ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2016.2)

Segunda Prova (Parte I & II) – Novembro/2016

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Nota 1: Duração da prova: **75** minutos.	**Nota 4:** A prova pode ser feita inteiramente a lápis/lapiseira.
Nota 2: Perguntas durante a prova são **proibidas**.	**Nota 5:** Os versos das folhas podem ser utilizados para a resolução.
Nota 3: É proibido o uso de calculadoras/computadores.	**Nota 6:** Havendo **indicação adequada**, pode-se continuar a resolução de uma questão em uma página de outra questão.

Formulário

Diagonalização	Produto vetorial	Produto escalar	Retas	Planos
$Mv = \lambda v$	"Regra da mão direita"	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \Vert\vec{u}\Vert\Vert\vec{v}\Vert\cos\theta$	$X = A + \lambda\vec{u}$	$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
$\det(M - \lambda I) = 0$	$\vec{u}\wedge\vec{v} = \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1\\ y = y_0 + \lambda u_2\\ z = z_0 + \lambda u_3\end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1\\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2\\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3\end{cases}$
$S^{-1}MS = \Lambda$	$\Vert\vec{u}\wedge\vec{v}\Vert = \Vert\vec{u}\Vert\Vert\vec{v}\Vert\sin\theta$			$ax + by + cz + d = 0$

1) [3,5 pontos] Determinar a distância entre as retas $r : X = (1,-1,1) + \lambda(2,2,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e s. A reta s é formada pela intersecção dos planos $\pi_1 : y - 2z + 6 = 0$ e $\pi_2 : X = (3,0,1) + \lambda(2,0,-1) + \mu(2,1,0)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

---

1) Determinar-se-á, inicialmente, uma equação para a reta s. Nota-se que $P(3,0,1) \in \pi_2$ e dado um ponto $X(x,y,z)$ arbitrário pertencente ao plano π_2, os vetores $\overrightarrow{PX} = X - P = (x-3, y, z-1)$, $(2,0,-1)$ e $(2,1,0)$ são linearmente dependentes por serem todos paralelos ao plano em questão; por conseguinte,

$$0 = \det\begin{pmatrix} x-3 & y & z-1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} = x - 2y + 2z - 5\,,$$

donde se tem a representação algébrica $\pi_2 : x - 2y + 2z - 5 = 0$. De $s = \pi_1 \cap \pi_2$, o sistema

$$\begin{cases} y - 2z + 6 = 0\\ x - 2y + 2z - 5 = 0\end{cases}, \quad \text{que implica} \quad \begin{cases} x = -7 + 2z\\ y = -6 + 2z\end{cases},$$

fornece uma descrição da reta s: tomando $z = \nu$, $\nu \in \mathbb{R}$, tem-se $x = -7 + 2\nu$ e $y = -6 + 2\nu$; portanto,

$$s : X = (-7,-6,0) + \nu(2,2,1)\,, \quad \nu \in \mathbb{R}\,,$$

onde fica claro que $r \parallel s$. Denote $\vec{v} := (2,2,1)$. Considere, agora, $A(1,-1,1) \in r$ (obtido com $\lambda = 0$ na equação onde a reta r foi apresentada) e $B(-1,0,3)$ (obtido com $\nu = 3$ na equação acima). Seja $H \in s$ um ponto onde $\overrightarrow{AH}$ seja ortogonal a r e s. Isto implica $\Vert\overrightarrow{AH}\Vert$ ser a distância entre as duas retas, sendo que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$, onde $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1,2)$ e $\overrightarrow{BH} = \vec{\text{proj}}_{\vec{v}}\overrightarrow{BA}$. Por outro lado, $\vec{\text{proj}}_{\vec{v}}\overrightarrow{BA} = \ell\frac{\vec{v}}{\Vert\vec{v}\Vert}$, com $\ell = \Vert\overrightarrow{BA}\Vert\cos\theta$ e θ sendo o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\vec{v}$. De $\overrightarrow{BA}\cdot\vec{v} = \Vert\overrightarrow{BA}\Vert\Vert\vec{v}\Vert\cos\theta$, chega-se, finalmente, a $\vec{\text{proj}}_{\vec{v}}\overrightarrow{BA} = \frac{(\overrightarrow{BA}\cdot\vec{v})\vec{v}}{\Vert\vec{v}\Vert^2}$, donde

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \vec{\text{proj}}_{\vec{v}}\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AB} + \frac{(\overrightarrow{BA}\cdot\vec{v})\vec{v}}{\Vert\vec{v}\Vert^2}\\ &= (-2,1,2) + \frac{(2,-1,-2)\cdot(2,2,1)}{\left(\sqrt{2^2+2^2+1^2}\right)^2}(2,2,1) = (-2,1,2)\,.\end{aligned}$$

Logo, a distância entre as retas r e s é $\Vert\overrightarrow{AH}\Vert = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

---

2) [2,0 pontos] Determinar a fórmula geral para $a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1}$ e $b_n = 3a_{n-1} - 2b_{n-1}$, sendo que $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$.

---

2) A relação de recorrência acima para a_n e b_n pode ser representada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & 2a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n & = & 3a_{n-1} - 2b_{n-1} \end{array} \right. \tag{1}$$

ou

$$u_n := \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = M u_{n-1} \,, \quad n \subset \mathbb{Z} \,, \quad \text{com} \quad u_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,.$$

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^n u_0$, deve-se obter M^n, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det\left(M - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda + 1\right) \,,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_1 I\right) v_1 = \begin{pmatrix} 2-(1) & -1 \\ 3 & -2-(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \xi_1 & = & \eta_1 \end{array} \right. \,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\eta_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_2 I\right) v_2 = \begin{pmatrix} 2-(-1) & -1 \\ 3 & -2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \eta_2 & = & 3\xi_2 \end{array} \right. \,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\eta_2 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right) .$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1} M S$, tem-se $M = S \Lambda S^{-1}$, donde

$$M^n = \overbrace{\left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\cdots\left(S\Lambda S^{-1}\right)}^{n \text{ termos}} = S \Lambda^n S^{-1} \,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = S\Lambda^n S^{-1} u_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - (-1)^n \\ 1 + 3\,(-1)^n \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right] \quad \text{ e } \quad b_n = \frac{1}{2}\left[1 + 3\,(-1)^n\right] \,, \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z} \,.$$

3) [1,5 pontos] Determinar uma equação da reta r, que passa por $P(1,2,3)$ e é ortogonal ao plano π : $3x - 3y + z - 1 = 0$.

---

3) Para encontrar uma representação paramétrica do plano π, impõe-se $x = \lambda$ e $y = \mu$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; nestas condições, tem-se

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & \mu \\ z & = & 1 - 3\lambda + 3\mu \end{array}\right. \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,$$

donde $\pi : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,-3) + \mu(0,1,3)$. Logo, pode-se obter um vetor $\vec{n}$ normal ao plano π, pode-se escolher

$$\vec{n} = (1,0,-3) \wedge (0,1,3) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (3,-3,1)\,.$$

Logo, sabendo-se que $P(1,2,3) \in r$, pode-se escrever

$$r : X = (1,2,3) + \lambda(3,-3,1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Disto, decorre que o ponto de intersecção $r \cap \pi$ é $(\frac{22}{19}, \frac{35}{19}, \frac{58}{19})$.

---

4) [3,0 pontos] Estudar o sistema $Ax = b$ em termos de α e β, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ \alpha & 8 & 4 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \beta \end{pmatrix}$. Explicitar todas as soluções (quando existirem) e, quando o sistema apresentar infinitas soluções (caso esta situação se realize), mostrar uma solução particular e o *kernel* de A para chegar na solução geral.

---

4) Inicialmente, nota-se que $\det A = \alpha - 4$. Dividir-se-á a análise quando $\alpha \neq 4$ (ou $\det A \neq 0$) e $\alpha = 4$ (ou $\det A = 0$).

$\boxed{\det A \neq 0 \text{ ou } \alpha \neq 4}$

Neste caso, a inversa de A existe e a solução é única. Do procedimento usual

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ \alpha & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8-2\alpha & 4-\alpha & -\alpha & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8-2\alpha & 4-\alpha & -\alpha & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha & -24+5\alpha & 8-2\alpha & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{4-\alpha} & 0 & -\frac{1}{4-\alpha} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha & -24+5\alpha & 8-2\alpha & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{4-\alpha} & 0 & -\frac{1}{4-\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5\alpha-24}{4-\alpha} & 2 & \frac{1}{4-\alpha} \end{array}\right),$$

tem-se $A^{-1} = \frac{1}{\alpha-4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3\,(\alpha-4) & -(\alpha-4) & 0 \\ 24-5\alpha & 2\,(\alpha-4) & -1 \end{pmatrix}$ com $\alpha \neq 4$. Neste caso, a solução é única e

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\alpha-4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3\,(\alpha-4) & -(\alpha-4) & 0 \\ 24-5\alpha & 2\,(\alpha-4) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha-4} \begin{pmatrix} \beta-8 \\ 0 \\ 2\alpha-\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 4)\,.$$

$\boxed{\det A = 0 \text{ ou } \alpha = 4}$

Neste caso, o sistema linear assume a forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \beta \end{pmatrix} ,$$

e um processo de escalonamento conduz a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & \beta \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-8 \end{array}\right) .$$

Logo, se $\beta \neq 8$, o sistema não admite solução. Considere, então, $\beta = 8$, que implica o escalonamento acima terminar em

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left\{ \begin{array}{lcl} \xi + \mu & = & 2 \\ \eta & = & 0 \end{array} \right. .$$

Impondo $\xi = 0$, tem-se uma solução particular do sistema, que é $x_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$. Para determinar o kernel, deve-se solucionar a equação $Ax = 0$, e o escalonamento envolvido para simplificar esta equação pode ser idêntica à adotada para se chegar na solução particular acima. Logo, o kernel é solução de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left\{ \begin{array}{lcl} \xi + \mu & = & 0 \\ \eta & = & 0 \end{array} \right. ,$$

donde $\mu = -\xi$. Desta forma, $\ker A = \left\{ \xi \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T : \xi \in \mathbb{R} \right\}$, e a solução geral pode ser dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$
