Lista 01 - Estimação por MQO

Exercício 01

(a) Temos que o sinal esperado para β_1 é negativo pois, dado que temos um número limitado de minutos na semana, se mantivermos todas as demais variáveis constantes, uma alocação de mais horas para o trabalho leva, consequentemente a uma alocação menor de horas para o sono.

(b) Com relação a β_3, espera-se que esse seja positivo pois pessoas de mais idade tentem a alocar mais tempo para o sono que os jovens.

Com relação a β_2, espera-se que esse seja negativo, dado que para se obter anos de estudo deve-se alocar tempo para essa atividade e, mantendo tudo mais constante, isso leva a um menor tempo para o sono.

(c) Dado que

$$\frac{\partial sleep}{\partial totwrk} = -0,148$$

Além disso, temos que $5h = 300min$, temos que

$$\Delta sleep = -0,148 * 300 = 44,3 \ min/semana$$

Exercício 02

(a) Não, pois dado que estamos lidando com quantidade de minutos por semana de um aluno e essas são todas as atividades que esse aluno pode realizar durante a semana, não é possível aumentar a quantidade de minutos alocados em cada uma dessas atividades mantendo as demais constantes (*ceteris paribus*). Para que se possa aumentar a quantidade de minutos alocadas é necessário diminuir em mesmo montante a quantidade de minutos alocadas em outra atividade.

(b) Esse modelo viola a hipótese de que a matriz X de regressores deve possuir posto coluna cheio pois temos que é possível encontrar uma relação linear entre as colunas.

Para o caso do modelo proposto pelo exercício, temos que essa relação linear é dada por:

$$\frac{sleep + study + work + leisure}{100\,080} = 1$$

Ou seja, a soma dessas variáveis dividida pela quantidade total de minutos existente na semana ($60 * 24 * 7 = 100\,080$) resulta na coluna de 1's da matriz X responsável pela estimação do intercepto do modelo.

(c) Uma das formas de se corriguir esse problema é omitindo uma atividade praticada por esse estudante.

Exercício 03

Dado o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1\, x_1 + \beta_2\, x_2 + \beta_3\, x_3 + u$$

Podemos reescreve-lo na forma matricial, sendo essa

$$Y = X\beta + u$$

Assim, temos que o estimador de mínimos quadrados ordinários é dado por:

$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y$ substituindo Y, temos

$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'[X\beta + u]$

$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u$

$\hat{b} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$ passado a esperança, temos

$E(\hat{b}|X) = E(\beta + (X'X)^{-1}X'u|X)$

$E(\hat{b}|X) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(u|X)$ e como $E(u|X) = 0$

$E(\hat{b}|X) = \beta$ ou seja, não viesado.

Assim, temos que

$\hat{\theta} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ passando a esperança condicional, temos

$E(\hat{\theta}|X) = E(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2|X)$

$E(\hat{\theta}|X) = E(\hat{\beta}_1|X) + E(\hat{\beta}_2|X)$

Como garantimos que o estimador de MQO é não viesado, podemos

$E(\hat{\theta}|X) = \beta_1 + \beta_2$

Ou seja, temos que o estimador $\hat{\theta}$ é não viesado para a soma dos betas.

Exercício 04

(a) Heterocedasticidade: o estimador de MQO continua não-viesado porém temos que as estatísticas t e F deixam de ser confiáeis. Matematicamente, isso pode ser visto por:

$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y$ como já demonstrado, temos que

$\hat{b} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$

Utilizando da hipótese de normalidade mais que os erros são heterocedásticos, temos que $u \sim N(0, \sigma^2\,\Omega)$. Assim, analisando os momentos de $\hat{b}$, temos

$E(\hat{b}) = \beta$ como já demonstrado e

$Var(\hat{b}) = Var[\beta + (X'X)^{-1}X'u]$

$Var(\hat{b}) = Var[(X'X)^{-1}X'u]$

$Var(\hat{b}) = (X'X)^{-1}X'\sigma^2\Omega X(X'X)^{-1}$

Assim, o estimador para a variância de $\hat{b}$ torna-se viesado, comprometendo a inferência estatística.

(b) Dado o modelo $y = \beta_0\,x_1 + \beta_2\,x_2 + \epsilon$, se estimarmos somente $y = \beta_0\,x_1 + \nu$, temos que $\nu = \beta_2\,x_2 + \epsilon$. Assim, passando a esperança nesse segundo erro, obtemos

$$E(\nu) = E(\beta_2\,x_2 + \epsilon) = E(\beta_2\,x_2) + 0 \neq 0$$

Ou seja, temos que a esperança dos erros é diferente de zero. Com isso, temos que

$$E(\hat{b}|X) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(\nu|X)$$

Assim, o estimados de MQO torna-se viesado.

(c) Como mostrado no Exercício 02, temos que a matriz X deixa de ser posto cheio na coluna e, consequentemente, também torna-se singular. Assim, temos que X torna-se não inversível, assim, temos que não é possível o cálculo da matriz $(X'X)^{-1}$, não se tornando possível o cálculo do estimador de MQO.

Exercício 05

Podemos representar o modelo de mqo em forma matricial. Pegando somente uma observação i, temos

$$y_i = \beta\,x_i + u_i$$

Onde a metriz $x_i{}' = [1 \;\; x_{1i}]$ e $\beta = [\beta_0 \;\; \beta_1]$. Assim, podemos mostrar que o estimador é não viesado, pois temos que

$E(\hat{\beta}|X) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})x_i}\right)$

$E(\hat{\beta}|X) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})(\beta\,x_i+u)}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})x_i}\right)$

$E(\hat{\beta}|X) = E\left(\frac{\beta\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})x_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})x_i}\right) + E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})x_i}\right)$

$E(\hat{\beta}|X) = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})x_i} E(u|X)$

Como temos que $E(u|X) = 0$, temos o resultado final que $E(\hat{\beta}) = \beta$.

Parte empírica

Prática 01

Todo o Script colocado aqui é partido do pré-suposto que o aluno já setou a pasta de Work Dirctory pelo comando *setwd*. A resolução e explicação desse script foi realizada em aula.

Leitura dos dados:

```
dados = read.table("SLEEP75.txt", header=T, sep=" t", dec =",")
attach(dados)
```

(a) `item.a = lm(sleep ∼ totwrk + educ + age)`

(b) `item.b.i = lm(sleep ∼ educ + age)`

```
v.hat = item.b.i$residuals
item.b.iii = lm(totwrk ∼ educ + age)
w.hat = item.b.iii$residuals
item.b.v = lm(v.hat ∼ w.hat)
```