Instituto de Física/USP

FEP 156 – GRAVITAÇÃO

4ª parte

Notas de aula – 2º semestre/2006

Em terceiro lugar, oferece uma explicação física para a constância da aceleração gravitacional nas proximidades da superfície da Terra, como prevista pelos trabalhos de Galileu.

Em quarto lugar, Newton sintetiza num mesmo princípio universal fenômenos terrestres (a queda de corpos) e fenômenos celestes (a "queda" da Lua).

Analisamos também como o próprio Newton conseguiu ser bem sucedido na aplicação de sua teoria gravitacional para resolver uma série de problemas que perturbavam os físicos contemporâneos.

FEP 156 GRAVITAÇÃO/Notas de aula
(1ª edição de 1995, parcialmente revista em outubro de 2006)

João Zanetic/IFUSP

Capítulo 10 Os "Principia" de Isaac Newton

10.1 Introdução

Kepler e Galileu sintetizaram com seu trabalho um novo tipo de pensamento que estava nascendo no século XVII. Era uma continuidade do tipo de pesquisa científica iniciada por Copérnico algumas décadas antes deles. Kepler aliava, de forma extremamente criativa e produtiva, o pensamento mágico/astrológico e alquímico com uma perspectiva geométrica que visava articular o pensamento copernicano. Galileu, por seu turno, representava a ascensão do pensamento racional, filosófico e experimental. Como diria Koyré, ele buscava também a matematização da física: redução do real ao puramente geométrico. Se Copérnico buscava uma harmonia geométrica na sua reconstrução da proposta heliocêntrica de Aristarco, podemos dizer que tanto Kepler quanto Galileu deram continuidade à tradição pitagórica da ligação da matemática com a física.

Como vimos, rompia-se o círculo da visão de mundo aristotélica que pode ser duplamente simbolizada pela utilização das seções cônicas no lugar do círculo: a elipse de Kepler para as órbitas planetárias e a parábola de Galileu para o movimento dos projéteis.

Kepler e Galileu, duas figuras tão diferentes, estabeleceram as bases de uma nova ciência. Enquanto Galileu usava sua imaginação de forma comedida e solidamente baseada em suas análises matemáticas e de observação, inclusive através do telescópio, Kepler lançava mão do livre pensar ancorado também na matematização do real.

> *"Enquanto Galileu se limita a interpretar com a ajuda de esquemas geométricos precisos as manchas lunares como indicadores do relevo, Kepler salta imediatamente mais adiante a imaginar selenitas, a conjeturar qual seria a constituição corporal e inclusive a explicar-nos seus plano urbanísticos (...) Inclusive vaticina viagens espaciais, e em seu postumamente publicado,* ***Sonho****, oferece-nos uma verdadeira obra de ficção científica."*[155]

Quando, anos mais tarde, Newton, ao homenagear seus predecessores, afirmou que tinha conseguido realizar sua grande obra pois estava sustentado por ombros de gigantes, certamente os de Kepler e Galileu aí deveriam estar incluídos.

10.2 Os vórtices e o mecanicismo de Descartes

Uma outra figura que não pode ser ignorada na construção da ciência moderna é René Descartes (1596/1650), como já ficou claro quando tratamos do princípio da inércia, na secção **8.4**. Ele é muito mais importante como filósofo do que como cientista, sendo o autor do célebre **Discurso do Método**[156] que, além de apresentar as suas regras do pensamento racional, era uma espécie de autobiografia intelectual do próprio Descartes. À época de sua publicação o **Discurso** foi recebido como um prefácio de três tratados científicos: a **Dióptrica**, que era um tratado de óptica, onde aparece pela primeira vez a lei do seno da refração; os **Meteoros**, que trata de fenômenos atmosféricos; e a **Geometria**, onde ele apresentava uma teoria geral das equações.[157]

Numa retrospectiva histórica da construção das idéias gravitacionais, não podemos deixar de mencionar algo do pensamento científico de Descartes, principalmente por conta dos comentários que o jovem Newton produziu, como veremos mais adiante. Descartes foi influenciado, entre outros, por Francis

---

[155] Carlos S. Santos na Introdução à **op. cit.**, nota 108, pág. 23.

[156] O **Discurso** foi publicado em 1637 com o título *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, que pode ser traduzido como "Discurso do método para bem conduzir a razão e buscar a verdade nas ciências". Uma boa tradução em português que também apresenta uma instrutiva apresentação histórica de Denis Huisman, especialista em Descartes, foi publicada pela Editora Universidade de Brasília, em 1985.

[157] Alexandre Koyré. **Considerações sobre Descartes**. Editorial Presença, Lisboa, 1980, págs. 11/13.

No lado da Terra voltado para a Lua a força gravitacional desta sobre as águas do mar é aproximadamente inversamente proporcional ao quadrado de 59 R_T, maior que a força exercida sobre a parte sólida da Terra que poderia ser considerada proporcional ao inverso do quadrado de 60 R_T. É como se as águas do mar fossem puxadas para fora da Terra.

Do lado contrário da Terra com relação à Lua, a força gravitacional desta sobre as águas do mar é aproximadamente inversamente proporcional ao quadrado de 61 R_T, menor do que a força gravitacional da parte sólida da Terra. O efeito aproximado é o da Terra "afastar-se" das águas e estas ficam mais elevadas nessa parte da superfície terrestre.

A explicação contida no modelo de Newton previa assim duas marés simultâneas nos lados opostos da Terra, o que se verifica na realidade. Além do mais, devido à rotação da Terra em torno de seu eixo tais fenômenos voltam a se repetir 12 horas depois.

É preciso observar também que, devido à rotação da Terra e a efeitos do atrito viscoso da água com a superfície da Terra e com ela própria, os máximos das marés nunca ocorrem exatamente sobre a reta que une os centros da Terra e da Lua, isto é, ocorrem algumas horas após a passagem da Lua através do meridiano local..

Newton também concluía com seu modelo que as maiores marés ocorriam durante a Lua cheia e a Lua nova. Procure explicar este fenômeno.

10.8. À guisa de conclusão sobre os "Principia".

Vimos nesta breve análise da construção do **princípio da gravitação universal** que Newton realizou uma síntese múltipla da física de sua época.

Em primeiro lugar, Newton utilizou suas leis do movimento acopladas às duas primeiras leis de Kepler para dar significado físico à força de atração central, generalizando a aplicabilidade da segunda lei de Kepler, incluindo até o movimento retilíneo uniforme.

Em segundo lugar, Newton conseguiu deduzir a terceira lei de Kepler de sua hipótese gravitacional.

6. Newton procura explicar o fenômeno das marés.

Já comentamos, através de uma citação, que Kepler supunha que a Lua exercia alguma ação sobre as águas dos oceanos, embora não possuísse uma concepção gravitacional.

Galileu procurou explicar o fenômeno das marés. Ele imaginava que uma possível combinação dos dois movimentos terrestres, ou seja, o movimento orbital da Terra em torno ao Sol e sua rotação diária em torno de seu próprio eixo, poderiam provocar sacudidas na Terra de tal forma que as águas do mar ora se ergueriam ora baixariam. Ele não aceitava hipóteses, como a de Kepler, que atribuíam ao Sol ou à Lua esse fenômeno. Stephen Mason, comentando esta posição, diz que Galileu:

> *"Rechaçou a idéia de que o Sol e a Lua provocavam as marés, pois isso implicava que os corpos celestes eram superiores à Terra e influíam sobre os acontecimentos terrestres, doutrina à qual ele era muito contrário. Contudo, sua teoria exigia a existência de uma maré diária e não duas, como se observa. Além do mais, contradizia o princípio de inércia segundo o qual os corpos da Terra deveriam compartilhar seus movimentos."*[177]

Coube a Newton formular uma primeira explicação científica convincente do fenômeno das marés, atribuindo seu efeito principalmente à atração gravitacional da Lua sobre os mares. Newton também atribuiu ao Sol tal papel se bem que de magnitude bem menor que aquele desempenhado pela Lua.

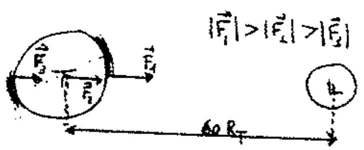


Figura 40

Como podemos perceber pela **Figura 40**, o modelo de Newton para as marés era bastante simples.

[177] Stephen F. Mason. **Historia de las ciencias. 2: La revolucion cientifica de los siglos VI y VII.** Alianza Editorial. Madrid, 1985. pág. 52.

Bacon, mas afastou-se da postura empirista do filósofo inglês, optando por uma metodologia dedutiva em que a matemática desempenhava um papel central.

Como afirma Koyré, Descartes também pode ser inserido no quadro dos que batalharam pela matematização da física, o que pode ser exemplificado nas suas tentativas de resolver tanto o problema da inércia quanto o da queda dos graves.

Na maior parte de suas investigações sobre os fenômenos físicos, Descartes dava pouca importância à experimentação, enfatizando o modo de investigação que partia dos primeiros princípios e deduções correspondentes. Ele desenvolveu uma concepção mecânica do universo e utilizava a matemática como um instrumento metodológico para trabalhar suas intuições e deduções.

Descartes identificava a matéria com a extensão, ou seja, ele negava a possibilidade de existência do vácuo e afirmava que em todo o universo existe matéria. Além da extensão, o movimento era a outra grandeza fundamental que constituía seu mundo físico.

> *"A matéria impregnava todo o espaço e, portanto, em princípio a matéria primordial somente podia sofrer um movimento de rotação. Deste modo se estabeleceu um vórtice gigante no qual os tijolos primários de matéria eram arrastados girando, gastando-se gradualmente pelo atrito. Independentemente de sua forma original, os blocos primários de matéria se desgastavam para formar um pó, a matéria primeira, e pequenas esferas, a matéria segunda. O pó cósmico ou matéria primeira constituía o elemento fogo que formava o Sol e as estrelas fixas. A matéria segunda era o ar ou elemento etéreo que compunha o material do espaço interestelar. Havia também uma matéria terceira, a saber, os blocos originais de matéria que não se haviam decomposto em pó mas que apenas haviam-se arredondado. Estes grandes blocos esféricos de matéria constituíam o elemento terra que formava a Terra, os planetas e os cometas."*[158]

Os vórtices, compostos por uma infinidade de partículas dessa matéria tênue, sutil e invisível que estavam permanentemente em rotação, que constituíam redemoinhos em torno dos planetas e do Sol, seriam os responsáveis pela queda dos graves e pela ascensão dos corpos leves. Eis aqui mais uma espécie de um **modelo gravitacional**. A **figura 34** ilustra esse modelo cartesiano de vórtices.

[158] Stephen F. Mason. **Historia de la ciencia.** Vol. 2, Alianza Editorial, Madrid, 1985, pág. 62.

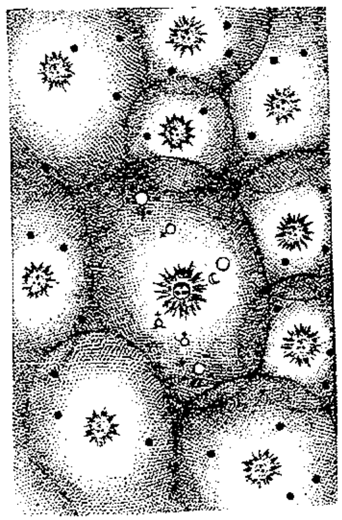


Figura 34 O sistema solar no modelo cartesiano de vórtices

O historiador da ciência brasileiro Roberto Martins sintetiza bem esse modelo gravitacional de Descartes. Sigamos o seu pensamento:

> *"Segundo Descartes, seria o próprio turbilhão* [vórtice] *da Terra que produziria a gravidade. O argumento é aproximadamente o seguinte: se um líquido se move em círculos, todas as suas partículas tendem a se afastar do centro e mover-se em linha reta (por aquilo que chamamos de inércia). Quanto mais rápido o movimento circular, maior essa tendência a se afastar do centro. Se houver um líquido em rotação muito rápida, e dentro dele partículas com rotação mais lenta, essas partículas terão menor tendência a se afastar do centro, e serão empurradas pelo líquido em direção ao centro. Seria exatamente isso que ocorreria nas proximidades da Terra: segundo Descartes, os corpos terrestres giram lentamente em torno do eixo da Terra, enquanto o segundo elemento do vórtice terrestre gira muito rapidamente; por isso, os corpos terrestres são empurrados, pelo material do vórtice, em direção à Terra."*[159]

[159]Roberto de Andrade Martins. **Descartes e a impossibilidade de ações à distância**. In: Saul Fuks (org.). **Descartes: um legado científico e filosófico**. Ed. Relume Dumará. Rio de Janeiro, 1997. págs. 89/90.

onde $k = \dfrac{4\pi^2}{Gm_s}$ é constante para todos os planetas em órbita em torno ao Sol.

A expressão (32) confirma que podemos deduzir a terceira lei de Kepler a partir da teoria gravitacional de Newton, **mostrando mais uma vez a compatibilidade da teoria de Newton com as leis empíricas obtidas por Kepler**.

5. Como fica g constante na teoria gravitacional de Newton?

Sabemos que com a explicação do movimento dos projéteis desenvolvida por Galileu, foi atribuída uma aceleração constante g de queda dos corpos. Ao mesmo tempo, a teoria gravitacional de Newton estabelece que a aceleração gravitacional de Newton varia com o inverso do quadrado da distância. Não deixa de haver aqui uma certa incompatibilidade entre as duas explicações.

Porém, podemos verificar numericamente que os resultados concordam entre si.

$$F_{grav} = G\frac{m_T m_c}{R_{TC}^2} = m_c g$$

Portanto, $g = \dfrac{Gm_T}{R_{TC}^2}$, onde R_{TC} = 6.400 km + h, e h é a altura do corpo com relação à superfície terrestre. Como h é muito menor que 6400 km, podemos dizer que g é praticamente constante, concordando com o resultado de Galileu.

Testemunhamos com esse tipo de procedimento o nascimento da mecânica.

Exemplificando o que foi dito acima: a aceleração gravitacional de um corpo em queda à altura R_T acima da superfície terrestre terá o valor de g/4. **Verifique esse resultado.**

Como a Lua está situada a uma distância aproximada de 60 R_T do centro da Terra, sua aceleração gravitacional terrestre será calculada por

$$a_{grav_L} = \frac{g}{60^2} \cong 2{,}7 \times 10^{-3}\ {}^{m}\!/_{s^2}.$$

A igualdade entre as duas acelerações determinadas pelos dois métodos acima indicados permite concluir que realmente podemos afirmar que a Lua está **"caindo"** em direção ao centro da Terra, como afirmava Newton. Esse resultado acrescenta mais um ponto favorável à hipótese newtoniana.

4. O problema dos planetas.

A resolução do movimento planetário foi outro grande triunfo conseguido por Newton.

Fenômeno IV (Livro III)

"Supostas em repouso as estrelas fixas, os tempos periódicos dos cinco planetas primários e o do Sol em torno à Terra ou da Terra em torno ao Sol estão na razão da potência 3/2 das distâncias médias ao Sol."

Com esse enunciado Newton incorporou a terceira lei de Kepler à sua teoria gravitacional.

Por analogia à expressão (29), podemos escrever a seguinte expressão para o caso do movimento de um planeta em órbita em torno do Sol:

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{gR_s^2} R_{PS}^3 \qquad (31)$$

Mas, com $gR_s^2 = Gm_s$, podemos reescrever a expressão acima:

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_s} R_{PS}^3 \text{ ou } T_p^2 = kR_{PS}^3 \qquad (32)$$

Nesse sistema de Descartes, a Terra poderia ser considerada imóvel no centro de seu próprio vórtice que arrastava a Lua em sua órbita ao redor da Terra.

Da mesma forma, poderia ser explicado o fato de que todos os planetas se achavam presos ao Sol num vórtice muito mais amplo girando em torno do mesmo.

À época em que Descartes escrevia seu **Tratado do Mundo**, por volta de 1632/33, que incluía essa concepção dos vórtices, Galileu era condenado pelo Tribunal da Inquisição. Devido a isso esse **Tratado** só foi publicado após a morte de Descartes. Assim, ele sucumbe a essa realidade o que acarretaria uma dubiedade em sua visão de mundo. Como em seu sistema todos os movimentos eram considerados relativos, ele imaginava a Terra imóvel no centro de seu vórtice, satisfazendo desse modo a concepção dominante de que a Terra estaria em repouso no centro do mundo.

Mesmo com essa concessão teórica de movimento relativo, a obra cartesiana foi incluída no Index da Inquisição, em Roma e em Paris, em 1663. Em 1740, seus trabalhos foram retirados do Index de livros proibidos para servir de alternativa ao sistema Newtoniano que estava cada vez mais ganhando certa popularidade na França.[160]

Um dos seguidores da teoria cartesiana dos vórtices foi Christian Huygens (1629-1695), que teria utilizado redemoinhos provocados em recipientes com água a fim de "confirmar" a teoria cartesiana da queda dos corpos.

O termo mecanicismo ganhou força a partir dos trabalhos de Descartes que considerava todos os sistemas materiais como máquinas guiadas por leis da natureza, leis mecânicas. Inclusive o corpo humano era assim considerado por Descartes, assim como as plantas, os animais e os demais corpos inorgânicos. Essa forma mecânica de explicar o comportamento dos corpos materiais opunha-se à estrutura hierárquica presente na concepção aristotélica.

"As leis da natureza são as leis da mecânica", escrevia Descartes. Essa idéia cartesiana incluía a concepção de Deus como o grande legislador. É

---

[160] Stephen F. Mason, **op. cit.**, nota 158, pág. 63.

interessante, a este respeito, acompanhar o que diz o historiador da ciência Stephen Mason:

> *"Descartes supunha que Deus governava o universo plenamente mediante "leis da natureza" que haviam sido decididas desde o começo. Uma vez criado o Universo, a divindade não havia interferido com a máquina que havia feito. A quantidade de matéria e a quantidade de movimento do mundo eram constantes e eternas, como também "as leis que Deus colocou na natureza". Durante a Idade Média havia-se chegado a pensar que Deus participava dia a dia no funcionamento do universo, delegando seu poder às hierarquias dos seres angelicais que impulsionavam os corpos celestes nas suas órbitas, observando e regendo os acontecimentos terrestres. (...) As pessoas do século dezessete, por outra parte, estavam interessadas no curso ordinário dos acontecimentos, buscando seu modo "legal" de operação. (...)*
> *(...) J. Calvino elaborava no terreno teológico a concepção de Deus como reitor absoluto do universo, governando mediante leis promulgadas desde o início. (...) A filosofia cartesiana desfrutou do favor dos calvinistas interessados na ciência. Durante o século dezessete, as teorias de Descartes eram ensinadas nas universidades da calvinista Holanda, assim como em Cambridge, a mais puritana das universidades inglesas (...)."*[161]

10.3 O princípio dos *"Principia"*

O último trecho da citação acima nos remete a Cambridge e, portanto a Isaac Newton que, no período mencionado, estudava e pesquisava naquela universidade inglesa.

Newton nasceu no dia 25 de dezembro de 1642, mesmo ano da morte de Galileu, em Lincolnshire, e morreu em Kensington, Londres, em 20 de março de 1727.

Em 1665 graduou-se como bacharel em artes no **Trinity College** da Universidade de Cambridge. Parte desse ano e do ano seguinte Newton retornou ao campo, à cidade onde nasceu, devido a uma terrível peste que atacou Londres, matando um grande número de pessoas.

Nesses dois anos, Newton aprofundou seus estudos em vários campos aos quais dedicaria parte ponderável dos vinte e poucos anos que se seguiram até a publicação, em 1686/7, de sua obra mais conhecida, os **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.**

[161] Stephen F. Mason, **op. cit.**, nota 158, págs. 66 e 68.

A igualdade de resultados obtidos por esses dois modos indicará que a **Lua está caindo continuamente em direção à Terra.**

Da expressão (27), podemos calcular a aceleração centrípeta:

$$a_c = \frac{4\pi^2 R_{TL}}{T_L^2}.$$

Introduzindo nessa expressão os valores já conhecidos à época de Newton, podemos determinar o valor numérico da aceleração centrípeta calculada, **note-se bem**, pelo método dinâmico aplicado ao movimento circular uniforme que se supõe a Lua estar executando em torno da Terra:

$$a_c \cong 2{,}7 \times 10^{-3}\ m/s^2.$$

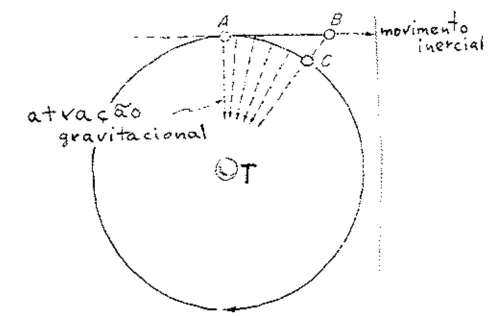


Figura 39

Pelo modo gravitacional, podemos imaginar que a Lua esteja caindo em direção à Terra. Como a expressão para a força gravitacional de Newton afirma que esta é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre os corpos em consideração, é lícito afirmar que a aceleração gravitacional também respeita essa proporcionalidade.

Isso significa que a aceleração galileana experimentada por todos os corpos próximos à superfície da Terra, isto é, localizados aproximadamente à distância R_T do centro da Terra, quando em queda livre, pode ser utilizada para calcular a aceleração gravitacional da "queda" da Lua.

A força centrípeta é provocada pela força de atração gravitacional entre a Terra e a Lua, o que significa que as expressões (25) e (28) podem ser igualadas:

$$\frac{m_L g R_T^2}{R_{TL}^2} = \frac{4\pi^2 m_L R_{TL}}{T_L^2}$$

Simplificando, obtemos:

$$T_L^2 = \frac{4\pi^2 R_{TL}^3}{g R_T^2} \qquad (29)$$

Assim, obtemos a expressão do período do movimento orbital da Lua:

$$T_L = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{R_{TL}^3}{g}} \qquad (30)$$

Nessa expressão todas as grandezas eram conhecidas à época de Newton:

$g \cong 9{,}8$ m/s

$R_T \cong 6.400 \times 10^3$ m

$R_{TL} \cong 60 \times 6.400 \times 10^3$ m.

Substituindo esses valores na expressão do período, obtemos T_L = 27,3 dias, reproduzindo o valor anteriormente conhecido. Este resultado foi um dos primeiros a referendar a validade do **princípio da atração gravitacional** de Newton.

3. Outro problema da Lua: sua queda em direção à Terra.

Proposição IV. Teorema IV. (livro III):

"A Lua gravita em direção à Terra e é continuamente desviada do movimento retilíneo e retida em sua órbita pela força da gravidade."

Podemos calcular a aceleração da Lua em direção à Terra por dois modos diferentes. O **modo dinâmico** que nos fornece a aceleração centrípeta e o **modo gravitacional** que nos oferece a aceleração da gravidade da Lua com relação à Terra.

Assim é que, afirmam vários historiadores, já em 1666, com a idade de 24 anos, Newton havia produzido conhecimento novo e extraordinário sobre os seguintes assuntos:

1. tinha uma formulação provisória de sua teoria da gravitação, pelo menos como uma hipótese de trabalho razoável;
2. redigiu um esboço medianamente completo do **cálculo de fluxões**, que viria a ser o cálculo infinitesimal;
3. formulou o seu teorema do binômio;
4. escreveu e pesquisou a natureza da luz.

Parte significativa do pensamento do jovem Newton é encontrada nas anotações que ele havia começado a fazer quando tinha dezoito anos, em 1661, constituindo o que veio a ser conhecido como seu caderno de apontamentos de Trinity, sendo a parte mais importante aquela que compreende o período de 1664 a 1665, que Newton intitulou ***Questiones quædam Philosophicæ***, que pode ser traduzida como "Certas questões filosóficas".[162] Eis o que dizem dois estudiosos dessas anotações de Newton sobre a influência cartesiana sobre Newton:

> *"É inegável que as idéias de Descartes são especialmente importantes para Newton, porque elas negam o que ele afirma. Como vimos, Newton advoga o princípio epicuriano de átomos e vazio, um compromisso que tornou a posição de Descartes a principal adversária de Newton, algo que atraiu muito sua atenção. Não se pode concluir disso que Newton rejeitava totalmente as idéias de Descartes, embora ele questionasse a concepção dos vórtices fluidos. Reconhece-se que as componentes dos vórtices desempenharam um papel nos argumentos astronômicos de Newton na década de 1680. (...) No entanto, não se pode negar que a base conceitual da matéria de Descartes dos céus fluidos – sua identificação com a extensão – foi imediatamente rejeitada por Newton: ela se opunha à existência do vazio e da estrutura atômica da matéria."*[163]

Nos anos seguintes, Newton dedicou-se ao aprofundamento de seu conhecimento em cada uma dessas áreas. É preciso frisar que Newton conhecia os trabalhos de seus precursores, particularmente os trabalhos de Kepler, Galileu e Descartes, além de Copérnico, é claro.

---

[162] J. E. McGuire e Martin Tamny. **Certain philosophical questions: Newton's Trinity notebook**. Cambridge University Press, 1985.

[163] Idem, pág. 147.

Outro contemporâneo que acabou influenciando os trabalhos de Newton foi Robert Hooke (1635-1703) que, por sua vez foi influenciado, no que respeita à gravitação, por William Gilbert. Este, como já vimos, por analogia com seus estudos sobre os ímãs, imaginava que a própria Terra se comportaria como um grande ímã para os corpos situados nas proximidades de sua superfície. Gilbert havia, inclusive, conseguido demonstrar experimentalmente que a "força" magnética entre os corpos variava com a distância que os separava. Assim, Hooke procurou também medir a variação da "força" gravitacional da Terra sobre corpos próximos à sua superfície. Hooke procurou medir a gravidade (peso) de corpos tanto junto à superfície quanto em poços profundos de minas e nos altos dos morros. Ele próprio afirmara não ter conseguido nenhuma informação segura a respeito da variação da gravidade.

Dessa forma, Newton, nesses mesmos anos de 1665 e 1666, dedicava-se à investigação de temas semelhantes aos investigados por Hooke. Aparentemente, Newton também foi influenciado pelo trabalho que Galileu realizou com pêndulos; ou, como afirma Bernal:

> *"O estudo do pêndulo simples levou ao estudo do pêndulo circular; o estudo do pêndulo circular levou à idéia de força centrífuga e esta, por seu turno, levou à idéia de uma gravidade que mantinha os planetas em suas órbitas, ao mesmo tempo que eles oscilavam circularmente de modo perfeitamente livre. A gravidade, no caso do pêndulo, é simplesmente a componente do peso do corpo suspenso na direção do centro. Uma vez que Newton entendeu isto, ele podia prosseguir até o fim."*[164]

"Prosseguir até o fim" poderia significar, por exemplo, procurar a solução de uma questão particularmente difícil para a época. Por volta de agosto de 1684, Edmund Halley (1656-1742), outro contemporâneo com forte influência sobre o desenvolvimento dos Principia, em uma entrevista que manteve com Newton, teria formulado a seguinte pergunta: qual seria a curva que deveria ser descrita pelos planetas, supondo que a força de atração em direção ao Sol, uma das suposições que vários físicos faziam àquela época, fosse inversamente proporcional ao quadrado da distância deles ao Sol? Newton teria respondido, imediatamente, que deveria ser uma elipse.

[164] John D. Bernal. **Op. cit.**, nota 5, pág. 209.

Chamando de Δx a corda compreendida entre os dois pontos da órbita considerados e por semelhança dos dois triângulos desenhados na figura acima, podemos escrever a seguinte igualdade, considerando apenas os módulos:

$$\frac{\Delta v_L}{v_L}=\frac{\Delta x}{R_{TL}} \quad \text{ou} \quad \Delta v_L=\frac{v_L}{R_{TL}}\Delta x.$$

O módulo da aceleração centrípeta média poderá ser calculado por

$$\overline{a}_c=\frac{\Delta v_L}{\Delta t}=\frac{v_L}{R_{TL}}\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Calculando o limite da expressão acima para Δt tendendo a zero, obtemos a aceleração centrípeta que age em cada ponto da órbita da Lua em torno da Terra:

$$a_c=\frac{v_L^2}{R_{TL}}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton, obtemos a **força centrípeta** que age sobre a Lua em seu movimento ao redor da Terra:

$$F_c=\frac{m_L v_L^2}{R_{TL}} \qquad (26)$$

Num movimento circular uniforme a velocidade pode ser calculada pela razão entre o perímetro da circunferência e o respectivo período do movimento. Assim, para o caso da Lua em torno da Terra a velocidade v sera determinada por:

$$v_L=\frac{2\pi R_{TL}}{T_L} \qquad (27)$$

Substituindo (27) em (26), obtemos:

$$F_c=\frac{4\pi^2 m_L R_{TL}^2}{T_L^2 R_{TL}} \quad \text{ou} \quad F_c=\frac{4\pi^2 m_L R_{TL}}{T_L^2} \qquad (28)$$

As expressões (21) e (22) podem ser igualadas

$$mg = G\frac{mm_T}{R_T^2} \qquad (23)$$

Portanto, $Gm_T = gR_T^2$ (24)

Substituindo a expressão (24) na (20), obtemos:

$$F_{grav} = \frac{m_L g R_T^2}{R_{TL}^2} \qquad (25)$$

Sabemos que a órbita da Lua em torno da Terra é praticamente circular. Portanto, podemos estudá-la também como um **movimento circular uniforme.** Assim, em cada ponto de sua órbita a direção de sua velocidade será diferente mas seu módulo será sempre o mesmo. A **Figura 38** apresenta duas particulares posições da Lua e suas respectivas velocidades vetoriais.

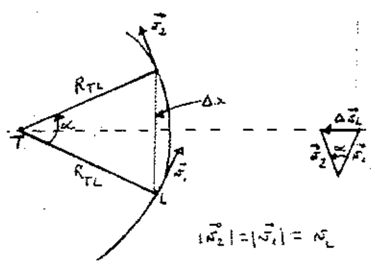


Figura 38

A aceleração média da Lua pode ser calculada pela diferença vetorial entre essas duas velocidades dividida pelo respectivo intervalo de tempo:

$$\vec{\mathbf{a}}_c = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}_L}{\Delta t}$$

Essa diferença vetorial entre as velocidades, $\Delta\vec{v}_L$, está representada na **Figura 38**. Como se nota, ela está dirigida para o centro da Terra.

Halley teria ficado alegre e surpreso com a resposta. A seguir ele solicitou os cálculos de Newton que, procurou entre seus papéis, mas, não os tendo encontrado, prometeu a Halley que iria refazê-los e os enviaria a ele. Em novembro do mesmo ano, Halley recebeu um pequeno ensaio em que se encontrava a demonstração completa da questão formulada. Nota-se por essas datas como Newton, apesar de ter iniciado a pensar sobre esses temas vinte anos antes da formulação da questão por Halley, tinha ainda problemas importantes em aberto. Ë possível que isso tenha provocado o atraso da publicação dos **Principia**, que foram finalmente preparados para publicação em 1686, como podemos verificar na reprodução da capa da primeira edição dos **Principia** reproduzida na **figura 35.**

Outro problema que talvez também tenha sido responsável pelo atraso da publicação dos Principia, refere-se à questão da força gravitacional de uma esfera homogênea que seria igual à provocada por uma massa, equivalente à da esfera, localizada no centro de massa. O cálculo necessário para resolver esse problema também não era trivial. Veremos algumas dessas etapas nas seções seguintes.

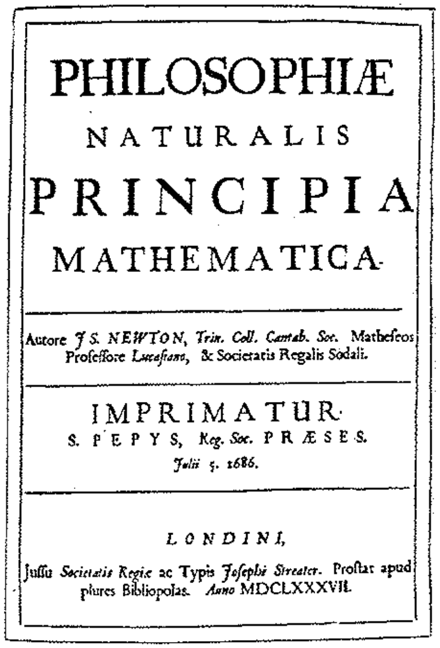
Finalmente, em 1687, a primeira edição dos **Principia** começa a ser distribuída.

Essa obra marcou profundamente toda a física que foi construída nos dois séculos seguintes à sua publicação, como atestam as afirmações de Einstein apresentadas na página 2 destas Notas de aula.

10.4 Uma breve descrição dos "Principia"

Os **Principia** constam de três livros que passo a descrever sucintamente a seguir.

Livro 1



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Figura 35 Capa da primeira edição dos **Principia** de Newton

Assunto central: leis gerais do movimento dos corpos sujeitos à ação de forças centrais; na primeira metade aborda o movimento de um ou dois corpos no vazio; na segunda metade aborda o problema de três corpos. Aliás

Um dos testes de aplicabilidade do **princípio da gravitacional universal** foi a tentativa de aplicá-lo para explicar o movimento da Lua em órbita em torno da Terra.

Proposição III. Teorema III. (livro III):

"A força com a qual a Lua é retida em sua órbita se dirige em direção à Terra e é inversamente como o quadrado da distância dos lugares ao centro da Terra."

$$F_{grav}=G\frac{m_L m_T}{R_{TL}^2} \qquad (20)$$

onde: m_L é a massa da Lua, m_T é a massa da Terra e R_{TL} é a distância da Lua à Terra.

Vamos procurar testar a validade da expressão (20), procurando calcular com o uso da mesma alguma grandeza conhecida relacionada com o movimento da Lua em torno da Terra.

Muito antes de Newton formular sua teoria da gravitação conhecia-se o período do movimento da Lua em torno da Terra: $T_L = 27{,}3$ dias. Assim, para verificar a expressão basta calcular esse período com o auxílio da mesma. Vamos ver como podemos fazer isso.

Embora as quantidades e grandezas G, m_L e m_T não fossem conhecidas à época de Newton, podemos utilizar alguns artifícios para eliminá-las ou substituí-las por quantidades conhecidas.

Devido a um resultado descoberto por Galileu de que todos os corpos próximos à superfície da Terra, em queda livre, possuem uma mesma aceleração g, aplicando a 2ª lei de Newton podemos afirmar que um tal corpo de massa m estará submetido a uma força gravitacional dada por

$$F_{grav}=mg \qquad (21)$$

A expressão da força gravitacional também poderá ser expressa pelo princípio da gravitação universal:

$$F_{grav}=G\frac{m m_T}{R_T^2} \qquad (22)$$

onde: m_T é a massa da Terra e R_T é o raio da Terra.

Newton afirmava aí que a força gravitacional no interior de uma superfície esférica é nula.

Proposição LXXI. Teorema XXXI:

"Com os mesmos pressupostos, digo que um corpúsculo situado fora de uma superfície esférica é atraído na direção do centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao centro da esfera."

Aqui Newton afirmava que para efeito do cálculo da força gravitacional num ponto exterior a uma superfície esférica tudo se passava como se considerássemos toda a massa dessa superfície concentrada no centro da mesma.

Proposição LXXIII. Teorema XXXIII:

"Se em direção a cada ponto de uma esfera dada tendem forças centrípetas iguais e decrescentes segundo o quadrado da distância a ditos pontos, digo que um corpúsculo situado dentro da esfera é atraído com uma força proporcional a sua distância ao centro."

Proposição LXXIV. Teorema XXXIV:

"Com os mesmos pressupostos, digo que um corpúsculo situado fora de uma esfera é atraído com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao centro da mesma."

Proposição LXXV. Teorema XXXV:

"Se em direção a cada ponto de uma esfera dada tendem forças centrípetas iguais e decrescentes segundo o quadrado das distâncias a cada ponto; digo que outra esfera qualquer semelhante será atraída por ela com uma força inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre os centros."

Quando não há quebra da homogeneidade de densidades nos corpos envolvidos na atração gravitacional mútua considera-se sempre a distância R como sendo a distância entre seus centros. Newton resolveu mais um problema.

A seguir vamos analisar alguns problemas resolvidos por Newton na articulação de seu paradigma.

2. O problema da Lua.

este último problema foi mal resolvido por Newton; Euler chegou a uma solução melhor, cerca de cinqüenta anos mais tarde.

Livro 2

Assunto central: estudo do movimento nos meios resistivos; dependência da resistência com a velocidade; fundamentos da hidrostática e corpos flutuantes; movimento do pêndulo; movimento de líquidos em tubos e movimento de projéteis.

Eis o que escreveu o historiador da ciência Clifford Truesdell sobre esse livro dos Principia:

"Apesar dessa sucessão anárquica de demonstrações matemáticas, hipóteses brilhantes, intuições, blefes e erros crassos, o livro 2 tem sido considerado, com justiça, como a manifestação mais grandiosa do gênio de Newton. O livro 2 foi propriamente um desafio lançado aos geômetras da época. Viram diante de si a necessidade de corrigir os erros, substituir as intuições mediante hipóteses claras, ordenar essas hipóteses dentro de um esquema da mecânica racional, trocar os blefes por demonstrações matemáticas e criar novos conceitos para alcançar o que Newton não havia conseguido. Não é exagero afirmar que a mecânica racional, e portanto, a física matemática, junto com a visão da natureza a que esta deu lugar, nasceu deste desafio, aceitos como foram pela escola matemática da Basiléia."[165]

Da escola matemática mencionada por Truesdell na citação acima, destacaram-se os matemáticos e físicos Euler e os Bernoulli.

Livro 3

Assunto central: o **sistema de mundo,** ou seja, o movimento dos planetas, o movimento da Lua e suas anomalias, a aceleração da força gravitacional, o problema das marés, etc.

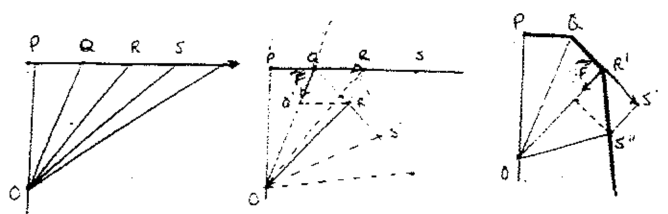
O quadro da **figura 36** exibe, numa reprodução adaptada de uma página dos Principia, uma típica demonstração de um teorema, ou proposição, encontrada ao longo da maior parte do conteúdo dessa obra de Newton.

[165]Citado por Elio B. M. Cunha. **Uma nova história da mecânica**. Rev. de Ensino de Física, vol. 6, nº 1, abril/1984, pág. 48.

É claro que essa hipótese de Newton tinha que ser coerente com os resultados encontrados por Kepler.

Para procurar entender como Newton trabalhou com essa sua hipótese, vamos inicialmente estudar o movimento de um corpo que se desloca com velocidade constante, visto por um observador situado num ponto O fora de sua trajetória.

Se marcarmos numa reta pontos que delimitam distâncias percorridas em intervalos de tempos iguais, como mostra a **Figura** 37 [(a)], percebemos que as áreas descritas, isto é, áreas dos triângulos OPQ, OQR, e assim por diante, são iguais. **Verifique o que foi aqui afirmado analisando a figura com cuidado.**



(a) (b) (c)

Figura 37 Newton e a segunda lei de Kepler[130]

Assim, a segunda lei de Kepler é aplicável mesmo para o caso de um corpo que se movimenta uniformemente numa linha reta na ausência de qualquer força. **Não é um resultado surpreendente?**

Vamos agora procurar generalizar tal resultado. Imaginemos a situação em que o corpo sofre a ação de uma força de curta duração em Q, na direção de O, como é mostrado na figura (b) acima. Desta forma, no intervalo de tempo seguinte, igual ao gasto para ir com movimento uniforme de P para Q, o corpo estará sujeito a uma composição de movimentos: um que o levaria em linha reta até R e outro que o levaria em direção a O até Q'. A composição destes

[130] Figura extraída do Projeto Harvard.

dois movimentos leva o corpo até o ponto R'. **A partir de análise cuidadosa da figura determine as áreas dos triângulos OQR e OQR'.**

Como a base desses dois triângulos é a mesma - OQ - e como suas alturas são iguais - as perpendiculares a partir dos vértices R e R' até QQ', as áreas desses dois triângulos são iguais.

Se, de novo, uma força de curta duração for aplicada em R', na direção de O, outra vez teríamos uma composição de movimentos que produziria a situação mostrada na figura (c) acima. Novamente a área do novo triângulo é igual à do anterior. **Verifique esta afirmação.**

Portanto, imaginando intervalos de tempo tão pequenos que tendem a zero, teremos uma força que age continuamente sempre dirigida para o ponto O. Newton demonstrou que o raciocínio empregado para os triângulos acima continuaria válido.

Desta forma concluímos que se um corpo está sujeito continuamente a uma força dirigida para o centro O ele se moverá de acordo com a segunda lei de Kepler.

Em outras palavras:

Um corpo sujeito a uma força central obedece à segunda lei de Kepler.

Vamos procurar entender o significado físico desse resultado obtido por Newton, utilizando os conceitos de momento de uma força e momento angular, introduzidos na seção **7.8**.

Se a força $\vec{F}$ aplicada à partícula for central, isto é, sempre dirigida para o centro O, ela será sempre paralela a $\vec{r}$ e, portanto, sempre $\vec{r} \times \vec{F} = 0$. Portanto da expressão (11), teremos que $d\vec{L}/dt = 0$, ou seja $\vec{L}$ = constante. Assim:

Para uma partícula sujeita a uma *força central*, o *momento angular* relativo ao centro de força é uma constante do movimento. $L = mrv_{\perp}$.

Esse resultado é coerente com a argumentação utilizada para chegar na expressão (2) da página 101 .

Finalmente, podemos dizer que:

Em todo movimento sujeito a uma força central, o raio vetor da partícula descreve áreas iguais em tempos iguais.