

COPYBEM
PASTANº 18
27 Folhas
 F/V F

José Manuel Matos
Maria de Lurdes Serrazina

T-3

DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA

Universidade Aberta

1996

ODIACICA DA MATEMÁTICA

3. Teorias da aprendizagem da Matemática

Introdução

101

TÁBUA DE MATÉRIAS

3. Teorias de aprendizagem da Matemática

A. Apresentação

B. Objectivos de aprendizagem

3.1 Introdução

3.2 Perspectiva comportamentalista

3.3 Perspectiva gestaltista

3.4 Perspectivas estruturalistas

3.5 Perspectiva construtivista

C. Bibliografia

A. Apresentação

Os alunos aprendem ideias matemáticas quer através de experiências informais e não estruturadas ocorridas no meio quer através do ambiente formal da sala de aula. O objectivo deste capítulo é discutir teorias de aprendizagem e quais as suas consequências para a aprendizagem da Matemática.

Trata-se apenas de uma introdução. Não pretendemos tratar aqui de forma exaustiva as ideias dos diversos autores. Apenas abordaremos os aspectos das diversas teorias de aprendizagem mais directamente relacionados com a aprendizagem da Matemática. O leitor interessado encontrará nas referências sugestões para outros aprofundamentos. A teoria de Piaget e a de Vygotsky poderão ser encontradas nos textos da cadeira de Psicologia Educacional.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- descrever os aspectos essenciais de cada teoria de aprendizagem da Matemática;
- diferenciar as diversas teorias de aprendizagem da Matemática.

3.1 Introdução

Uma das preocupações dos educadores matemáticos é procurar formas de possibilitar que os alunos desenvolvam uma capacidade matemática. Mas que combinação especial de experiência, intelecto, acções, emoções faz acontecer essa coisa que se chama *capacidade matemática*?

No seu livro *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, o matemático Hadamard (1945) refere que o estudo dos processos envolvidos nos processos de criação matemática envolvem simultaneamente a Psicologia e a Matemática:

O assunto envolve duas disciplinas, a Psicologia e a Matemática, e, para ser tratado adequadamente, exigiria que quem o estudasse fosse simultaneamente um psicólogo e um matemático (p. 1).

A Psicologia é pois uma disciplina científica onde procuramos conhecimentos que nos ajudem a compreender a aprendizagem da Matemática. A Psicologia, no entanto, tem variado as respostas que tem dado ao problema da aprendizagem da Matemática¹. Historicamente temos assistido a um debate entre duas escolas de pensamento, a aprendizagem por associação e a aprendizagem cognitiva. Os primeiros vêem a aprendizagem como o resultado de conexões ou de associações entre estímulos e respostas. Aprender Matemática é a consequência da aquisição de conexões apropriadas. Esta aquisição efectua-se através do apoio a respostas adequadas a diversos estímulos e o refreamento de respostas não conformes.

¹ A discussão destas diferentes escolas de pensamento pode ser aprofundada em Sprinthall e Sprinthall (1993).

A segunda escola de pensamento, os cognitivistas, vê a aprendizagem como uma reorganização de percepções. Aprender é compreender, isto é, o aluno que estuda as operações com números inteiros, a partir de certa altura começa a compreender as regras da adição, nomeadamente porque é que $-2 + 1 = -1$. Iniciaremos este capítulo com a análise em detalhe de algumas destas perspectivas.

Ambas as escolas surgem como reacção aos trabalhos pioneiros do final do século passado de Wilhelm Wundt. Este procurou analisar através da introspecção a consciência nos seus mais ínfimos pormenores. Procurava os elementos básicos da Psicologia, as partes mais ínfimas da consciência analisável, tal como os físicos procuravam pela mesma altura a tabela periódica. A mente é composta por elementos individuais, ou átomos de experiência ligados por associações. Foi ele que montou o primeiro laboratório de Psicologia Experimental na Europa por volta de 1879.

3.2 Perspectiva comportamentalista

2 Neste livro utilizaremos principalmente a designação comportamentalista. Os leitores encontrarão noutros locais as designações behaviorista ou conexionista, que, suporemos equivalentes.

O comportamentalismo² é «a doutrina segundo a qual todos os processos mentais consistem no funcionamento de conexões, inatas e adquiridas, entre situações e respostas» (Sandiford, 1942, p. 97). Nesta secção discutiremos algumas das suas ideias fundamentais, essencialmente através dos trabalhos de Thorndike.

³ O leitor interessado pode aprofundar este tema em Sprinthall, e Sprinthall (1993). *Psicologia Educativa. Uma abordagem desenvolvimentista*. Lisboa, Mc-Graw-Hill.

A perspectiva comportamentalista teve origem no princípio do século nos trabalhos de John B. Watson da Universidade de John Hopkins nos Estados Unidos³. O seu trabalho assentava em dois aspectos essenciais. Por um lado, a Psicologia deveria ter como elementos básicos as componentes mais ínfimas do pensamento. Por outro, Watson rejeitava o método introspectivo de Wundt e propunha que o objecto de estudo da Psicologia deveria ser o comportamento. O comportamento seria a única realidade observável e, portanto, a única que permitiria a aplicação do método científico. Entidades como o pensamento, a consciência, a abstracção ou outras apenas teriam interesse para o psicólogo na medida em que pudessem ser observadas através do comportamento do sujeito. Os trabalhos de Pavlov e o seu reflexo condicionado, precisamente baseados em comportamentos observáveis, forneceram a Watson a base na qual se poderia assentar o estudo do pensamento.

O paradigma comportamentalista dominou a psicologia americana durante toda a primeira metade deste século e muitos psicólogos americanos, entre os quais Thorndike e Skinner, foram influenciados pelas ideias de Watson. Vejamos um pouco mais em pormenor as ideias de Thorndike.

Edward Lee Thorndike, professor do Columbia Teachers College, nos Estados Unidos, foi o primeiro teórico comportamentalista com influência no ensino da Matemática. Para Thorndike a aprendizagem consistia numa série de conexões entre situações, que mais tarde os comportamentalistas chamariam estímulos e respostas.

As finalidades da educação elementar, quando estiverem completamente definidas, serão a produção de mudanças na natureza humana representadas por uma quase inumerável lista de conexões ou ligações (bonds) através das quais o aluno pensa ou sente ou actua de certos modos em resposta a situações que a escola organizou e é influenciado para pensar e sentir e agir de modo semelhante a situações semelhantes quando a vida fora da escola o confrontar com elas (Thorndike, 1922, p. XI).

Ensinar era procurar e tornar explícito o conjunto particular de ligações que constituíam os determinados tópicos. Quando se conseguissem encontrar listas bem organizadas de todas estas ligações, então, uma prática recom-

pensada permitiria reforçar essas ligações e a aprendizagem ocorreria. Por exemplo, no caso da aprendizagem do algoritmo da adição com duas colunas, Thorndike (1922, p. 52) exemplifica algumas ligações que deverão ser reforçadas:

**Ligações a reforçar para a aprendizagem
do algoritmo da adição**

- Aprender a manter a posição na coluna quando se soma.
- Aprender a manter na cabeça o resultado de cada adição até que o próximo número seja adicionado.
- Aprender a adicionar um número presente a um número pensado.
- Aprender a desprezar o espaço entre as colunas.
- Aprender a desprezar os zeros nas colunas.

Eis, de acordo com Sandiford (1942), as principais características do comportamentalismo, a que chama de conexãoismo:

Principais características do conexãoismo

- 1) O conexãoismo é um produto da doutrina do associacionismo, especialmente o proposto por Alexander Bain. Thorndike foi um aluno de William James que baseou alguns dos seus ensinamentos em Bain e nos associacionistas britânicos. Através do associacionismo, o conexãoismo tem, portanto, as suas raízes fundadas no passado da Psicologia.
- 2) O conexãoismo é uma teoria da aprendizagem, mas como a aprendizagem tem muitas facetas, o conexãoismo quase se torna num sistema de psicologia. No entanto, será como teoria de aprendizagem que ele deverá vingar ou acabar.
- 3) O conexãoismo tem uma orientação evolutiva porque liga o comportamento humano com o dos animais inferiores. As primeiras experiências de Thorndike foram realizadas com galinhas, peixes, gatos e, mais tarde, com macacos. Com base nas suas experiências com animais ele derivou as suas famosas leis de aprendizagem.
- 4) O conexãoismo afirma claramente que aprender é conectar. As conexões têm, presumivelmente, a sua base física no sistema nervoso onde as conexões de neurónio para neurónio explicam a aprendizagem.

Portanto, o conexionismo é também conhecido como uma teoria sináptica da aprendizagem.

- 5) O conexionismo é atomista e não holístico ou orgânico porque enfatiza a análise do comportamento para descobrir os elementos que estão conectados ou ligados uns aos outros. A soma total da vida de um homem pode ser descrita por uma lista de todas as situações que encontrou e pelas respostas que lhes deu. Os que afirmam que o todo é maior que a soma das suas partes atacaram fortemente o atomismo da teoria das ligações. O conexionismo assume o organismo e encara a Psicologia de Gestalt como algo místico devido à sua firme recusa em analisar o comportamento pelos seus elementos. Se, como Tolman afirma, o comportamento pode ser classificado em molar ou em molecular, o conexionismo aceita francamente o molecular como o seu campo de estudo.
- 6) O princípio conexionista da mudança associacionista tem relações com o condicionamento pavloviano, que Thorndike encarava como um caso especial de aprendizagem associativa.
- 7) O conexionismo tem também algumas afinidades com o behaviorismo de Watson quando este realça os aspectos mecânicos do comportamento. Nenhum deles sente necessidade de evocar uma alma para explicar o comportamento. O conexionismo separa-se do behaviorismo em relação à ênfase que coloca no equipamento hereditário do organismo.
- 8) Algumas conexões são mais naturais que outras. Crescemos em reflexos e instintos sem muito estímulo do meio, excepto comida e ar. Por outras palavras, amadurecemos em reflexos e instintos, mas temos de praticar ou exercitar para aprender os nossos hábitos. Estes padrões de comportamento hereditário (reflexos e instintos) formam a base da aprendizagem. Muitas das conexões adquiridas são baseadas neles e, de facto, crescem deles. Mesmo ligações complexas como as que representam capacidades (música, matemática, línguas e outras) têm uma base hereditária.
- 9) De acordo com o conexionismo, as coisas a que chamamos intelecto e inteligência são matérias quantitativas e não qualitativas. O intelecto de uma pessoa é a soma total das ligações que formou. Quanto maior o número de ligações, maior a sua inteligência.
- 10) O conexionismo experimenta constantemente. Apesar de a experimentação em aprendizagem não se limitar ao conexionismo, a predilecção que os conexionistas têm para provar todas as coisas e se agarrarem ao que é bom, foi-lhes de bom proveito na sala de aula. O conexionismo, acima de todas as outras teorias da aprendizagem, parece ser uma que o professor pode apreciar e aplicar. Apesar de as

estatísticas que resumem as experiências terem sido contestadas como produtos de uma concepção mecânica do comportamento, elas têm, no entanto, feito mais para tornar a educação uma ciência que toda a teorização dos últimos dois mil anos» (Sandiford, 1942, pp. 98-99).

Para Thorndike, a aprendizagem obedece a três leis fundamentais: a lei do efeito, a do exercício e a da prontidão⁴.

A primeira é a lei do efeito. Trata-se da lei mais conhecida de Thorndike e constitui uma antiga versão do que mais tarde B. F. Skinner chamou de reforço. Thorndike descobriu esta lei através de experiências de laboratório com gatos, cães, macacos e galinhas. Pode ser formulada do seguinte modo:

Lei do efeito: quando uma conexão modificável entre uma situação e uma resposta é estabelecida e é acompanhada ou seguida por uma satisfação, a força dessa conexão é aumentada. Reciprocamente ela é enfraquecida se acompanhada ou seguida de incômodo⁵.

Por outras palavras, se desejarmos que o aluno aprenda que $6 + 7 = 13$, poder-se-á desenvolver um sistema no qual quando o aluno acertar aumenta a sua pontuação (o que depois Skinner chamou de reforço positivo) e quando errar não acontece nada. No final os alunos que tiverem uma certa pontuação receberão uma recompensa.

Embora inicialmente Thorndike valorizasse igualmente os efeitos da satisfação e do aborrecimento, nos últimos anos de vida defendeu que a recompensa fortalecia mais a aprendizagem do que a punição. No entanto, conforme apontam Sprinthall e Sprinthall (1993), tudo depende da natureza das recompensas e das punições... Esta lei chama a atenção para a importância da motivação na aprendizagem. Quando um aluno é recompensado (mesmo interiormente) pela aprendizagem, é mais provável que aprenda.

A segunda lei desenvolvida por Thorndike é a lei do exercício ou da frequência.

Lei do exercício: quanto mais uma conexão entre uma situação e uma resposta for utilizada mais forte se tornará, e reciprocamente, quanto menos for utilizada, mais fraca ficará.

Esta lei também é chamada a do uso e desuso. Mais tarde Thorndike esclareceu que a prática sem conhecimento das consequências do acto não tem qualquer efeito na aprendizagem. É necessário acompanhar a prática de informação retroactiva positiva. Posto de outro modo, contrariamente ao que

⁴ Existiam ainda cinco leis menores. O leitor interessado poderá aprofundar este tema em Sandiford (1942).

⁵ Aparentemente os conceitos de satisfação e incômodo parecem não se prestarem a uma observação de comportamentos. É interessante notar como os comportamentalistas contornam este problema. Sandiford (1942) define um estado de satisfação como aquele que «o animal não faz nada para evitar, e muitas vezes faz coisas para o manter ou renovar» (p. 113). Um estado de incômodo é aquele em que «o animal não faz nada para preservar muitas vezes fazendo coisas para acabar com ele» (pp. 11-114). Skinner vai ser ainda mais radical e vai definir exclusivamente em termos da probabilidade da repetição de uma resposta.

pensava Watson. a lei do exercício isolada não produz aprendizagem. É necessário associá-la com a lei do efeito.

A terceira lei principal proposta por Thorndike é a lei da prontidão ou da predisposição.

Lei da prontidão: quando uma ligação está pronta para agir, a acção dá satisfação e não agir dá incómodo. Quando uma ligação não pronta para agir é obrigada a agir, acontece incómodo.

Esta lei está relacionada com a lei do efeito porque ambas envolvem satisfação e incómodo. Thorndike faz uma interpretação muito fisiológica desta lei, associando-a à disponibilidade dos neurónios se ligarem uns aos outros.

Thorndike propõe que as capacidades superiores como a abstracção, a generalização e o raciocínio «são na realidade a cooperação de muitas conexões ou ligações que foram seleccionadas e às quais foi dado um peso apropriado para algum efeito» (Thorndike, Cobb, Orleans, Symonds, Wald, Woodyard, 1926, p. 251). Ou, de outro modo (Thorndike, 1922), o raciocínio é a cooperação de hábitos organizados e para o explicar apenas são precisas as três leis enunciadas atrás.

O estudo da aprendizagem, no entanto, não se pode limitar a explicar a aquisição das competências directamente dependentes de estímulos. Não necessitamos de conhecer todas as cadeiras do mundo para sermos capazes de identificar o que é uma cadeira, ou, se quisermos utilizar uma linguagem comportamentalista, durante a maior parte da nossa vida somos confrontados com estímulos com que nunca contactámos e, no entanto, damos as respostas adequadas. O professor que ensina a somar pretende que o aluno seja capaz de abstrair, realizando a operação, não só com os números que foram utilizados na sala de aula, mas também generalizando para outros números. Todos os professores conhecem bem as dificuldades desta tarefa. No entanto, a aprendizagem de conceitos matemáticos, e mesmo de qualquer conceito, consiste precisamente em passar a conhecer, de modo explícito ou implícito, propriedades de classes de objectos e aplicá-las a situações que nunca foram experienciadas. Trata-se de uma capacidade natural e que se costuma designar pela transferência de aprendizagens. O comportamentalismo deveria ser capaz de explicar os processos de raciocínio pelos quais realizamos esta transferência de aprendizagens.

Thorndike propôs que existe transferência de aprendizagem (de treino, nas suas palavras) quando há identidade de substância ou de método. Elementos idênticos existem em situações no mundo exterior ao qual o organismo reage e são uma condição necessária, embora não suficiente, para a transfe-

rência, para o insight, a compreensão e a generalização. Mas o que são elementos idênticos? Thorndike usou termos como aspectos, factores, características, relações, e outros. No entanto esta formulação é bastante vaga, e o programa comportamentalista de busca permanente dos mais pequenos componentes que caracterizassem uma situação não foi capaz de resolver o problema⁶. Conforme veremos seguidamente, os gestaltistas deram uma resposta precisamente oposta e em vez de procurarem sintetizar elementos basearam o seu estudo da aprendizagem na caracterização de globalidades.

⁶ O leitor poderá aprofundar estes aspectos em Sandiford (1942) ou Gates (1942).

Existe ainda um segundo aspecto no qual o programa comportamentalista falhou. Em 1957 Skinner tentou explicar o comportamento linguístico em termos de estímulos e respostas mas ignorou, por um lado, as propriedades estruturais da linguagem, por outro, os seus aspectos criativos, isto é, o facto de que temos inteira liberdade de falar do que queremos e da forma que queremos.

Na sua revisão deste trabalho Chomsky argumentou que não faz sentido pensar as produções linguísticas como sendo restringidas de forma significativa pelos estímulos que estão presentes no momento. Chomsky alargou ainda a sua crítica ao campo epistemológico. Skinner tinha proposto que os investigadores se deveriam ater aos dados e eliminar teoria abstracta. Chomsky, pelo contrário, afirmou que os dados nunca falam por si e que é necessário assumir uma posição teórica e explorar as consequências da teoria.

Mais ainda, as teorias necessárias para explicar a linguagem deveriam ser abstractas e francamente mentalistas, isto é, assumirem a existência de estruturas abstractas na mente que tornam o conhecimento possível. Chomsky acaba por propor algumas ideias para uma nova perspectiva psicológica. Chomsky estava impressionado pela extrema abstracção da tarefa de aprender uma linguagem enfrentada por todas as crianças, a rapidez com que essa aprendizagem se processa, apesar de não haver um acompanhamento explícito. A proposta de Skinner de que a aprendizagem da linguagem se processava através da imitação e reforço não era plausível. Skinner nunca respondeu publicamente a esta crítica.

A perspectiva comportamentalista, em especial na versão mais radical de Skinner, de que a aprendizagem humana era fundamentalmente idêntica à aprendizagem de pombos, gatos ou ratos esteve na origem da desumanização da educação, especialmente nos Estados Unidos. Embora conseguisse explicar bastante bem a aquisição de competências básicas, era incapaz de interpretar satisfatoriamente os aspectos mais complexos da cognição. Cabe-lhe, no entanto, o mérito de ter chamado a atenção para conceitos como a motivação e a transferência.

3.3 Perspectiva gestaltista

Em 1910, na Universidade de Frankfurt, um grupo de psicólogos sob a direcção de Max Wertheimer iniciou uma escola de Psicologia conhecida por Psicologia de Gestalt ou Psicologia da Forma. Os gestaltistas reagiam contra Wundt e a sua tendência de atomização do foco dos estudos psicológicos nas partes ínfimas da experiência e propunham antes uma abordagem globalizante. A sua proposta encontra-se condensada na afirmação de Wertheimer de que «o todo é maior que a soma das partes». Posto de outro modo,

...há todos cujo comportamento não é determinado pelo [comportamento] dos seus elementos individuais, mas onde os processos parciais são por sua vez determinados pela natureza intrínseca do todo. É aspiração da teoria de Gestalt determinar a natureza desses todos (Wertheimer, 1938, p. 2).

Os psicólogos da Gestalt, nomeadamente Köhler, Koffka e Wertheimer basearam-se na ideia de que a mente interpreta todas as sensações e experiências de acordo com certos princípios de organização. O trabalho inicial dos gestaltistas concentrou-se na organização humana dos processos perceptuais. A percepção humana não podia ser explicada apenas como uma soma de estímulos. O organismo perceptivo tinha uma natural tendência para estruturar as suas percepções, procurando formas globais, ou *gestalts*, no ambiente.

[Na teoria de Gestalt] toda a experiência mental ocorre organizada sob a forma de estruturas que, quando relativamente incompletas, possuem uma tendência imanente para se completarem. Rejeita o pressuposto de que existe uma determinação local isolada dos processos psíquicos e afirma que todas as tensões orgânicas e inorgânicas tendem para um fim — um estado de equilíbrio. No seu sentido mais geral a doutrina de Gestalt é uma filosofia da natureza e é verdadeira para todas as ciências e não apenas para a Psicologia. O universo externo, a vida e a mente são compostas de *gestalten* (Hartmann, 1935, p. 311).

Wertheimer procurava em particular o que chamava de *pensamento produtivo* baseado na compreensão de estruturas, que opunha à memorização e à aprendizagem mecanizada. Os seus exemplos são retirados essencialmente da Matemática. Vejamos em particular o seu exemplo da área do paralelogramo. A área do paralelogramo pode ser encontrada multiplicando a base pela altura. A demonstração que assim é pode ser feita imaginando um corte no paralelogramo que lhe retira um triângulo (ver figura 1). Depois esse triângulo é acrescentado ao lado oposto. Obtemos assim um rectângulo de área igual à do paralelogramo.

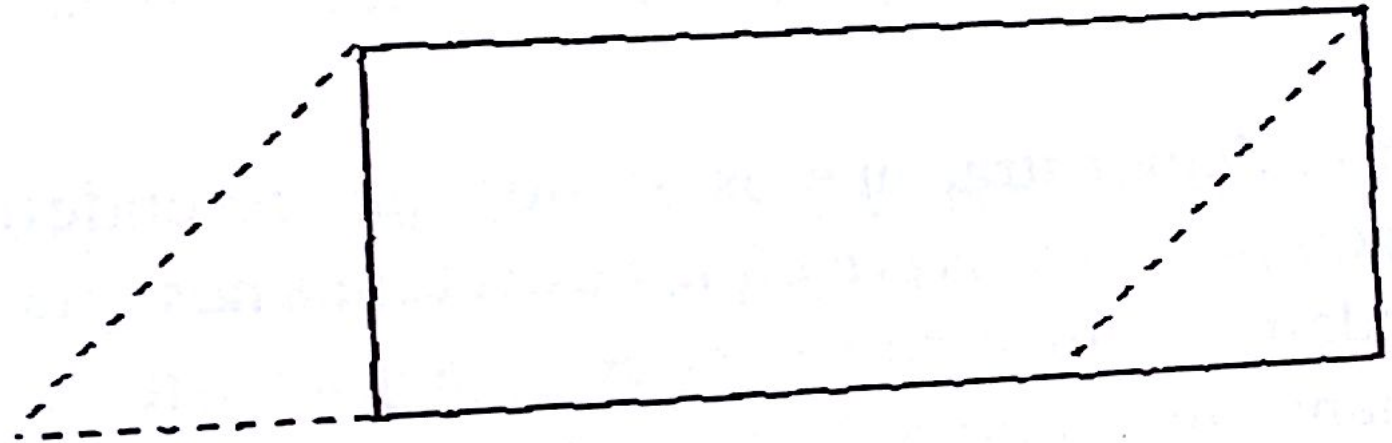
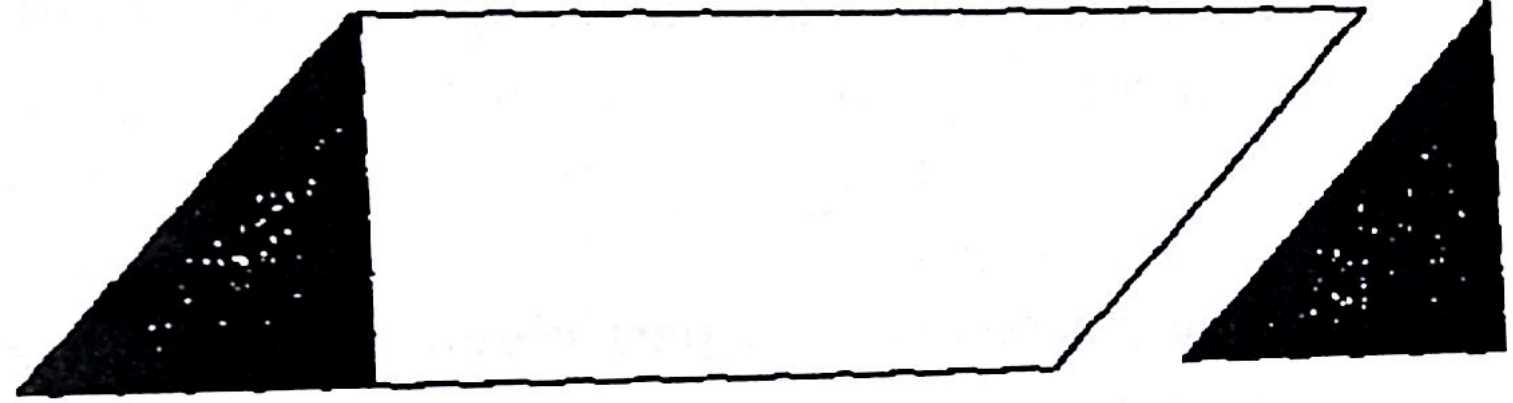


Figura 1 - A área de um paralelogramo é igual à área de um re

descreve umas aulas a que assistiu nas quais se f
de um paralelogram

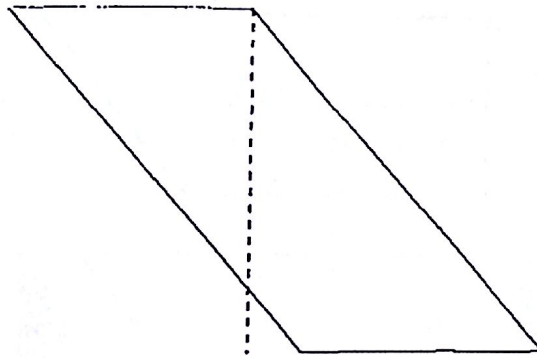


Figura 2 - Como decompor este paralelogramo?

Wertheimer procurava demonstrar que os alunos que aprendem a área do paralelogramo sem compreender os princípios estruturais nos quais a fórmula se baseia apenas podem seguir acriticamente as regras estabelecidas pelo professor. Eles tinham aprendido a fórmula de cor, sem significado. Às soluções de aplicação automática dos algoritmos Wertheimer chamou de feias e idiotas (*ugly, foolish*) (tipo B), por oposição às boas (tipo A). As respostas de tipo A são as que utilizam a originalidade e o discernimento, enquanto as respostas de tipo B fazem uso das associações passadas de uma forma rígida e não apropriada. O pensamento produtivo é revelado nas respostas do tipo A, que mostram uma verdadeira compreensão da estrutura do problema⁷.

⁷ Resnick e Ford (1981, pp. 132-135) apresentam uma crítica aos princípios gerais da teoria utilizando este exemplo.

Alguns termos da Psicologia de Gestalt

Gestalt — (o plural é *gestalten*) são todas as unidades organizadas de experiência e comportamento que têm propriedades definidas não relacionadas com partes e as suas relações. Existem muitos tipos de *gestalten* na natureza, tais como físicos, psicológicos ou fenomenológicos, e lógicos. *Gestalten* envolvem sempre processos com formas, padrões ou estrutura quer ocorram dentro ou fora do organismo.

Fecho (closure) — é um termo introduzido por Wertheimer para designar um dos princípios básicos da organização mental, no qual algumas totalidades segregadas, mas imperfeitas (tais como percepções, memórias, pensamentos e acções), tendem para formas completas ou fechadas. A palavra também se refere à forma como sistemas em mudança ou incompletos eventualmente atingem o equilíbrio. O fecho parece ser uma variação dinâmica especial do princípio mais geral da precisão.

Precisão (prägnanz) — este é o termo usado por Wertheimer para explicar a forma mais típica que uma organização pode assumir e para a qual tal

estrutura tende. É a mais geral das leis das configurações e afirma que todos os campos experienciados tendem a tornar-se tão bem articulados quanto possível. Tem relações com fecho.

Insight — é um comportamento ou uma experiência apropriada ou significativa que ocorre na presença de qualquer situação vivida. A reconstrução perceptual ou imaginada instantânea do campo é a característica mais usual do processo, mas não é necessariamente essencial. É uma espécie de organização cortical ou neural que é estabelecida assim que o organismo atingiu os seus objectivos, isto é, é o correspondente interno do fechamento de uma configuração incompleta cuja incompletude produziu inicialmente o problema ao manter a pessoa que está a aprender num estado de tensão. Embora privilegiando o *insight* como um processo súbito, diversos autores (Hartmann e Alpert) propuseram uma graduação neste processo.

Critério para insight — Köhler estabelece que para que se possa falar de *insight* é necessário o aparecimento de uma solução completa com referência à globalidade do campo.

(Definições adaptadas de Hartmann, 1935).

Os gestaltistas não se ficaram apenas pela discussão de significado de pensamento produtivo. Vejamos mais em pormenor a teoria que propõem para a aprendizagem. Kurt Lewin (1942) considera que há diversos tipos de aprendizagem: aprender como mudança cognitiva ou de conhecimento; como a mudança de motivação (aprender a gostar); a pertencer (ou não) a um grupo ou ideologia; controlar voluntariamente a musculatura. No caso particular da mudança de conhecimento, ele distingue entre a *diferenciação* e a *reestruturação*. Vejamos como a diferenciação ocorre na mudança de conhecimento:

Um indivíduo muda para uma nova cidade. Lentamente aprende a movimentar-se geográfica e socialmente. O que são as mudanças psicológicas a que chamamos aprendizagem neste caso? O indivíduo chega ao terminal como um estrangeiro. Talvez tenha alugado previamente um apartamento. Conhece o número da sua casa, mas estando na estação e não tendo um mapa da cidade, não sabe como lá chegar. Existe uma área correspondendo à estação onde a pessoa está localizada. Existe uma outra área no seu espaço de vida correspondendo ao apartamento. Entre estas duas áreas está uma região que psicologicamente tem as características psicológicas de ser não estruturada, isto é, o estrangeiro não sabe como ir da estação para o seu apartamento, qual a distância, como é a área em volta do apartamento.

Esta falta de clareza tem uma influência decisiva no seu comportamento. Ele não sabe que ruas em volta da estação conduzem, e as que não condu-

zem, ao apartamento. Por outras palavras, não está definido o que significa *caminho* da estação para o apartamento.

O forasteiro pergunta e fica a saber que o eléctrico D o leva directamente ao apartamento. Como consequência da primeira viagem da estação para a sua casa, aconteceu alguma estruturação: *caminho da estação para o apartamento* ficou definido como sendo usar o eléctrico D; o forasteiro ficou com uma impressão da distância entre estes pontos da cidade. O eléctrico deu umas quantas voltas. Como consequência o forasteiro não ficou muito elucidado sobre a posição geográfica de ambos os pontos. No entanto, ele sabe a direcção no sentido de *caminho a tomar*.

Talvez ele tenha que começar a trabalhar na manhã seguinte. Neste caso, talvez ele aprenda de forma semelhante as *relações funcionais* entre a sua casa e o seu local de trabalho. Mas continuarão a existir amplas áreas da cidade não estruturadas. Provavelmente, de início, uma área próxima geograficamente da casa se tornará mais bem conhecida, e gradualmente o grau de uma estruturação cognitiva aumentará de forma que ele saberá não apenas um caminho da casa para o trabalho ou para a estação, mas vários. Ele saberá qual é o caminho mais directo e finalmente será capaz de determinar bastante bem o caminho de um lugar para outro na cidade. Saberá qual é o caminho mais curto a pé ou de automóvel ou metro (pp. 224-226).

Lewin continua apontando que acontece um processo de diferenciação semelhante em relação à vida social da cidade. Dá ainda como exemplo de outra diferenciação a que ocorre quando o recém-nascido se começa a diferenciar do meio envolvente ou começa a diferenciar o seu corpo, as relações sociais, as necessidades, as emoções, a linguagem.

Conforme indicámos, Lewin aponta uma segunda forma de aprendizagem cognitiva através da reestruturação, envolvendo uma mudança na estrutura cognitiva sem aumentar o grau de diferenciação e está associada ao *insight*. Ele dá o exemplo do bebé colocado numa estrutura em U e que quer chegar a uma coisa que está na base do U. Uma criança de um ano não consegue, mas a de quatro já consegue. Levin explica a diferença em termos de forças (psicológicas) que são alteradas através de uma mudança da estrutura cognitiva da situação.

Hartmann aponta um exemplo mais próximo da Matemática no qual aprender é equivalente ao processo de adquirir *insight* numa situação, ou, de um modo mais geral, ao processo de estabelecer novos todos organizados (1935, pp. 181-182). Tomemos uma circunferência de raio r inscrita num quadrado. Qual é a área do quadrado?

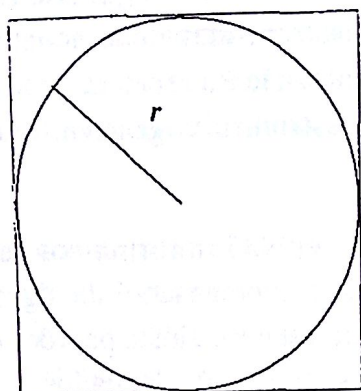


Figura 3 - Qual a área do quadrado circunscrito numa circunferência de raio r ?

Para resolver o problema a pessoa tem de primeiro perguntar qual é a relação que se pode estabelecer entre o lado do quadrado e o raio da circunferência. A solução só aparece quando ocorre *insight*, neste caso, quando o raio é deslocado para uma posição paralela à base do quadrado.

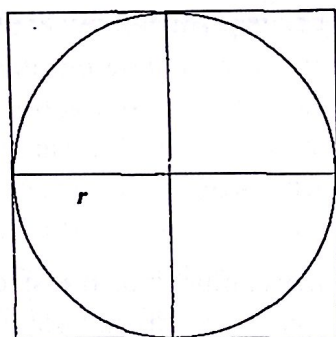


Figura 4 - Reestruturação do campo, que leva a perceber o comprimento do lado do quadrado como igual ao comprimento de dois raios.

Nesta nova posição o raio da circunferência já não é percebido como uma parte da circunferência, mas como uma parte do quadrado, isto é, como metade do lado do quadrado. Existe uma *reestruturação do campo* e o *insight* ocorre associado a essa reestruturação súbita da percepção.

Para os gestaltistas a prática (ou a repetição) tem um papel limitado na aprendizagem. Diz Lewin (1942) que se deve distinguir o efeito da repetição

na motivação e na mudança da estrutura cognitiva. Ele concorda que como consequência de experiências repetidas pode acontecer uma mudança de estrutura cognitiva. No entanto, não é a repetição por si própria, mas antes a mudança que provoca na estrutura cognitiva, que é essencial para a aprendizagem.

Numa pequena nota Hartmann (1935) informa-nos de que o aluno não está passivo, porque cada acto de compreensão é de alguma forma criativo. O *bom* professor é aquele que apresenta e ajusta padrões incompletos de modo que o aluno realiza os fechos (*closures*) adequados.

Resnick e Ford (1981) apresentam uma extensa crítica ao trabalho de Wertheimer e dos gestaltistas, principalmente no que se refere à resolução de problemas. Por exemplo, que a tendência para perceber as coisas como totalidades pode dificultar a resolução de problemas, que as soluções que Wertheimer apresenta como feias ou idiotas podem ser consideradas como soluções construídas pelos sujeitos, e por isso, do seu ponto de vista, adequadas, e que nem todos (nem mesmo a maioria) os problemas de Matemática podem ser colocados numa estrutura visual.

As perspectivas gestaltistas, com a sua ênfase na globalidade da forma, vão estar na origem do aparecimento de diversas escolas estruturalistas, que realçam a importância da aprendizagem de estruturas.

3.4 Perspectivas estruturalistas

A corrente estruturalista que mais influenciou o ensino e a aprendizagem da Matemática é sem dúvida a que foi protagonizada por Jean Piaget, e, em menor grau, por Jerome Bruner. Optámos, no entanto, por abordar aqui apenas a visão deste último sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, já que o leitor poderá encontrar noutra publicação da Universidade Aberta uma descrição pormenorizada da teoria de Piaget.

Bruner (1915-) propõe essencialmente que a aprendizagem das ideias matemáticas, e de outras áreas de conhecimento, deve ser uma aprendizagem de estruturas. O objectivo último do ensino é promover «a compreensão geral da estrutura de uma matéria» (Bruner, 1962, p. 6). O pressuposto nas propostas pedagógicas de Bruner é de que a aprendizagem baseada na compreensão de estruturas é muito mais duradoura e mais facilmente o aluno consegue entender uma generalidade de assuntos. Por exemplo, a compreensão bastante cedo do conceito de grupo simplificaria bastante o estudo dos diversos grupos concretos que vão aparecendo ao longo do ensino

da Matemática: o dos naturais com a adição ou a multiplicação, as diversas estruturas de grupo que vão sendo introduzidas para os inteiros e suas extensões, os grupos de transformações do plano, etc. Vejamos como Bruner argumenta:

O currículo de uma disciplina deve ser determinado pela compreensão mais fundamental que pode ser atingida dos princípios implícitos que dão estrutura ao assunto. Ensinar tópicos ou capacidades específicas sem tornar claro o seu lugar na estrutura fundamental mais geral do campo é anti económico em diversos sentidos. Em primeiro lugar, tal ensino torna muito difícil para o aluno generalizar o que aprendeu para o que encontrará mais tarde. Em segundo lugar, a aprendizagem que não apreendeu princípios gerais tem pouca recompensa em termos de entusiasmo intelectual (...). Terceiro, o conhecimento adquirido sem uma estrutura suficiente que o ligue internamente é um conhecimento que provavelmente será esquecido (Bruner, 1960, pp. 31-32).

Estas perspectivas desenvolveram-se no contexto da inovação curricular que ocorreu um pouco por todo o mundo durante os anos 60⁸. Procurava-se estabelecer novos objectivos para o currículo de Matemática, com novas metodologias e um esforço razoável de ligação à investigação.

* Uma descrição mais completa deste movimento pode ser encontrada em Matos, J. M. (1985).

Bruner foi um dos primeiros psicólogos que reagiu contra as tendências behavioristas que imperaram no continente americano durante a primeira metade do século. Em finais dos anos 40 publicou um estudo mostrando que crianças pobres têm mais probabilidade de atribuírem um tamanho exagerado a uma moeda do que as crianças de meios mais ricos, concluindo que os valores e as necessidades influenciam a percepção. O seu trabalho em Psicologia vai ser focado nos processos cognitivos, tema tabu nos Estados Unidos durante a dominância do comportamentalismo. A aprendizagem não é um comportamento passivo desencadeado por um estímulo e reforçado pelo reforço, mas um processo activo no qual o aluno infere princípios e regras e os testa.

Bruner procura intervir no processo de reforma curricular em curso durante os anos 60 fundamentalmente no ensino da Matemática e das Ciências. Para isso ele afirma que vai desenvolver uma teoria de *ensino*, isto é, uma teoria prescritiva, e não uma teoria de *aprendizagem*, que ele caracteriza como descritiva.

Vejamos alguns aspectos fundamentais da sua teoria⁹. Bruner acreditava que quase todas as crianças têm uma vontade inerente de aprender. Embora o reforço ou a recompensa possam ser importantes para iniciar determinadas acções ou para assegurar que estas sejam repetidas, só através da motivação intrínseca se sustém a vontade de aprender. Um exemplo da motivação interna

⁹ A teoria de Bruner pode ser aprofundada em Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981) e em Sprinthall e Sprinthall (1993).

é a curiosidade. Trata-se de um impulso biologicamente relevante que pode ser canalizado para um percurso intelectual mais poderoso. Outro exemplo é o impulso para adquirir competência. As crianças só se motivam naquilo em que são competentes. Um outro exemplo é a necessidade de trabalhar cooperativamente com os outros.

Como as motivações intrínsecas são auto-suficientes, isto é, regulam-se a si próprias, a questão é saber como pode o professor tirar partido delas. A resposta de Bruner é que os professores (e a escola) devem facilitar e regular a exploração de alternativas por parte dos alunos, através, por exemplo, da resolução de problemas. Os professores devem gerir esta motivação, isto é ensinar, de forma que as crianças vejam a exploração guiada como mais significativa e satisfatória do que a aprendizagem espontânea. Para a exploração de alternativas Bruner propõe três fases: a *activação*, que envolve um certo grau de incerteza no início da tarefa, tarefas fáceis são desinteressantes, tarefas difíceis são confusas. A *manutenção*, que consiste em assegurar à criança que a exploração não será perigosa ou frustrante. Posto de outro modo, as vantagens da exploração são maiores do que os riscos. A *directão*, que consiste em mostrar à criança que tem de existir um objectivo. Trata-se, por um lado, de conhecer o objectivo, e, por outro, de saber que a exploração de alternativas é relevante para alcançar o objectivo.

Como vimos atrás, Bruner entendia que o ensino se devia basear no ensino de estruturas. É dele a afirmação de que qualquer assunto, tema, corpo de conhecimentos pode ser organizado de forma óptima para poder ser transmitido e compreendido por praticamente qualquer aluno. Como veremos, Bruner propunha uma certa sequência de ensino, que, segundo ele, estava de acordo com o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Baseando-se parcialmente em Piaget, Bruner propunha que para beneficiarmos das regularidades do meio deveremos representá-las internamente de algum modo. Não se trata de uma mera questão de memória. Não se trata de saber como estas coisas são guardadas, mas antes de saber como as recordamos de forma que sejam relevantes e utilizáveis. Isto depende da forma como a experiência passada é codificada e processada internamente. O produto final de tal sistema de codificação e processamento é o que Bruner chama de *representação*.

Bruner propõe três modos de representação: *motor*, *icónico* e *simbólico*¹⁰. De acordo com Bruner, estes três modos de representação desenvolvem-se naquela ordem. Cada um depende do precedente e é necessária muita prática antes de fazer a transição. É mesmo uma teoria de níveis de desenvolvimento intelectual. Posto de outro modo, os modos como o homem representa internamente as acções, objectos e ideias podem ser traduzidos em formas de representar os conceitos na sala de aula.

¹⁰ Os termos originais de Bruner são *enactive*, *iconic* e *symbolic*.

A *representação motora* é «um modo de representar acontecimentos passados através de uma resposta motora apropriada» (Bruner, referido em Resnick e Ford, 1981, p. 112). Trata-se do modo de representação mental que é necessária às crianças muito pequenas no estágio que Piaget apelidou de sensório-motor quando conseguem compreender melhor as coisas em termos de acções. Nem só estas crianças utilizam este modo de representação. O adulto recorda de um modo automático o sistema complexo de acções motoras necessárias para andar de bicicleta, ou para nadar. A aprendizagem de algumas actividades motoras, por exemplo, é mais eficientemente feita deste modo. O instrutor de esqui pede ao aluno que imite os seus movimentos. A pessoa que está a aprender a trabalhar com o rato do computador deverá experimentar o rato. Os desenhos ou as palavras são muito menos eficazes nestes casos do que a acção motora. No entanto, os adultos utilizam este modo de representação também em contextos não motores. Existem situações em que mimamos acções motoras para resolver problemas: contar pelos dedos dias da semana, classificação de itens, etc.

Usamos uma *representação icónica* quando os objectos são concebidos na ausência da acção. Este modo de representação afasta-nos do concreto e físico e projecta-nos no campo da imaginação mental. Segundo Bruner, a representação icónica acontece quando a criança desenha imagens, diagramas, isto é, «imagina» uma operação ou uma manipulação como uma forma de não apenas recordar o acto mas também de o recordar mentalmente quando necessário. Um adulto, por exemplo, pode ser capaz de desenhar uma peça de uma máquina, sem ser capaz de a descrever. Estas imagens mentais não incluem todos os detalhes do que aconteceu mas resumem os acontecimentos representando apenas as suas características mais importantes. Para dar um exemplo de um adulto, uma pessoa para indicar o caminho a outro pode imaginar-se a si próprio a caminhar pelas ruas. No entanto, não vai recordar todos os detalhes do caminho, nomeadamente todas as casas, os candeeiros, por onde passa. Apenas recordará a loja na esquina, o anúncio naquela outra, etc.

A *representação simbólica* consiste na tradução das experiências em termos da linguagem simbólica. Um símbolo é uma palavra ou uma marca que representa alguma coisa mas sem qualquer semelhança com a entidade original. Os símbolos são inventados pelas pessoas para referir certos objectos, acontecimentos e ideias, e os seus significados são largamente partilhados. Quando as crianças começam a escrever as operações matemáticas utilizando numerais, colunas de números, sinais de operações, equações, isto é o começo da representação simbólica, tal como é a sua capacidade de ler estas notações matemáticas. É este tipo de representação que permite considerar proposições, organizar os conceitos numa estrutura hierárquica, fazer derivações lógicas e pensar de forma mais compacta. Rapidamente os alunos começam a pensar no seu desempenho em termos desses símbolos, o que abre a possibilidade do pensamento abstracto.

ACTIVIDADE

Num tópico do currículo de Matemática desenvolva representações motoras, icónicas e simbólicas de um conceito. Como planificaria o ensino de forma a respeitar as ideias de Bruner?

Piaget e Bruner diferem nas propostas para a sala de aula. Piaget realça a necessidade de esperar até que a criança esteja pronta antes de ensinar determinados conceitos. Bruner afirma precisamente o contrário. Ele acredita que há sempre formas de ensinar conceitos complicados de forma que as crianças de qualquer idade os possam compreender a um nível adequado às suas capacidades intelectuais e à sua experiência. Esta confiança nas capacidades dos alunos foi reforçada pelas suas experiências em ensinar a crianças dos níveis 1 a 6 tópicos como equações do segundo grau ou as propriedades dos grupos matemáticos.

A proposta de Bruner destes três modos de representação tem levantado alguns problemas. Para o professor, em particular, fica a questão de saber se pelo facto de haver uma sequência recomendada por Bruner isso significa que há um modo de representação que é privilegiado como um objectivo de ensino? Posto de outro modo, a representação simbólica é mais avançada do que a icónica? Pode ser que seja mais útil interpretar a utilidade dos diferentes modos de representação em relação às situações.

E em Portugal?

Numa tese influenciada pelas ideias de Bruner, Isabel Valente Pires (1992) mostra como os alunos do ensino primário que no estudo utilizaram mais do que uma representação para resolver situações problemáticas foram mais bem sucedidos do que os que apenas representaram o problema de um modo.

3.5 Perspectiva construtivista

Já no capítulo 1 discutimos algumas ideias construtivistas que aprofundaremos aqui um pouco mais. O construtivismo retira muitas das suas ideias do trabalho de Piaget, alterando, no entanto, alguns aspectos fundamentais. A sua importância é considerável, já que quase todos os investigadores em Educação Matemática se declaram influenciados por algum aspecto da teoria.

O construtivismo propõe-se contribuir para a resolução de um problema epistemológico já antigo do mundo ocidental que consiste em saber como pode ser conhecida uma realidade objectiva independente do sujeito cognosciente. Este problema não foi resolvido de forma satisfatória, já que o sujeito não tem forma de verificar aquilo acerca de que o seu conhecimento é. Por outras palavras, qualquer tentativa de testar a verdade do que é conhecido é, ela própria, um acto de conhecimento, e portanto subjectiva. O conhecimento da «verdade objectiva» é pois impossível. A proposta central dos construtivistas é a de que a mente é modelada como uma experiência organizativa de modo a lidar com um mundo real que não pode ser conhecido em si. Os construtivistas usam o acto de abrir uma porta fechada à chave como uma metáfora da forma como a mente constrói o conhecimento. Tal como uma chave pode abrir uma fechadura, sem nunca sabermos se a chave foi fabricada especificamente para aquela fechadura, o conhecimento é uma adaptação mental à experiência — chave adaptada à fechadura — e não um encaixe¹¹ com a realidade — chave fabricada precisamente para aquela fechadura. A única realidade que conhecemos é a da nossa experiência e, em última análise, apenas podemos ter a certeza do conhecimento que não se adapta — no momento de abrir a porta apenas poderemos ter certezas sobre as chaves que não abrem a fechadura e nunca sobre as que foram fabricadas especificamente para a fechadura.

¹¹ Os construtivistas costumam usar as palavras inglesas *fit* e *match* para sublinhar esta diferença que aqui traduzimos, respectivamente, por *adaptação* e *encaixe*.

O construtivismo envolve dois princípios:

- 1) o conhecimento é activamente construído pelo sujeito cognosciente e não passivamente recebido do meio;
- 2) conhecer é um processo adaptativo que organiza o mundo experiencial de cada um, não descobre um mundo independente, pre-existente, exterior à mente do sujeito.

O primeiro princípio é muito mais largamente aceite do que o segundo. Praticamente todos os educadores matemáticos actuais aceitam este princípio. O segundo princípio é aquele em relação ao qual muitos educadores matemáticos levantam objecções e separa o construtivismo trivial, empirista ou simples do construtivismo radical que aceita os dois princípios. O construtivismo radical é radical porque rejeita o realismo metafísico onde se baseia

a maior parte do empirismo. Exige que se desista de conhecer o mundo tal como ele é verdadeiramente. A perspectiva construtivista radical coloca as suas raízes na obra de Vito e desenvolveu-se fundamentalmente desde meados dos anos 70 com os trabalhos de Ernest von Glasersfeld, Leslie Steffe e Paul Cobb, a que se seguiram muitos outros.

Tal como os organismos se adaptam ao meio, assim o nosso conhecimento se desenvolve lidando com o possível, mas não representando o real. Desse modo somos sistemas auto-organizados, auto-regulados e auto-contidos. Nem o conhecimento nem a informação saem ou entram em nós. Desse modo, a linguagem e outras formas de comunicação não implicam o intercâmbio de ideias entre nós, mas apenas a construção de realidades subjectivas que se adaptam às experiências de situações passadas. Cada um constrói o significado para a linguagem que usa à medida que vai construindo o seu mundo experiencial.

Embora o construtivismo radical seja uma teoria de aprendizagem, e não uma teoria de ensino, tem tentado desenvolver algumas consequências para a prática educativa:

Visão construtivista da prática educativa

- 1) Ensinar é muito diferente de treinar.
- 2) Os processos no interior da cabeça do aluno são mais interessantes do que os comportamentos.
- 3) A comunicação linguística torna-se num processo para guiar a aprendizagem e não uma transferência de conhecimento.
- 4) Os desvios dos alunos das expectativas do professor tornam-se um meio para compreender os seus esforços de compreensão.
- 5) As entrevistas de ensino tornam-se meios não apenas de inferir estruturas cognitivas, mas também de as modificar.

(Kilpatrick. 1987)

No entanto, tal como argumenta Kilpatrick (1987), estes princípios não são exclusivos do construtivismo.

Uma importância particular pode ser atribuída ao quarto princípio anterior. A atenção prestada pelos construtivistas às expectativas do professor e aos desvios dos alunos tem-lhes servido para lançar pistas sobre os processos de pensamento dos alunos. Em princípios dos anos 80 o trabalho pioneiro de Matz (1982) já tinha mostrado que os alunos apresentavam diversos tipos de erros na aprendizagem dos processos algébricos. A sua investigação lançou muitos investigadores numa tentativa de caracterizar os erros dos alunos, normalmente denominados *misconceptions*, e que produziu extensas caracterizações dos conceitos dos alunos em diversas áreas da Matemática. Esta abordagem tem sido a preferida por investigadores na área da Inteligência Artificial procurando desenvolver programas de ensino através de computadores.

No entanto, muitos investigadores preferiram explorar a ideia de que muitas dessas concepções não são erradas. Tratava-se antes de concepções matemáticas que, embora não estivessem de acordo com a Matemática formal ensinada nas escolas, apresentavam verdadeiros conceitos alternativos, passíveis de serem matematizados. Tudo se passava como se os alunos reinventassem uma Matemática à sua própria medida. O termo *misconception* deixa de ser usado, e ganharam força dois paradigmas de investigação distintos. Um deles, o construtivismo, propõe que não existe transmissão de conhecimentos do professor para os alunos, antes estes constroem os conhecimentos matemáticos de raiz.

Hoje em dia, virtualmente toda a investigação sobre a aprendizagem da Matemática se reclama de uma forma mais ou menos radical do construtivismo (Kilpatrick, 1987; von Glasersfeld, 1987). No entanto, começa a constatar-se que o ênfase em explicar os conhecimentos dos alunos numa base individual corre sérios riscos de conduzir a interpretações solipsistas, em que o conhecimento do indivíduo é desenvolvido individual e isoladamente. Entre os principais críticos do construtivismo encontram-se os desenvolvimentos nascidos no seio da Sociologia do Conhecimento, propondo que este tem uma génese essencialmente social (Gergen, 1985). Um outro paradigma de investigação, que começa hoje a ser designado por *cognição situada* (Brown, Collins e Duguid, 1989; Lave, 1988), propõe que todo o conhecimento permanece associado às experiências que lhe deram origem.

O debate em curso tem vindo a reflectir-se no campo da Educação Matemática, cujos investigadores procuram desenvolver teorias articulando as perspectivas construtivistas com a abordagem proposta pelos construtivistas sociais (Bishop, 1985; Carraher, Carraher e Schliemann, 1985; Saxe, 1991). Uma boa revisão de literatura sobre este tema pode ser encontrada em Confrey (1990) e em Putnam, Lampert e Peterson (1990).

Investigações que procuram caracterizar detalhadamente a aprendizagem dos alunos em tópicos específicos têm vindo a ser realizadas noutros países. Em Inglaterra, por exemplo, um estudo levado a cabo por Hart, Johnson, Brown, Dickson e Clarkson (1989) descreveu os processos desenvolvidos pelos alunos em situações de aprendizagem em diversos tópicos curriculares.

Estas investigações foram muito importantes, já que revelaram respeito pela inteligência e pela capacidade de investigação e invenção das crianças, procurando sobretudo o significado matemático que os conceitos tinham para os alunos. Avaliar o conhecimento dos alunos em relação a uma matemática preexistente é muito pouco útil se se pretende entender a raiz intelectual das suas dificuldades.

ACTIVIDADE

Compare as teorias de aprendizagem da Matemática apresentadas anteriormente. Em que consiste, para cada uma, a aprendizagem? Como lida cada uma delas com a questão da transferência das aprendizagens? Será possível inferir de algumas teorias sugestões para o ensino da Matemática?

C. Bibliografia

BRUNER, J.

1978 *O processo de educação*. S. Paulo, Companhia Nacional Editora.

FURTH, H.

1976 *Piaget na sala de aula*, Rio de Janeiro. Forense Universitária.

GAGNÉ, R.

1971 *Como se realiza a aprendizagem*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos.

OLIVEIRA, M. K.

1993 *Vygotsky. Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico*, São Paulo, Brasil, Ed. Scipione.

SPRINTHALL, N. e SPRINTHALL R.

1993 *Psicologia Educacional. Uma abordagem desenvolvimentista*, Lisboa, McGraw-Hill.

VON GLASERSFELD, E.

1987 «Constructivism in education», em *The international encyclopedia of education*, Pergamon Press.