

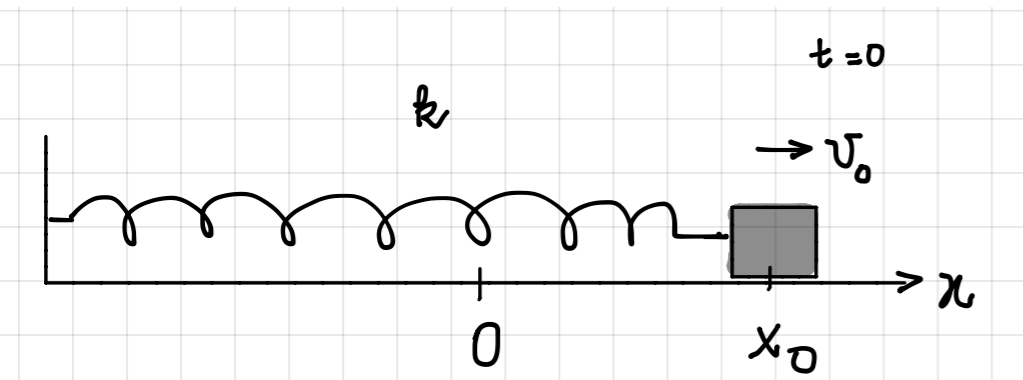
# Revisão para Prova P1

## Objetivos

- Reconhecer situações físicas que correspondam a movimentos de oscilação
- Reconhecer propriedades da equação diferencial que correspondam a um movimento de oscilação periódico e identificar as condições físicas presentes.
- Identificar soluções da equação diferencial compatíveis com a equação diferencial.
- Utilizar diferentes formas de representação das grandezas físicas (equações matemáticas ou gráficos) que caracterizam o movimento de oscilação.
- Determinar a evolução das grandezas físicas envolvidas no movimento (posição, velocidade, aceleração, energia), compatíveis com condições iniciais.
- Identificar as formas de energia presentes na oscilação, representar seu comportamento na forma de gráficos ou equações

# Movimento harmônico Simple

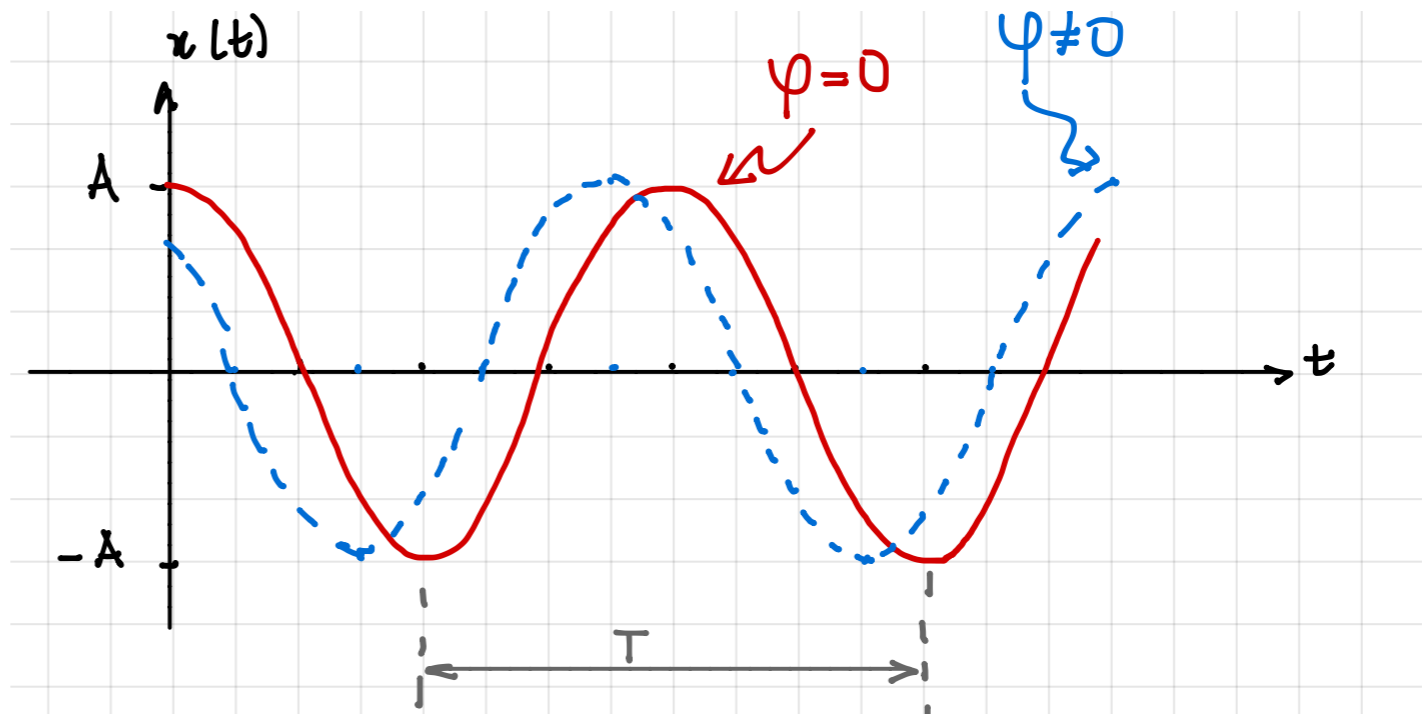
Exemplos: massa-mola, pêndulo simples, circuito LC



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

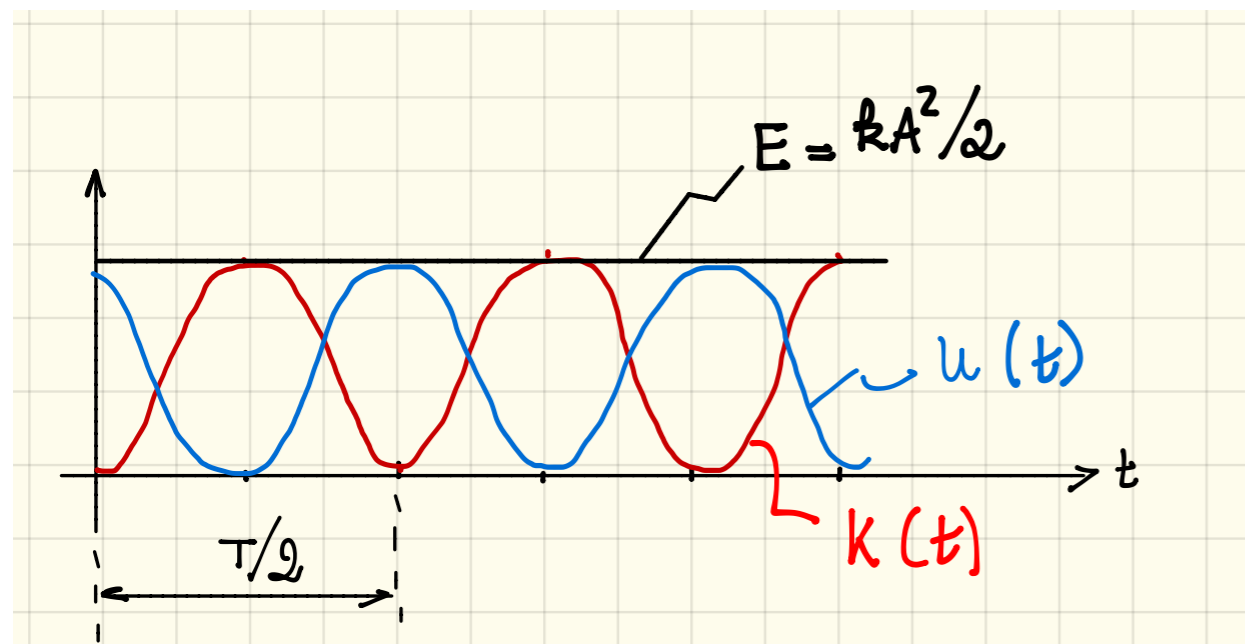
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$



# Energia mecânica

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= \frac{kx^2(t)}{2} \\ K(t) &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \end{aligned} \right\} E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2 = cte$$



# Oscilador Amortecido

Força dissipativa  $\rightarrow F_{diss} = -bv$

Força resultante = Força da mola + Força dissipativa



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \gamma = \frac{b}{m}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt}$$

3 situações possíveis

$$\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$$

Amortecimento sub-crítico ou fraco

$$\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$$

Amortecimento crítico

$$\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$$

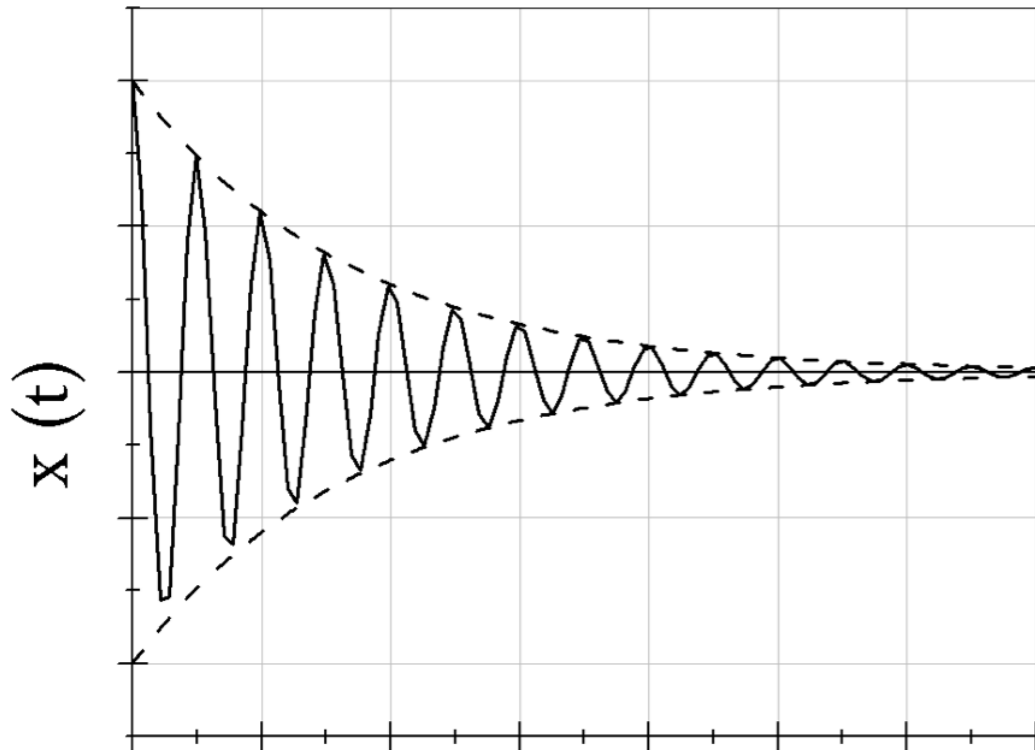
Amortecimento super-crítico

## Amortecimento Fraco ou sub-crítico $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$

Solução da equação diferencial:  $x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}}_{\mathcal{A}(t)} \cos(\omega t + \varphi) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$

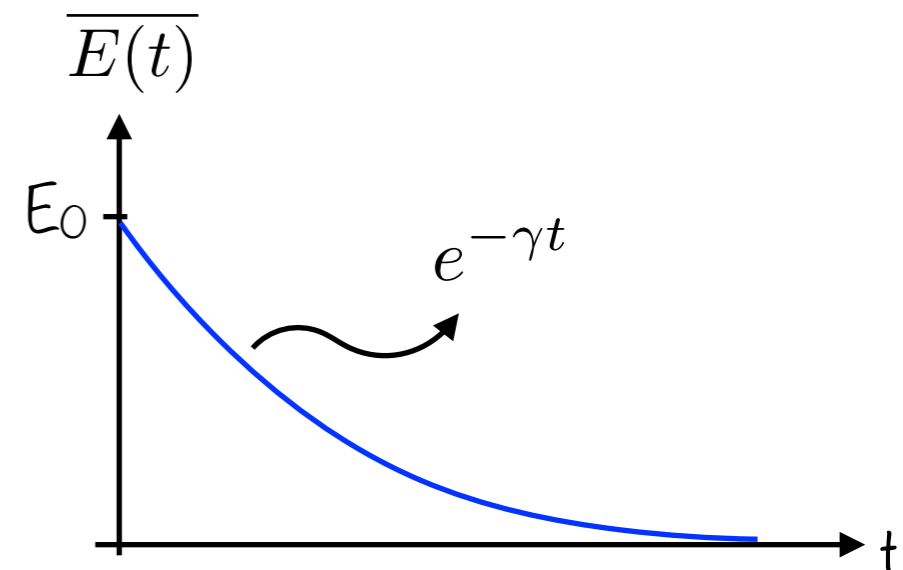
Movimento oscilatório

- ✓ com frequência angular  $\omega < \omega_0$
- ✓ Amplitude que decresce exponencialmente com o tempo



Energia média

$$\overline{E(t)} = \frac{kA^2}{2} e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\gamma t}$$



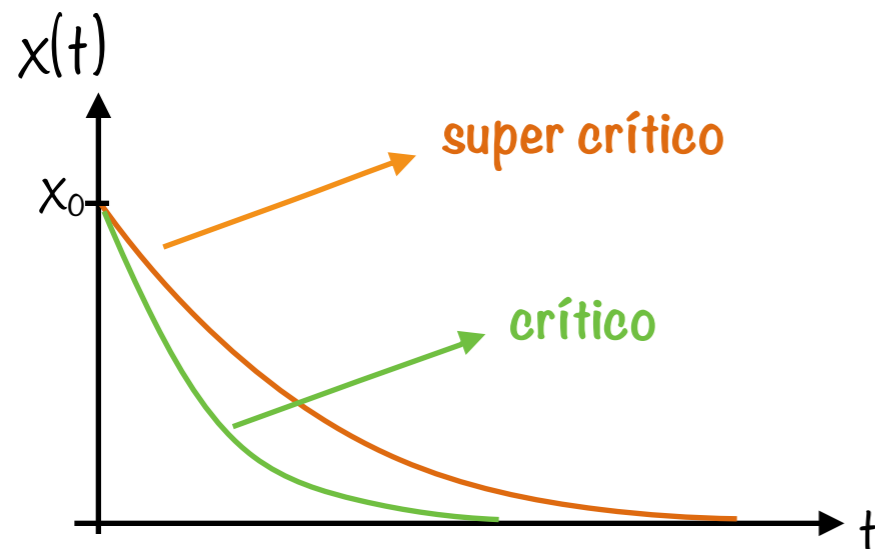
Amortecimento super crítico  $\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$

Solução da equação diferencial:  $x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t})$

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Amortecimento crítico  $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$

Solução da equação diferencial:  $x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (a + bt)$



Não há mais movimento oscilatório

# Oscilador Forçado Amortecido

Força dissipativa  $\rightarrow F_{diss} = -bv$

Força externa periódica  $\rightarrow F(t) = F_0 \cos \omega t$

Equação diferencial  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

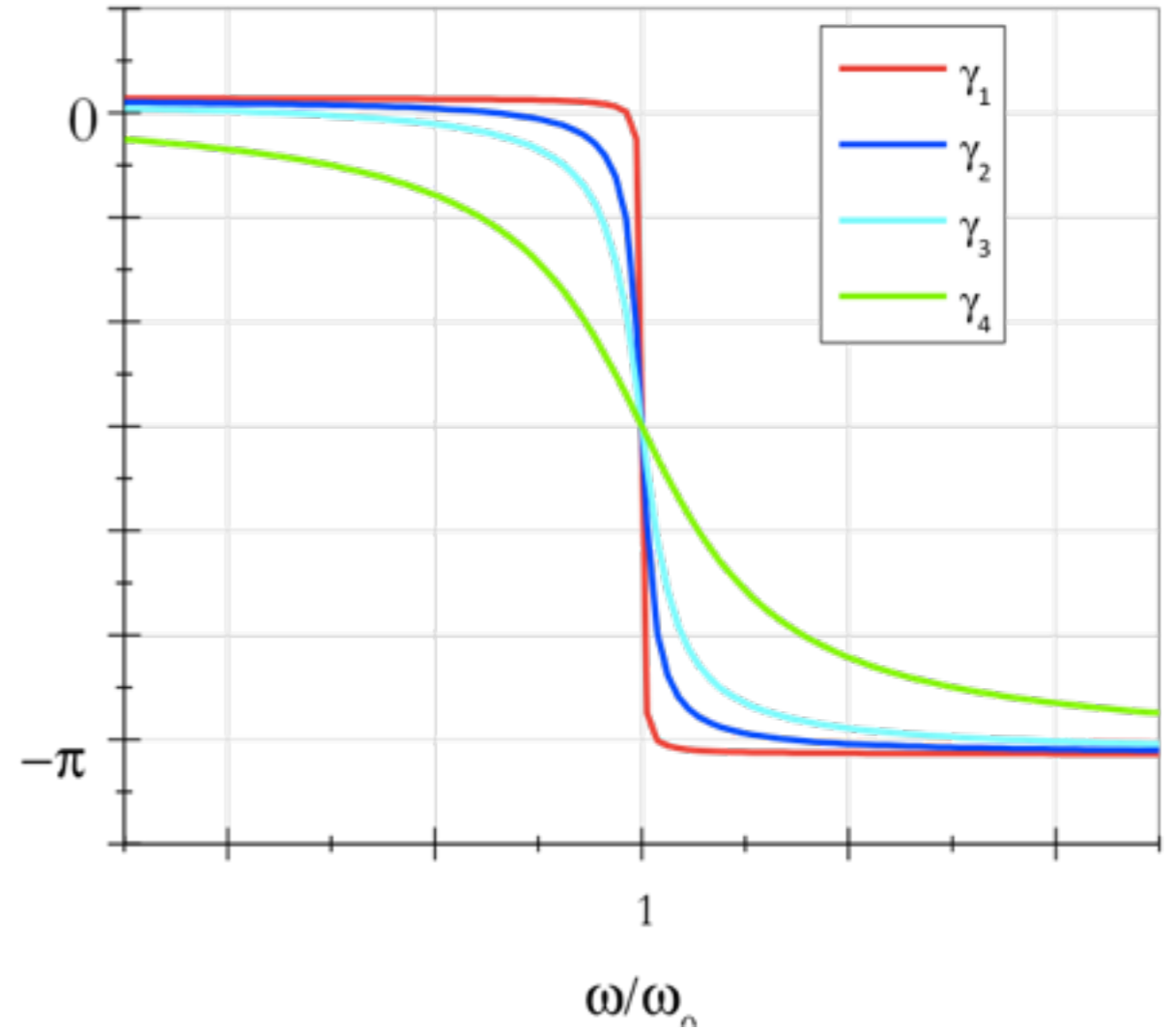
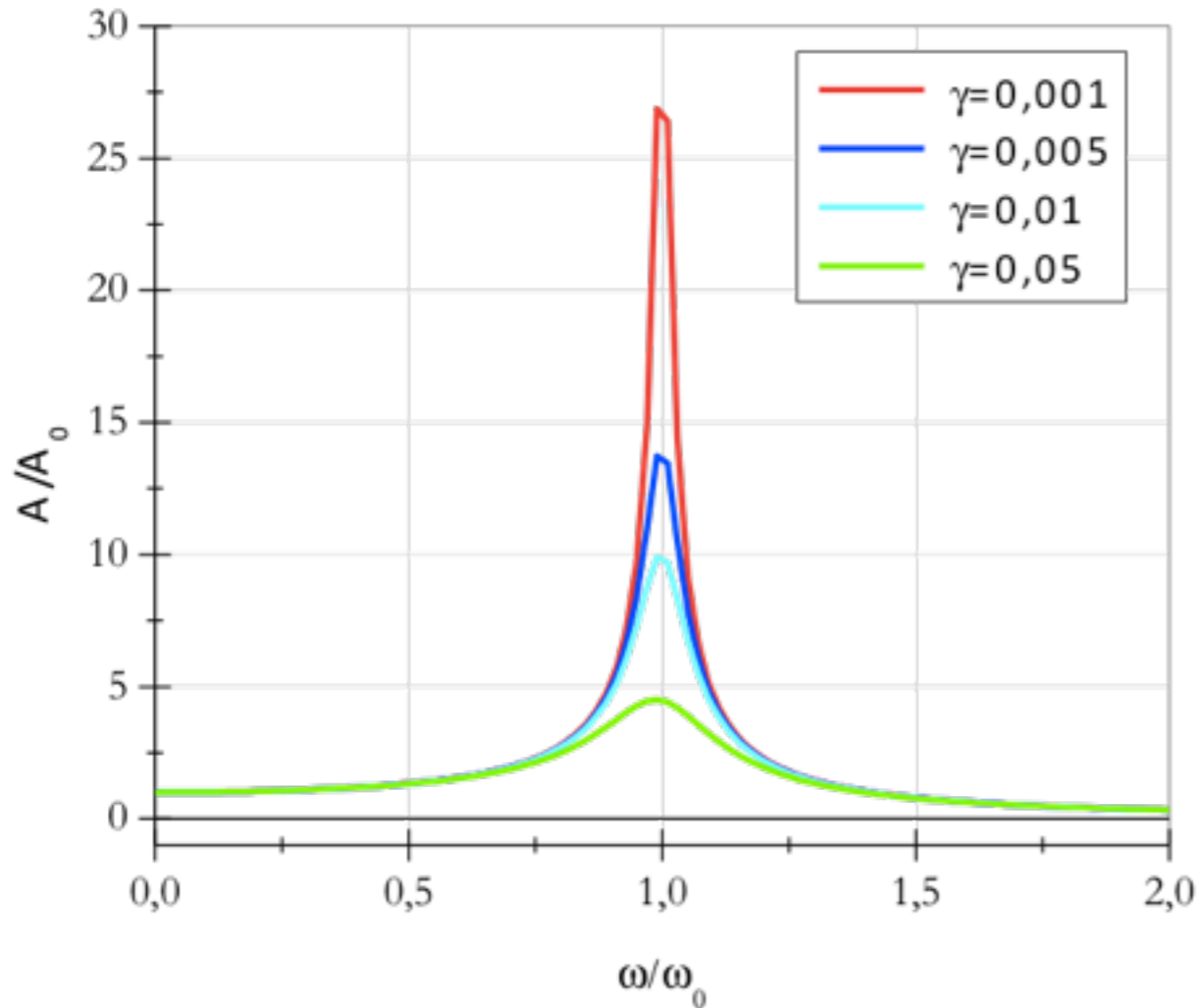
Solução estacionária da equação diferencial:  $x(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left[-\frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$



$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$$

$$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$A(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$



# Ressonância

Para amortecimento fraco:  $\omega_{ress} \approx \omega_0 \rightarrow F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$

$$x(t) = A(\omega_0) \cos\left[\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$$



$$x(t) = A(\omega_0) \text{sen}[\omega_0 t]$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A(\omega_0) \cos[\omega_0 t]$$

$$\overline{P}_{fornecida}(\omega) = \overline{F(t)v(t)} = \frac{\gamma m \omega^2 A^2(\omega)}{2}$$

- ✓ Amplitude atinge o valor máximo
- ✓ fase =  $-\pi/2$
- ✓ a força externa está em fase com a velocidade
- ✓ A potencia transferida pelo motor é máxima quando  $\omega \approx \omega_0$