COMPLEMENTOS DE MECÂNICA CLÁSSICA

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS-2014

1) Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central $F = -\frac{k}{r^2}$ com k>0. No ponto P, que dista **a** da origem, sua velocidade é perpendicular a $\vec{r}$ e vale $v_0 = \sqrt{\frac{k}{2ma}}$.

a) Esboce o gráfico do potencial efetivo em função de r, indicando o ponto P.
b) Qual é a energia cinética da partícula no ponto de máxima aproximação da origem?
c) O movimento está contido numa região finita do espaço? Justifique.
d) Calcule a frequência de pequenas oscilações radiais em torno do ponto de mínimo e compare com a frequência de revolução (movimento circular). O que se pode concluir sobre as órbitas?

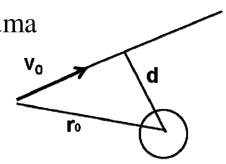
2) Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central cujo potencial é dado por $V(r) = Kr^4$, com K>0.

a) Para que valores da energia e do momento angular a órbita será um círculo de raio **a** em torno da origem?
b) Qual será o período do movimento circular?
c) Se a partícula for ligeiramente afastada dessa órbita, qual será o período de pequenas oscilações em torno de **a**? A órbita será fechada?

3) Considere um corpo de massa m sujeito à força gravitacional terrestre. O corpo é lançado de um ponto que dista $\vec{r}_0$ do centro da Terra com uma velocidade v_0 cuja direção é perpendicular à linha que liga o corpo ao centro da Terra. Admita que o potencial gravitacional seja nulo no infinito, isto é $V(\infty)=0$.

a) Determine a dependência radial do potencial efetivo $V_{ef}(r)$, em função de M_T, G, m, v_0 e r_0 e a partir de $V_{ef}(r)$ determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja circular.
b) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja parabólica.
c) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja elíptica.
d) Determine uma relação envolvendo v_0 e r_0 para que a órbita seja hiperbólica.
e) Esboce o gráfico de $V_{ef}(r)$ indicando cada um dos casos acima.

4) Descobre-se um asteroide que está a uma distância $\mathbf{r_0=2{,}0 \times 10^9}$ **m** da Terra com uma velocidade de $\mathbf{v_0=1{,}0 \times 10^4}$ **m/s**. A distância entre a trajetória do asteróide nesse ponto e o centro da Terra é $\mathbf{d=3 \times 10^7}$**m**. A que distância mínima do centro da Terra passará o asteroide?



5) Observa-se um cometa a uma distância de $1{,}00 \times 10^8$ km do Sol, viajando em direção a ele à velocidade de 51,6 km por segundo, num ângulo de 45^0 em relação ao raio do Sol. Escreva a equação para a órbita do cometa, em coordenadas polares, com a origem no Sol e o eixo x passando pela posição em que o cometa foi observado. Considere a massa solar como $2{,}00 \times 10^{30}$ kg.

6) A distância de periélio (mais próxima) ao Sol do planeta Marte é de $2{,}06 \times 10^8$ km, e a distância do afélio(máxima) é de $2{,}485 \times 10^8$ km. Suponha que a Terra se mova no mesmo plano em círculo de raio $1{,}49 \times 10^8$ km e um período de um ano. A partir desses dados, determine a velocidade de Marte no periélio. Suponha que uma nave espacial Mariner seja lançada de forma que seu periélio esteja na órbita terrestre e o seu afélio, no periélio de Marte. Determine a velocidade do Mariner relativa a Marte, no ponto onde eles se encontram. Qual deles tem a velocidade maior? Qual deles tem a maior velocidade angular durante o período de vôo?

7) Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força $\vec{F} = -k\vec{r}$, k>0(oscilador harmônico isotrópico). O momento angular da partícula é L.

a) Determine a energia potencial.

b) Mostre que o menor valor da energia para essa partícula é: $E_{min} = \left(\frac{kL^2}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

c) Mostre que para uma dada energia total $E \geq E_{min}$ a trajetória está situada dentro de um anel $r_1 \leq r \leq r_2$, com $r_1 = \sqrt{\frac{E}{k}}\left[1-\sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ e $r_2 = \sqrt{\frac{E}{k}}\left[1+\sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ onde r_1 e r_2 são as raízes da equação $E = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$.

8) Mostre que para uma força central repulsiva, proporcional ao inverso do raio ao cubo, $F = \frac{K}{r^3}$, $K > 0$, as órbitas têm a forma: $\frac{1}{r} = A\cos[\beta(\theta - \theta_0)]$. Expresse β em termos de K, E, L e a massa m da partícula incidente. Mostre que a seção de choque para espalhamento através de um ângulo entre Θ e $\Theta + d\Theta$, para partículas submetidas a essa força, é: $d\sigma = \frac{2\pi K}{mv_0^2}\frac{\pi - \Theta}{\Theta^2(2\pi - \Theta)^2}d\Theta$

9) Considere que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular e que a massa do Sol subitamente se reduza à metade. Qual será, nesse caso, a órbita da Terra? A Terra escapará do sistema solar?

10) De acordo com a teoria da força nuclear de Yukawa, a força entre um nêutron e um próton tem o seguinte potencial: $V(r) = -\frac{Ke^{-\alpha r}}{r}, K > 0$.

a) Determine a força, comparando-a com a força da lei do inverso do quadrado da distância.

b) Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer, caso uma partícula de massa m se desloque sob a ação de tal força.

c) Determine L e E para o movimento em círculo de raio a. Determine o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais.