ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2016.2)

Primeira Prova (Parte I & II) – Outubro/2016

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Nota 1: Duração da prova: **75** minutos.
Nota 2: Perguntas durante a prova são **proibidas**.
Nota 3: É proibido o uso de calculadoras/computadores.
Nota 4: A prova pode ser feita inteiramente a lápis/lapiseira.
Nota 5: Os versos das folhas podem ser utilizados para a resolução.
Nota 6: Havendo **indicação adequada**, pode-se continuar a resolução de uma questão em uma página de outra questão.

Formulário

Diagonalização	**Produto vetorial**	**Produto escalar**	**Retas**	**Planos**
$Mv = \lambda v$	"Regra da mão direita"	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$	$X = A + \lambda\vec{u}$	$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
$\det(M - \lambda I) = 0$	$\vec{u}\wedge\vec{v} = \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1\\ y = y_0 + \lambda u_2\\ z = z_0 + \lambda u_3\end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1\\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2\\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3\end{cases}$
$S^{-1}MS = \Lambda$	$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$			$ax + by + cz + d = 0$

1) [2,5 pontos] Determinar o(s) plano π (na forma vetorial), sendo que π fica a uma distância $\sqrt{12}$ do plano $\sigma : x - 2y + 2z = 0$.

---

1) Como $\pi \parallel \sigma$, é imediato que $\pi : x - 2y + 2z + d = 0$, onde se deve determinar d. Forçosamente, sabe-se que $d \neq 0$, visto que os planos não são coincidentes, mas são separados por uma distância positiva. Considere, agora, a representação paramétrica do plano σ,

$$\begin{cases} x &=& 2\lambda - 2\mu\\ y &=& \lambda\\ z &=& \mu \end{cases}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}\,,$$

donde é imediato que $\sigma : X = (0,0,0) + \lambda(2,1,0) + \mu(-2,0,1)$. Logo, pode-se obter um vetor $\vec{n}$ normal ao plano σ (e, também, ao plano π) via

$$\vec{n} = (2,1,0)\wedge(-2,0,1) = \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} = (1,-2,2)\,.$$

Sabe-se que $Q(0,0,0) \in \sigma$ e $P(-d,0,0) \in \pi$, como se pode notar pelas respectivas representações algébricas. Logo, a projeção do vetor $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (d,0,0)$ sobre o vetor $\vec{n}$ fornece um vetor cuja norma é a distância entre os planos. Se $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{n}$ formam um ângulo θ entre si, então

$$\vec{\mathrm{proj}}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ} = \left(\|\overrightarrow{PQ}\|\cos\theta\right)\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\langle\overrightarrow{PQ},\vec{n}\rangle\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,,$$

onde $\langle\overrightarrow{PQ},\vec{n}\rangle = \|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{n}\|\cos\theta$ foi invocado; logo,

$$\|\vec{\mathrm{proj}}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\| = \frac{\left|\langle\overrightarrow{PQ},\vec{n}\rangle\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(d,0,0)\cdot(1,-2,2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|d|}{3}\,.$$

Como a distância entre os planos é $\sqrt{12}$, então $|d| = 3\sqrt{12}$. Por conseguinte, $d = 6\sqrt{3}$ ou $d = -6\sqrt{3}$, donde

$$\pi : x - 2y + 2z + 6\sqrt{3} = 0 \quad \text{ou} \quad \pi : x - 2y + 2z - 6\sqrt{3} = 0\,.$$

Na representação paramétrica, tem-se

$$\begin{cases} x &=& -6\sqrt{3} + 2\lambda - 2\mu\\ y &=& \lambda\\ z &=& \mu \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &=& 6\sqrt{3} + 2\lambda - 2\mu\\ y &=& \lambda\\ z &=& \mu \end{cases}$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Na representação vetorial, tem-se, portanto,

$$\pi : X = (-6\sqrt{3}, 0, 0) + \lambda(2, 1, 0) + \mu(-2, 0, 1)\,, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,$$

ou

$$\pi : X = (6\sqrt{3}, 0, 0) + \lambda(2, 1, 0) + \mu(-2, 0, 1)\,, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

---

2) [2,5 pontos] Uma certa agência de viagens vendeu para um turista um pacote cujo valor é de 500 reais. Desprovido de cartão de crédito, o turista pagou, à vista, utilizando cédulas de 5, 10 e 20 reais. Sabendo-se que foram utilizadas 40 cédulas para pagar o valor exato do pacote, o objetivo deste problema é determinar todas as combinações possíveis de cédulas para o pagamento. Para tal, descrever o problema como um sistema linear $Ax = b$ e determinar
a) A imagem de A, $\mathrm{Im}(A)$.
b) O *kernel* de A, $\ker(A)$.
c) A solução completa do problema.

---

2) Denotando por ξ, η e μ o número de cédulas de 5, 10 e 20 reais, respectivamente, o problema pode ser descrito pelo sistema linear

$$\begin{cases} \xi + \eta + \mu & = & 40 \\ 5\xi + 10\eta + 20\mu & = & 500 \end{cases},$$

ou $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b := \begin{pmatrix} 40 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

2a) Sendo $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) : y = Ax\,, x \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\}$, e com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Os vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}$ formam uma sequência de vetores linearmente dependente. Com efeito,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 5 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde se nota que a imagem é gerada pelo conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (as passagens no escalonamento acima foram omitidas por serem evidentes). Finalmente, tem-se

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{\xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) : \xi, \eta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2b) Sendo $\ker(A) = \{x \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : Ax = 0\}$, com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$0 = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Com o escalonamento (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 10 & 20\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

o sistema $Ax = 0$ é equivalente a resolver

$$0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \mu\end{pmatrix} \left\{\begin{array}{rcl}\xi - 2\mu & = & 0\\ \eta + 3\mu & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\xi & = & 2\mu\\ \eta & = & -3\mu\end{array}\right. .$$

Logo, como $\begin{pmatrix}\xi & \eta & \mu\end{pmatrix}^T = \mu\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\end{pmatrix}^T$, tem-se

$$\ker(A) = \left\{\xi\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R}\right\}.$$

2c) Do sistema $Ax = b$, tem-se (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 40\\ 5 & 10 & 20 & 500\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 40\\ 1 & 2 & 4 & 100\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 40\\ 0 & 1 & 3 & 60\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & -20\\ 0 & 1 & 3 & 60\end{array}\right),$$

id est, após um escalonamento simples, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-200\\ 60\end{pmatrix} \left\{\begin{array}{rcl}\xi - 2\mu & = & -20\\ \eta + 3\mu & = & 60\end{array}\right. .$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $\mu = 0$, implicando $x_p = \begin{pmatrix}-20 & 60 & 0\end{pmatrix}^T$.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A ($Ax_k = 0$). Logo, do item anterior (e fazendo as devidas mudanças), chega-se à solução geral do sistema $Ax = b$, que é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix}-20\\ 60\\ 0\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Contudo, para obter soluções realísticas e que obedeçam às condições impostas pelo problema (número de cédulas como inteiros não-negativos), o valor de ξ deve percorrer um subconjunto da reta real, que é o intervalo dos inteiros entre 10 e 20, ou $[10, 20] \subset \mathbb{Z}$:

$$x = \begin{pmatrix}-20\\ 60\\ 0\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}, \quad \xi \in [10, 20] \subset \mathbb{Z}.$$

---

3) Determinar a(s) equação(ões) da(s) reta(s) r, que passa(m) por $P(3, 5, 7)$ e é(são) concorrente(s) e ortogonal(is) à reta s, onde

$$s : \left\{\begin{array}{rcl}x & = & \lambda + 2\\ y & = & -2\lambda + 6\\ z & = & 6\end{array}\right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Determinar, também, o ponto de intersecção $Q = r \cap s$.

---

3) A representação vetorial da reta s é dada por $s : X = (2, 6, 6) + \lambda(1, -2, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Denote $\vec{v} := (1, -2, 0)$, e seja $Q \in s$ o ponto onde $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$. Naturalmente, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (2, 6, 6) + \xi(1, -2, 0) = (2 + \xi, 6 - 2\xi, 6)$; logo, $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1 - \xi, -1 + 2\xi, 1)$. Pela ortogonalidade entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v}$, tem-se

$$\begin{aligned}0 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = (1 - \xi, -1 + 2\xi, 1) \cdot (1, -2, 0)\\ &= 3 - 5\xi,\end{aligned}$$

donde $\xi = \frac{3}{5}$ e, por conseguinte, $\overrightarrow{PQ} = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1)$. Logo,

$$X = (3, 5, 7) + \lambda(2, 1, 5)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Ademais, com $\xi = \frac{3}{5}$, tem-se $Q(\frac{13}{5}, \frac{24}{5}, 6)$.

---

4) [3,5 pontos] Determinar a fórmula geral para $a_n = -3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 1$, sendo que $a_0 = a_1 = 0$.

---

4) A relação de recorrência acima para a_n e a_{n-1} pode ser representada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & -3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 1 \\ a_{n-1} & = & -3a_{n-2} - 2a_{n-3} - 1 \end{array} \right. . \tag{1}$$

Subtraindo-se a segunda da primeira, elimina-se o termo independente (de n), chegando-se a

$$a_n = -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3}\,, \tag{2}$$

que será considerada para a solução abaixo. Representa-se, inicialmente, esta relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = M u_{n-1}\,, \quad n \subset \mathbb{Z}\,, \quad \text{com} \;\; u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

visto que $a_2 = -3a_1 - 2a_0 - 1 = -1$.

Como $u_n = Mu_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-2} u_2$, deve-se obter M^{n-2}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det\left(M - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\,(1+\lambda)\,(2+\lambda)\;,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \mu_1 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_1 I\right) v_1 = \begin{pmatrix} -2-(1) & 1 & 2 \\ 1 & 0-(1) & 0 \\ 0 & 1 & 0-(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \xi_1 & = & \eta_1 \\ \eta_1 & = & \mu_1 \end{array} \right. ,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\mu_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \mu_2 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_2 I\right) v_2 = \begin{pmatrix} -2-(-1) & 1 & 2 \\ 1 & 0-(-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \xi_2 & = & -\eta_2 \\ \eta_2 & = & -\mu_2 \end{array} \right. ,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\mu_2 = 1$.

O autovetor $v_3 = \begin{pmatrix} \xi_3 & \eta_3 & \mu_3 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_3 = -2$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_3 I\right) v_3 = \begin{pmatrix} -2-(-2) & 1 & 2 \\ 1 & 0-(-2) & 0 \\ 0 & 1 & 0-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \xi_3 & = & -2\eta_3 \\ \eta_2 & = & -2\mu_3 \end{array} \right. ,$$

donde se tem $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\mu_3 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} ,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array} \right) .$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1} M S$, tem-se $M = S \Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-2} = \overbrace{\left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\cdots\left(S\Lambda S^{-1}\right)}^{n-2 \text{ termos}} = S\Lambda^{n-2} S^{-1} ,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} &= S\Lambda^{n-2} S^{-1} u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{n-2} \left[\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 + 3\,(-1)^n - 2\,(-2)^n \\ -1 + 3\,(-1)^{n-1} - 2\,(-2)^{n-1} \\ -1 + 3\,(-1)^{n-2} - 2\,(-2)^{n-2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{6} \left[-1 + 3\,(-1)^n - 2\,(-2)^n \right] , \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z} .$$