

Ondas Estacionárias

Ondas progressivas



Ondas que se propagam

simulador de onda

Ondas Estacionárias



Ondas que não se propagam

# Ondas Estacionárias

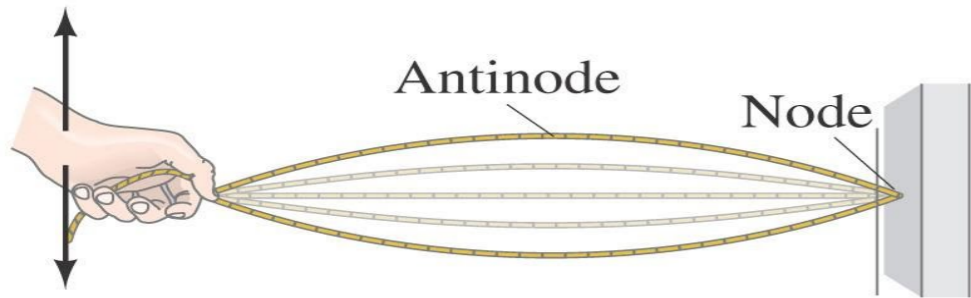
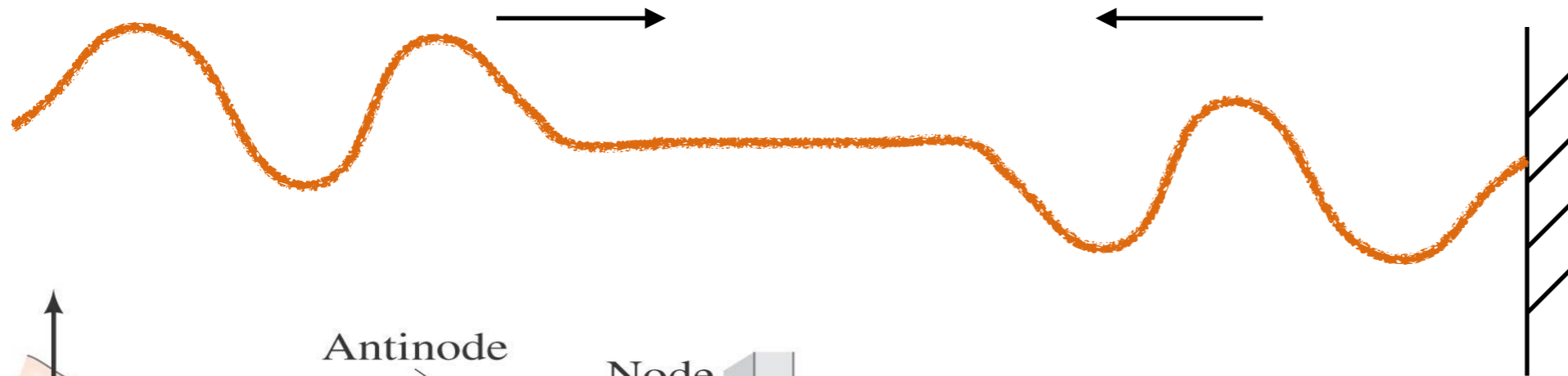
Ondas que não se propagam !

<https://www.youtube.com/watch?v=-gr7KmTOrx0>

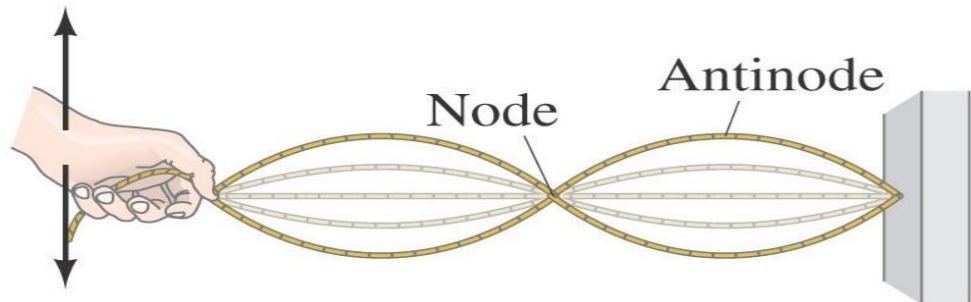
Só oscilam!

<https://www.youtube.com/watch?v=-n1d1rycvj4>

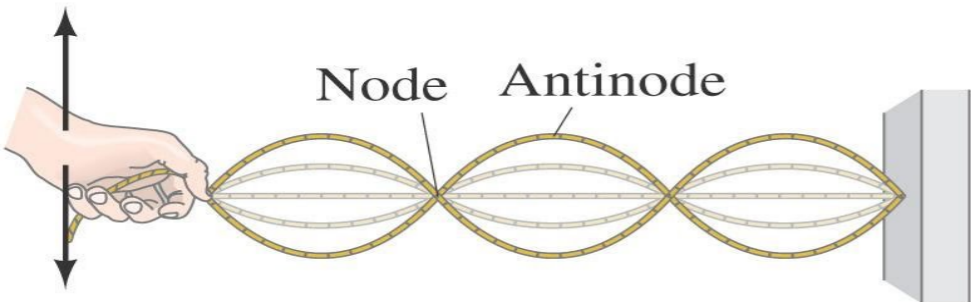
# Corda esticada com uma extremidade fixa



(a)



(b)



(c)

$$y(x, t) = A(x) \cos[\omega t + \varphi]$$



Parte temporal

Amplitude que depende de x

Onda estacionária



Deve satisfazer a equação diferencial da onda



$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi)$$



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} \cancel{\cos(\omega t + \varphi)} = -\frac{\omega^2}{v^2} A \cancel{\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A$$

lembrando que:  $kv = \omega$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -k^2 A$$



equação do oscilador harmônico

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -k^2 A$$



$$A(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

Solução geral da  
equação diferencial

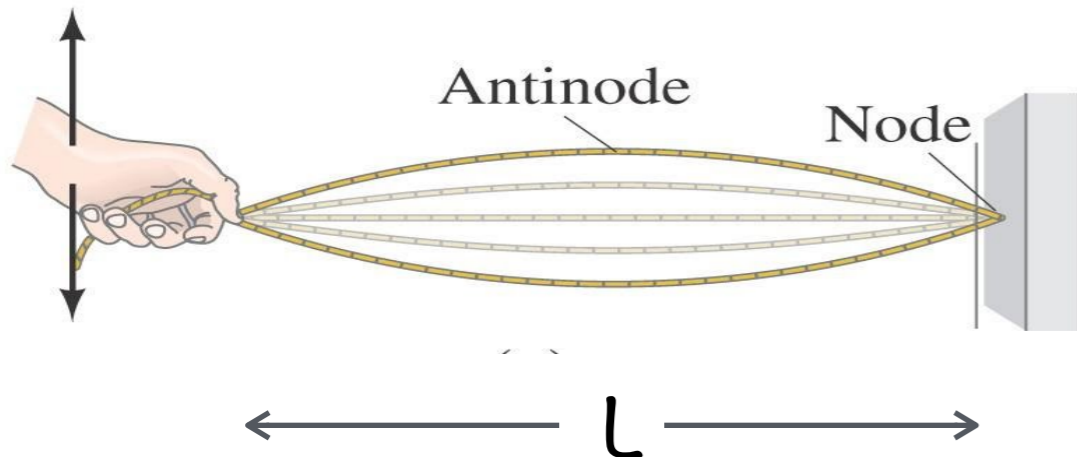
Constantes a e b



ajustáveis pelas  
condições de contorno

$$y(x=0)=0$$

$$y(x=L)=0$$



$$y(x=0)=0 \rightarrow a=0$$

$$y(x=L)=0 \rightarrow b \sin(kL)=0$$


$$b \sin(kL)=0 \rightarrow kL=0, \pi, 3\pi, 5\pi \dots$$

Nós nas  
extremidades

$$b \operatorname{sen} kL = 0 \rightarrow kL = 0, \pi, 3\pi, 5\pi \dots$$

$$k_n L = n\pi, n = 0, 1, 3, 5 \dots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \longrightarrow \omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad n = 0, 1, 3, 5 \dots$$

Solução para  $A(x)$    $A_n(x) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

**Solução Geral da equação diferencial da Onda**

$$y_n(x, t) = b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} vt + \varphi\right)$$

$$y_n(x, t) = b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt + \varphi\right)$$

Quando:  $A(x)=0 \rightarrow$  nós

$A(x)$  é máximo  $\rightarrow$  ventres

Cada valor de  $n \rightarrow$  Harmônico ou modo normal de vibração da corda, com frequência  $f_n$ , comprimento de onda  $\lambda_n$

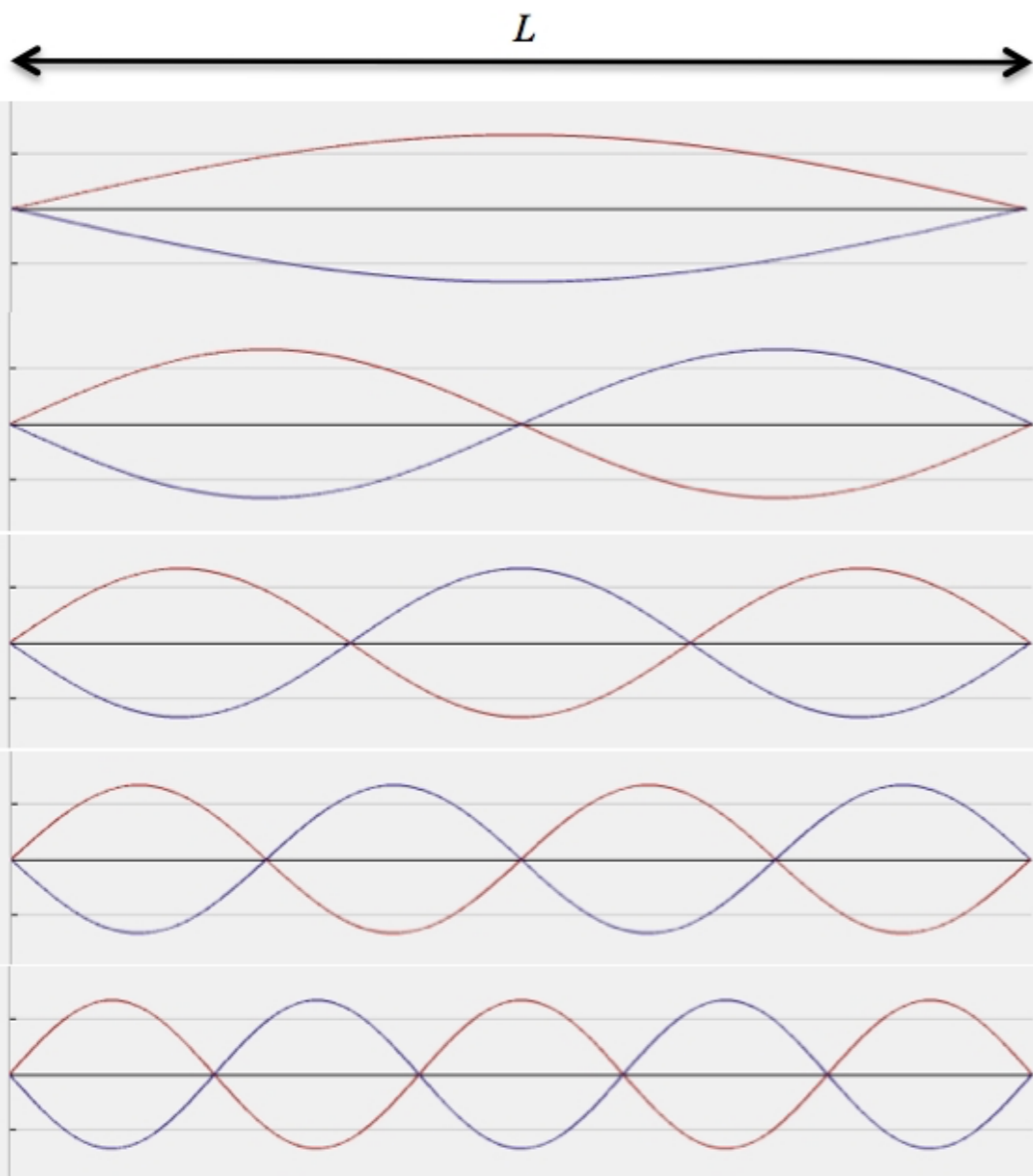
$$\omega_n = 2\pi f_n \begin{cases} f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n\pi v}{L} \frac{1}{2\pi} = \frac{nv}{2L} \\ \lambda_n = \frac{2Lv}{nv} = \frac{2L}{n} \end{cases}$$

$$n=1 \rightarrow 1^\circ \text{ Harmônico} \quad f_1 = \frac{v}{2L} \quad \lambda_1 = 2L$$

$$n=2 \rightarrow 2^\circ \text{ Harmônico} \quad f_2 = \frac{2v}{2L} \quad \lambda_2 = L$$

$$n=3 \rightarrow 3^\circ \text{ Harmônico} \quad f_3 = \frac{3v}{2L} \quad \lambda_3 = \frac{2L}{3}$$





Fundamental,  $n = 1$   
 $\lambda_1 = 2L$

2<sup>nd</sup> harmonic,  $n = 2$   
 $\lambda_2 = L$

3<sup>rd</sup> harmonic,  $n = 3$   
 $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

4<sup>th</sup> harmonic,  $n = 4$   
 $\lambda_4 = \frac{1}{2}L$

5<sup>th</sup> harmonic,  $n = 5$   
 $\lambda_5 = \frac{2}{5}L$

$n=1 \rightarrow 1^\circ$ . Harmônico

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

$$\lambda_1 = 2L$$

$f_1 = \text{fundamental}$

$n=2 \rightarrow 2^\circ$ . Harmônico

$$f_2 = \frac{2v}{2L}$$

$$\lambda_2 = L$$

$$f_2 = 2f_1$$

$n=3 \rightarrow 3^\circ$ . Harmônico

$$f_3 = \frac{3v}{2L}$$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3}$$

$$f_3 = 3f_1$$

# Instrumentos musicais de corda

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$
$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$f_n$  - depende de  $T$  e de  $\mu$   
 $L$  aumenta  $\rightarrow$   $f$  diminui



## Ondas Estacionárias em 2 Dimensões



linhas claras - correspondem a nós, onde a amplitude de vibração é igual a zero;  $A(x,y)=0$