E = 1$ $\quad$ Casamento de impedância

$|\Gamma_0| = 1$ $\quad R0E \rightarrow \infty$ $\quad$ Reflexão total

$$R0E \geq 1$$

Coeficiente de transmissão



coeficiente de reflexão

$$\Gamma\left(z\right) = \frac{V^{-}\left(z\right)}{V^{+}\left(z\right)} = \Gamma_0 e^{2kz}$$

coeficiente de transmissão

$$\tau\left(z\right) = \frac{V_t^{+}\left(z\right)}{V^{+}\left(z\right)}$$

Coeficientes de transmissão e reflexão

$$\Gamma_0 = \frac{Z_{//} - Z_{01}}{Z_{//} + Z_{01}}$$

$$\tau_0 = \frac{2Z_{//}}{Z_{//} + Z_{01}}$$

$$Z_{\|} = Z_{02} Z_L \,/\, \left(Z_{02} + Z_L \right)$$

associação em paralelo entre Z_{02} e Z_L

Potência média transportada pela onda-1

A potência instantânea transportada pela onda incidente é

$$p^{+}(z,t) = v^{+}(z,t)i^{+}(z,t) \quad \mathrm{W}$$

A potência média transportada pela onda incidente é

$$p_m^{+} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V^{+}(z)\left[I^{+}(z)\right]^{*}\right\} \ \mathrm{W}$$

$$p_m^{+} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\left|V^{+}(z)\right|^{2}}{Z_{01}}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\left|V^{+}\right|^{2}}{Z_{01}} \ \mathrm{W}$$

Potência média transportada pela onda-2

A potência média transportada pela onda refletida é

$$p_m^- = \frac{|\Gamma|^2 |V^+|^2}{2Z_{01}} \quad \mathrm{W}$$

A potência média transportada pela onda transmitida é

$$p_{m,t}^+ = \frac{|\tau|^2 |V_t^+|^2}{2Z_{02}} \quad \mathrm{W}$$