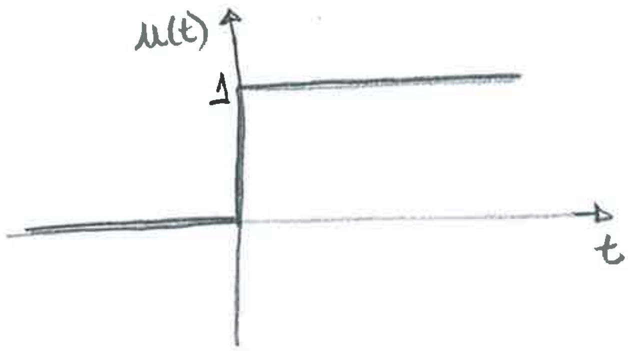
Gabarito

Parte 1 Transformada de Fourier

1. a) $u(t)$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{1}{j\omega}\, e^{-j\omega t} \Big|_{0}^{\infty} \Rightarrow \infty$$

Na CTFT a função x(t) tem um intervalo finito: não zero em um período finito e zero fora desse período. A integral da FT precisa ser feita apenas dentro desse período que a função é não nula.

Entretanto, se a função nunca retorna a zero, a integração deve ser feita até o ∞. Como a função senoidal $e^{-j\omega t}$ tem valores não nulos até o ∞, a integral vai para ∞.

PORQUE A RESPOSTA É ∞?

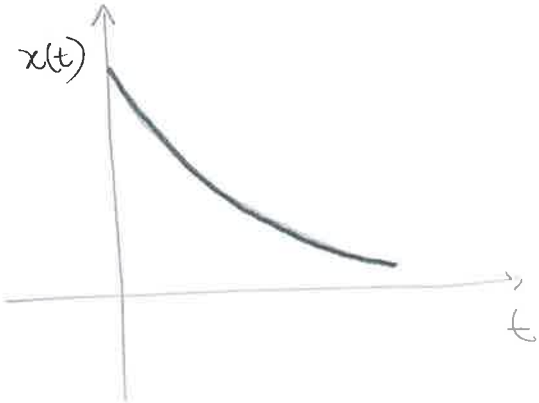
$$e^{-j\omega t} = \underbrace{\cos(-\omega t)}_{\text{entre } \pm 1} + j\, \underbrace{\sin(-\omega t)}_{\text{entre } \pm 1} \quad \text{independente de } t$$

A solução é utilizar um valor complexo, de modo que a exponencial fique $e^{-(a+j\omega)t}$. Desse modo,

$$\text{para } t \to \infty \quad \underbrace{e^{-at}}_{\text{tende a zero}}\ \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{variando entre } \pm 1} \quad \therefore \quad \boxed{e^{-(a+j\omega)t} \longrightarrow 0}$$

b) $e^{-at}u(t)$, a real e positivo

$x(t) = e^{-at}u(t)$, a nº real positivo



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \left. \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right|_{0}^{\infty}$$

$$X(\omega) = 0 - \frac{1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} \qquad X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\therefore\ X(\omega) = \frac{a-j\omega}{a^2-(j\omega)^2} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+\omega^2}}_{Re[X(\omega)]} - j\underbrace{\frac{\omega}{a^2+\omega^2}}_{Im[X(\omega)]}$$

PARTE EXTRA:

Todo sinal x(t) pode ser decomposto em uma parcela par e outra ímpar:

$$x(t) = Par\{x(t)\} + Ímpar\{x(t)\} = x_e(t) + x_o(t)$$

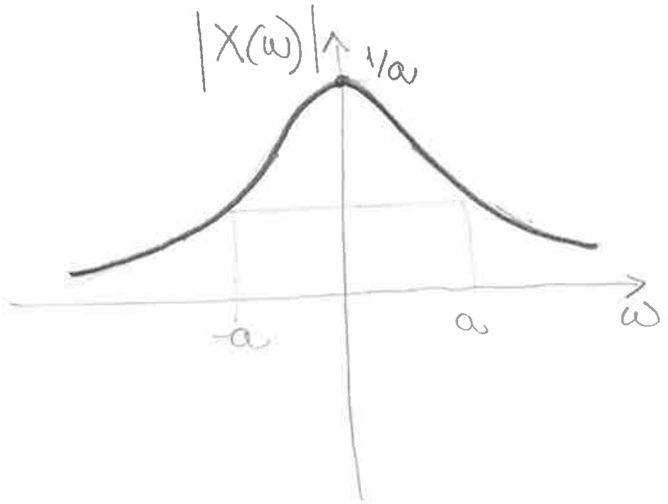
$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

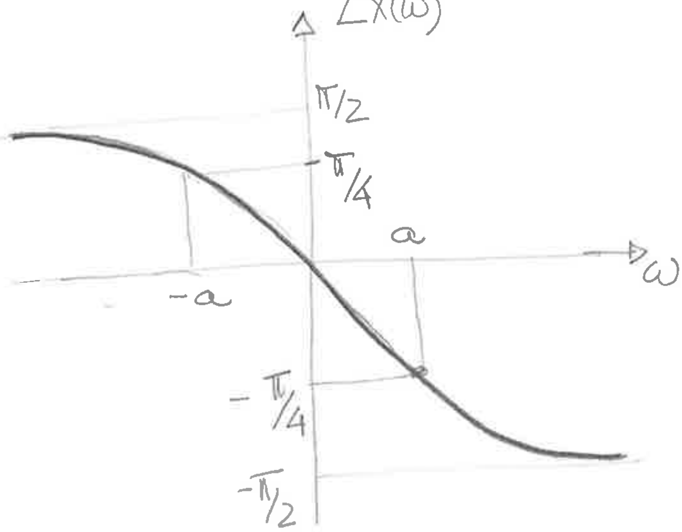
$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Sabe-se que:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_e(t)\} &= Re\{X(\omega)\} \\ \mathcal{F}\{x_o(t)\} &= j\, Im\{X(\omega)\} \end{aligned}\right] X(\omega) = Re\{X(\omega)\} + j\, Im\{X(\omega)\}$$

Isso tudo é só para preparar uma outra maneira de fazer o próximo exercício.





$$|X(\omega)| = \sqrt{Re[X(\omega)]^2 + Im[X(\omega)]^2}$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = \operatorname{atan} \frac{Im\{X(\omega)\}}{Re\{X(\omega)\}} = \operatorname{atan} \frac{\omega / a^2+\omega^2}{a / a^2+\omega^2} = -\operatorname{atan} \frac{\omega}{a}$$

$\omega = -a \quad \angle X(\omega) = -\operatorname{atan}(-1) = \pi/4$

$\omega \to \infty \quad \angle X(\omega) \to \pi/2 \qquad \omega = a \quad \angle X(\omega) = -\operatorname{atan}(1) = -\pi/4$

O que acontece quando $a \to 0$?

$$U(\omega) = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1}{a+j\omega} \right) = \lim_{a \to \infty} \left[\frac{a}{a^2+\omega^2} \right] - j \lim_{a \to \infty} \left[\frac{\omega}{a^2+\omega^2} \right]$$

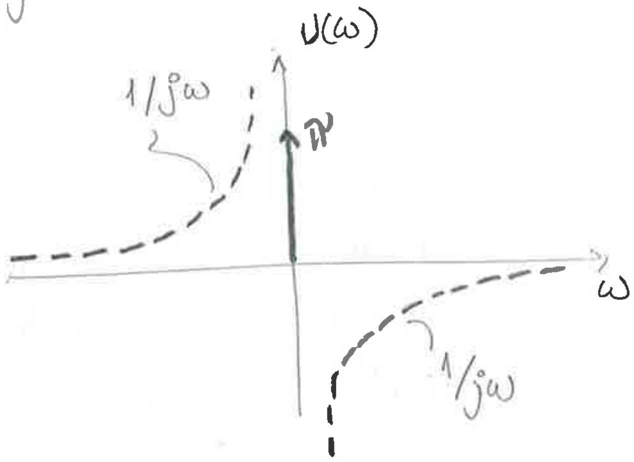
$$= \lim_{a \to \infty} \left[\frac{a}{a^2+\omega^2} \right] + \frac{1}{j\omega}$$

A função $\frac{a}{a^2+\omega^2}$ tem algumas propriedades interessantes:

1→ a área sob essa função é π para $\forall a$: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+\omega^2} d\omega = \operatorname{atan} \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$

2▸ qdo $a \to 0$, a função se aproxima de zero para $\forall a$, e toda área π fica concentrada em um único ponto $\omega = 0$.
Claramente, ∴, qdo $a \to 0$ a função tende a $\pi\delta(\omega)$

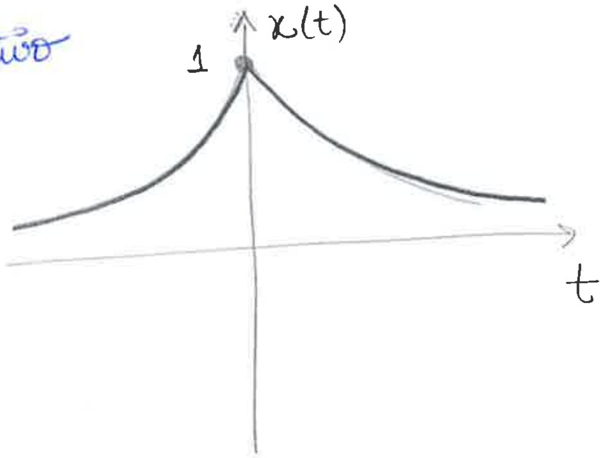
$$\therefore\ U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



Essa função será vista mais para frente novamente.

c) $e^{-a|t|}u(t)$, a real e positivo

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{se } t>0 \\ 1 & \text{se } t=0 \\ e^{at} & \text{se } t<0 \end{cases}$$

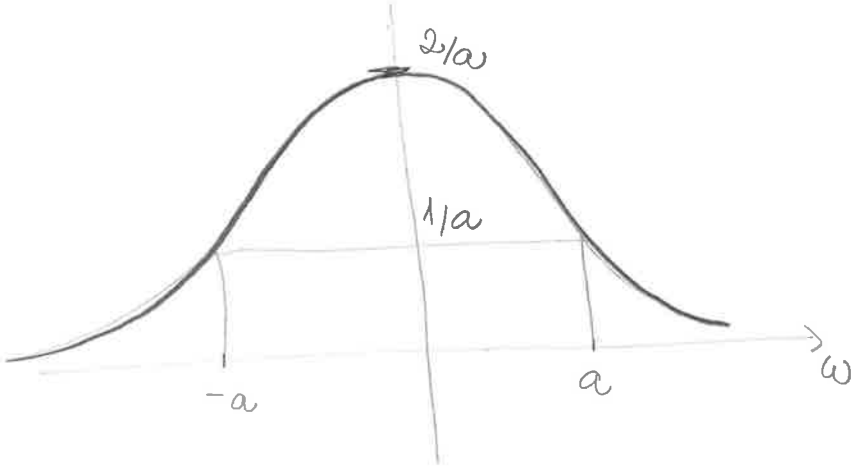


$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\,dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-j\omega}(1-0) - \frac{1}{a+j\omega}(0-1) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \boxed{\frac{2a}{a^2+\omega^2}}$$



$$|X(\omega)| = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\omega = 0 \rightarrow |X(\omega)| = 2/a$$

$$\omega = a \rightarrow |X(\omega)| = 1/a$$

$$\angle X(\omega) = \operatorname{atan} \frac{0}{2a/(a^2+\omega^2)}$$

$\angle X(\omega) = \operatorname{atan} 0 = 0$ pois $X(\omega)$ tem somente valores reais positivos

Lembra que preparamos o item anterior para usarmos aqui?

Posso escrever a função $e^{-a|t|}u(t)$ como uma função par (veja o gráfico → ela é uma função par).

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$$= 2\left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right]$$

$$x(t) = 2 \cdot \text{Par}\{e^{-at}u(t)\}$$

Lembre-se que $\mathcal{F}\{\text{Par}\{y(t)\}\} = \text{Re}\{y(t)\}$, para $\forall y(t)$

Portanto, do item b,

$$\text{Re}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\} = \frac{a}{a^2+\omega^2} \quad \text{e, } \therefore, \quad X(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$ cqd

d. $\delta(t-8)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-8)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j8\omega}$$

$$\boxed{X(\omega) = \cos 8\omega - j \,\text{sen}\, 8\omega}$$

Poderíamos chegar ao mesmo resultado usando a propriedade de translação no tempo,

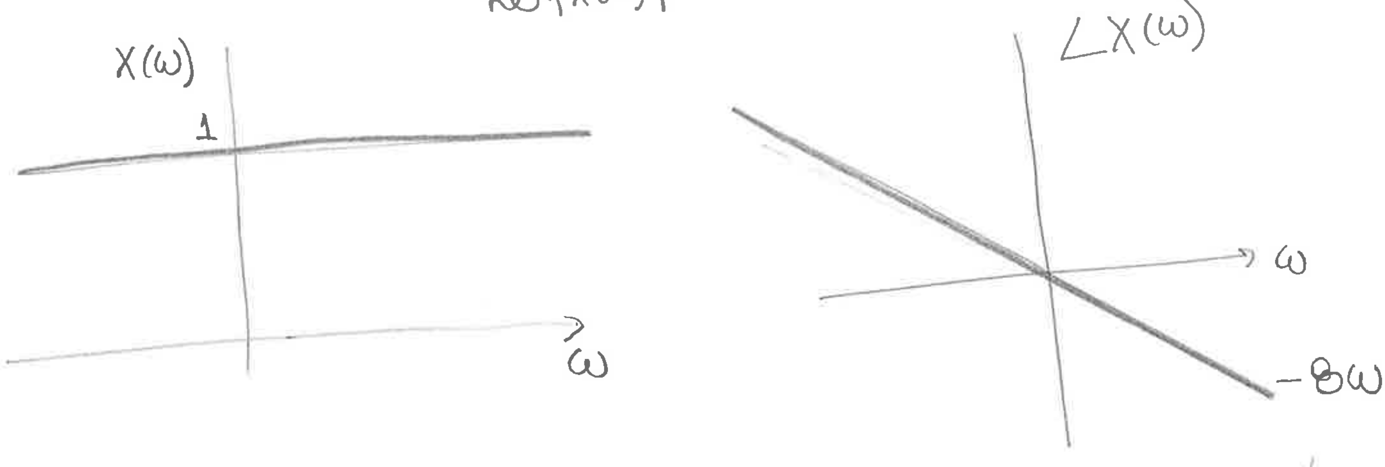
$$y(t) = x(t-t_0) \Longrightarrow Y(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

se $x(t) = \delta(t) \Longrightarrow X(\omega) = 1$ e, $\therefore$

$$x(t-8) = \delta(t-8) \Longrightarrow e^{-j8\omega} \cdot 1 = \boxed{e^{-j8\omega}}$$

$$|X(\omega)| = |e^{-j8\omega}| = 1, \ \forall \omega$$

$$\angle X(\omega) = \text{atan} \frac{\text{Im}\{X(\omega)\}}{\text{Re}\{X(\omega)\}} = \text{atan} - \frac{\text{sen}\, 8\omega}{\cos 8\omega} = -8\omega$$



Lembrando:
Quando estudamos translação no tempo, vimos que atraso de tempo em um sinal provoca desvio linear do espectro da fase.

06

e) $e^{(-1+2j)t}\, u(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1+2j)t}\, u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-1+2j)t}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

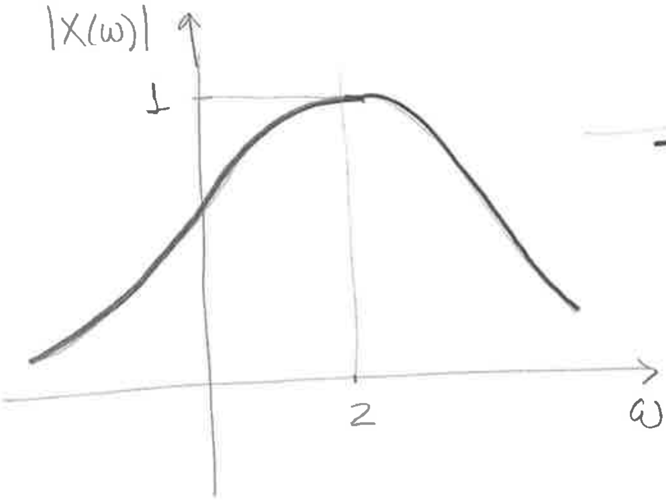
$$X(\omega) = \frac{1}{-1+j(2-\omega)}\, \underbrace{e^{[-1+j(2-\omega)]t}\Big|_0^{\infty}} = \frac{1}{-1+j(2-\omega)}\,(0-1)$$

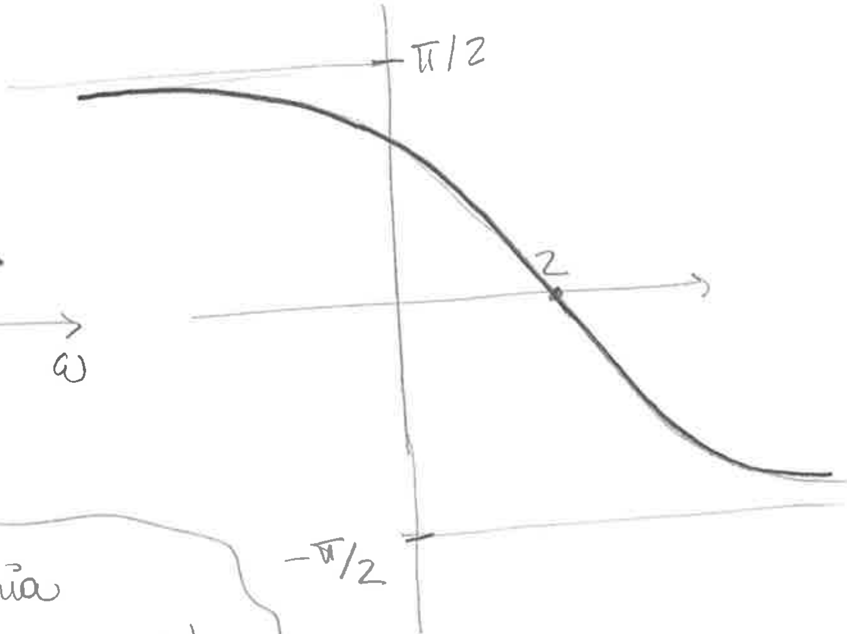
parte real da exp <0, $\therefore$ quando $t\to\infty$, a exponencial tende a zero.

$$X(\omega) = \frac{1}{1+j(\omega-2)}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1+(\omega-2)^2} - j\,\frac{(\omega-2)}{1+(\omega-2)^2}$$

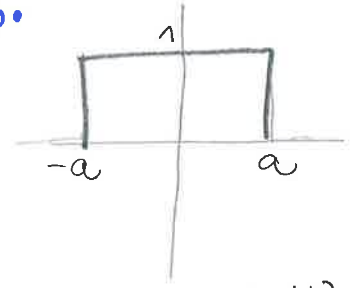
$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega-2)^2}}, \quad \angle X(\omega) = -\operatorname{atan}(\omega-2)$$



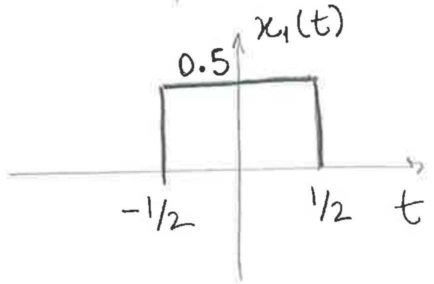


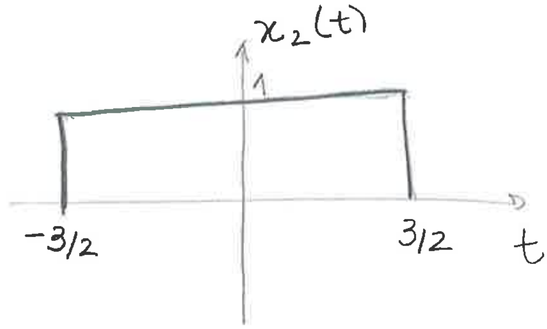
Perceba que só existe simetria em torno de $\omega=0$ qdo $x(t)$ é real!

2.



$$X(\omega) = 2a \,\text{sinc}(\omega a) = 2\,\frac{\text{sen}(\omega a)}{\omega}$$





$$x(t) = x_1(t-2{,}5) + x_2(t-2{,}5)$$

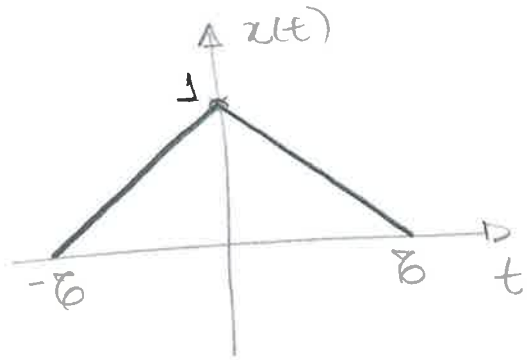
$$X(\omega) = e^{-j\frac{5\omega}{2}} X_1(\omega) + e^{-j\frac{5\omega}{2}} X_2(\omega)$$

$$X_1(\omega) = 0{,}5 \times 2 \times \frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega} = \frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega}$$

$$X_2(\omega) = 1 \times 2 \times \frac{\text{sen}(3\omega/2)}{\omega} = 2\,\frac{\text{sen}(3\omega/2)}{\omega}$$

$$X(\omega) = e^{-j\frac{5\omega}{2}} \left[\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega} + 2\,\frac{\text{sen}(3\omega/2)}{\omega} \right]$$

3. $x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{0} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt$$

Desenvolvendo por partes $\displaystyle\int_{-\tau}^{0} (1 + t/\tau)\, e^{-j\omega t} dt$

$$u = 1 + \frac{t}{\tau} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau}$$

$$dv = e^{-j\omega t} \qquad v = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} = j\,\frac{e^{-j\omega t}}{\omega}$$

$$\int u\,dv = uv\Big| - \int v\,du$$

$$= \left(1+\frac{t}{\tau}\right)\frac{j}{\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau}^{0} + \int_{-\tau}^{0} \frac{1}{j\omega}\, e^{-j\omega t}\, \frac{dt}{\tau}$$

$$= -\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-j\omega t}\,dt = -\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega\tau \cdot j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau}^{0}$$

$$\boxed{\int_{-\tau}^{0}\left(1+t/\tau\right) e^{-j\omega t}\,dt = -\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2\tau}\left[1 - e^{j\omega\tau}\right]}$$

Desenvolvendo por partes $\int_0^{\tau}(1-t/\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt$

$$u = 1 - \frac{t}{\tau} \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$

$$dv = e^{-j\omega t} \qquad v = j\,\frac{e^{-j\omega t}}{\omega}$$

$$\int_0^{\tau}(1-t/\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt = (1-t/\tau)\frac{j}{\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_0^{\tau} - \int_0^{\tau}\frac{1}{j\omega}\, e^{-j\omega t}\,\frac{dt}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega\tau}\,\frac{1}{j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_0^{\tau} = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\omega^2\tau}\left(e^{-j\omega\tau} - 1\right)$$

$$\boxed{\int_0^{\tau}(1-t/\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2\tau}\left[1 - e^{-j\omega\tau}\right]}$$

Portanto,

$$X(\omega) = -\cancel{\frac{1}{j\omega}} + \frac{1}{\omega^2\tau}\left[1 - e^{j\omega\tau}\right] + \cancel{\frac{1}{j\omega}} + \frac{1}{\omega^2\tau}\left[1 - e^{-j\omega\tau}\right]$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega^2\tau}\left[2 - \left(e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}\right)\right]$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega^2\tau}\left[2 - 2\cos\omega\tau\right] = \frac{2}{\omega^2\tau}\left(1 - \cos\omega\tau\right)$$

$$1 - \cos\omega\tau = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\therefore\; X(\omega) = \frac{4\,\mathrm{sen}^2(\omega\tau/2)}{\omega^2\tau} = \tau\,\frac{\mathrm{sen}^2(\omega\tau/2)}{\omega^2\tau^2/4}$$

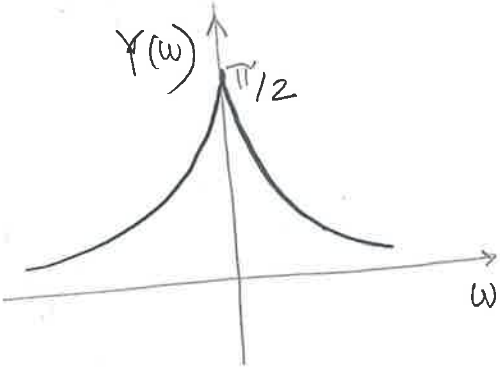
$$\boxed{X(\omega) = \tau\left[\frac{\mathrm{sen}(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}\right]^2 = \tau\,\mathrm{sinc}^2(\tau\omega/2)}$$

OBS → Repare que, a partir da resposta obtida é fácil deduzir que o sinal triângulo unitário ($\tau = 1$) é obtido da convolução de dois pulsos unitários: $\Delta(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$.

4) a) Se $\mathcal{F}\{e^{-2|t|}\} = \dfrac{4}{4+\omega^2}$)

pela propriedade da linearidade:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{4}e^{-2|t|}\right\} = \frac{1}{4+\omega^2}$$



Então, pela regra da dualidade,

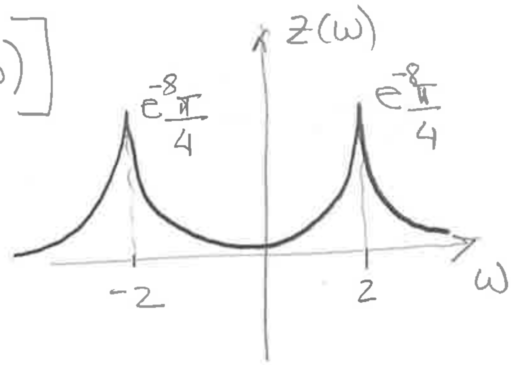
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{4+\omega^2}\right\} = 2\pi \cdot \frac{1}{4} e^{-2|\omega|} \qquad \therefore\; \boxed{Y(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}}$$

b) $z(t) = y(t)\cos 2t$

Verifique as notas de aula (veja exemplo 3):

$$Z(\omega) = \frac{1}{2}\left(Y(\omega-\omega_0) + Y(\omega+\omega_0)\right]$$

$$Z(\omega) = \frac{\pi}{4}\left[e^{-2|\omega-2|} + e^{-2|\omega+2|}\right]$$



5)

a) FT de um impulso unitário

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

(lembre-se sempre da seguinte propriedade:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,\delta(t-a)\, dt = x(a), \quad \alpha < a < \beta$$

b)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

Propriedade da integral: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{1}{j\omega}\underbrace{X(\omega)}_{=1} + \pi \underbrace{X(0)}_{=1}\delta(\omega)$

pois $X(\omega) = 1, \forall \omega$
se $x(t) = \delta(t)$

$$\therefore U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$$

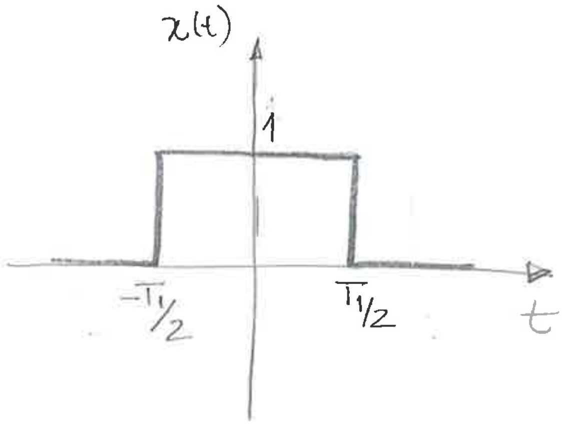
c) Por outro lado, $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

Propriedade da derivada: $\dfrac{dx}{dt} \rightarrow j\omega X(\omega)$

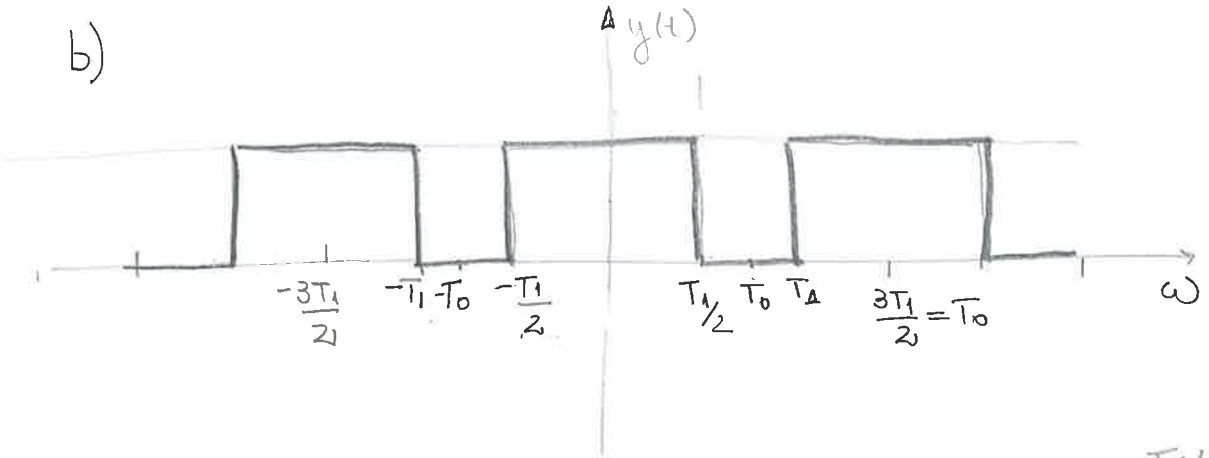
$$\therefore X(\omega) = j\omega\left[1/j\omega + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{j\omega}{j\omega} + j\pi \underbrace{\omega\,\delta(\omega)}_{\text{sempre zero}} = 1 \quad \text{cqd}$$

5)

a)



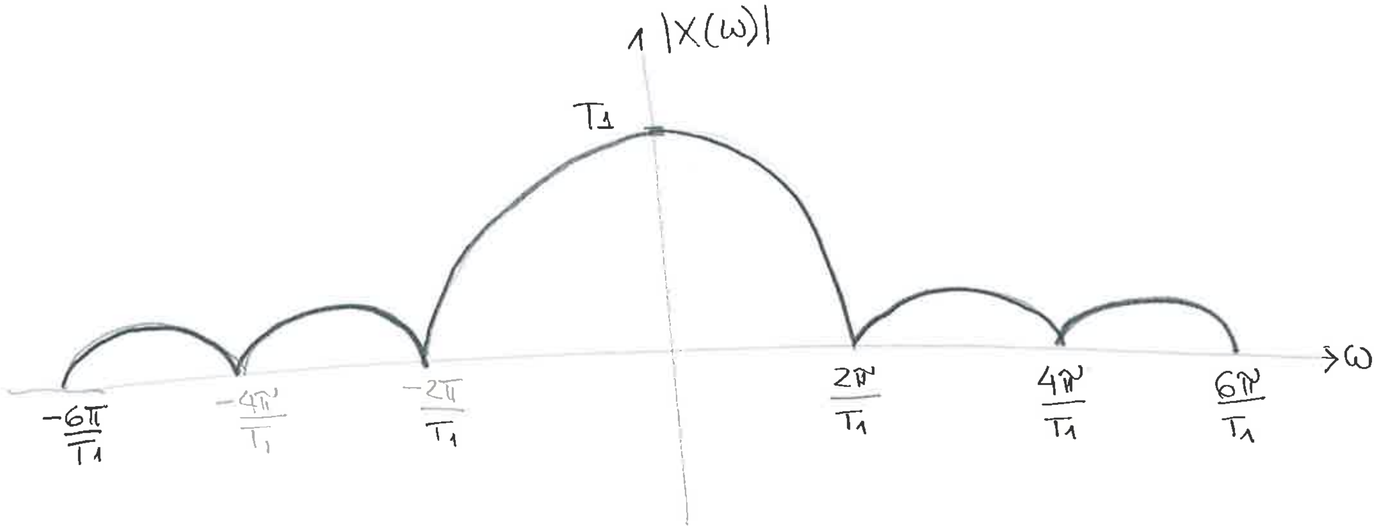
b)



c) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} 1\, e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1/2}^{T_1/2}$

$X(\omega) = -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega T_1/2} - e^{j\omega T_1/2}\right] = \frac{1}{\omega}\ 2 \cdot \text{sen}\, \omega T_1/2$

$$\boxed{X(\omega) = T_1 \ \text{sinc}(\omega T_1/2)}$$



d) $a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

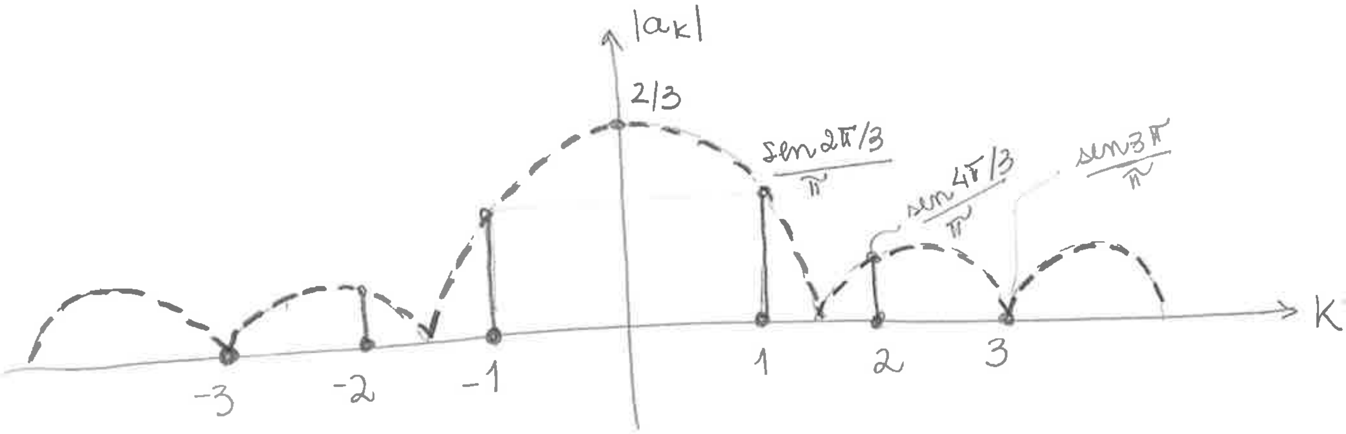
$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}\, dt$$

$$\therefore\ a_k = \frac{1}{T_0}\cdot\left(-\frac{1}{jk\frac{2\pi}{T_0}}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}\Bigg|_{-T_1/2}^{T_1/2} = -\frac{1}{jk2\pi}\left[e^{-jk\pi T_1/T_0} - e^{jk\pi T_1/T_0}\right]$$

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\, \text{sen}\,(k\pi T_1/T_0)\cdot\frac{T_1/T_0}{T_1/T_0} \qquad \frac{T_1}{T_0} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ a_k = T_1/T_0\ \text{sinc}\,(k\pi T_1/T_0) = \frac{2}{3}\ \text{sinc}\,(2k\pi/3)$$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{3}\ \text{sinc}\ \pi(2k/3)}$$



e) $$\frac{1}{T_0}X(\omega)\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi k}{T_0}} = \frac{1}{T_0}\, T_1\ \text{sinc}\left(\frac{2\pi k}{T_0}\frac{T_1}{2}\right) = \frac{2}{3}\ \text{sinc}\left(\frac{2}{3}\pi k\right)$$

$=$

$\therefore$ Desse resultado conclui-se que a_k são pontos amostrais da Transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$, amostrados a cada $\omega = 2\pi k/T_0$ e escalonados de $1/T_0$.

7)
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Tirando o conjugado de ambos os lados das equações

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{j\omega t} dt \qquad x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega$$

a) Se $x(t)$ é real, no domínio do tempo tem-se $x(t) = x^*(t)$,

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t}$$

$$\therefore X^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} = X(\omega)$$

b) Se $x(t) = x^*(-t)$,

$$x^*(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Para que $X^*(\omega) = X(\omega)$, este deve ser real.

c) Real: $X(\omega) = X^*(-\omega)$, $x(t) = x^*(t)$

Par: $x(t) = x(-t)$

Portanto, $x^*(t) = x^*(-t)$
$\qquad\qquad \|$
$\qquad x(t) = x^*(-t)$ e, portanto, $X(\omega)$ é real.

Daí, tem-se que $X(\omega) = X^*(-\omega) = X(-\omega)$

$\therefore X(\omega)$ é par

d) Real: $X(\omega) = X^*(-\omega)$, $x(t) = x^*(t)$

Ímpar: $x(t) = -x(-t)$

$\therefore$, $x^*(t) = -x^*(-t)$

$x(t) = -x^*(-t)$

$$-x^*(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -X^*(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$X(\omega) = -X^*(\omega)$$

$\therefore X(\omega)$ é imaginário

Pense que:
$z = a+bj \quad z^* = a-bj$
$a+bj = -a+bj$
$a=0 \Rightarrow z$ é imaginário

Daí, tem-se que:

$z = bj \quad z^* = -bj$

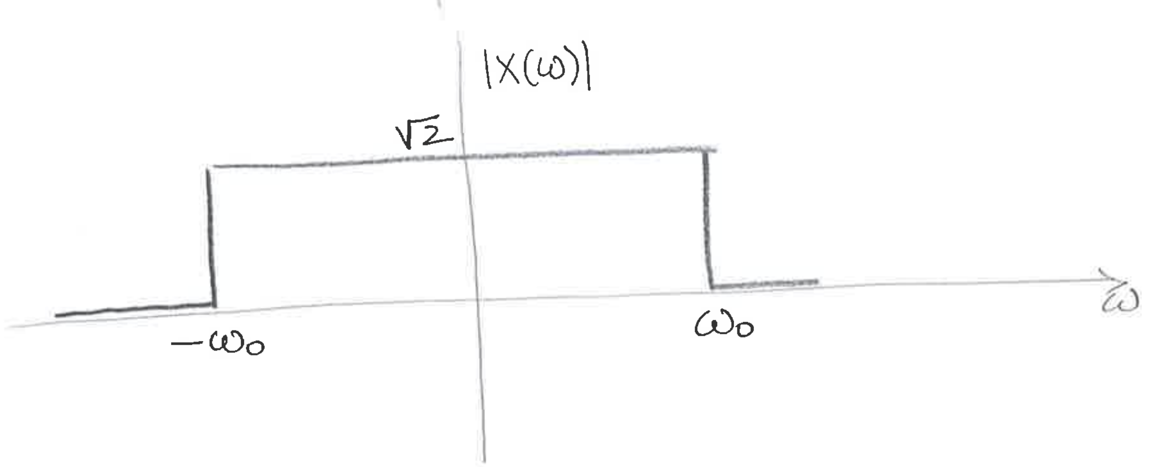
$$X(\omega) = X^*(-\omega) = -X^*(\omega) = -X(-\omega)$$

$\therefore X(\omega)$ é ímpar

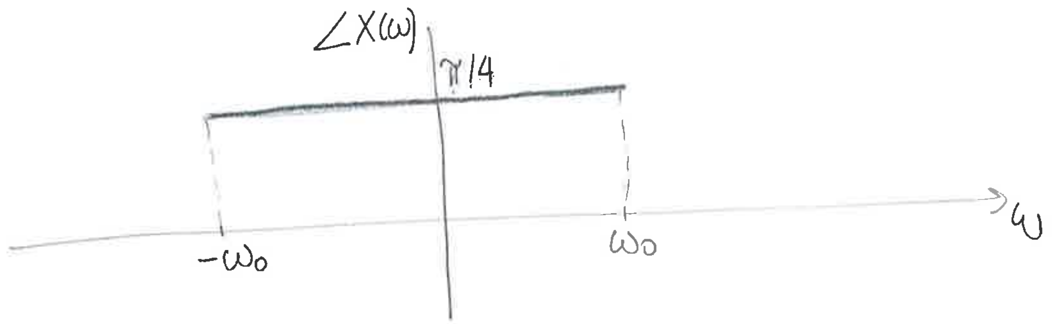
8) a) A magnitude $|X(\omega)| = \sqrt{Re^2\{X(\omega)\} + Im^2\{X(\omega)\}}$

Dos gráficos, $|X(\omega)| = \sqrt{1^2+1^2}$ para $|\omega| < \omega_0$

$|X(\omega)| = 0$ para $|\omega| > \omega_0$



A fase $\angle X(\omega) = \mathrm{atan}\left(\frac{Re\{X(\omega)\}}{Im\{X(\omega)\}}\right) = \mathrm{atan}(1)$ para $|\omega| < \omega_0$



b) Se $x(t)$ é real, $X(\omega) = X^*(-\omega)$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1+j & \text{se } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

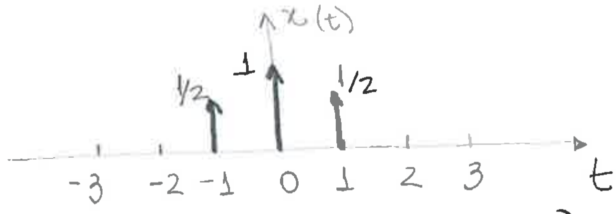
$$X(-\omega) = \begin{cases} 1+j & \text{se } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$X^*(-\omega) = \begin{cases} 1-j & \text{se } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$X(\omega) \neq X^*(-\omega)$

$\therefore$ o sinal não é real.

9) a) $T_0 = 6$



(ilustração de 1 período)

b) $$X[k] = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$$

$$X[k] = \frac{1}{6} \int_{-3}^{3} \left[\frac{1}{2}\delta(t+1) + \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-1)\right] e^{-j\frac{k\pi}{3}t}\, dt$$

$$X[k] = \frac{1}{12}\int_{-3}^{3} \delta(t+1)\, e^{-j\frac{k\pi}{3}t} dt + \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} \delta(t)\, e^{-j\frac{k\pi}{3}t} dt + \frac{1}{12}\int_{-3}^{3} \delta(t-1)\, e^{-j\frac{k\pi}{3}t} dt$$

Lembre-se da regra $\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,\delta(t-a)\,dt = x(a), \quad \alpha < a < \beta$

$$\therefore\ X[k] = \frac{1}{12} e^{+j\frac{k\pi}{3}} + \frac{1}{6} e^{0} + \frac{1}{12} e^{-j\frac{k\pi}{3}}$$

$$X[k] = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{k\pi}{3}} + e^{-j\frac{k\pi}{3}}\right) + 1\right] = \frac{1}{6}\left(\cos\frac{k\pi}{3} + 1\right)$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \cos\frac{k\pi}{3}\right) e^{-j\frac{k\pi}{3}t}}$$

c) Transformada de Fourier de $x_1(t)$, que, na verdade, é 1 único período de $x(t)$

$$X_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\delta(t+1)+\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-1)\right]e^{-j\omega t}dt$$

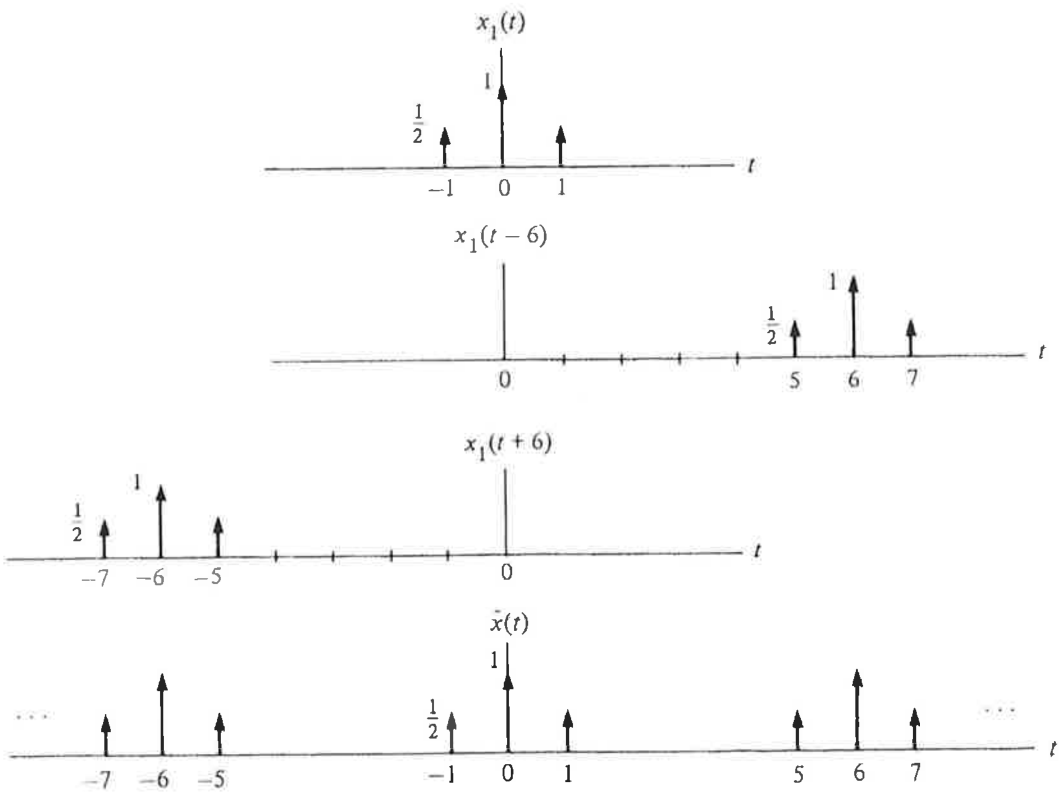
$$X_1(\omega)=\frac{1}{2}e^{j\omega}+1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

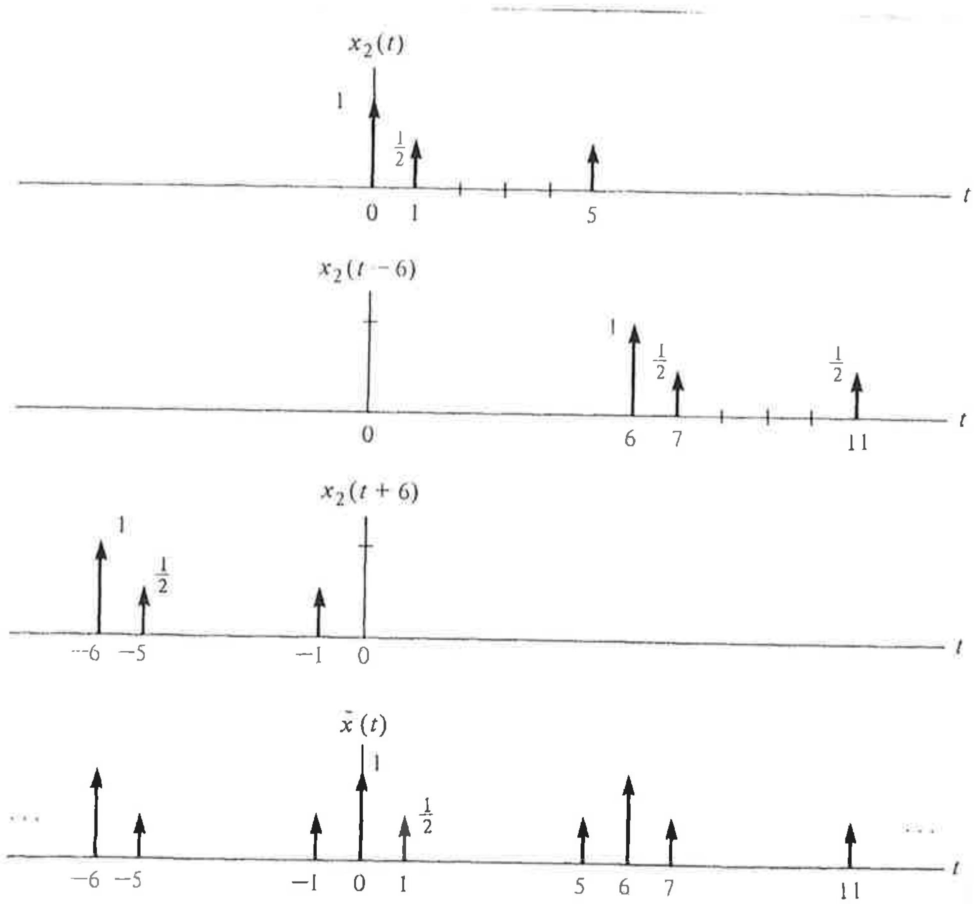
$$\boxed{X_1(\omega)=1+\cos\omega}$$

$$X_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\,e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-1)+\frac{1}{2}\delta(t-5)\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$\boxed{X_2(\omega)=1+\frac{1}{2}\left[e^{-j\omega}+e^{-5j\omega}\right]}$$

d) $T_1=T_2=6$ (Figuras extraídas de [3]).





e) Como $x(t)$ é uma repetição periódica de $x_1(t)$ e $x_2(t)$, os coeficientes da série de Fourier podem ser expressos por amostras escalonadas da Transformada de Fourier (vide exercício 6).

$$X_1(\omega)\Big|_{\omega=\pi K/3} = 1+\cos\frac{\pi K}{3}$$

$$\boxed{\therefore X[K] = \frac{1}{6}\left(1+\cos\frac{\pi K}{3}\right)}$$

$$X_2(\omega)\Big|_{\omega=\pi K/3} = 1+\frac{1}{2}\left[e^{-j\frac{\pi K}{3}} + e^{-5j\frac{\pi K}{3}}\right]$$

$$e^{-j\frac{5\pi K}{3}} = e^{-j(5\pi K/3 - 2\pi K)} = e^{+j\frac{\pi K}{3}}$$

$$\therefore X_2(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi K}{3}} = 1+\frac{1}{2}\left[e^{-j\frac{\pi K}{3}} + e^{j\frac{\pi K}{3}}\right] = 1+\cos\frac{\pi K}{3}$$

$$\boxed{\therefore X[K] = \frac{1}{6}\left(1+\cos\frac{\pi K}{3}\right)}$$

f) Aprendemos em aula que, para um sinal periódico, com frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, a Transformada de Fourier é dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

∴, para o sinal $x(t)$, tem-se:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\cos\frac{k\pi}{3} + 1\right) e^{-jk\frac{\pi}{3}t}$$

para $\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ e $X[k]$ obtido no item b.

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \cos\frac{k\pi}{3}\right) \delta\left(\omega - k\pi/3\right)$$

Ou seja, a transformada de Fourier de um sinal periódico é uma versão amostrada dos coeficientes da série de Fourier

Resulta em um espectro discreto com impulsos nos harmônicos $k\omega_0$ de área igual ao coeficiente da série de Fourier naquele harmônico multiplicado por 2π.

OK, é estranho. A transformada de Fourier de um sinal não periódico é contínuo, mas a transformada de um sinal periódico é discreto!

A FT sinal aperiódico ⟹ aperiódica e contínua.

A FT sinal periódico ⟹ periódica e discreta

10) A resposta $y(t)$ do sistema é dada pela convolução,

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-\tau)} u(t-\tau)\, e^{-b\tau} u(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = e^{-at} \int_{0}^{\infty} e^{(a-b)\tau} u(t-\tau)\, d\tau$$

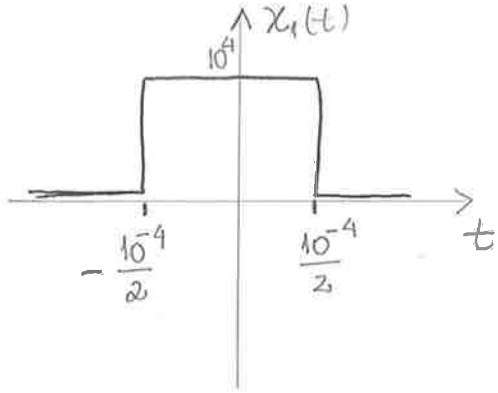
$$y(t) = e^{-at} \int_{0}^{t} e^{(a-b)\tau}\, d\tau = \frac{e^{-at}}{a-b}\, e^{(a-b)\tau} \Big|_{0}^{t}$$

$$y(t) = \frac{e^{-at}}{a-b} \left[e^{(a-b)t} - 1 \right]$$

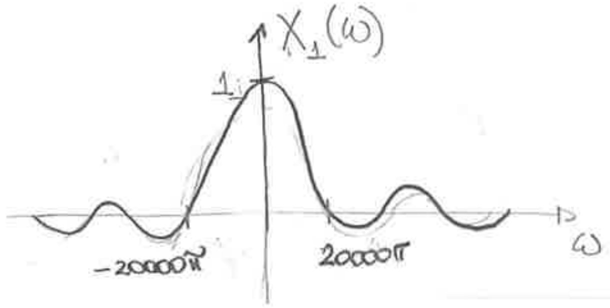
$$\boxed{y(t) = \frac{1}{a-b} \left[e^{-bt} - e^{-at} \right] u(t)}$$

10)

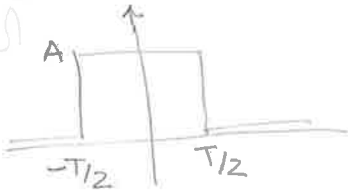
a) $x_1(t) = 10^4 \operatorname{rect}(10^4 t)$



$\therefore X_1(\omega) = \operatorname{sinc}(\omega/20000)$



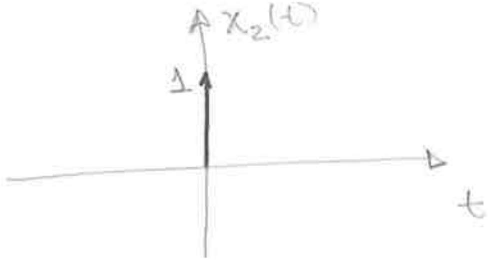
Verifique as notas de aula:



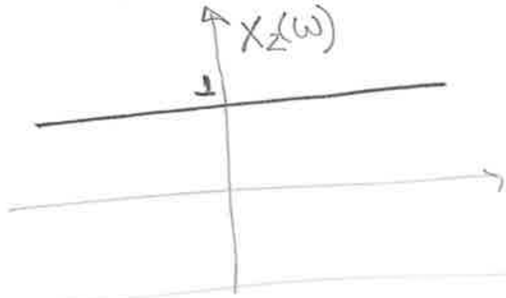
$x(t) = \operatorname{rect}(t/T)$

$X(\omega) = AT \operatorname{sinc}(\omega T/2)$

$x_2(t) = \delta(t)$



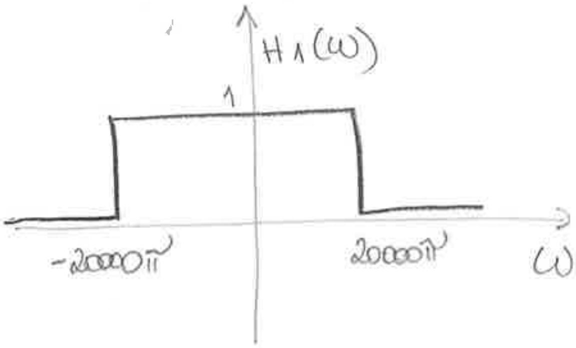
$\therefore X_2(\omega) = 1$



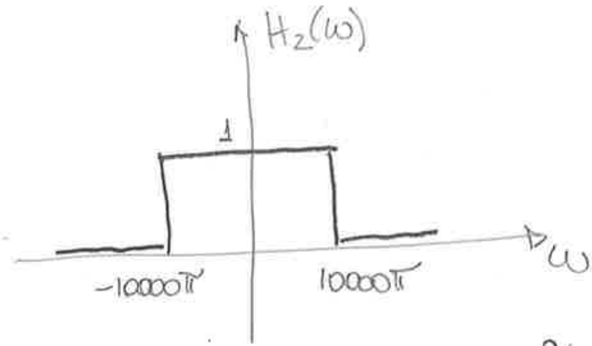
Verifique as notas de aula: $x(t) = \delta(t)$

$X(\omega) = 1$

b) $H_1(\omega) = \operatorname{rect}(\omega/40000\pi)$

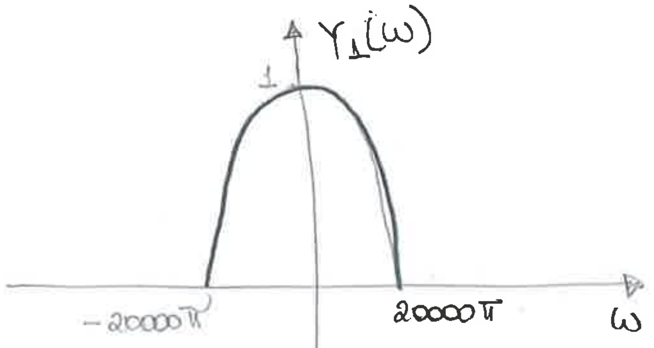


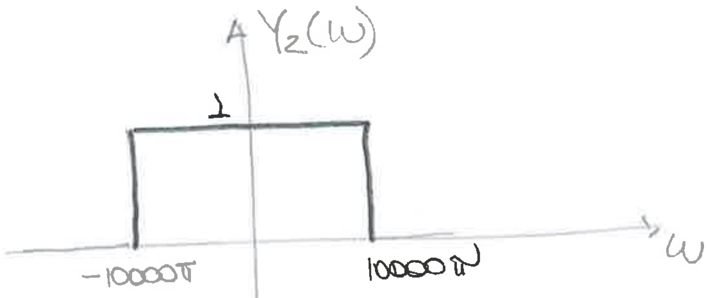
$H_2(\omega) = \operatorname{rect}(\omega/10000\pi)$



c) $Y_1(\omega) = X_1(\omega) H_1(\omega)$

$Y_2(\omega) = X_2(\omega) H_2(\omega)$





$$Y_1(\omega) = \begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{20000}\right) & |\omega| < 20000\pi \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$Y_2(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 10000\pi \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

12)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{4dx(t)}{dt} - x(t)$$

Lado esquerdo da equação:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2dy(t)}{dt} + 3y(t)\right\} = (j\omega)^2 Y(\omega) + 2j\omega Y(\omega) + 3Y(\omega) = A(\omega)Y(\omega)$$

$$= (-\omega^2 + j2\omega + 3)\, Y(\omega)$$

$$\therefore \boxed{A(\omega) = -\omega^2 + j2\omega + 3}$$

Lado direito da equação:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{4dx(t)}{dt} - x(t)\right\} = 4j\omega X(\omega) - X(\omega) = B(\omega) X(\omega)$$

$$= (j4\omega - 1)\, X(\omega)$$

$$\therefore \boxed{B(\omega) = j4\omega - 1}$$

$$A(\omega) Y(\omega) = B(\omega) X(\omega) \quad \therefore \boxed{H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{-1 + j4\omega}{-\omega^2 + j2\omega + 3}}$$